

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Amar Telidji de Laghouat  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



## **Polycopié de Cours.**

Intitulé :

**Introduction à la Topologie.**

**Cours et exercices corrigés.**

Présenté par : **YAGOUB Ameur**

**Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA).**

Email : **a.yagoub@lagh-univ.dz.**

**Année Universitaire : 2022 - 2023.**

## Avant-propos.

Comme toute première version de tout ouvrage, nous invitons le lecteur, si vous découvrez des erreurs dans le texte, je vous remercie par avance de m'en faire part. Vous pouvez m'écrire à l'adresse a.yagoub@lagh-univ.dz.

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

*YAGOUB Ameer.*

# Table des matières

<b>Notations.</b>	<b>5</b>
<b>Introduction.</b>	<b>7</b>
<b>1 Espaces topologiques.</b>	<b>8</b>
1.1 Espaces topologiques. . . . .	8
1.2 Voisinages et Bases. . . . .	11
1.2.1 Voisinages. . . . .	11
1.2.2 Base d'une topologie. . . . .	13
1.2.3 Systèmes fondamentaux de voisinages. . . . .	15
1.3 Intérieur, adhérence d'une partie. . . . .	17
1.3.1 Intérieur. . . . .	17
1.3.2 Adhérence. . . . .	19
1.3.3 Frontière. . . . .	26
1.3.4 Extérieur. . . . .	28
1.4 Quelques constructions topologiques. . . . .	29
1.4.1 Comparaison de topologies. . . . .	29
1.4.2 Espaces séparés (Hausdorff). . . . .	30
1.4.3 Topologie induite. . . . .	32
1.4.4 Topologie produit. . . . .	37
1.5 Suites dans les espaces topologiques. . . . .	43
1.6 Applications continues. . . . .	49
1.6.1 Applications ouvertes et fermées. . . . .	55
1.6.2 Homéomorphismes. . . . .	57
1.7 Exercices avec solutions. . . . .	58

<b>2</b>	<b>Espaces métriques.</b>	<b>76</b>
2.1	Distance, Espace métrique. . . . .	76
2.2	Boules dans un espace métrique. . . . .	78
2.3	Distance entre deux parties et diamètre. . . . .	80
2.4	Topologie des espaces métriques. . . . .	81
2.5	Continuité uniforme. . . . .	86
2.6	Produits d'espaces métriques. . . . .	89
2.7	Exercices avec Solutions. . . . .	90
 <b>3</b>	 <b>Espaces complets.</b>	 <b>99</b>
3.1	Suites de Cauchy. . . . .	99
3.2	Espaces métriques complets. . . . .	101
3.3	Prolongement d'une application uniformément continue . . . . .	104
3.4	Théorème du point fixe. . . . .	105
3.5	Exercices avec Solutions. . . . .	106
 <b>4</b>	 <b>Espaces compacts.</b>	 <b>113</b>
4.1	Propriétés des espaces topologiques compacts. . . . .	118
4.2	Propriétés des espaces métriques compacts. . . . .	119
4.3	Espaces localement compacts. . . . .	123
4.4	Exercices avec Solutions. . . . .	125
 <b>5</b>	 <b>Espaces connexes.</b>	 <b>132</b>
5.1	Composantes connexes. . . . .	135
5.2	Espaces localement connexes. . . . .	137
5.3	Connexité par arcs. . . . .	138
5.4	Exercices avec Solutions. . . . .	139
 <b>6</b>	 <b>Espaces vectoriels normés.</b>	 <b>145</b>
6.1	Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. . . . .	145
6.2	Distance associée à une norme. . . . .	146
6.3	Normes équivalentes. . . . .	147
6.4	Exercices avec Solutions. . . . .	148
 <b>Bibliographie.</b>		 <b>153</b>

# Notations.

$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .
$\mathbb{X}$	un ensemble quelconque.
$\mathcal{P}(\mathbb{X})$	l'ensemble des parties de $\mathbb{X}$ .
$\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$	produit de la famille d'ensembles $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in I}$ .
$\prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$	produit fini de la famille d'ensembles $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ .
$\mathcal{T}$	topologie sur un ensemble $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{T}_A$	topologie induite par une partie $A \subset \mathbb{X}$ .
$\mathcal{T}_B^A$	topologie induite sur une partie $B$ par $\mathcal{T}_A$ .
$\mathcal{T}_{di}$	$= \mathcal{P}(\mathbb{X})$ topologie discrète sur $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{T}_g$	$= \{\emptyset, \mathbb{X}\}$ topologie grossière sur $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{T}_u$	topologie usuelle de $\mathbb{R}$ .
$\overline{\mathcal{T}_u}$	topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$ .
$\mathcal{T}_p$	topologie produit sur $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ .
$C_{\mathbb{X}}^F$	complémentaire de $F$ par rapport $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{F}$	l'ensemble des fermés de $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{F}_A$	l'ensemble des fermés de $\mathbb{X}$ pour la topologie induite de $A$ .
$\emptyset$	l'ensemble vide.
$\mathcal{V}(x)$	l'ensemble des voisinages du point $x$ .
$\mathcal{V}(x)_A$	l'ensemble des voisinages du point $x$ pour la topologie induite de $A$ .
$\mathcal{V}(A)$	l'ensemble des voisinages de l'ensemble $A$ .
$\mathcal{B}$	base de la topologie $\mathcal{T}$ .
$\mathcal{B}_A$	base de la topologie $\mathcal{T}$ pour la topologie induite de $A$ .
$\mathcal{B}(x)$	base de voisinages de $x$ (noté $SFV$ ).
$\mathcal{B}(x)_A$	base de voisinages de $x$ pour la topologie induite de $A$ .
$\overset{\circ}{A}$ ou $Int(A)$	l'ensemble d'intérieur de $A$ .
$\overset{\circ}{B}_A$	l'ensemble d'intérieur de $B$ pour la topologie induite de $A$ .
$\overline{A}$ ou $Adh(A)$	l'ensemble d'adhérence de $A$ .

$\overline{B}_A$	l'ensemble d'adhérence de $B$ pour la topologie induite de $A$ .
$A'$	l'ensemble des points d'accumulation de $A$ .
$(B_A)'$	l'ensemble des points d'accumulation de $B$ pour la topologie induite de $A$ .
$Is(A)$	l'ensemble des points isolés de $A$ .
$Fr(A)$ ou $\partial A$	l'ensemble des points frontières de $A$ .
$Fr(B)_A$	l'ensemble des points frontières de $B$ pour la topologie induite de $A$ .
$Ext(A)$	l'ensemble des points extérieurs de $A$ .
$d$	distance sur l'ensemble $\mathbb{X}$ .
$\mathcal{T}_d$	la topologie associée à la distance $d$ .
$d_A$	distance sur sous-ensemble $A \subset \mathbb{X}$ .
$d_1, d_2, \dots, d_\infty$	distances sur $\mathbb{K}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .
$D_1, D_2, \dots, D_\infty$	distances sur l'espace produit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n$ .
$\delta(x, y)$	distance discrète.
$dist(A, B)$	distance entre deux parties $A$ et $B$ .
$dist(a, A)$	distance entre partie $A$ et un point $a$ .
$diam(A)$ ou $\delta(A)$	diamètre d'une partie $A$ de $\mathbb{X}$ .
$B(a, r)$	boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ .
$\overline{B}(a, r)$	boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$ .
$S(a, r)$	sphère de centre $a$ et de rayon $r$ .
$C(a)$	composante connexe de l'ensemble $\mathbb{X}$ contenant $a$ .
$\ \cdot\ $	norme sur l'ensemble $\mathbb{X}$ .
$C[a, b]$	l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ .

# Introduction.

Ce polycopié est un ouvrage, principalement destiné aux étudiants de deuxième année LMD mathématiques, semestre 03. Le contenu de ce polycopié, correspond au programme officiel de la matière Introduction à la topologie enseigné en deuxième année. Le polycopié s'articule autour de six chapitres. A la fin de chaque chapitre on pourra trouver une série d'exercices. A la fin de ce manuscrit, nous avons donné quelques bibliographies qui sont basé essentiellement sur la topologie générale, et je conseille les chercheurs et les étudiants de lire le livre [15] de Nawfal El Hage Hassan, il est très complet et couvre bien plus que le contenu de ce cours. Nous espérons que ce polycopié réponde aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir.

Le programme du cours est le suivant.

1. Espaces topologiques.
2. Espaces métriques.
3. Espaces complets.
4. Espaces compacts.
5. Espaces connexes.
6. Espaces vectoriels normés.

## Les lettres grecques.

$\alpha$ alpha	$\iota$ iota	$\pi$ pi	$\varphi$ var phi
$\beta$ beta	$\varepsilon$ var epsilon	$\rho$ rho	$\chi$ chi
$\gamma$ gamma	$\vartheta$ var theta	$\varrho$ var rho	$\psi$ psi
$\delta$ delta	$\kappa$ kappa	$\sigma$ sigma	$\omega$ omega
$\epsilon$ epsilon	$\lambda$ lambda	$\varsigma$ var sigma	$\Gamma$ Gamma
$\zeta$ zeta	$\mu$ mu	$\tau$ tau	$\Delta$ Delta
$\eta$ eta	$\nu$ nu	$\upsilon$ upsilon	$\Theta$ Theta
$\theta$ theta	$\xi$ xi	$\varphi$ phi	$\nabla$ nabla

# Chapitre 1

## Espaces topologiques.

Dans ce chapitre, nous présentons toutes les notions de base de la topologie. Nous allons dégager les structures qui permettent de parler de limite et de continuité. L'exemple fondamental déjà étudié en premier cycle est le cas de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}^n$ . La théorie générale englobe bien sûr cet exemple, qu'il faut garder en tête, mais conduit parfois à des situations moins intuitives. Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble quelconque. On note  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$  l'ensemble des parties de  $\mathbb{X}$ .

### 1.1 Espaces topologiques.

On commence par une définition fondamentale.

**Définition 1.1 (Topologique).** *Une topologie sur un ensemble  $\mathbb{X}$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{T}$  de parties de  $\mathbb{X}$ , i.e.  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ , vérifiant les propriétés suivantes, appelées axiomes des ouverts.*

O1. *Les ensembles  $\emptyset$  et  $\mathbb{X}$  sont des éléments de  $\mathcal{T}$ .*

O2.  *$\forall U, V \in \mathcal{T}$ , alors  $U \cap V \in \mathcal{T}$ . (toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ ).*

O3. *Toute réunion d'éléments, (finie ou infinie), de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{O_i, i \in I\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a*

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}.$$

Dans l'axiome (O2) on peut remplacer "intersection de deux éléments" par "intersection finie", l'équivalence découlant par une récurrence immédiate utilisant l'égalité

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n.$$

**Définition 1.2 (Espace topologique).** Le couple  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est appelé espace topologique et les parties de  $\mathbb{X}$  qui appartiennent à  $\mathcal{T}$  sont dites parties ouvertes ou ouverts de  $\mathbb{X}$ . Les éléments de  $\mathbb{X}$  sont généralement appelés points.

Les propriétés (O1), (O2) et (O3) peuvent être reformulées de la manière suivante :

O1. La partie vide  $\emptyset$  et l'ensemble  $\mathbb{X}$  sont des ouverts.

O2. L'intersection de deux ouverts est un ouvert.

O3. La réunion de toute famille d'ouverts est un ouvert.

**Exemple 1.1.** Soit  $\mathbb{X} = \{a, b\}$ , alors les topologies définies sur  $\mathbb{X}$  sont :

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{X}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{a\}\}, \quad \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{b\}\}, \quad \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{a\}, \{b\}\}.$$

**Définition 1.3 (Partie fermée).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $F$  une partie de  $\mathbb{X}$ . On dit que la partie  $F$  est fermée si et seulement si le complément  $C_{\mathbb{X}}^F \in \mathcal{T}$ . On note par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fermés de  $\mathbb{X}$ .

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), C_{\mathbb{X}}^F \in \mathcal{T}\}.$$

**Exemple 1.2.** Considérons la topologie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}; \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

sur  $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$ . Les fermés de  $\mathbb{X}$  sont les ensembles

$$\mathbb{X}, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}.$$

La partie  $\{b\}$  est ni ouverte ni fermée.

**Exemple 1.3 (Topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ ).** Soit  $\mathcal{T}_u$  la famille des parties de  $\mathbb{R}$  pouvant s'écrire comme réunion (finie ou infinie) d'intervalles ouverts bornés de  $\mathbb{R}$ . Alors  $\mathcal{T}_u$  constitue une topologie sur  $\mathbb{R}$ . Notons que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ , les ensembles  $]-\infty, a[$ ,  $]a, b[$  et  $]b, +\infty[$  sont, par définition, des ouverts de  $\mathbb{R}$ , d'où  $]-\infty, a]$ ,  $[a, b]$  et  $[b, +\infty[$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$ . Notons aussi qu'un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}$  est un ouvert si pour tout  $x \in U$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset U$ . Comme

$$\mathbb{Z} = C_{\mathbb{R}}^{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k, k+1[}$$

est un fermé de  $\mathbb{R}$ . En revanche,  $\mathbb{Q}$  et  $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$  ne sont ni ouverts ni fermés dans  $\mathbb{R}$  (par construction de  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  contient un rationnel et un irrationnel et donc, ni  $\mathbb{Q}$ , ni  $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$  ne peut-être la réunion d'une famille d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ ).

**Exemple 1.4 (Topologie usuelle de  $\overline{\mathbb{R}}$ ).** On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Soit  $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$  l'ensemble formé par  $\emptyset$ ,  $\overline{\mathbb{R}}$  et toute réunion d'intervalles de la forme  $]a, b[$ , ou  $[-\infty, b[$ , ou  $]a, +\infty[$  (où  $a$  et  $b$  sont des réels). C'est la topologie usuelle de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Remarque 1.1.** Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. En-effet : dans  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle, les intervalles  $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  pour  $n \in \mathbb{N}$  sont des ouverts mais leur intersection,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$  n'est pas un ouvert. Tout ensemble admet donc au moins deux topologies.

**Définition 1.4 (Topologie discrète et topologie grossière).** Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble. Alors  $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(\mathbb{X})$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ , appelée topologie discrète. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit espace discret. Dans ce espace toute partie est à fois ouverte et fermée. A l'autre extrême,  $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ , appelée topologie grossière ou triviale.

**Remarque 1.2.** 1. Une partie d'un espace topologique peut-être à la fois ouverte et fermée (par exemple dans l'espace discret). De même une partie d'un espace topologique peut-être ni ouverte ni fermée (par exemple  $[2, 5[ \subset \mathbb{R}$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ ).

2. Tout ensemble admet donc au moins deux topologies  $(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_{di})$ .

**Proposition. 1.1.** L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fermés de  $\mathbb{X}$  vérifie les propriétés suivantes :

- F1)  $\mathbb{X}$  et  $\emptyset$  sont des fermés,
- F2) toute réunion finie de fermés est un fermé,
- F3) toute intersection de fermés est un fermé.

*Démonstration.* Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie. En effet :

- F1) On a vu que  $\mathbb{X}$  et  $\emptyset$  sont des ouverts et puisque  $C_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}} = \emptyset$  et  $C_{\mathbb{X}}^{\emptyset} = \mathbb{X}$  on conclut que  $\mathbb{X}$  et  $\emptyset$  sont des fermés.
- F2) Si  $\{F_i : i = 1, \dots, N\}$  une famille finie de parties fermées de  $\mathbb{X}$ . Alors, pour tout  $i = 1, \dots, N$  on a  $C_{\mathbb{X}}^{F_i}$  est ouvert, donc

$$C_{\mathbb{X}}^{\bigcup_{i=1}^{i=N} F_i} = \bigcap_{i=1}^{i=N} C_{\mathbb{X}}^{F_i}$$

est un ouvert (voir O2 page (1)) d'où  $\bigcup_{i=1}^{i=N} F_i$  est un fermé.

F3) Si  $\{F_i : i \in I\}$  une famille quelconque de parties fermées de  $\mathbb{X}$ . Alors, on a

$$C_{\mathbb{X}}^{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcup_{i \in I} C_{\mathbb{X}}^{F_i}$$

est un ouvert (voir O3 page (1)) d'où  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé.

□

**Remarque 1.3.** On peut définir une topologie à partir des ensembles fermés. De façon plus précise, si  $\mathbb{X}$  est un ensemble et si  $\mathcal{F}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$  vérifiant (F1), (F2) et (F3), alors

$$\mathcal{T} = \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), C_{\mathbb{X}}^O \in \mathcal{F}\},$$

est une topologie sur  $\mathbb{X}$  dont l'ensemble des fermés est  $\mathcal{F}$ .

**Proposition. 1.2.** Si  $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$  est une famille de topologie sur  $\mathbb{X}$ , alors

$$\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$$

est une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* On a  $\mathbb{X}, \emptyset \in \mathcal{T}_i$  pour tout  $i$  donc  $\mathbb{X}, \emptyset \in \mathcal{T}$ . Si  $\{O_j\}_{j \in J} \in \mathcal{T}$  est une famille d'éléments de  $\mathcal{T}$ , alors pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ , on a  $O_j \in \mathcal{T}_i$  et donc  $\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}_i$  pour tout  $i \in I$ . D'où  $\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}$ . De même,  $\mathcal{T}$  est stable par intersection finie. □

**Remarque 1.4.** Généralement  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  n'est pas une topologie sur  $\mathbb{X}$ . En-effet : Soit  $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$ , alors  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{X}\}$  et  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \mathbb{X}\}$  sont deux topologies. Mais  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \mathbb{X}\}$  n'est pas une topologie,  $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  mais  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ .

## 1.2 Voisinages et Bases.

### 1.2.1 Voisinages.

**Définition 1.5 (Voisinage).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et soit  $x \in \mathbb{X}$ . On appelle voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , toute partie de  $\mathbb{X}$  contenant un ouvert contenant  $x$ . On note  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$  :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), \exists O \in \mathcal{T}, x \in O \subset V\}.$$

Plus généralement, soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ , on appelle voisinage de  $A$  toute partie  $V$  de  $\mathbb{X}$  telle qu'il existe un ouvert  $O$  de  $\mathbb{X}$  vérifiant  $A \subset O \subset V$ . On note  $\mathcal{V}(A)$  l'ensemble des voisinages de  $A$  :

$$\mathcal{V}(A) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), \exists O \in \mathcal{T}, A \subset O \subset V\}.$$

On dit que  $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$  est un voisinage ouvert, si  $V$  est ouvert.

On dit que  $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x)$  est un voisinage fermé, si  $V$  est fermé.

**Exemple 1.5.** 1. Si  $\mathbb{R}$  est muni de la topologie usuelle  $\mathcal{T}_u$ , un sous-ensemble  $V$  de  $\mathbb{R}$  est un voisinage d'un point  $x \in \mathbb{R}$  si et seulement s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $]x - \epsilon, x + \epsilon[ \subset V$ . Par exemple,  $]x - 1, x + 1[$  est un voisinage de  $x$ .

2. Si  $\overline{\mathbb{R}}$  est muni de la topologie usuelle  $\mathcal{T}_{\overline{u}}$ , un sous-ensemble  $V$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  est un voisinage du point  $-\infty$  s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $[-\infty, \alpha[ \subset V$ . De même, un sous-ensemble  $W$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  est un voisinage du point  $+\infty$  s'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $]\beta, +\infty[ \subset W$ .

3. Pour la topologie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}; \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},$$

sur  $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$ . L'ensemble  $\{b, c, d\}$  est un voisinage de  $c$  et n'est pas voisinage de  $b$ .

**Proposition. 1.3.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $O$  de  $\mathbb{X}$  est un ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points, i.e :

$$O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x).$$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ). Si  $O \in \mathcal{T}$ , on a pour tout  $x \in O$ ,  $x \in O \subset O$  et donc  $O \in \mathcal{V}(x)$ .

$\Leftarrow$ ). Si  $O$  est un voisinage de chacun de ses points. Pour tout  $x \in O$  il existe un ouvert  $V$  tel que  $x \in V \subset O$  et on note

$$V_x = \bigcup_{x \in V \subset O} V.$$

On a alors

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} V_x \subset O,$$

et par conséquent  $O = \bigcup_{x \in O} V_x$  est un ouvert (réunion d'ouverts est un ouvert).

□

**Proposition. 1.4.** Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , les familles  $\mathcal{V}(x)$  de voisinages de  $x$  vérifient les propriétés suivantes :

1. Clairement :  $\mathbb{X} \in \mathcal{V}(x)$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ , et pour tout  $V \in \mathcal{V}(x)$ , on a  $x \in V$ .
3. Pour tout  $V \in \mathcal{V}(x)$ , et tout  $U \subset \mathbb{X}$ , si  $V \subset U$  alors  $U \in \mathcal{V}(x)$ .
4. Toute intersection finie de voisinages de  $x$  est un voisinage de  $x$ .
5. Pour tout  $V \in \mathcal{V}(x)$ , il existe  $W \in \mathcal{V}(x)$  tel que pour tout  $y \in W$ , on ait  $V \in \mathcal{V}(y)$ .

*Démonstration.* • Les trois propriétés 1., 2. et 3. sont évidentes.

- Pour la quatrième propriété, si  $\{V_i, i = 1, \dots, n\}$  une famille de voisinages de  $x \in \mathbb{X}$ . Alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$  il existe  $O_i \in \mathcal{T}$  tels que  $x \in O_i \subset V_i$  d'où on conclut que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \subset \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

On en déduit que  $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}(x)$  car  $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$ .

- Pour la cinquième propriété, si  $V \in \mathcal{V}(x)$ , alors il existe un ouvert  $U$  tel que  $x \in U \subset V$ , on pose  $W = U$ , alors  $W \in \mathcal{V}(x)$  et pour tout  $y \in W$ ,  $V \in \mathcal{V}(y)$ .

□

## 1.2.2 Base d'une topologie.

Les ouverts d'un espace topologique ne sont parfois pas facilement identifiables et il est souvent plus simple de décrire des ensembles particuliers qui vont générer la topologie par union quelconque. D'où la définition suivante.

**Définition 1.6 (Base d'ouvert).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $\mathbb{X}$  ou base de la topologie  $\mathcal{T}$  si tout ouvert non vide de  $\mathbb{X}$  est réunion d'ouverts appartenant à  $\mathcal{B}$ . Autrement dit,  $\mathcal{B}$  est une base pour  $\mathcal{T}$  si :

$$\forall O \in \mathcal{T}, \exists (U_i)_{i \in I}, \text{ avec } U_i \in \mathcal{B} (\forall i \in I) : O = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

**Exemple 1.6.** 1. Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est un espace topologique, alors  $\mathcal{T}$  est une base pour elle-même.

2. Soit l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ . Alors, on a :

$$\mathcal{B} = \{]x, y[ : x, y \in \mathbb{R}\},$$

est une base d'ouverts de la topologie usuelle. par exemple, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $]x, +\infty[ \in \mathcal{T}_u$  et

$$]x, +\infty[ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} ]x + m, x + m + 1[, \quad ]x + m, x + m + 1[ \in \mathcal{B}.$$

3. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a

$$\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in \mathbb{X}\},$$

est une base de la topologie discrète.

4. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{X}\},$$

est une base de la topologie grossière.

5. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

$$\mathcal{B} = \{\{x\}, \{y\}, \mathbb{X}\},$$

est une base pour cette topologie.

**Remarque 1.5.** 1. Tout espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  possède au moins une base d'ouverts, à savoir  $\mathcal{T}$  elle-même.

2. Si  $\mathcal{B}$  est une base d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  et  $\mathcal{B}'$  est une famille qui contient  $\mathcal{B}$ , alors en utilisant la définition précédente on conclut que  $\mathcal{B}'$  est une autre base de  $\mathcal{T}$ . Donc, un espace topologique peut avoir plusieurs bases.

**Proposition. 1.5.** Toute base  $\mathcal{B}$  d'une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $\mathbb{X}$  possède les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B$ .
2. Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  et  $x \in B_1 \cap B_2$ , alors il existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\mathcal{B}$  est une base de la topologie  $\mathcal{T}$ .

1. Puisque  $\mathbb{X}$  est un ouvert, alors

$$\mathbb{X} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$$

par définition, d'où pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B$ .

2. Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , alors  $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$  (car  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ) d'où  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ . Donc,

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

par définition. Alors, pour tout  $x \in B_1 \cap B_2$ , il existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

□

**Proposition. 1.6.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{B}$  une partie de  $\mathcal{T}$ . Alors,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$  si et seulement si pour tout  $O \in \mathcal{T}$  et pour tout  $x \in O$  il existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tel que :  $x \in B_x \subset O$ .

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \text{ est une base de } \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}, \forall x \in O, \exists B_x \in \mathcal{B}, x \in B_x \subset O.$$

*Démonstration.* • Montrons d'abord l'implication  $(\Rightarrow)$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts, alors tout ouvert  $O$  peut s'écrire sous la forme

$$O = \bigcup_{i \in I, B_i \in \mathcal{B}} B_i,$$

donc quelque soit  $x \in O$ , il existe  $i \in I$  tel que  $x \in B_i = B_x \subset O$ .

- Montrons maintenant la réciproque  $(\Leftarrow)$ . Soit  $O$  un ouvert. Alors pour tout  $x \in O$ , il existe un ouvert  $B_x \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B_x \subset O$ . On a alors,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} = \bigcup_{x \in O} B_x \subset O.$$

□

### 1.2.3 Systèmes fondamentaux de voisinages.

Comme pour les bases d'ouverts de  $\mathbb{X}$ , le rôle des systèmes fondamentaux de voisinages est de simplifier les démonstrations.

**Définition 1.7 (Base de voisinage).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $x \in \mathbb{X}$ . On appelle système fondamental de voisinages de  $x$  ou base de voisinages de  $x$  (noté SFV), toute famille  $\mathcal{B}(x)$  de voisinages de  $x$  telle que pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $W \in \mathcal{B}(x)$  tel que  $W \subset V$  :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{B}(x), W \subset V.$$

**Exemple 1.7.** 1. Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $x \in \mathbb{X}$ . Alors  $\mathcal{V}(x)$  est une base de voisinages de  $x$ .

2. Si  $\mathcal{B}(x)$  et  $\mathcal{B}'(x)$  sont des parties de  $\mathcal{V}(x)$  telles que  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$  et si  $\mathcal{B}(x)$  est une base de voisinages de  $x$ , alors  $\mathcal{B}'(x)$  est également une base de voisinages de  $x$ .

3. Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Alors, on a :

$$\mathcal{B}(x) = \{O \in \mathcal{T}, x \in O\},$$

est un SFV de  $x$ .

4. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\},$$

est un SFV de  $x$ .

5. Soit l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

$$\mathcal{B}(x) = \{]x - \epsilon, x + \epsilon[, \epsilon > 0\},$$

est un SFV de  $x$ . Par exemple  $\mathcal{B}(x) = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[, n \in \mathbb{N}^*\}$ , est un SFV de  $x$ .

6. Soit  $\overline{\mathbb{R}}$  muni de la topologie usuelle, alors :

$$\mathcal{B}(+\infty) = \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\},$$

est un SFV de  $+\infty$ . Par exemple  $\mathcal{B}(+\infty) = \{]n, +\infty], n \in \mathbb{N}\}$ , est un SFV de  $+\infty$ .

**Proposition. 1.7.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $\mathbb{X}$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , la famille  $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  est une base de voisinages de  $x$ .

*Démonstration.* • Montrons d'abord l'implication  $(1 \Rightarrow 2)$ . On suppose que  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $\mathbb{X}$ . Soit  $x \in \mathbb{X}$ , et  $V$  un voisinage de  $x$ . Alors  $V$  contient un ouvert  $B$  qui contient  $x$ . On peut alors écrire  $B$  comme l'union d'éléments de  $\mathcal{B}$ . Il existe une famille  $B_i, i \in I$ , d'éléments de  $\mathcal{B}$  telle que

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Mais alors, il existe  $i \in I$  tel que  $x \in B_i$ . Donc,

$$x \in B_i \subset B \subset V.$$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , la famille  $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  est une base de voisinages de  $x$ .

- Montrons maintenant l'implication  $(2 \Rightarrow 1)$ . Supposons que pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , la famille  $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  soit une base de voisinages de  $x$ . Soit  $B$  un ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors  $B$  est un voisinage de chacun de ses points, donc pour tout  $x \in B$ , il existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B_x \subset B$ . Alors,

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\} = \bigcup_{x \in B} B_x \subset B.$$

Ce qui prouve que  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $\mathbb{X}$ .

□

## 1.3 Intérieur, adhérence d'une partie.

### 1.3.1 Intérieur.

**Définition 1.8 (Intérieur d'une partie).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . On dit que  $x \in \mathbb{X}$  est un point intérieur de  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ , autrement dit,

$$x \text{ un point intérieur de } A \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x).$$

L'ensemble de tous les points intérieurs de  $A$  est appelé l'intérieur ou l'ouverture de  $A$  et on le dénote par  $\overset{\circ}{A}$  ou  $\text{Int}(A)$ .

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{X}, \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A\} = \{x \in \mathbb{X}, A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

**Remarque 1.6.** On a,  $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), x \in V \subset A \Rightarrow x \in A$ , alors  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .

**Proposition. 1.8.** L'intérieur d'une partie  $A$  de  $\mathbb{X}$  est le plus grand<sup>1</sup> ouvert contenu dans  $A$ ,

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert}, O \subset A} O.$$

*Démonstration.* Pour  $x \in \overset{\circ}{A}$ , alors  $A \in \mathcal{V}(x)$ , donc il existe  $O \in \mathcal{T}$ , tel que  $x \in O \subset A$ , alors

$$x \in \bigcup_{O \text{ ouvert}, O \subset A} O.$$

Réciproquement, soit  $x \in \bigcup_{O \text{ ouvert}, O \subset A} O$ , alors  $\exists O \subset A : x \in O$ , i.e  $x \in \overset{\circ}{A}$ . □

**Remarque 1.7.**  $\overset{\circ}{A}$  est une partie ouverte, car  $\overset{\circ}{A}$  est une union d'ouverts contenus dans  $A$ , donc un ouvert contenu dans  $A$ .

La proposition précédente nous permet d'écrire le résultat suivant :

**Proposition. 1.9.** Une partie  $A$  de  $\mathbb{X}$  est ouverte si et seulement si  $A = \overset{\circ}{A}$ .

$$A \subset \mathbb{X} \text{ est ouvert} \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}.$$

*Démonstration.* si  $A$  est ouvert il est dans l'union donc  $A = \overset{\circ}{A}$ , la réciproque est claire, car  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert. □

**Exemple 1.8.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

1. Le terme " plus grand " est utilisé au sens de l'inclusion.

- a.  $\overset{\circ}{\{x\}} = \{x\}$ .
- b.  $\overset{\circ}{\{y, z\}} = \{y\}$ .
- c.  $\overset{\circ}{\{z\}} = \emptyset$ .

2. Si  $A$  est une partie de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a les deux cas suivants :

- a.  $\mathbb{X} = A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \mathbb{X}$ .
- b.  $\mathbb{X} \neq A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$ .

3. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors  $\overset{\circ}{A} = A$  (car tout partie de  $\mathbb{X}$  est ouverte).

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

- a.  $\overset{\circ}{\{a\}} = \emptyset$ .
- b.  $\overset{\circ}{[a, b]} = ]a, b[ = \overset{\circ}{[a, b[} = \overset{\circ}{]a, b]}$ .
- c.  $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}} = \emptyset$ .

**Proposition. 1.10.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A, B$  deux parties de  $\mathbb{X}$ . Alors :

1.  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
2.  $A \subset B$  et  $A$  ouvert  $\Rightarrow A \subset \overset{\circ}{B}$ .
3.  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .
4.  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .
5.  $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . En général, l'inclusion est stricte.
6.  $A \in \mathcal{V}(B) \Leftrightarrow B \subset \overset{\circ}{A}$ .

*Démonstration.* 1. Supposons que  $A \subset B$ , et soit  $x \in \overset{\circ}{A}$ , alors  $A \in \mathcal{V}(x)$ , puisque  $A \subset B$ , on a aussi  $B \in \mathcal{V}(x)$ , donc  $x \in \overset{\circ}{B}$ .

2. Par 1.).

3. Puisque  $\overset{\circ}{A}$  est une partie ouverte, alors  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

4. Comme  $A \cap B \subset A$ , on a  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ , de même,  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$ , d'où  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Par ailleurs,  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  est un ouvert contenu dans  $A \cap B$  et donc  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$ .

5.  $A \subset A \cup B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ , de même,  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$  et par conséquent  $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .

Un exemple d'inclusion stricte : dans  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle, on prend  $A = ]0, 1[$ ,  $B = ]1, 2[$ . On a  $\overset{\circ}{A} = ]0, 1[$ , par le même raisonnement,  $\overset{\circ}{B} = ]1, 2[$ . Alors  $\overset{\circ}{A \cup B} = ]0, 2[$ , mais  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = ]0, 2[ \setminus \{1\}$ .

6.  $\Rightarrow A \in \mathcal{V}(B) \Rightarrow \forall x \in B, A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow B \subset \overset{\circ}{A}$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $B \subset \overset{\circ}{A}$ , on a  $B \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ , puisque  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert alors  $A \in \mathcal{V}(B)$ . □

### 1.3.2 Adhérence.

**Définition 1.9 (Adhérence d'une partie).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A \subset \mathbb{X}$  et  $x \in \mathbb{X}$ . On dit que  $x$  est un point adhérent à  $A$  si et seulement si tout  $V \in \mathcal{V}(x)$  contient au moins un point de  $A$ . Autrement dit :

$$x \text{ un point adhérent de } A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble de tous les points adhérents à  $A$  est appelé l'adhérence ou la fermeture de  $A$  et on le note par  $\overline{A}$  ou  $\text{Adh}(A)$ . i.e,

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{X}, \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Remarque 1.8.** Par définition, si  $x \in A$ , on a  $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A$  contient au moins le point  $x$ , donc  $A \subset \overline{A}$ .

**Exemple 1.9.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

a.  $\overline{\{x\}} = \{x, z\}$ .

b.  $\overline{\{y, z\}} = \{y, z\}$ .

c.  $\overline{\{z\}} = \{z\}$ .

2. Si  $A$  est une partie de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a les deux cas suivant :

a.  $\overline{A} = \mathbb{X}$ , si  $A \neq \emptyset$ .

b.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

3. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors  $\overline{A} = A$  (car tout partie de  $\mathbb{X}$  est fermée).

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

- a.  $\overline{\{a\}} = \{a\}$ .  
 b.  $\overline{[a, b]} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b[} = [a, b]$ .  
 c.  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ ,  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ ,  $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$ .

**Proposition. 1.11.**  $\overline{A}$  est le plus petit<sup>2</sup> fermé qui contient  $A$ , i.e

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F.$$

Où  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble de tous les fermés de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . Il s'agit de montrer que l'on a :  $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F$ . Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , on a :

$$\begin{aligned} x \notin \overline{A} &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{T}, x \in O, O \cap A = \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{T}, x \in O, A \subset C_{\mathbb{X}}^O, \\ &\Leftrightarrow \exists F = C_{\mathbb{X}}^O \in \mathcal{F}, x \notin F, A \subset F, \\ &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F. \end{aligned}$$

D'où l'équivalence :  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F \supset A} F$ . Donc,  $\overline{A}$  est le plus petit fermé qui contient  $A$ . □

La proposition précédente nous permet d'écrire le résultat suivant :

**Proposition. 1.12.**  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X} \Leftrightarrow A = \overline{A}$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .

- $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  est fermée. Alors, le plus petit fermé de  $\mathbb{X}$  contenant  $A$  est, de toute évidence,  $A$  lui même, c'est-à-dire qu'on a  $A = \overline{A}$ ,  
 $\Leftarrow$ ) Supposons qu'on a  $A = \overline{A}$ . Comme  $\overline{A}$  est le plus petit fermé de  $\mathbb{X}$  contenant  $A$ , alors  $\overline{A}$  est fermé alors  $A (= \overline{A})$  est fermé. □

La proposition suivante nous donne quelques propriétés de l'adhérence d'une partie d'un espace topologique.

---

2. Le terme " plus petit " est utilisé au sens de l'inclusion.

**Proposition. 1.13.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A, B$  deux parties de  $\mathbb{X}$ . Alors :

1.  $A \subset B$  et  $B$  fermé  $\Rightarrow \overline{A} \subset B$ .
2.  $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ .
3.  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .
4.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
5.  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . En général, l'inclusion est stricte.

*Démonstration.* 1. Soit  $B$  un fermé de  $\mathbb{X}$  tel que  $A \subset B$ . Pour montrer que  $\overline{A} \subset B$ , il suffit de montrer que l'on a  $C_{\mathbb{X}}^B \subset C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}$ . Soit  $x \in C_{\mathbb{X}}^B$ . Puisque  $C_{\mathbb{X}}^B$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors  $C_{\mathbb{X}}^B$  est un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ . Or on a  $(C_{\mathbb{X}}^B) \cap A = \emptyset$ , d'où  $x \notin \overline{A}$ . Donc on a  $x \in C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}$ . Par conséquent, on a  $C_{\mathbb{X}}^B \subset C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}$ .

2. Soit  $x \in \overline{A}$ , alors pour tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , on a  $V \cap A \neq \emptyset$ . Or on a  $V \cap A \subset V \cap B$ , donc  $V \cap B \neq \emptyset$ , et par conséquent  $x \in \overline{B}$ , d'où  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .

3. Puisque  $\overline{A}$  est une partie fermée, alors  $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ .

4. Comme  $A \subset A \cup B$ , on a  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ , de même,  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ , d'où  $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ . De plus,  $A \subset \overline{A}, B \subset \overline{B}$ , donc  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ .

5.  $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ , de même,  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$  et par conséquent  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

Un exemple d'inclusion stricte : dans  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle, on prend  $A = [0, 1[, B = ]1, 2]$ . On a  $\overline{A} = [0, 1]$ , par le même raisonnement,  $\overline{B} = [1, 2]$ . Alors  $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ , mais  $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ .

□

**Proposition. 1.14.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . Alors :

1.  $\overset{\circ}{C}_{\mathbb{X}}^A = C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}$ .
2.  $\overline{C}_{\mathbb{X}}^A = \overset{\circ}{C}_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 x \in \overset{\circ}{C}_{\mathbb{X}}^A &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset C_{\mathbb{X}}^A, \\
 &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset, \\
 &\Leftrightarrow x \notin \overline{A}, \\
 &\Leftrightarrow x \in C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}
 \end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède, on a

$$C_{\mathbb{X}}^{\overline{C_{\mathbb{X}}^A}} = \overbrace{C_{\mathbb{X}}^A}^{\circ} = \overset{\circ}{A},$$

$$\text{d'où } \overline{C_{\mathbb{X}}^A} = C_{\mathbb{X}}^{\overset{\circ}{A}}.$$

□

Nous définissons maintenant les notions du point d'accumulation et du point isolé qui sont également importantes et riches en application.

### Points d'accumulations.

**Définition 1.10 (Point d'accumulation).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A \subset \mathbb{X}$  et  $x \in \mathbb{X}$ . On dit que  $x$  est un point d'accumulation de  $A$  si tout voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  contient un point de  $A$  distinct de  $x$  lui-même ( $x$  n'est pas forcément dans  $A$ ).

$$x \text{ un point d'accumulation de } A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points d'accumulation de  $A$  s'appelle ensemble dérivée de  $A$  et se note  $A'$ . i.e,

$$A' = \{x \in \mathbb{X}, \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap ((A \setminus \{x\})) \neq \emptyset\}.$$

**Proposition. 1.15.** Tout point d'accumulation est un point adhérent (i.e  $A' \subset \overline{A}$ ), plus de ça on a :

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

*Démonstration.* 1) si  $x \in A'$ , alors  $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$ .

2) Soit  $x \in \overline{A}$ . Si  $x \notin A$ , alors  $A \setminus \{x\} = A$ . Donc :  $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ , i.e  $x \in A'$ , alors  $\overline{A} - A \subset A' \Rightarrow \overline{A} \subset A' \cup A$ .

Réciproquement, soit  $x \in A \cup A'$ , si  $x \in A$ , alors  $x \in \overline{A}$ . Supposons que  $x \in A'$ , alors  $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ . Mais  $A \setminus \{x\} \subset A$ . Donc :  $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$ , i.e  $x \in \overline{A}$ .

□

**Proposition. 1.16.** Une partie  $A$  est fermée si et seulement si  $A \supset A'$ .

*Démonstration.* Si  $A$  est fermée, alors  $A = \overline{A}$  or  $\overline{A} \supset A'$  donc  $A \supset A'$ .

Si  $A \supset A'$ . on a aussi  $A \supset A' \supset \overline{A} - A$ . Or si  $x \in \overline{A} - A$ , alors  $x \in A$  si et seulement si  $\overline{A} \subset A$  c'est-à-dire  $A = \overline{A}$ , donc  $A$  est fermé.

□

- Exemple 1.10.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a
- Si  $A = \{x\}$ , alors  $z$  est un point d'accumulation de  $A$ .
  - Si  $A = \{y, z\}$ , alors  $z$  est un point d'accumulation de  $A$ .
2. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$ , si  $A \neq \emptyset$  est une partie de  $\mathbb{X}$  on a les deux cas suivant :
- $A' = C_{\mathbb{X}}^{\{x\}}$ , si  $A = \{x\}$ .
  - $A' = \mathbb{X}$ , si  $A$  contient 2 points ou plus.
3. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , donc  $A' = \emptyset$ . (car  $\forall x \in \mathbb{X}, \exists V = \{x\}$ , ouvert tel que  $V \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ ).
4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :
- Si  $A = ]a, b]$ , alors  $a$  est un point d'accumulation de  $A$ .
  - Si  $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ , alors le point 0 n'appartient pas à  $A$  mais il est point d'accumulation de  $A$ .
  - $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \emptyset$ ,  $\mathbb{Q}' = (C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}})' = \mathbb{R}$ .

## Points isolés.

**Définition 1.11 (Point isolé).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A \subset \mathbb{X}$ . On dit qu'un point  $x \in A$  est un point isolé dans  $A$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $V \cap A = \{x\}$ .

$$x \text{ un point isolé de } A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \{x\}.$$

On note  $Is(A)$  l'ensemble des points isolés de  $A$ . i.e,

$$Is(A) = \{x \in A, \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \{x\}\}.$$

- Remarque 1.9.** 1. Un point  $x \in A$  qui n'est pas un point d'accumulation de  $A$  est un point isolé de  $A$ .
2. Tout point adhérent à  $A$  est soit un point d'accumulation de  $A$ , soit un point isolé de  $A$  (d'après les définitions). On a donc

$$\overline{A} = A' \cup Is(A) \text{ et } A' \cap Is(A) = \emptyset.$$

**Proposition. 1.17.** Un point  $x$  de  $\mathbb{X}$  est un point isolé dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si le singleton  $\{x\}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Supposons que le singleton  $\{x\}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors  $\exists V = \{x\} \in \mathcal{V}(x), \{x\} \cap \mathbb{X} = \{x\}$ , donc  $x$  est un point isolé dans  $\mathbb{X}$ .

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $x$  est un point isolé dans  $\mathbb{X}$ , alors  $\exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap \mathbb{X} = \{x\}$ , donc  $\exists O$  ouvert de  $\mathbb{X}$ , tel que  $x \in O, O \cap \mathbb{X} = \{x\}$ , puisque  $O \subset \mathbb{X} \wedge O \cap \mathbb{X} = \{x\}$ , alors  $O = \{x\}$ , d'où  $\{x\}$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .  $\square$

**Exemple 1.11.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

a. Si  $A = \{x\}$ , Le point  $x$  est un point isolé de  $A$ .

b. Si  $A = \{y, z\}$ , Le point  $y$  est un point isolé de  $A$ .

2. Si  $A$  est une partie de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a  $Is(A) \neq \emptyset$ .

3. Tout point d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  est isolé. (car le singleton  $\{x\}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ ).

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

a. Si  $A = \{0\} \cup [1, 2]$ , alors  $0$  est un point isolé de  $A$ .

b. Si  $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ , alors Le point  $1$  est un point isolé de  $A$ , mais n'est pas point d'accumulation, et tout point  $\frac{1}{n+1}$  de  $A$  est un point isolé de  $A$  (car  $A \cap ]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}[ = \{\frac{1}{n+1}\}$ ).

c. Dans  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $0$  n'est pas isolé.

d. tous les points de  $\mathbb{N}$  sont isolés, i.e  $Is(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ ,

$Is(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, Is(\mathbb{Q}) = Is(C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}) = \emptyset$ .

## Densité.

**Définition 1.12 (Ensemble dénombrable).** On dit qu'un ensemble  $\mathbb{X}$  est dénombrable s'il existe une bijection de  $\mathbb{X}$  sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . On dit que  $\mathbb{N}$  est au plus dénombrable s'il existe une bijection de  $\mathbb{X}$  sur une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Exemple 1.12.** 1. Les ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{Z}$  sont dénombrables.

2. Une partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

3. Une partie infinie de ensemble dénombrable est dénombrable.

4. Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

5. L'ensemble  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  est dénombrable, donc  $\mathbb{Q}$  est aussi dénombrable.

6. Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

7. L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est un ensemble infini non dénombrable.

**Définition 1.13.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  Un espace topologique.

1.  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est à base dénombrable de voisinages si tout point admet une base dénombrable de voisinages.
2.  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est à base dénombrable si  $\mathcal{T}$  admet une base dénombrable.

**Définition 1.14 (Partie dense).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{X}$ .

1. On dit que  $A$  est dense dans  $B$  si et seulement si tout point de  $B$  est un point adhérent de  $A$ , autrement dit :

$$A \text{ est dense dans } B \Leftrightarrow B \subset \overline{A}.$$

2. On dit que  $A$  est partout dense (ou dense dans  $\mathbb{X}$ ) si  $\overline{A} = \mathbb{X}$ .
2. On dit que  $\mathbb{X}$  est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense dans  $\mathbb{X}$ .

**Remarque 1.10.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace topologique et  $A \subset \mathbb{X}$ . On déduit de la proposition 1.14 que l'on a :

$$A \text{ est dense dans } \mathbb{X} \Leftrightarrow C_{\mathbb{X}}^{\circ A} = \emptyset.$$

**Exemple 1.13.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z, t\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . On pose  $A = \{t\}$  et  $B = \{x, z\}$ , on a  $B$  est dense dans  $A$  car  $A \subset \overline{B} = \mathbb{X}$  mais  $A$  n'est pas dense dans  $B$  car  $B \not\subset \overline{A} = \{z, t\}$ .

2. Dans  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$ , toute partie de  $\mathbb{X}$  est dense dans  $\mathbb{X}$ .
3. Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$ , soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{X}$  telles que  $B \subset A$ , alors  $A$  est dense dans  $B$ . De plus, il n'existe aucune partie  $A \neq \mathbb{X}$  dense dans  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{X}$  est la seule partie partout dense.
4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :
  - a. Soient  $A = [a, b[$  et  $B = ]a, b[$ . Il est clair que  $A$  est dense dans  $B$  car  $B \subset \overline{A} = [a, b]$ .
  - c. On a  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , alors  $\mathbb{Q}$  est partout dense dans  $\mathbb{R}$ , de plus, comme  $\mathbb{Q}$  est dénombrable, alors  $\mathbb{R}$  est séparable.

**Proposition. 1.18.**  $A$  est dense dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si tout ouvert non vide de  $\mathbb{X}$  contient au moins un point de  $A$ .

$$\overline{A} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}, O \cap A \neq \emptyset.$$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  est une partie dense dans  $\mathbb{X}$  et  $O$  un ouvert non vide de  $\mathbb{X}$ . Puisque  $\overline{A} = \mathbb{X}$ , il vient que  $O \subset \overline{A}$  d'où  $A \cap O \neq \emptyset$ , car  $O$  est un voisinage de chacun de ses points.

$\Leftarrow$ ) Supposons que pour tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{X}$  on a  $A \cap O \neq \emptyset$ . Alors, pour tout voisinage  $V$  d'un point  $x \in \mathbb{X}$  on aura  $A \cap V \neq \emptyset$ , car  $V$  contient un ouvert non vide. Donc,  $x \in \overline{A}$ , d'où  $\overline{A} = \mathbb{X}$ .  $\square$

**Proposition. 1.19.** *Tout espace à base dénombrable est à bases dénombrables de voisinages.*

*Démonstration.* Soient  $x \in \mathbb{X}$  et  $\mathcal{B}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$ . Alors  $\mathcal{B}_x = \{O \in \mathcal{B}, x \in O\}$  est une base dénombrable de voisinages de  $x$ .  $\square$

**Proposition. 1.20.** *Tout espace à base dénombrable est séparable.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = \{O_i, i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de  $\mathcal{T}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $O_i$  soit non vide, fixons un point  $x_i \in O_i$ . L'ensemble  $D = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  est visiblement dénombrable. Il est aussi dense. En effet, soient  $U$  un ouvert non vide et  $x \in U$ . Il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in O_i \subset U$ . Alors  $x_i$  est dans  $U$ , et  $D$  rencontre  $U$ , donc d'après proposition 1.18,  $\overline{D} = \mathbb{X}$ .  $\square$

### 1.3.3 Frontière.

**Définition 1.15 (Frontière d'une partie).** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A \subset \mathbb{X}$  et  $x \in \mathbb{X}$ . On dit que  $x$  est un point frontière de  $A$  s'il est adhérent à la fois à  $A$  et à  $C_{\mathbb{X}}^A$ . Autrement dit :*

$$x \text{ un point frontière de } A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^A}.$$

*L'ensemble de tous les points frontières à  $A$  est appelé frontière de  $A$  et on le note par  $Fr(A)$  ou  $\partial A$ .*

$$Fr(A) = \{x \in \mathbb{X}, \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap C_{\mathbb{X}}^A \neq \emptyset\}.$$

Il existe une autre formule pour définir la frontière d'une partie d'un espace topologique, elle est donnée par la proposition suivante :

**Proposition. 1.21.** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique, et  $A \subset \mathbb{X}$ , on a*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^A} = \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^{\overset{\circ}{A}} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition (1.14). □

**Remarque 1.11.** Par définition,  $Fr(A)$  est une partie fermée.

**Exemple 1.14.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

$$a. Fr(\{x\}) = \overline{\{x\}} \cap C_{\mathbb{X}}^{\{x\}} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y, z\}} = \{x, z\} \cap \{y, z\} = \{z\}.$$

$$b. Fr(\{y, z\}) = \overline{\{y, z\}} \cap C_{\mathbb{X}}^{\{y, z\}} = \overline{\{y, z\}} \cap \overline{\{x\}} = \{y, z\} \cap \{x, z\} = \{z\}.$$

$$c. Fr(\{z\}) = \overline{\{z\}} \cap C_{\mathbb{X}}^{\{z\}} = \overline{\{z\}} \cap \overline{\{x, y\}} = \{z\} \cap \{x, y, z\} = \{z\}.$$

2. Si  $A$  est une partie de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a les deux cas suivants :

$$a. Fr(A) = \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^A = \mathbb{X} \cap \mathbb{X} = \mathbb{X}, \text{ si } A \neq \emptyset.$$

$$b. Fr(\emptyset) = \overline{\emptyset} \cap C_{\mathbb{X}}^{\emptyset} = \emptyset \cap \mathbb{X} = \emptyset.$$

3. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors

$$Fr(A) = \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^A = A \cap C_{\mathbb{X}}^A = \emptyset,$$

(car toutes les parties de  $\mathbb{X}$  sont fermées et ouvertes sur  $\mathcal{T}_{di}$ ).

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

$$a. Fr([a, b]) = \overline{[a, b]} \cap C_{\mathbb{R}}^{[a, b]} = \overline{[a, b]} \cap \overline{]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[} = [a, b] \cap (]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[) = \{a, b\}.$$

$$b. Fr(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} \cap C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N},$$

$$Fr(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}} \cap C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z},$$

$$Fr(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Maintenant, voici quelques propriétés de la frontière.

**Proposition. 1.22.** Soit  $A$  une partie d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ . Alors, on a :

1.  $A$  est à la fois ouvert et fermé  $\Leftrightarrow Fr(A) = \emptyset$ .

2.  $A$  est ouvert  $\Leftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset$ .

3.  $A$  est fermé  $\Leftrightarrow Fr(A) \subseteq A$ .

4.  $Fr(A) = Fr(C_{\mathbb{X}}^A)$ .

*Démonstration.* 1.  $A$  est à la fois ouvert et fermé  $\Leftrightarrow \overline{A} = \overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow Fr(A) = \emptyset$ .

2.  $\Rightarrow$ ) Soit  $A$  est ouvert  $\Rightarrow Fr(A) \cap A = \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{A} \cap A = (A \cap C_{\mathbb{X}}^A) \cap \overline{A} = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$ .

$\Leftarrow$ ) Soit  $Fr(A) \cap A = \emptyset \Rightarrow \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap (\overline{A} \cap A) = \emptyset \Rightarrow \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap A = \emptyset \Rightarrow \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \subset C_{\mathbb{X}}^A$ , d'où  $\overline{C_{\mathbb{X}}^A} = C_{\mathbb{X}}^A$ , donc  $C_{\mathbb{X}}^A$  est fermé, alors  $A$  est ouvert.

3.  $\Rightarrow$ ) Soit  $A$  est fermé, alors  $Fr(A) = \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap A \subseteq A$ .  
 $\Leftarrow$ ) Soit  $Fr(A) \subseteq A \Rightarrow \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{A} \subseteq A \Rightarrow \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^A = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^A = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \subset A$ ,  
d'où  $\overline{A} = A$ , donc  $A$  est fermé.
4.  $Fr(C_{\mathbb{X}}^A) = \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^{C_{\mathbb{X}}^A}} = \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{A} = Fr(A)$ .

□

### 1.3.4 Extérieur.

**Définition 1.16 (Extérieur d'une partie).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique, et  $A \subset \mathbb{X}$  et  $x \in \mathbb{X}$ . On dit que  $x$  est un point extérieur de  $A$  s'il est intérieur au complémentaire de  $A$ . Autrement dit :

$$x \text{ un point extérieur de } A \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A}.$$

L'ensemble de tous les points extérieurs à  $A$  est appelé extérieur de  $A$  et on le note par  $Ext(A)$ .

$$Ext(A) = \{x \in \mathbb{X}, C_{\mathbb{X}}^A \in \mathcal{V}(x)\}.$$

**Proposition. 1.23.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique, et  $A \subset \mathbb{X}$ , on a

$$Ext(A) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A} = C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition (1.14).

□

**Remarque 1.12.** Par définition,  $Ext(A)$  est une partie ouverte.

**Exemple 1.15.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors, on a

$$a. Ext(\{x\}) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\{x\}}} = \overset{\circ}{\{y, z\}} = \{y\}.$$

$$b. Ext(\{y, z\}) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\{y, z\}}} = \overset{\circ}{\{x\}} = \{x\}.$$

$$c. Ext(\{z\}) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\{z\}}} = \overset{\circ}{\{x, y\}} = \{x, y\}.$$

2. Sur l'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$  on a les deux cas suivant :

$$a. Si  $A = \mathbb{X}$ , alors  $Ext(A) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\mathbb{X}}} = \emptyset$ .$$

$$b. A \neq \mathbb{X} \Rightarrow \text{Ext}(A) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A} = \emptyset.$$

3. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors  $\text{Ext}(A) = C_{\mathbb{X}}^A$ .

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

$$a. \text{Ext}(\{a\}) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\{a\}}} = \mathbb{R} - \{a\}.$$

$$b. \text{Ext}([a, b]) = \text{Ext}(]a, b]) = \text{Ext}([a, b[) = \text{Ext}(]a, b[) = ] - \infty, a[ \cup ]b, +\infty[.$$

$$c. \text{Ext}(\mathbb{N}) = \text{Ext}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}.$$

$$d. \text{Ext}(\mathbb{Q}) = \text{Ext}(C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}) = \emptyset.$$

Maintenant, voici quelques propriétés de l'extérieure.

**Proposition. 1.24.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ . Alors :

$$1. \text{Ext}(A) \subseteq C_{\mathbb{X}}^A.$$

$$2. \text{Ext}(A) = \text{Ext}(C_{\mathbb{X}}^{\text{Ext}(A)}).$$

$$3. \text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B).$$

$$4. \bar{A} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \text{Ext}(A) = \emptyset.$$

$$\text{Démonstration. } 1. \text{Ext}(A) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A} \subseteq C_{\mathbb{X}}^A.$$

$$2. \text{Ext}(C_{\mathbb{X}}^{\text{Ext}(A)}) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\text{Ext}(A)}}}} = \overset{\circ}{\text{Ext}(A)} = \text{Ext}(A).$$

$$3. \text{Ext}(A \cup B) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{A \cup B}} = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A \cap C_{\mathbb{X}}^B} = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^B} = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B).$$

$$4. \bar{A} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \text{Ext}(A) = \overset{\circ}{C_{\mathbb{X}}^{\bar{A}}} = \emptyset.$$

□

## 1.4 Quelques constructions topologiques.

### 1.4.1 Comparaison de topologies.

**Définition 1.17 (Comparaison de topologies).** Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble et  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux topologies sur  $\mathbb{X}$ .

1. On dit que  $\mathcal{T}_1$  est plus fine que  $\mathcal{T}_2$  si  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ , autrement dit, si tout ouvert de  $\mathbb{X}$  par rapport à  $\mathcal{T}_2$  est aussi un ouvert de  $\mathbb{X}$  par rapport à  $\mathcal{T}_1$ .

$$\mathcal{T}_1 \text{ est plus fine que } \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1 \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}_2, O \in \mathcal{T}_1.$$

2. On dit que  $\mathcal{T}_1$  est moins fine que  $\mathcal{T}_2$  si  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ .

$$\mathcal{T}_1 \text{ est moins fine que } \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}_1, O \in \mathcal{T}_2.$$

3. On dit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont comparables si  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$  ou si  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ .

**Exemple 1.16.** La topologie discrète est la plus fine et la topologie grossière, la moins fine de toutes les topologies. Dans le cas de  $\mathbb{R}$  la topologie usuelle se situe entre les deux.

**Proposition. 1.25.** Soit  $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$  un ensemble de topologies sur  $\mathbb{X}$ . Alors, l'intersection  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$  qui est la moins fine de chaque une des topologies  $\mathcal{T}_i$ .

*Démonstration.* Évidente, car  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_i, \forall i \in I$ . □

### 1.4.2 Espaces séparés (Hausdorff).

La notion d'espace séparé que l'on va définir est très importante dans la suite, car elle assure notamment l'unicité de la limite d'une fonction lorsqu'elle existe ( voir section 1.5).

**Définition 1.18 (Espace séparé).** Un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est dit séparé ou Hausdorff si et seulement si pour tous deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{X}$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(x)$  et  $W \in \mathcal{V}(y)$  tels que  $V \cap W = \emptyset$ .

$$\mathbb{X} \text{ est séparé} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \exists V \in \mathcal{V}(x), W \in \mathcal{V}(y), V \cap W = \emptyset.$$

Autrement dit, aussi, on peut séparer les points par des ouverts, c.à.d

$$\mathbb{X} \text{ est séparé} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y, \exists O_x, O_y \in \mathcal{T}, O_x \cap O_y = \emptyset.$$

**Exemple 1.17.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors,  $\mathbb{X}$  n'est pas séparé, car  $\exists x, z \in \mathbb{X}, x \neq z, \forall V \in \mathcal{V}(x), W \in \mathcal{V}(z), V \cap W \neq \emptyset$ .

2. L'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$ , n'est pas séparé car si  $x \neq y$  alors tout voisinage de  $x$  ou de  $y$  est l'ensemble  $\mathbb{X}$  lui même.

3. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$ , alors  $\{x\}$  et  $\{y\}$  sont des ouverts disjoints si  $x$  et  $y$  sont distincts, donc  $\mathbb{X}$  est séparé.

4. L'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  est un espace séparé, en-effet :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , en posant  $x = \frac{b-a}{3}$ , les deux intervalles ouverts  $]a - x, a + x[$  et  $]b - x, b + x[$  sont bien disjoints, le premier étant un voisinage de  $a$  et le second est un voisinage de  $b$ .

**Proposition. 1.26.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $\mathbb{X}$  est séparé.
2. L'intersection des voisinages fermés d'un point quelconque de  $\mathbb{X}$  est l'ensemble réduit à ce point. i.e pour tout  $x \in \mathbb{X}$  on a

$$\bigcap_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x = \{x\},$$

tel que  $V_x$  est voisinage fermé de  $x$ .

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé et  $x \in \mathbb{X}$ . On veut montrer que  $\bigcap_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x = \{x\}$ , tel que  $V_x$  est voisinage fermé de  $x$ . Supposons qu'il existe  $y \in \bigcap_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x$ , tel que  $y \neq x$ , alors ils existent deux voisinages ouverts  $O_x$  et  $O_y$  de  $x$  et  $y$ , respectivement, tels que  $O_x \cap O_y = \emptyset$  ce qui signifie que  $C_{\mathbb{X}}^{O_y}$  est un voisinage fermé de  $x$  (car il contient  $O_x$ ) ce qui contredit l'appartenance de  $y$  à tous les voisinages fermés de  $x$ .  $\Leftarrow$ ) supposons que, pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , l'intersection des voisinages fermés de  $x$  se réduise à  $\{x\}$ . Soient alors  $x$  et  $y$  distincts. Puisque  $y$  n'appartient pas à tous les voisinages fermés de  $x$ , il existe un voisinage fermé  $V_0$  de  $x$  tel que  $y \notin V_0$ , alors  $\exists O_x$  ouvert tel que  $y \notin V_0 \supset O_x$ , donc  $O_x$  est un ouvert contenant  $x$ , et  $C_{\mathbb{X}}^{V_0}$  est un ouvert contenant  $y$ , dont l'intersection est vide, et  $\mathbb{X}$  est bien séparé.  $\square$

En utilisant la proposition précédente on obtient le résultats suivant :

**Proposition. 1.27.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique séparé. Alors

1. Tout singleton  $\{x\} \subset \mathbb{X}$  est fermé.
2. Si  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est fini dans  $\mathbb{X}$ , alors  $A$  est fermé.

*Démonstration.* 1. Si  $\mathbb{X}$  est séparé, alors pour tout  $x \in \mathbb{X}$  on a  $\{x\} = \bigcap_{V_x \in \mathcal{V}(x)} V_x$ , avec  $V_x$  est voisinage fermé de  $x$ , donc  $\{x\}$  est intersection quelconque des fermes, d'où  $\{x\}$  est fermé.

2. Si  $\mathbb{X}$  est séparé, alors pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{x_i\}$ , est fermé, on a  $A = \bigcap_{i=1}^n x_i$  l'union fini des fermés est fermé, ce qui implique que  $A$  est fermé.  $\square$

**Proposition. 1.28.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique séparé. Soit  $A$  une partie  $\mathbb{X}$ . Alors  $x$  est un point d'accumulation de  $A$  ( $x \in A'$ ) si et seulement si pour tout  $V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $V \cap A$  est contient une infinité de points. i.e,

$$(\mathbb{X}, \mathcal{T}) \text{ séparé}, x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \text{Card}(V \cap A) = +\infty.$$

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Il existe au moins un élément  $y, y \neq x$  dans  $V \cap A$ , et donc  $x \in A'$ .  
 $\Rightarrow$ ) Si  $V \cap A$  était fini alors  $V \cap (A \setminus \{x\})$  serait aussi fini, c'est-à-dire  $V \cap (A \setminus \{x\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est un fermé  $F$ , et donc  $C_{\mathbb{X}}^F$  est un ouvert contenant  $x$ , soit  $W = C_{\mathbb{X}}^F$ , on a  $V \cap W = U$  est un voisinage de  $x$  et  $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ , c'est-à-dire  $x$  n'est pas un point d'accumulation, d'où la contradiction.  $\square$

**Remarque 1.13.** *Il vient de la proposition précédente que toute partie finie d'un espace topologique séparé ne possède aucun point d'accumulation.*

### 1.4.3 Topologie induite.

**Définition 1.19 (Sous-espace topologique).** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{X}$ .*

1. *On appelle la trace d'un ouvert  $O \in \mathcal{T}$  sur  $A$ , la partie  $O_A$  définie par :  $O_A = A \cap O$ . La famille des traces des ouverts de  $\mathbb{X}$  sur  $A$  est notée par  $\mathcal{T}_A$  et on écrit :*

$$\mathcal{T}_A = \{O_A = A \cap O, O \in \mathcal{T}\}.$$

2. *La famille des traces,  $\mathcal{T}_A$ , est une topologie sur  $A$  appelée la topologie induite par la partie  $A$ . On dit que  $(A, \mathcal{T}_A)$  est un sous-espace topologique de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ .*

**Proposition. 1.29.** *le couple  $(A, \mathcal{T}_A)$  est un espace topologique.*

*Démonstration.* Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{X}$ .

1. Puisque  $\mathbb{X}, \emptyset \in \mathcal{T}$  (car  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ ) alors  $\mathbb{X} \cap A = A \in \mathcal{T}_A$ , et  $\emptyset \cap A = \emptyset \in \mathcal{T}_A$ .
2. Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux parties de  $A$ , appartenant à  $\mathcal{T}_A$ , et montrons que  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_A$ . Par définition même de  $\mathcal{T}_A$ , les parties  $U_1$  et  $U_2$  de  $A$  sont de la forme :  $U_1 = O_1 \cap A$  et  $U_2 = O_2 \cap A$ , avec  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ . D'où :

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in \mathcal{T}_A,$$

car  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ .

3. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $A$ , appartenant à  $\mathcal{T}_A$ , et montrons que  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_A$ . Par définition même de  $\mathcal{T}_A$ , chaque  $U_i$  ( $i \in I$ ) s'écrit sous la forme :  $U_i = O_i \cap A$ , avec  $O_i \in \mathcal{T}$ . D'où :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = A \cap \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}_A,$$

car  $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

En conclusion,  $\mathcal{T}_A$  constitue bien une topologie sur  $A$ . □

**Exemple 1.18.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \mathbb{X}\}$  et  $A = \{a, b, e\}$ . Alors la topologie induite par  $\mathcal{T}$  sur  $A$  est

$$\mathcal{T}_A = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}, A\}.$$

2. Dans l'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_g)$ , si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors la topologie induite par la partie  $A$ , c'est la topologie grossière sur  $A$ , i.e,  $\mathcal{T}_A = \{\emptyset, A\}$ .

3. Dans l'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$ , la topologie de  $A$  induite par la topologie discrète de  $\mathbb{X}$  est la topologie discrète de  $A$ . En-effet : pour tout  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\{x\}$  est un ouvert de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$ , donc pour tout  $x \in A$ ,  $\{x\} = \{x\} \cap A$  est un ouvert de  $A$ .

4. Dans l'espace topologique  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors, on a :

la topologie induite sur  $\mathbb{Z}$  par la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}$  est la topologie discrète car

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \{n\} = ]n - 1, n + 1[ \cap \mathbb{Z},$$

Comme  $]n - 1, n + 1[$  ouvert dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\{n\}$  ouvert de la topologie induite sur  $\mathbb{Z}$ .

Les singletons sont des ouverts de la topologie induite sur  $\mathbb{Z}$  donc celle-ci est bien la topologie discrète sur  $\mathbb{Z}$ .

**Proposition. 1.30.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ , on a

1.  $\mathcal{F}_A = (F \cap A)_{F \in \mathcal{F}}$  (où  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des fermés de  $\mathbb{X}$ ) est la famille des fermés de  $A$  pour la topologie induite par celle de  $\mathbb{X}$ .

2. Soit  $x \in A$ , alors

$$\mathcal{V}(x)_A = (V \cap A)_{V \in \mathcal{V}(x)}$$

est la famille des voisinages de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite (où  $\mathcal{V}(x)$  est la famille des voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ ).

3. Si  $\mathcal{B}(x)$  est une base de voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  alors

$$\mathcal{B}(x)_A = \{B \cap A, B \in \mathcal{B}(x)\},$$

est une base de voisinages de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite.

4. Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , alors

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A, B \in \mathcal{B}\},$$

est une base de  $(A, \mathcal{T}_A)$ .

*Démonstration.* 1.  $F_A$  est un fermé de  $A$  pour la topologie induite si et seulement si  $C_A^{F_A}$  est un ouvert de  $A$  pour la topologie induite, si et seulement si il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que  $C_A^{F_A} = A \cap O$ . Donc  $F_A$  est un fermé de  $A$  pour la topologie induite si et seulement si il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que

$$F_A = C_A^{C_A^{F_A}} = C_A^{A \cap O} = A - (A \cap O) = A \cap (C_{\mathbb{X}}^A \cup C_{\mathbb{X}}^O) = A \cap C_{\mathbb{X}}^O,$$

si et seulement si il existe  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F_A = A \cap F$ .

2. Si  $V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $x \in A$  alors il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in O \subset V$ . Alors  $x \in O \cap A \subset V \cap A$ , et donc  $V \cap A$  est un voisinage de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite ( $V \cap A \in \mathcal{V}(x)_A$ ). Réciproquement, si  $V_A$  est un voisinage de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite, alors il existe un ouvert  $O \cap A$  de  $A$  (i.e.  $O \in \mathcal{T}$ ) tel que  $x \in O \cap A \subset V_A$ . Soit  $V = O \cup V_A$  vérifie  $x \in O \subset V$ , donc  $V$  est un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  et on a

$$V \cap A = (O \cup V_A) \cap A = (O \cap A) \cup (V_A \cap A) = (O \cap A) \cup V_A = V_A.$$

3. Soit  $V_A = V \cap A$  un voisinage de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite, avec  $V$  voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ . Si  $\mathcal{B}(x)$  est un base de voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  alors il existe  $B \in \mathcal{B}(x)$  tel que  $B \subset V$  et donc  $B \cap A \subset V_A$ . On en déduit que  $\{B \cap A, B \in \mathcal{B}(x)\}$ , est un base de voisinages de  $x$  dans  $A$  pour la topologie induite.
4. Soit  $x \in A$  et  $V_A$  un ouvert de  $A$  tel que  $x \in V_A$ . Il existe  $V$  ouvert dans  $\mathbb{X}$  tel que  $V_A = V \cap A$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est une base de topologie pour  $\mathbb{X}$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset V$ . On a alors  $x \in B \cap A \subset V \cap A \subset V_A$ , d'où  $\mathcal{B}_A = \{B \cap A, B \in \mathcal{B}\}$  est une base de  $(A, \mathcal{T}_A)$ .

□

**Remarque 1.14.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . Tout ouvert ( resp. fermé) dans  $\mathbb{X}$  inclus dans  $A$  est ouvert ( resp. fermé) dans  $A$ , mais tout ouvert ( resp. fermé) de  $A$  n'est pas en général ouvert ( resp. fermé) dans  $\mathbb{X}$ . En-effet, soit  $O \in \mathcal{T}$  ( resp.  $F$  fermé dans  $\mathbb{X}$ ) tel que  $O \subset A$  ( resp.  $F \subset A$ ), alors  $O_A = O \cap A = O \in \mathcal{T}_A$  ( resp.  $F_A = F \cap A = F$  fermé dans  $\mathbb{X}$ ).

Réciproquement, on a le contre exemple suivant : l'intervalle  $[0, 1[$  est un ouvert de  $[0, 2]$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{T}_u$ , car

$$[0, 1[ = ] - 1, 1[ \cap [0, 2] \text{ et } ] - 1, 1[ \in \mathcal{T}_u.$$

Noter que  $[0, 1[$  est aussi un fermé de  $[-1, 1[$  muni de la topologie induite par  $\mathcal{T}_u$  car

$$[0, 1[ = [0, 4] \cap [-1, 1[, \text{ avec } [0, 4] \text{ fermé de } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u).$$

En revanche,  $[0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ .

**Proposition. 1.31.** Soit  $(A, \mathcal{T}_A)$  un sous-espace d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ . Alors, tout ouvert (resp. fermé) dans  $A$  est un ouvert (resp. fermé) dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $A$  est un ouvert (resp. fermé) dans  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons que tout ouvert dans  $A$  est un ouvert dans  $\mathbb{X}$ , alors  $A$  est un ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  et soit  $O_A$  un ouvert de  $A$ , alors il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que  $O_A = A \cap O$  qui est un ouvert dans  $\mathbb{X}$  car  $A \in \mathcal{T}$ .

Par des arguments similaires on montre ce résultat pour les fermés. □

**Exemple 1.19.** Dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  on a, si  $A$  est une partie de  $\mathbb{X}$ , alors  $A$  est un ouvert et fermé à la fois, donc tout ouvert et fermé dans  $A$  est un ouvert et fermé dans  $\mathbb{X}$ , d'où la topologie induite sur  $A$ , c'est la topologie discrète sur  $A$ , i.e :  $\mathcal{T}_A = \mathcal{P}(A)$ .

**Proposition. 1.32** (Transitivité de la topologie induite). Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $B \subset A \subset \mathbb{X}$  deux parties de  $\mathbb{X}$ . On note par  $\mathcal{T}_B^A$  la topologie induite sur  $B$  par  $\mathcal{T}_A$ . Alors, on a

$$\mathcal{T}_B^A = \mathcal{T}_B.$$

*Démonstration.*  $\supset$ ) Soit  $U \in \mathcal{T}_B$ , alors il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que  $U = B \cap O$  et puisque  $A \cap O \in \mathcal{T}_A$  on obtient

$$U = B \cap O = (B \cap A) \cap O = B \cap (A \cap O) \in \mathcal{T}_B^A.$$

$\subset$ ) Soit  $U \in \mathcal{T}_B^A$ , alors il existe  $O_A \in \mathcal{T}_A$  tel que  $U = B \cap O_A$  et puisque  $O_A \in \mathcal{T}_A$  il existe  $O \in \mathcal{T}$  tel que  $O_A = A \cap O$ . Ainsi  $U = B \cap (A \cap O) = B \cap O$ , et donc  $U \in \mathcal{T}_B$ . □

**Remarque 1.15.** Ceci revient à dire que si  $A$  est un sous-espace topologique de  $\mathbb{X}$  et  $B$  est un sous-espace topologique de  $A$ , alors  $B$  est un sous-espace topologique de  $\mathbb{X}$ .

Le résultat suivant concerne l'adhérence, intérieur de la topologie induite.

**Proposition. 1.33.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $B \subset A \subset \mathbb{X}$  deux parties de  $\mathbb{X}$ . Alors

1.  $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}$  (où  $\overline{B}_A$  et  $\overline{B}$  sont les adhérences de  $B$  pour  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}$ , respectivement.)

2.  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}_A$ , (où  $\overset{\circ}{B}_A$  et  $\overset{\circ}{B}$  sont les intérieurs de  $B$  pour  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}$ , respectivement.)
3.  $(B_A)' = A \cap B'$ , (où  $(B_A)'$  et  $B'$  sont les ensembles des points d'accumulations de  $B$  pour  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}$ , respectivement.)
4.  $Fr(B)_A \subset A \cap Fr(B)$ , (où  $Fr(B)_A$  et  $Fr(B)$  sont les frontières de  $B$  pour  $\mathcal{T}_A$  et  $\mathcal{T}$ , respectivement.)

*Démonstration.* 1. Soit  $\overline{B}_A$  l'adhérence de  $B$  dans  $A$ . Comme les fermés de  $A$  sont de la forme  $A \cap F$  avec  $F$  fermé de  $\mathbb{X}$ , alors  $\overline{B} \cap A$  est un fermé de  $A$  contenant  $B$ , donc on a  $\overline{B}_A \subset \overline{B} \cap A$ . Inversement, soit  $x \in \overline{B} \cap A$ . Alors pour tout voisinage  $W$  de  $x$  dans  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $W = V \cap A$  et  $V \cap B \neq \emptyset$ , d'où on a

$$W \cap B = V \cap A \cap B = V \cap B \neq \emptyset,$$

donc  $x \in \overline{B}_A$ . Par conséquent, on a  $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}$ .

2. Soit  $\overset{\circ}{B}_A$  l'intérieur de  $B$  dans  $A$ . On a  $\overset{\circ}{B} \subset B \subset A$  et  $\overset{\circ}{B}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , donc  $\overset{\circ}{B}$  est un ouvert de  $A$  contenu dans  $B$ . Par conséquent, on a  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}_A$ .
3. Soit  $B'_A$  l'ensemble des points d'accumulation de  $B$  dans  $A$ . Soit  $x \in A$ , alors  $x \in B'_A$  si et seulement si pour tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , on a

$$((V \cap A) \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset.$$

Or on a  $((V \cap A) \setminus \{x\}) \cap B = (V \setminus \{x\}) \cap B$ , alors on en déduit que l'on a  $(B_A)' = A \cap B'$ .

4. Soit  $Fr(B)_A$  la frontière de  $B$  dans  $A$ . Comme on a

$$\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}_A \subset \overline{B}_A = \overline{B} \cap A,$$

alors

$$Fr(B)_A = \overline{B}_A - \overset{\circ}{B}_A \subset \overline{B} - \overset{\circ}{B} = Fr(B).$$

Donc on a  $Fr(B)_A \subset A \cap Fr(B)$ .

□

**Proposition. 1.34.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $B \subset A \subset \mathbb{X}$  deux parties de  $\mathbb{X}$ .

Alors,

1.  $\overline{B}_A = \overline{B} \Leftrightarrow A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ .
2.  $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}_A \Leftrightarrow A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* 1. Supposons que pour toute partie  $B$  de  $A$  on a  $\overline{B}_A = \overline{B}$ , alors  $A = \overline{A}_A = \overline{A}$  car  $A$  est fermé dans  $A$  d'où  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ .

Réciproquement, si  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , alors  $\overline{B} \subset \overline{A} = A$  d'où  $\overline{B}_A = A \cap \overline{B} = \overline{B}$ .

2. Supposons d'abord que  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ . Soit  $B$  une partie de  $A$ . Comme  $\overset{\circ}{B}_A$  est un ouvert de  $A$ , alors il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{X}$  tel que  $\overset{\circ}{B}_A = A \cap U$ , donc  $\overset{\circ}{B}_A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  contenu dans  $\mathcal{B}$ . Par conséquent, on a  $\overset{\circ}{B} \supset \overset{\circ}{B}_A$ . D'après 2 de la proposition 1.33, on a aussi  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}_A$ , d'où  $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}_A$ .

Supposons que pour toute partie  $B$  de  $A$ , on a  $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}_A$ . Alors on a  $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}_A$ , donc  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ . □

**Proposition. 1.35.** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique séparé et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . alors la topologie induite sur  $A$  par la topologie de  $\mathbb{X}$  est séparée.*

*Démonstration.* Soient  $(A, \mathcal{T}_A)$  un sous espace topologique d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  et  $x, y \in A$  tels que  $x \neq y$ . Puisque  $\mathbb{X}$  séparé alors il existe  $V \in \mathcal{V}(x)$  et  $W \in \mathcal{V}(y)$  tel que  $V \cap W = \emptyset$  d'où  $(A \cap V) \cap (A \cap W) = \emptyset$ . Donc,  $(A \cap V)$  et  $(A \cap W)$  sont deux voisinages de  $x$  et  $y$ , respectivement, disjoints dans  $A$  ce qui montre que  $A$  est séparé. □

#### 1.4.4 Topologie produit.

Soit  $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in I}$  une famille d'ensembles. On définit le produit de cette famille par :

$$\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i = \{(x_i)_{i \in I}, x_i \in \mathbb{X}_i\}.$$

$I$  désigne un ensemble d'indices, qui peut être soit fini, soit infini, dénombrable ou non. La notation  $(x_i)_{i \in I}$  indique donc une famille d'éléments, où  $x_i$  est un élément de  $\mathbb{X}_i$ . Dans le cas d'une famille finie ou dénombrable  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n, \dots$  on peut représenter les éléments du produits par des suites  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , avec  $x_h \in \mathbb{X}_h$ . Mais dans le cas général,  $I$  est un ensemble quelconque et une telle représentation n'a pas de sens.

Notons que si l'un des  $\mathbb{X}_i$  est vide, alors  $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  est vide aussi. On suppose dorénavant que les  $\mathbb{X}_i$  sont non vides.

Un produit cartésien d'espaces topologiques peut être muni d'une topologie importante, appelée la topologie produit. Pour une raison de clarté, nous avons préféré de décrire et étudier préalablement cette topologie dans le cas d'un produit fini d'espaces topologiques, puis en donner la généralisation adéquate au cas d'un produit quelconque.

### Produits finis d'espaces topologiques.

Soit  $n \geq 2$  un entier et soient  $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1), (\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2), \dots, (\mathbb{X}_n, \mathcal{T}_n)$  des espaces topologiques. On pose le produit cartésien suivant

$$\mathbb{X} := \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n.$$

**Définition 1.20 (Ouvret élémentaire).** 1. On appelle ouvert élémentaire de  $\mathbb{X}$  toute partie  $O \subset \mathbb{X}$  de la forme  $O = O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$  tel que  $O_i \in \mathcal{T}_i, i = 1, \dots, n$ .

2. On appelle ouvert de  $\mathbb{X}$  toute réunion d'ouverts élémentaires.

3. On appelle voisinage élémentaire de  $x \in \mathbb{X}$ , l'ensemble  $V = \prod_{i=1}^n V_i$  où chaque  $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ .

**Remarque 1.16.** Tout ouvert élémentaire contenant  $\{x\}$  est un voisinage élémentaire de  $x$ .

**Définition 1.21 (Espace topologique produit).** On appelle la topologie produit,  $\mathcal{T}_p$ , la famille formée de l'ensemble vide et des réunions quelconques d'ouverts élémentaires sur  $\mathbb{X}$ .

$$\mathcal{T}_p = \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigcup_{i \in I} O_i, O_i \text{ ouvert élémentaire de } \mathbb{X} \right\}.$$

On appelle espace topologique produit des espaces topologiques  $(\mathbb{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$ , l'ensemble  $\mathbb{X}$  muni de la topologie produit.

**Proposition. 1.36.**  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_p)$  est un espace topologique.

*Démonstration.* 1. On a  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n \in \mathcal{T}_p$  et  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \times \dots \times \emptyset \in \mathcal{T}_p$  car ce sont des ouverts élémentaires.

2. Si  $\{O_i, i \in I\}$  une famille de parties ouvertes de  $\mathbb{X}$ , alors on a :

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j \in J} (O_{i,j}^1 \times O_{i,j}^2 \times \dots \times O_{i,j}^n) \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (O_{i,j}^1 \times O_{i,j}^2 \times \dots \times O_{i,j}^n) \in \mathcal{T}_p,$$

car c'est une réunion quelconque d'ouverts élémentaires.

3. Il suffit de montrer que si  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_p$ , alors  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_p$ . Puisque  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  alors  $O_1 = \bigcup_{i \in I} V_i$  et  $O_2 = \bigcup_{j \in J} W_j$  tels que  $V_i$  et  $W_j$  sont des ouverts élémentaires pour tout  $i \in I$  et  $j \in J$ . Donc, on obtient :

$$O_1 \cap O_2 = \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} W_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (V_i \cap W_j).$$

Il suffit de montrer maintenant que  $V_i \cap W_j$  est un ouvert élémentaire pour tout  $i \in I$  et  $j \in J$ . Par définition on a  $V_i = R_1^i \times R_2^i \times \dots \times R_n^i$  et  $W_j = K_1^j \times K_2^j \times \dots \times K_n^j$  tels que  $R_\alpha^i \in \mathcal{T}_\alpha$  et  $K_\alpha^j \in \mathcal{T}_\alpha$  pour tout  $\alpha = 1, \dots, n$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$V_i \cap W_j = (R_1^i \cap K_1^j) \times (R_2^i \cap K_2^j) \times \dots \times (R_n^i \cap K_n^j),$$

et comme  $(R_\alpha^i \cap K_\alpha^j)$  sont des parties ouverts de  $\mathcal{T}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , alors  $V_i \cap W_j$  est un ouvert élémentaire. En fin, nous concluons que  $\mathcal{T}_p$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ . □

**Exemple 1.20.** 1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Alors les ouverts élémentaires de  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  sont

$\emptyset, \{x\} \times \{x\}, \{x\} \times \{y\}, \{x\} \times \{x, y\}, \{x\} \times \mathbb{X}, \{y\} \times \{x\}, \{y\} \times \{y\}, \{y\} \times \{x, y\}, \{y\} \times \mathbb{X},$   
 $\{x, y\} \times \{x\}, \{x, y\} \times \{y\}, \{x, y\} \times \{x, y\}, \{x, y\} \times \mathbb{X}, \mathbb{X} \times \{x\}, \mathbb{X} \times \{y\}, \mathbb{X} \times \{x, y\}, \mathbb{X} \times \mathbb{X},$   
 et la topologie produit,  $\mathcal{T}_p$ , la famille formée des réunions quelconques d'ouverts élémentaires sur  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ .

2. Soit  $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{P}(\mathbb{X}_i)), i = 1, \dots, n\}$  une famille d'espaces discrets, alors le produit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  est un espace discret. En effet, soit  $O \in \mathcal{T}_p$  alors  $O = \bigcup_{i \in I} O_i^1 \times \dots \times O_i^n, O_i \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_i), i \in \{1, \dots, n\}$ , donc  $O \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathbb{X}_i) = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ , d'où  $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{P}(\mathbb{X})$ .

Si  $O \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(\mathbb{X}_i)$  alors  $\exists O_i \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_i), i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $O = O_1 \times \dots \times O_n$ , d'où  $O$  est un ouvert élémentaire, donc  $O \in \mathcal{T}_p$ .

3. Soit  $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i), i = 1, \dots, n\}$  une famille d'espaces grossiers, alors le produit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  est un espace grossier. En effet, si  $O = \prod_{i=1}^n O_i$  est un ouvert élémentaire différent de  $\mathbb{X}$  alors il existe  $i_0$  tel que  $O_{i_0} \neq \mathbb{X}_{i_0}$  et puisque  $\mathcal{T}_{i_0} = \{\mathbb{X}_{i_0}, \emptyset\}$  on obtient  $O_{i_0} = \emptyset$ , d'où  $O = \emptyset$ , et donc la famille des ouverts élémentaires est  $\{\mathbb{X}, \emptyset\}$  ce qui montre que  $\mathbb{X}$  est un espace grossier.

4. La topologie usuelle sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  est la topologie produit des topologies usuelles sur les  $n$  espaces facteurs  $\mathbb{R}$ . Les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  sont des réunions des ouverts élémentaires de la forme

$$\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ \text{ tels que } a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

**Proposition. 1.37.** Soit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  un espace produit. On a :

1. l'ensemble des ouverts élémentaires est une base de la topologie produit, i.e :

$$\mathcal{B} = \{O = O_1 \times \dots \times O_n, O_i \in \mathcal{T}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

2. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$ . l'ensemble des voisinages élémentaires de  $x$  est une base de voisinages de  $x$ , i.e :

$$\mathcal{B}(x) = \{V = V_1 \times \dots \times V_n, V_i \in \mathcal{V}(x_i), \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

*Démonstration.* 1. En utilisant la définition (1.21),

$$\forall V \in \mathcal{T}_p, \exists (O_i)_{i \in I}, \text{ avec } O_i \in \mathcal{B}(\forall i \in I) : V = \bigcup_{i \in I} O_i.$$

2. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$ . Soit  $V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $V$  contient un ouvert qui contient  $x$ , et donc  $V$  contient un ouvert élémentaire qui contient  $x$  (car tout ouvert est réunion d'ouverts élémentaires). D'où l'ensemble des voisinages élémentaires est une base de voisinage de  $x$ . □

**Exemple 1.21.** 1. Soient  $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{P}(\mathbb{X}_i)), i = 1, \dots, n\}$  une famille d'espaces discrets et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$ , alors

$$\mathcal{B}(x) = \{\{x\} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}, i = 1 \dots n\},$$

est un (SFV) de  $x$ .

2. Soient  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie usuelle et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . La famille

$$\left\{ \prod_{i=1}^n ]x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i[ : i = 1, \dots, n \right\}$$

tels que  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n$  est un (SFV) de  $x$ . De même, la famille

$$\left\{ \prod_{i=1}^n ]x_i - \epsilon, x_i + \epsilon[ \right\},$$

tel que  $\epsilon \in \mathbb{R}_*^+$  est un (SFV) de  $x$ .

**Proposition. 1.38.** Soit  $A = \prod_{i=1}^n A_i$  une partie d'un espace produit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$ . Alors, on a :

1.  $\bar{A} = \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i$ .

2.  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $A_i$  est fermé dans  $\mathbb{X}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

3.  $\overset{\circ}{A} = \prod_{i=1}^{\overset{\circ}{n}} A_i = \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i$ .

4.  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $A_i$  est ouvert dans  $\mathbb{X}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

*Démonstration.* Soit  $A = \prod_{i=1}^n A_i \subset \mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$ .

1. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{A}$ . Alors pour tout  $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$  on a :

$$(V_1 \times \dots \times V_n) \cap A = (V_1 \cap A_1) \times \dots \times (V_n \cap A_n) \neq \emptyset,$$

d'où  $V_i \cap A_i \neq \emptyset$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$  et donc  $x_i \in \overline{A_i}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  ce qui montre que  $x \in \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ .

Réciproquement, si  $x \in \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ . Alors, pour tout  $V_i \in \mathcal{V}(x_i), i = 1, \dots, n$ , on a  $V_i \cap A_i \neq \emptyset$  d'où

$$(V_1 \cap A_1) \times \dots \times (V_n \cap A_n) = (V_1 \times \dots \times V_n) \cap A \neq \emptyset,$$

et donc  $x \in \overline{A}$ .

2. D'après 1., on a,  $A$  est fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A} = \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i} = \prod_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \overline{A_i} = A_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

3. Puisque  $\prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  contenu dans  $A$ , alors on a  $\overset{\circ}{A} \supset \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i$ .

Réciproquement, soit  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \overset{\circ}{A}$ , alors il existe un ouvert élémentaire  $\prod_{i=1}^n U_i$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n U_i \subset A$ . Donc pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $x_i \in U_i \subset A_i$ , d'où  $x_i \in \overset{\circ}{A}_i$ . Autrement dit, on a  $x \in \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i$ . Par conséquent, on a  $\overset{\circ}{A} = \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i$ .

4. D'après 3., on a,  $A$  est ouvert  $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\prod_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \overset{\circ}{A}_i = \prod_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \overset{\circ}{A}_i = A_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

□

**Proposition. 1.39.** *Un espace produit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  est séparé si et seulement si  $\mathbb{X}_i$  est séparé pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Soient  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  tel que  $x \neq y$ . Alors, il existe au moins  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ , mais  $\mathbb{X}_{i_0}$  est séparé donc il existe un voisinage  $V$  de  $x_{i_0}$  et un voisinage  $W$  de  $y_{i_0}$  tel que  $V \cap W = \emptyset$ . Soient  $O_x = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_{i_0-1} \times V \times \mathbb{X}_{i_0+1} \times \dots \times \mathbb{X}_n$  et  $O_y = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_{i_0-1} \times W \times \mathbb{X}_{i_0+1} \times \dots \times \mathbb{X}_n$ , alors on obtient  $O_x \in \mathcal{V}(x), O_y \in \mathcal{V}(y)$  et  $O_x \cap O_y = \emptyset$  et donc  $\mathbb{X}$  est séparé.

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  est séparé et  $x_{i_0}, y_{i_0} \in \mathbb{X}_{i_0}$  tels que  $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ . Il existe un voisinage  $O$  de  $(x_1, \dots, x_{i_0}, \dots, x_n)$  et un voisinage  $O'$  de  $(x_1, \dots, y_{i_0}, \dots, x_n)$  tel que  $O \cap O' = \emptyset$ ,

mais  $O = V_1 \times \dots \times V_{i_0} \times \dots \times V_n$  et  $O' = V'_1 \times \dots \times V'_{i_0} \times \dots \times V'_n$  avec  $V_1, V'_1 \in \mathcal{V}(x_1), \dots, V_{i_0} \in \mathcal{V}(x_{i_0}), V'_{i_0} \in \mathcal{V}(y_{i_0}), \dots, V_n, V'_n \in \mathcal{V}(x_n)$  d'où on obtient :

$$\begin{aligned} \emptyset = O \cap O' &= (V_1 \times \dots \times V_{i_0} \times \dots \times V_n) \cap (V'_1 \times \dots \times V'_{i_0} \times \dots \times V'_n) \\ &= (V_1 \cap V'_1) \times \dots \times (V_{i_0} \cap V'_{i_0}) \times \dots \times (V_n \cap V'_n), \end{aligned}$$

d'où  $V_{i_0} \cap V'_{i_0} = \emptyset$ , donc  $\mathbb{X}_{i_0}$  est séparé.  $\square$

**Proposition. 1.40.** *Si pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $(A_i, \mathcal{T}_i)$  est un sous-espace topologique de  $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)$ , alors la topologie induite par  $\mathcal{T}_p = \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$  sur  $A = \prod_{i=1}^n A_i \subset \mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  est la topologie produit  $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{A_i}$ .*

*Démonstration.* Soit  $O_A$  un ouvert dans la topologie induite par  $\mathcal{T}_p$  sur  $A$ , alors il existe un ouvert  $O$ , de  $\mathcal{T}_p$  tel que  $O_A = O \cap A$ , on a  $O = \bigcup_{j \in J} \prod_{i=1}^n O_{i,j}$ , avec  $O_{i,j} \in \mathcal{T}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , et  $\forall j \in J$ , donc

$$O_A = O \cap A = \left[ \bigcup_{j \in J} \prod_{i=1}^n O_{i,j} \right] \cap A = \prod_{i=1}^n \left[ \left( \bigcup_{j \in J} O_{i,j} \right) \cap A_i \right],$$

puisque  $\bigcup_{j \in J} O_{i,j}$  est un ouvert dans  $\mathcal{T}_i$ , alors  $O_A \in \prod_{i=1}^n \mathcal{T}_{A_i}$ .  $\square$

### Produit infinis d'espaces topologiques.

Plus généralement, on peut définir ainsi la topologie produit d'une famille quelconque d'espaces topologiques :

**Définition 1.22.** 1. *Soit une famille  $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in I}$  d'espaces topologiques, où  $I$  représente un ensemble d'indices. Les ouverts élémentaires, (ou rectangles ouverts), de l'ensemble produit  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  sont les ensembles de la forme :*

$$O = \prod_{j \in J} O_j \times \prod_{j \notin J} \mathbb{X}_j$$

où  $J$  est une partie finie de  $I$  et où les  $O_i$  sont des ouverts des  $\mathbb{X}_i$ .

(ou bien  $O = \prod_{i \in I} O_i$  où  $O_i \in \mathcal{T}_i$  et où  $\{j \in J, O_j \neq \mathbb{X}_j\}$  est fini.)

2. *On appelle ouvert de  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  une réunion de ouverts élémentaires.*

**Remarque 1.17.** *Lorsque l'ensemble d'indices  $I$  est fini, toute partie de la forme  $O = \prod_{i \in I} O_i$  avec  $O_i$  ouvert de  $\mathbb{X}_i$ , est un ouvert élémentaire. ce n'est plus le cas lorsque l'ensemble  $I$  est infini : il ne faut pas oublier alors de préciser que  $O_i$  doit être égal à  $\mathbb{X}_i$  sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice  $i \in I$ .*

La plupart des raisonnements de section(1.4.4) s'étendent avec des complications minimes. Énonçons les résultats :

1. Si  $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in I}$  est une famille d'espaces discrets, alors la topologie produit sur  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  n'est, en général, pas la topologie discrète.
2. Soit  $A = \prod_{i \in I} A_i \subset \mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ . Alors, on a :
  - (a)  $\overline{A} = \overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ .
  - (b)  $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\prod_{i \in I} A_i} \subset \prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$ . Il n'y a pas égalité, en général, car si  $A_i$  est ouvert,  $\overset{\circ}{A_i} = A_i$  et si les  $\mathbb{X}_i \neq A_i$  alors  $\prod_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$  n'est pas ouvert donc ne peut pas être égal à  $\overset{\circ}{A}$ .
3. Soit  $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ , où  $x_i \in \mathbb{X}_i$  pour tout  $i \in I$ . Les ensembles de la forme  $V = \prod_{i \in I} V_i$  où  $V_i$  est un voisinage de  $x_i$  dans  $\mathbb{X}_i$ , et où  $V_i = \mathbb{X}_i$  pour presque tout  $i$  (ou  $\{i, V_i \neq \mathbb{X}_i\}$  est fini) , constituent un système fondamental de voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ .
4.  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  est séparé si et seulement si  $\mathbb{X}_i$  est séparé pour tout  $i$ .

## 1.5 Suites dans les espaces topologiques.

Une suite de points d'un ensemble non vide  $\mathbb{X}$  est une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  (ou une partie non vide de  $\mathbb{N}$ ) dans  $\mathbb{X}$ . L'image  $f(n)$  d'un  $n \in \mathbb{N}$  (ou une partie non vide de  $\mathbb{N}$ ) par  $f$  sera notée  $x_n$  et sera appelée terme d'ordre  $n$  de la suite  $f$  et alors notée  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

Une suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  de points de  $\mathbb{X}$  est appelée sous-suite ou suite extraite de  $(x_n)_{n \geq 0}$  s'il existe une application strictement croissante  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans lui-même telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $y_n = x_{\varphi(n)}$ . En général, on note une telle sous-suite  $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ , où  $n_k = \varphi(k)$ .

**Définition 1.23 (Convergence et valeur d'adhérence d'une suite).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{X}$  et soit  $x \in \mathbb{X}$ .

1. On dit que  $x$  est une limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $n$  tend vers l'infini si pour tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans  $V$ . i.e

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \quad x_n \in V.$$

Dans ce cas, on dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , et on écrit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  (ou  $x_n \rightarrow x$ ). Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

2. On dit que  $x$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si, pour tout voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  et pour tout entier  $N_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N_0$  tel que  $x_n \in V$ . i.e

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, \quad x_n \in V.$$

**Remarque 1.18.** La définition précédente a une signification très simple, qui apparaît lorsqu'on les énonce comme suit :

1. Un élément  $x$  de  $\mathbb{X}$  est limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si tout voisinage de  $x$  contient tous les termes  $x_n$  de la suite, sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice  $n$ .
2. Un élément  $x$  de  $\mathbb{X}$  est valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si tout voisinage de  $x$  contient les termes  $x_n$  de la suite pour une infinité de valeurs distinctes de l'indice  $n$ .
3. La limite d'une suite (si elle existe) est toujours une valeur d'adhérence pour cette suite mais l'inverse est (généralement) faux. En-effet : soit  $x_n$  est converge vers  $x$ , dans  $(\mathcal{T}, \mathbb{X})$ , alors  $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, x_n \in V$ , donc  $\exists N_1 \in \mathbb{N}, N_1 \geq N_0 \wedge \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N_1 \geq N_0, \exists n \geq N_1 \geq N_0, x_n \in V$ , d'où  $x$  une valeur d'adhérence. Réciproquement, par exemple, dans  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $x_n = (-1)^n$ , possède 1 et  $-1$  comme valeurs d'adhérence, et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente. En-effet : 1 est valeur d'adhérence, car, si  $V \in \mathcal{V}(1)$ , et  $N_0 \in \mathbb{N}$ , alors  $\exists n = 2N_0$  tel que  $n \geq N_0, x_n = (-1)^n = 1 \in V$ . On a aussi  $-1$  est valeur adhérence, car, si  $V \in \mathcal{V}(-1)$ , et  $N_0 \in \mathbb{N}$ , alors  $\exists n = 2N_0 + 1$  tel que  $n \geq N_0, x_n = (-1)^n = -1 \in V$ . Mais  $x_n = (-1)^n$  ne converge pas dans  $\mathbb{R}$ , car  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}, \exists V = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \in \mathcal{V}(x), 1, -1 \notin ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n = 2N_0 \geq N_0, \{x_n\} = \{1\} \not\subseteq V$ . De-plus si  $x = 1$ ,  $\exists V_1 = ]1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1[ \in \mathcal{V}(1), -1 \notin ]1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1[, \forall N_1 \in \mathbb{N}, \exists n = 2N_1 + 1 \geq N_1, \{x_n\} = \{-1\} \not\subseteq V_1$ . Même pour  $x = -1$ , d'où  $x_n$  est diverge.
4. Une valeur d'adhérence d'une suite  $(x_n)_n$  de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est un point adhérent à la partie  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{X}$ , mais la réciproque est fausse.

**Exemple 1.22.** 1. Toute suite constante est convergente dans tous les espaces topologiques.

1. Soient  $\mathbb{X} = \{x, y, z, t\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \mathbb{X}\}$ . Soit

$$x_n = \begin{cases} x & \text{si } n = 3p, \\ z & \text{si } n = 3p + 1, \\ t & \text{si } n = 3p + 2. \end{cases}$$

alors,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $z$  et  $t$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = z$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = t$ ).

2. Une suite d'un espace grossière est convergente vers tout point de cet espace.  
*En-effet* : si  $x_n$  est convergente, et soit  $x \in \mathbb{X}$ , alors  $\mathbb{X}$  le seul ouvert qui contient  $x$ , donc il existe  $N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow x_n \in \mathbb{X}$ , d'où  $x_n \rightarrow x$ .
3. Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{di})$  un espace discret, alors une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{X}$  converge vers  $x$  si et seulement s'il existe  $N_0$  tel que  $x_n = x$  quand  $n \geq N_0$ . Ainsi, les seules suites convergentes dans un espace discret sont les suites qui sont constantes à partir d'un certain indice.  
*En-effet* : si  $x_n$  converge vers  $x$ , alors  $\{x\} \in \mathcal{V}(x)$  est un ouvert, donc il existe  $N_0$  tel que  $\forall n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in \{x\} \Rightarrow x_n = x$ .
4. La suite  $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , est convergente vers 0 dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et elle est divergente dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ . *En-effet* : supposons que  $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , est convergente dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  vers  $x \in \mathbb{X}$ , alors il existe  $N_0$  tel que  $x_n = x$  quand  $n \geq N_0$ , donc  $\frac{1}{N_0} = \frac{1}{N_0+1} = \frac{1}{N_0+2} = \dots$ , contradiction, d'où  $x_n$  est divergente dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ .

**Remarque 1.19.** Une suite convergente d'un espace topologique peut posséder plusieurs limites (voir Exemple 1.22).

Pour avoir l'unicité de la limite d'une suite, on a la :

**Proposition. 1.41.** Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est un espace topologique séparé, alors toute suite convergente dans  $\mathbb{X}$  admet une limite unique.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Soit  $(x_n)$  une suite convergente dans  $\mathbb{X}$ . Supposons qu'elle admet deux limites distinctes  $x_1 \neq x_2$ . Comme  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est séparé, il existe  $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$  et  $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . D'après définition, il existe deux entiers  $N_1$  et  $N_2$  tels que :

$$\forall n \geq N_1, \quad x_n \in V_1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, \quad x_n \in V_2.$$

Soit  $N_0 = \max(N_1, N_2)$ , alors on obtient

$$\forall n \geq N_0, \quad x_n \in V_1 \cap V_2,$$

ce qui est impossible car  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

□

**Proposition. 1.42.** Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est un espace topologique séparé, alors toute suite convergente dans  $\mathbb{X}$  admet une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Soit  $(x_n)$  une suite convergente dans  $\mathbb{X}$  vers  $x$ , alors  $x$  est une valeurs d'adhérence de  $(x_n)$ . Supposons qu'elle admet deux valeurs d'adhérence distinctes  $x \neq y$ . Il existe  $V_1 \in \mathcal{V}(x)$  et  $V_2 \in \mathcal{V}(y)$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , et puisque  $x, y$  sont deux valeurs d'adhérence distinctes, on a  $\forall N_1$  et  $\forall N_2$  tels que :

$$\exists n_1 \geq N_1, \quad x_{n_1} \in V_1 \text{ et } \exists n_2 \geq N_2, \quad x_{n_2} \in V_2.$$

Mais  $(x_n)$  converge vers  $x$ ,  $\forall n \geq N_0, x_n \in V_1$ , pour  $N_2 \geq N_0$ , alors on obtient  $x_{n_2} \in V_1 \cap V_2$ , ce qui est impossible car  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , donc la suite  $(x_n)$  admet une unique valeur d'adhérence qui est sa limite  $x$ . □

**Remarque 1.20.** *La réciproque en générale est fausse, par exemple, dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ ,  $x_n = 1$  si  $n$  est pair et  $x_n = n$  si  $n$  est impair. Alors 1 est l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)$ , mais la suite n'est pas convergente.*

**Proposition. 1.43.** *Soient  $A$  une partie d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  et  $(x_n)$  une suite de  $A$  convergente dans  $\mathbb{X}$  vers  $x \in \mathbb{X}$ . Alors  $x \in \overline{A}$ .*

*Démonstration.* Soit  $V$  un voisinage de  $x$ . Soit  $N_0$  tel que  $x_n \in V$  pour tout entier  $n \geq N_0$ . Puisque  $x_{N_0} \in A$ , on a  $A \cap V \neq \emptyset$  d'où  $x \in \overline{A}$ . □

**Proposition. 1.44.** *Un espace topologique  $\mathbb{X}$  qui possède une base de voisinages dénombrable est séparable.*

*Démonstration.* Soit  $U_n$  une base dénombrable de voisinages. On choisit un point  $x_n$  dans chaque voisinage  $U_n$ . Soit  $A$  l'ensemble des éléments  $x_n$ . Soit  $x$  un point quelconque de  $\mathbb{X}$  et  $U$  un voisinage de  $x$ . Comme  $U_n$  est une base de voisinage, il existe un  $U_n$  qui contient  $x$  et qui est contenu dans  $U$ . Il s'en suit qu'il existe un point  $x_n$  dans le voisinage  $U$ . Un point quelconque de  $\mathbb{X}$  est ainsi adhérent à  $A$ . Autrement dit,  $A$  est une partie dénombrable de  $\mathbb{X}$  qui est partout dense et  $\mathbb{X}$  est séparable. □

La proposition simple suivante décrit l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite.

**Proposition. 1.45.** *Soit  $A$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(x_n)$ , alors*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n, \quad \text{où } F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}.$$

*En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite quelconque est fermé dans  $\mathbb{X}$ .*

*Démonstration.* Pour démontrer cela, il suffit décrire que

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}, \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \neq \emptyset, \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists m \geq n, x_m \in V, \\
 &\Leftrightarrow x \in A,
 \end{aligned}$$

par définition de l'adhérence d'un ensemble.  $\square$

**Proposition. 1.46.** *Si  $\mathcal{B}(x)$  est une base de voisinages de  $x \in \mathbb{X}$ , alors  $x_n \rightarrow x$  si et seulement si pour tout  $B \in \mathcal{B}(x)$ , il existe un entier  $N_0$  tel que  $n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in B$ .*

$$x_n \rightarrow x \iff (\forall B \in \mathcal{B}(x), \exists N_0, n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in B).$$

*Démonstration.* Commençons par supposer que  $x_n$  converge vers  $x \in \mathbb{X}$ . Si  $B$  est un élément de la base de voisinages  $\mathcal{B}(x)$ , alors  $B$  est un voisinage de  $x$ , donc il existe  $O \subset \mathbb{X}$  ouvert avec  $x \in O \subset B$ . Par définition de la convergence, il existe  $N_0$  tel que  $n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in O \subset B$ , ce qui démontre une implication.

Réciproquement, soit  $O \subset \mathbb{X}$  un ouvert qui contient  $x$ , c'est un voisinage de  $x \in \mathbb{X}$ , donc par définition d'une base de voisinages, il existe  $B \in \mathcal{B}(x)$  avec  $B \subset O$ . Par hypothèse, il existe  $N_0$  tel que  $n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in B \subset O$ , ce qui montre l'autre implication.  $\square$

**Proposition. 1.47.** *Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{X}$  et soit  $x \in \mathbb{X}$ .*

1. *Si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un élément  $x$  de  $\mathbb{X}$ , toute suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge également vers  $x$ .*
2. *Si une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , extraite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , admet une valeur d'adhérence  $x \in \mathbb{X}$ , alors  $x$  est aussi valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,*
3. *Si une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , extraite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , est convergente vers  $x$ ,  $x$  est valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .*
4. *La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $x$  si et seulement si les sous-suites  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $x$ .*

*Démonstration.* 1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , soit  $V$  un voisinage de  $x$ ,  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq N_0, x_n \in V$ . Soit  $(y_k)_{k \geq 0} = (x_{n_k})_{k \geq 0}$  suite extraite, on a  $n_k$  est une application strictement croissante, alors  $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(n) < \dots$ , par récurrence on a  $k(n) \geq n$ , d'où  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall k(n) \geq n \geq N_0, x_{n_k} \in V$ . On a donc prouvé que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers  $x$ .

2. Si  $x$  est une valeur d'adhérence d'une sous-suite  $(x_{n_k})_k$ . Soient  $V$  de un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq N$  et  $x_{n_k} \in V$ . Or on a  $n_k \geq k$ , d'où  $n_k \geq N$  et  $x_{n_k} \in V$ . Donc  $x$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_n$ .
3. Soit  $V \in \mathcal{V}(x)$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $k_0$  entier tel que  $y_k \in V$  pour  $k \geq k_0$ , et il existe  $k_1$  entier tel que  $k_1 \geq k_0$  et  $n_{k_1} \geq n_0$ , alors  $x_{n_{k_1}} = y_{k_1} \in V$ . Ainsi on obtient que l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$  est infini, ce qui prouve que  $x$  est une valeur d'adhérence.
4. Pour  $\Rightarrow$ ) résulte de 1.  $\Leftarrow$ ) supposons que les sous-suites  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $x$ . Soit  $V$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ . Alors il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ , on ait  $x_{2n} \in V$  et il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ , on ait  $x_{2n+1} \in V$ . Soit  $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ , alors  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n \in V$ , donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

□

**Remarque 1.21.** 1. Dans le cas  $\mathbb{X}$  est métrisable,  $x$  est valeur d'adhérence de  $(x_n)$ , alors la suite  $(x_n)$  admet une sous-suite qui tend vers  $x$ .

2. Sur les espaces topologiques séparés, on notera que si deux suites extraites convergent vers deux limites différentes, la suite initiale n'est pas convergente.

**Exemple 1.23.** Dans la topologie  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  séparé, soit la suite  $x_n = \sin \frac{n\pi}{6}$ . Les suites  $y_n = x_{6n} = 0$ ,  $z_n = x_{3(2n+1)} = (-1)^n$  sont deux suites extraites de la suite  $(x_n)$ . En particulier, la suite  $(x_n)$  n'est pas convergente.

**Proposition. 1.48.** Soit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  un espace produit. Alors une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n^1 \times x_n^2 \times \dots \times x_n^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$  converge vers  $x = x^1 \times x^2 \times \dots \times x^n$ , si et seulement si toutes les suites données par les composantes  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X}_k$  convergent vers  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

*Démonstration.* Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{X}$ . On suppose d'abord que la suite converge vers  $x$  dans  $\mathbb{X}$ . Alors dans tout voisinage  $V \in \mathcal{V}(x)$  se trouve presque tout point de la suite. Soit  $V_k$  un voisinage de la composante  $x_k$  dans  $\mathbb{X}_k$ . Alors  $V_k$  contient un ouvert  $O_k$  qui contient  $x_k$ . Comme  $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$  est un voisinage de  $x$  il contient presque tout point de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc  $V_k$  contient presque tout point de la suite  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x_k$ .

Supposons maintenant que les  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x_k$ . Soit  $V$  un voisinage de  $x$ . Or comme  $V$  contient un ouvert qui contient  $x$  il contient même un ouvert de la forme  $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$ ,  $O_k \in \mathcal{T}_k$ , qui contient  $x$ .  $O_k$  est un voisinage de  $x_k$  et donc contient presque tout point de la

suite  $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc d'abord  $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$  et en conséquence aussi  $V$  contient presque tout point de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $x$ .

□

**Proposition. 1.49.** *Soit  $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^n \mathbb{X}_i$  un espace produit. Si  $x = x^1 \times x^2 \times \dots \times x^n$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n^1 \times x_n^2 \times \dots \times x_n^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ , alors  $x^i$  est une valeur d'adhérence de  $x_n^i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* Soit  $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors

$$W = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_{i-1} \times V_i \times \mathbb{X}_{i+1} \times \dots \times \mathbb{X}_n,$$

est un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ . Par conséquent on obtient :

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} : x_n \in W\} = +\infty,$$

ce qui entraîne que :

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} : x_n^i \in V_i\} = +\infty,$$

d'où  $x_i$  est une valeur d'adhérence de  $x_n^i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

□

**Remarque 1.22.** *Le réciproque du résultat précédent est en général faux. Par exemple dans  $\mathbb{R}^2$  si on prend la suite  $z_n = (x_n, y_n)$  définie par la relation suivante :  $x_{2n} = n, x_{2n+1} = \frac{1}{n}$  et  $y_{2n} = \frac{1}{n}, y_{2n+1} = n$ . Il est clair que 0 est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  et  $(y_n)$  mais  $(0, 0)$  n'est pas une valeur d'adhérence de  $(z_n)$ .*

## 1.6 Applications continues.

Une notion essentielle que l'on définit au moyen d'ouverts est celle de continuité d'une application d'un espace topologique dans un autre.

**Définition 1.24 (Continuité ponctuelle).** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques,  $x_0 \in \mathbb{X}$  et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si pour tout voisinage  $U$  de  $f(x_0)$  dans  $\mathbb{Y}$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $f(V) \subset U$ . Cela s'écrit*

$$\forall U \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists V \in \mathcal{V}(x_0), f(V) \subset U.$$

*En utilisant l'image réciproque on obtient  $V \subset f^{-1}(U)$  d'où  $f^{-1}(U)$  est un voisinage de  $x_0$ . Donc, on peut écrire de manière équivalente par : On dit qu'une application  $f$  est continue*

en  $x_0 \in \mathbb{X}$  si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de  $f(x_0)$  dans  $\mathbb{Y}$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{X}$ . Autrement dit,

$$\forall U \in \mathcal{V}(f(x_0)), f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x_0).$$

**Définition 1.25 (Continuité globale).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. On dit que  $f$  est continue sur  $\mathbb{X}$  si elle est continue en chaque point de  $\mathbb{X}$ .

**Remarque 1.23.** Utilisation de bases de voisinages. Pour prouver qu'une application  $f$  d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  dans un autre espace topologique  $\mathbb{Y}$  est continue en un point  $x \in \mathbb{X}$ , il suffit de choisir un système fondamental  $W(f(x))$  de voisinages du point  $f(x) \in \mathbb{Y}$ , et de vérifier que pour tout  $V \in W(f(x))$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x$ , ou, si l'on a choisi aussi un système fondamental  $W(x)$  de voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , de vérifier que pour tout  $V \in W(f(x))$ ,  $f^{-1}(V)$  contient un élément de  $W(x)$ .

**Définition 1.26 (Continuité séquentielle).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. On dit que  $f$  est séquentiellement continue en  $x$  si pour toute suite  $(x_n)$  qui converge vers  $x$ , la suite  $f(x_n)$  converge vers  $f(x)$ .

On dit que  $f$  est séquentiellement continue sur  $\mathbb{X}$  si elle est séquentiellement continue en tout point de  $\mathbb{X}$ .

**Proposition. 1.50.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.  $f$  est continue  $\Rightarrow f$  est séquentiellement continue.

*Démonstration.* Soit  $f$  une application continue en  $x_0$ , et  $(x_n)$  une suite convergente vers  $x_0$ . Donc, si  $V$  est un voisinage de  $f(x_0)$  alors  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$  d'où il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in f^{-1}(V),$$

donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in V,$$

ce qui montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

□

**Remarque 1.24.** La réciproque dans la proposition précédente n'est pas vraie en général. La réciproque de cette propriété est vraie si l'espace est à base dénombrable de voisinage. En-effet : Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble infini non dénombrable, par exemple  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ , et

$$\mathcal{T} := \{O \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), C_{\mathbb{X}}^O, \text{ est fini ou dénombrable} \} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est un espace topologique, dont les suites convergentes sont les suites stationnaires. En-effet, considérons  $x_n \rightarrow x$  dans  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ . Alors  $V := (C_{\mathbb{X}}^{\{x_k, k \in \mathbb{N}\}}) \cup \{x\}$  est un voisinage ouvert de  $x$  donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in V$  pour tout  $n \geq n_0$ . Nécessairement,  $x_n = x$  pour tout  $n \geq n_0$ . Il en résulte que toute application  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est séquentiellement continue. Mais toutes ne sont pas continues. Par exemple  $1_{\{x\}}^-(\mathbb{R}^*) = \{x\}$  n'est pas un ouvert de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ .

**Proposition. 1.51.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors  $f$  est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de  $\mathbb{Y}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , c'est-à-dire

$$\forall O \in \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}, f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}.$$

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  : Supposons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{X}$  et soit  $O$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{Y}$ . Il s'agit de montrer que  $f^{-1}(O)$  est voisinage de chacun de ses points. Soit  $x \in f^{-1}(O)$ , Comme  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$  et que  $f(x) \in O$ , alors  $O$  est un voisinage de  $f(x)$ . Ce qui entraîne que  $f^{-1}(O)$  est un voisinage de  $x$ .

$\Leftarrow$  : Supposons que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $\mathbb{Y}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  et montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{X}$ . Soit donc  $x \in \mathbb{X}$ . Soit  $U \in \mathcal{V}(f(x))$  alors il existe un ouvert  $O$  de  $\mathbb{Y}$  tel que  $f(x) \in O \subset U$ . On a donc  $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$ . Ce qui entraîne (puisque  $f^{-1}(O)$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , en vertu de l'hypothèse faite sur  $f$ ) que  $f^{-1}(U)$  est un voisinage de  $x$ .  $\square$

**Proposition. 1.52.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors  $f$  est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de  $\mathbb{Y}$  est un fermé de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la formule :

$$f^{-1}(C_{\mathbb{Y}}^F) = C_{\mathbb{X}}^{f^{-1}(F)}, \forall F \in \mathcal{F}.$$

$\square$

**Proposition. 1.53.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue.
2.  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{X}$ .
3.  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$  pour toute partie  $B$  de  $\mathbb{Y}$ .

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.

- (1  $\Rightarrow$  2) : Soit  $f$  continue et  $x \in \overline{A}$ . Soit  $W$  un voisinage de  $f(x)$ . Par continuité de  $f$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $f(V) \subset W$ . Comme  $x \in \overline{A}$  on a  $V \cap A \neq \emptyset$ . Donc  $\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset W \cap f(A)$ . Il en suit que  $f(x) \in \overline{f(A)}$ .
- (2  $\Rightarrow$  3) : Soit  $B$  une partie de  $\mathbb{Y}$ . On pose  $A = f^{-1}(B)$ , alors on a

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B},$$

d'où  $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ .

- (3  $\Rightarrow$  1) : Soit  $B$  une partie fermée dans  $\mathbb{Y}$ , alors

$$f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B),$$

d'où  $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ , donc  $f^{-1}(B)$  est une partie fermée, alors  $f$  est continue. □

**Proposition. 1.54.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue.
2.  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$  pour toute partie  $B$  de  $\mathbb{Y}$ .

*Démonstration.* (1  $\Rightarrow$  2) : Soit  $f$  continue et soit  $B$  une partie de  $\mathbb{Y}$ . Comme  $\overset{\circ}{B}$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$ , alors  $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  et on a  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$ , d'où  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$ .

(2  $\Rightarrow$  1) : Soit  $B$  une partie ouverte de  $\mathbb{Y}$ .  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = f^{-1}(B) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$ , d'où  $f^{-1}(B) = \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$ , donc  $f^{-1}(B)$  est ouvert, alors  $f$  est continue. □

**Remarque 1.25.** Si  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de  $\mathbb{Y}$ , alors pour tout  $U \in \mathcal{B}$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est une application continue. Résulte du fait que pour toute famille  $(U_j)_{j \in J}$  de parties de  $\mathbb{Y}$ , on a

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j).$$

**Exemple 1.24.** 1. L'application identité d'un espace topologique,

$$I_{\mathbb{X}} : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \rightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), I_{\mathbb{X}}(x) = x,$$

est continue.

Soient  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  deux topologies sur un même ensemble  $\mathbb{X}$ . Alors, l'application identité  $I_{\mathbb{X}} : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{X}, \mathcal{T}_2), I_{\mathbb{X}}(x) = x$ , est continue si et seulement si  $\mathcal{T}_1$  est plus fine que  $\mathcal{T}_2$ .

2. L'application constante d'un espace topologique vers un autre espace topologique est continue. En-effet : si  $f(\mathbb{X}) = \{y_0\}$ ,  $f^{-1}(V)$  est soit  $\mathbb{X}$ , si  $y_0 \in V$ , soit vide, si  $y_0 \notin V$ . Dans les deux cas, l'image réciproque est un ouvert.
3. Si  $\mathbb{X}$  est un espace topologie discret, tous les applications de  $\mathbb{X}$  dans un espace topologique  $\mathbb{Y}$  sont continues, car toute partie de  $\mathbb{X}$  est ouverte.
3. Si  $\mathbb{Y}$  est muni de la topologie grossière, alors toute application de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$  est continue. En-effet : soit  $x \in \mathbb{X}$ , on a,  $\mathbb{Y}$  est le seule voisinage de  $f(x)$ , alors  $\forall V \in \mathcal{V}(x), f(V) \subset \mathbb{Y}$ .
4. L'application  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x) = x$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $V = \{x\}$  est un voisinage de  $x$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  mais  $f^{-1}(V) = \{x\}$  n'est pas un voisinage de  $x$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ .
5. Soit  $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$  est un espace topologique, tel que

$$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \emptyset \cup \{A \in \mathbb{N}, C_{\mathbb{N}}^A \text{ est fini}\}.$$

Soit  $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  une application donnée par  $f(n) = e^n$ , on a  $]1, 4[ \in \mathcal{T}_u$ , mais  $f^{-1}(]1, 4[) = \{1\} \notin \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ . Donc  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{N}$ .

6. Soit  $\mathbb{X} = \{x, y, z, t\}$  et  $\mathcal{T}_{\mathbb{X}} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, t\}\}$  et  $\mathbb{Y} = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}} = \{\emptyset, \mathbb{Y}, \{1\}, \{1, 2\}\}$ . On définit l'application  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  telle que  $f(t) = 4, f(z) = 2, f(x) = f(y) = 1$ . Par exemple, on a  $V_{\mathbb{Y}}(f(t)) = V_{\mathbb{Y}}(4) = \{\mathbb{Y}\}$  et  $f^{-1}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X} \in V_{\mathbb{X}}(t)$  d'où  $f$  est continue en  $t$ . On a aussi,  $V_{\mathbb{Y}}(2) = \{\{1, 2\}, \mathbb{Y}\}$ . Si on prend  $V = \{1, 2\}$  on obtient  $f^{-1}(V) = \{x, y, z\} \notin V_{\mathbb{X}}(z)$ , donc  $f$  n'est pas continue en  $z$ .

**Proposition. 1.55.** Soient  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  et  $\mathbb{Z}$  trois espaces topologiques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  et  $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Si  $f$  est continue en un point  $x_0 \in \mathbb{X}$  et  $g$  est continue en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* Soit  $W \in \mathcal{V}(g \circ f(x_0))$ . Comme  $g$  est continue en  $f(x_0)$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$  tel que  $g(V) \subset W$  et comme  $f$  est continue en  $x_0$ , il existe  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que  $f(U) \subset V$ . On en déduit que  $g \circ f(U) \subset W$ , d'où  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .  $\square$

**Proposition. 1.56.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques.

1. Si  $A$  est un sous-espace de  $\mathbb{X}$ , alors l'inclusion  $j_A : A \rightarrow \mathbb{X}$  est continue.
2. Si  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est continue et  $A$  est un sous-espace de  $\mathbb{X}$ , alors la restriction  $f|_A : A \rightarrow \mathbb{Y}$  de  $f$  à  $A$  est continue.

*Démonstration.* Si  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors  $j^{-1}(O) = A \cap O$  est un ouvert de  $A$  par la définition de topologie induite, cela démontre le premier point. Le second en découle, puisque la restriction de  $f$  à  $A$  n'est autre que la composition  $f|_A = f \circ j$  de deux applications continues, et donc elle-même continue.  $\square$

**Définition 1.27 (Projections canoniques).** Soit  $\{\mathbb{X}_i\}_{i \in I}$  une famille d'ensembles. Pour tout  $j \in I$  on définit la projection canonique par :

$$p_j : \mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}_j, \quad p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j.$$

Dans le cas du produit d'une famille finie d'ensemble,  $p_j$  est simplement la projection sur le  $j$ -ième facteur.

Soit  $O = \prod_{i=1}^n O_i$  est un ouvert élémentaire, puisque  $p_i(\mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_{i-1} \times O_i \times \mathbb{X}_{i+1} \times \dots \times \mathbb{X}_n) = O_i$  alors

$$O = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_{i-1} \times O_i \times \mathbb{X}_{i+1} \times \dots \times \mathbb{X}_n) = \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(O_i).$$

Dans le cas produit infini, on a  $O = \prod_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(O_i)$ .

**Proposition. 1.57.** Si  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  est espace topologique produit, la projection canonique  $p_j : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_j$  est continue pour les topologies  $\mathcal{T}_p$  de  $\mathbb{X}$  et  $\mathcal{T}_j$  de  $\mathbb{X}_j$ .

*Démonstration.* Cela revient à montrer que l'image réciproque par  $p_j$  de tout ouvert de  $\mathbb{X}_j$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ . Pour tout ouvert  $O_j$  de  $\mathbb{X}_j$ , on a clairement :

$$p_j^{-1}(O_j) = \prod_{i \in I} V_i, \quad \text{avec } V_i = \mathbb{X}_i, \text{ si } i \neq j, \text{ et } V_j = O_j,$$

qui est visiblement un ouvert élémentaire de  $\mathbb{X}$ , donc un ouvert de  $\mathbb{X}$ .  $\square$

**Proposition. 1.58.** La topologie produit  $\mathcal{T}_p = \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$  est la topologie la moins fine qui rend toutes les projections  $p_j : \mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i \rightarrow \mathbb{X}_j$  continues.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{T}$  une topologie sur  $\mathbb{X}$  rendant chacune des projections  $p_i$  continue. Soit  $O_i$  un ouvert de  $\mathbb{X}_i$ , alors

$$p_j^{-1}(O_j) = \prod_{i \in I} V_i, \quad \text{avec } V_i = \mathbb{X}_i, \text{ si } i \neq j, \text{ et } V_j = O_j,$$

est un ouvert de  $\mathcal{T}$ . Les ouverts élémentaires sont des intersections finies de ce type d'ouverts, donc appartiennent aussi à  $\mathcal{T}$ . Il en résulte que  $\mathcal{T}$  contient la topologie produit. □

**Proposition. 1.59.** *Soit  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  un espace topologique produit. Soit  $\mathbb{X}'$  un autre espace topologique. Une application  $f : \mathbb{X}' \rightarrow \mathbb{X}$  est continue si et seulement si chacune de ses composantes  $f_i = p_i \circ f : \mathbb{X}' \rightarrow X_i$  est continue.*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est continue, alors  $f_i$  est continue, pour tout  $i \in I$ , car  $p_i$  est continue ( $p_i \circ f$  transitivité de la continuité).

$\Leftarrow$ ) Si les  $f_i$  sont toutes continues et si  $O = \prod_{i \in I} O_i$  est un ouvert élémentaire, on a

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(O_i)\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i).$$

Cet ensemble est une intersection d'ouverts tous égaux à  $\mathbb{X}$  sauf pour les  $i$  appartenant à une partie finie  $J$  de  $I$ . Alors  $f^{-1}(O) = \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(O_i)$  qui est ouvert. Et puisque un ouvert de  $\mathbb{X}$  est réunion d'ouverts élémentaires, son image réciproque par  $f$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ . □

### 1.6.1 Applications ouvertes et fermées.

Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. L'image  $f(V)$  d'un ouvert (resp. d'un fermé) de  $\mathbb{X}$  n'est pas nécessairement ouverte (resp. fermée) dans  $\mathbb{Y}$ , même lorsque  $f$  est continue. En effet, si  $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle et si  $f(x) = x^2$ , alors  $f$  est continue et  $f(] - 1, 1[) = [0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé de  $\mathbb{R}$ . On donne d'ailleurs un nom aux applications ayant de bonnes propriétés d'image directe.

**Définition 1.28 (Applications ouvertes et fermées).** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.*

1. *On dit que  $f$  est ouvert si l'image par  $f$  de tout ouvert de  $\mathbb{X}$  est ouvert dans  $\mathbb{Y}$ .*
2. *On dit que  $f$  est fermé si l'image par  $f$  de tout fermé de  $\mathbb{X}$  est fermé dans  $\mathbb{Y}$ .*

**Exemple 1.25.** 1. *L'application identité d'un espace topologique est ouverte et fermée.*  
 2. *Si  $\mathbb{Y}$  est un espace topologie discret, tous les applications de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$  sont fermées et ouvertes.*

**Proposition. 1.60.** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors, pour tout  $A \in \mathbb{X}$  on a :*

1.  $f$  est une application ouverte  $\Leftrightarrow f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$ .
2.  $f$  est une application fermée  $\Leftrightarrow \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ .

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.

1.  $\Rightarrow$ ) : Supposons que  $f$  est ouvert, donc  $f(\overset{\circ}{A})$  est ouvert dans  $\mathbb{Y}$ . Par conséquent,

$$f(\overset{\circ}{A}) \subset f(A) \text{ (car } \overset{\circ}{A} \subset A), \text{ donc } \overset{\circ}{f(A)} = f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}.$$

$\Leftarrow$ ) : Supposons que  $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$  et soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors

$$f(A) = f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)},$$

et donc  $f(A) = \overset{\circ}{f(A)}$  ce qui montre que  $f$  est ouvert.

2.  $\Rightarrow$ ) : Supposons que  $f$  est fermé. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ , alors  $f(\overline{A})$  est un fermé de  $\mathbb{Y}$  et on a  $f(A) \subset f(\overline{A})$ , d'où  $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ .

$\Leftarrow$ ) : Supposons que  $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$  et soit  $A$  un fermé de  $\mathbb{X}$ , alors  $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$ , donc on a  $\overline{f(A)} = f(A)$ . Par conséquent,  $f(A)$  est un fermé de  $\mathbb{Y}$ , alors  $f$  est fermé. □

**Proposition. 1.61.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors, pour tout  $A \in \mathbb{X}, B \in \mathbb{Y}$  on a :

1.  $f$  est une application continue ouverte  $\Leftrightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$ .
2.  $f$  est une application continue fermée  $\Leftrightarrow \overline{f(A)} = f(\overline{A})$ .

*Démonstration.* 1.  $\Rightarrow$ ) : Supposons que  $f$  est ouvert et continue. Donc, on obtient

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)},$$

d'après la proposition (1.54). D'autre part, puisque  $\overset{\circ}{f^{-1}(B)}$  est un ouvert dans  $\mathbb{X}$  alors

$f(\overset{\circ}{f^{-1}(B)})$  est ouvert dans  $\mathbb{Y}$  (car  $f$  ouvert). Par conséquent

$$f(\overset{\circ}{f^{-1}(B)}) \subset \overset{\circ}{f(f^{-1}(B))} \subset \overset{\circ}{B},$$

d'où

$$\overset{\circ}{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overset{\circ}{B}).$$

$\Leftarrow$ ) : Supposons que  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$  donc  $f$  est continue (voir la proposition (1.54)). De plus, si  $B$  un ouvert de  $\mathbb{X}$  on obtient

$$B = \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{f^{-1}(f(B))} = f^{-1}(\overset{\circ}{f(B)}),$$

et donc  $f(B) \subset \overset{\circ}{f(B)}$ . Ainsi,  $f(B)$  est ouvert d'où  $f$  est ouvert.

2. Ceci résulte de la proposition précédente et de la proposition (1.53). □

**Proposition. 1.62.** *Chaque projection canonique  $p_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}_i$  de l'espace topologique produit  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  sur un de ses facteurs est une application ouverte.*

*Démonstration.* Le résultat en découle immédiatement, l'image, par la projection  $p_i$ , d'un ouvert élémentaire, est évidemment un ouvert de  $\mathbb{X}_i$ . □

**Remarque 1.26.** *Les projections canoniques ne sont pas en général des applications fermées. En effet, il suffit de considérer l'ensemble  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ , alors  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ , mais par exemple, la première projection canonique de  $F$  sur  $\mathbb{R}^2$  est  $\mathbb{R}^*$  qui est ouvert non fermé dans  $\mathbb{R}$ .*

**Proposition. 1.63.** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$  espace topologique, et  $A \subset \mathbb{X}$ . Alors l'injection canonique  $j_A : A \rightarrow \mathbb{X}$  définie par  $j(a) = a$  pour  $a \in A$ , est ouverte (fermée) si et seulement si  $A$  est ouvert (fermé).*

*Démonstration.* Soit  $j_A$  ouverte et  $U$  un ouvert de  $A$  alors  $j_A(U) = U = O \cap A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$  si et seulement si  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ . □

## 1.6.2 Homéomorphismes.

**Définition 1.29 (Homéomorphisme).** *Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.*

1. *On dit que  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{X}$  sur  $\mathbb{Y}$  si elle est bijective et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues (On dit aussi quel est bicontinue).*
2. *On dit que les espaces topologiques  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont homéomorphes ou bien topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme de  $\mathbb{X}$  sur  $\mathbb{Y}$ , et on le note par  $\mathbb{X} \cong \mathbb{Y}$ .*

- Exemple 1.26.**
1. L'application identique de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  dans lui-même est un homéomorphisme.
  2. Soit  $\mathbb{X} = \{0, 1\}$ , avec les topologies  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$ . L'application  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  qui envoie 0 sur 1 et 1 sur 0 est un homéomorphisme.
  3. Soit  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{Y} = ]-1, 1[$  munis de la topologie usuelle. La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$  est un homéomorphisme. Par conséquent,  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont homéomorphe.

**Remarque 1.27.** Une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme. Par exemple. Si  $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$  et si  $\mathcal{T}_{\mathbb{X}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  la topologie discrète de  $\mathbb{R}$  et si  $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}}$  est la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , alors l'application identique  $I_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  est continue bijective, mais n'est pas un homéomorphisme, car  $I_{\mathbb{R}}^{-1}$  n'est pas continue.

**Proposition. 1.64.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}), (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application bijective. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $f$  est un homéomorphisme.
2.  $f$  est continue et ouverte.
3.  $f$  est continue et fermée.
4.  $f$  et  $f^{-1}$  sont fermées.
5.  $f$  et  $f^{-1}$  sont ouvertes.

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est bijective.

1.  $\Rightarrow$  2.) : Si  $f$  est homéomorphisme, alors  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues. Soit  $g = f^{-1}$ , donc pour toute partie ouverte  $O$  de  $\mathbb{X}$ ,  $g^{-1}(O) = f(O)$  est ouvert de  $\mathbb{Y}$ , d'où  $f$  est ouvert.
2.  $\Rightarrow$  3.) : Si  $f$  est continue et ouverte, soit  $F$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , on a  $C_{\mathbb{Y}}^{f(F)} = f(C_{\mathbb{X}}^F)$ , puisque  $f$  est ouvert, alors  $C_{\mathbb{Y}}^{f(F)}$  est ouvert, et  $f(F)$  fermé.
3.  $\Rightarrow$  4.) : Si  $f$  est continue et fermée, on a  $f$  bijective continue, alors  $f^{-1}$  est fermée.
4.  $\Rightarrow$  5.) : Si  $f$  et  $f^{-1}$  sont fermées, de plus  $f$  est bijective, alors  $f$  et  $g = f^{-1}$  sont continues, d'où  $f$  et  $f^{-1}$  sont ouvertes.
5.  $\Rightarrow$  1.) : Si  $f$  et  $f^{-1}$  sont ouvertes, de plus  $f$  est bijective, alors  $f$  et  $g = f^{-1}$  sont continues, d'où  $f$  est homéomorphisme.  $\square$

## 1.7 Exercices avec solutions.

**Exercice 1.1.** Soit  $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ . Lesquelles parmi les collections de sous-ensembles suivants déterminent une topologie sur  $\mathbb{X}$ ? Justifier.

1.  $\emptyset, \mathbb{X}, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\},$
2.  $\emptyset, \mathbb{X}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\},$
3.  $\emptyset, \mathbb{X}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},$

**Solution 1.1.** 1. Définit une topologie.

2. Ne définit pas une topologie, car  $\{a\} \cup \{b, d\} = \{a, b, d\}$  n'est pas dans la collection.
3. Ne définit pas une topologie, car  $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\}$  n'est pas dans la collection.

**Exercice 1.2.** Soit l'ensemble  $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$ , muni d'une topologie. Montrer que si les singletons  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$  sont ouverts dans  $\mathbb{X}$ , la topologie  $\mathbb{X}$  est discrète.

**Solution 1.2.** Il faut montrer que toute partie de  $\mathbb{X}$  est ouverte. Or une partie  $A$  est réunion de ses singletons. Comme une réunion d'ouvert est ouvert,  $A$  est ouvert. Par exemple  $A = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ .

**Exercice 1.3.** Soit  $\mathcal{T}$  la collection de parties de  $\mathbb{R}$  contenant  $\emptyset, \mathbb{R}$  et tout les intervalles de la forme  $] - \infty, a[$ .

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer les parties fermées de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ .
3. Donner les ensembles  $\overset{\circ}{A}$  et  $\overline{A}$  telle que  $A = [1, 2]$ .
4. Montrer que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  n'est pas séparé.

**Solution 1.3.** Soit  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, ] - \infty, a[, \forall a \in \mathbb{R}\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{R}$ .
  - (a)  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ .
  - (b) Soit  $] - \infty, a[, ] - \infty, b[ \in \mathcal{T}$ , donc  $] - \infty, a[ \cap ] - \infty, b[ = ] - \infty, \min(a, b)[ \in \mathcal{T}$ , avec  $c = \min(a, b)$ .
  - (c) Soit  $] - \infty, a_i[, \forall i \in I$  une famille d'ouverts, alors

$$\bigcup_{i \in I} ] - \infty, a_i[ = ] - \infty, b[ \in \mathcal{T}, \text{ avec } b = \sup_{i \in I} a_i.$$

Donc  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  est un espace topologique.

2. Les fermés sont les compléments des ouverts donc, les fermés de  $\mathcal{T}$  sont  $\emptyset, \mathbb{R}$  et  $C_{\mathbb{R}}^{]-\infty, a[} = [a, +\infty[, \forall a \in \mathbb{R}$ .
3.  $\overset{\circ}{A} = ] - \infty, 2[ = \emptyset$  et  $\overline{A} = \overline{[1, 2]} = [1, +\infty[$ .

4.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  n'est pas séparé, car  $\exists 1, 2$ , tel que  $\forall V \in \mathcal{V}(1), \forall U \in \mathcal{V}(2), ]-\infty, 1[ \subset V \cap U$ .

**Exercice 1.4.** Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble non vide. On pose

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{X}, \text{ tel que } \text{Card}(C_{\mathbb{X}}^A) < +\infty\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ .
2. Déterminer quels sont les parties fermées de  $\mathbb{X}$ .
3. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ , trouver  $\overline{A}, \overset{\circ}{A}$ , pour
  - (a)  $A$  est fini.
  - (b)  $A$  est infini.
4. Si  $\mathbb{X}$  est fini, quels sont les ensembles fermés pour cette topologie.

**Solution 1.4.** 1. a) Il est clair que  $\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{T}$ , car  $\text{Card}(C_{\mathbb{X}}^{\emptyset}) = 0 < +\infty$ .

b) Soit  $A, B \in \mathcal{T}$ , avec  $C_{\mathbb{X}}^A, C_{\mathbb{X}}^B$  sont finis, donc

$$\text{Card}(C_{\mathbb{X}}^{A \cap B}) = \text{Card}(C_{\mathbb{X}}^A \cup C_{\mathbb{X}}^B) \leq \text{Card}(C_{\mathbb{X}}^A) + \text{Card}(C_{\mathbb{X}}^B) < +\infty.$$

D'où  $A \cap B \in \mathcal{T}$ .

c) Soit  $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ , avec  $C_{\mathbb{X}}^{A_i}$  est fini  $\forall i \in I$ , donc

$$\text{Card}(C_{\mathbb{X}}^{\bigcup_{i \in I} A_i}) = \text{Card}\left(\bigcap_{i \in I} C_{\mathbb{X}}^{A_i}\right) \leq \text{Card}(C_{\mathbb{X}}^{A_j}) < +\infty, \forall j \in I.$$

D'où  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ .

2. Les fermés sont les compléments des ouverts donc les fermés de  $\mathcal{T}$  sont les parties finies de  $\mathbb{X}$  ou bien  $\mathbb{X}$ .
3. (a) Soit  $A$  une partie finie de  $\mathbb{X}$ ,  $\overline{A} = A$ , car  $A$  est fermé,  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  car c'est le seul ouvert contenu dans  $A$ .
  - (b) Soit  $A$  une partie infinie de  $\mathbb{X}$ ,  $\overline{A} = \mathbb{X}$ , car c'est le plus petit fermé contenant  $A$ ,  $\overset{\circ}{A} = A$  si  $C_{\mathbb{X}}^A$  est fini, et  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  si  $C_{\mathbb{X}}^A$  est infini.
4. Si  $\mathbb{X}$  est fini, tout partie  $A$  dans  $\mathbb{X}$  est ouvert, car  $C_{\mathbb{X}}^A$  est fini, donc la topologie  $\mathbb{X}$  est discrète.

**Exercice 1.5.** Soient  $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ .

1. Montrer que  $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$  est un espace topologique.
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique  $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ .

3. Écrire  $V(m)$ , le voisinage de  $m \in \mathbb{N}$ .
4. Donner l'ensemble  $\overset{\circ}{A}$  telle que  $A = \{7, 24, 39\}$ .
5. Montrer que  $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$  n'est pas séparé.

**Solution 1.5.** Soient  $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ .

1.  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$ , car

(a)  $\emptyset, A_0 = \mathbb{N} \in \mathcal{T}$ .

(b) Toute réunion d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{A_n, \forall n \in I \subset \mathbb{N}\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcup_{n \in I} A_n = A_{n_0} \in \mathcal{T}, \text{ avec } n_0 = \inf_{n \in I} n.$$

(c) Toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{A_n, \forall n \in I \subset \mathbb{N}, I \text{ fini}\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcap_{n \in I} A_n = A_{n_0} \in \mathcal{T}, \text{ avec } n_0 = \max_{n \in I \text{ fini}} n.$$

2. Les fermés de l'espace topologique  $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$  sont les parties  $F_n, n \in \mathbb{N}$ , dans  $\mathbb{N}$  tel que  $C_{\mathbb{N}}^{F_n}$  est ouverte, donc

$$F_n = C_{\mathbb{N}}^{A_n} = C_{\mathbb{N}}^{\{n, n+1, n+2, \dots\}} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$F_0 = C_{\mathbb{N}}^{A_0} = C_{\mathbb{N}}^{\{0, 1, 2, \dots\}} = C_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} = \emptyset.$$

3.  $V(m)$  est un voisinage de  $m \in \mathbb{N}$  si  $\exists A_n$ , tel que  $m \in A_n \subset V(m)$ , donc

$$A_n \subset V(m), n \leq m.$$

4.  $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\{7, 24, 39\}} = \emptyset$ , car  $A$  n'est pas un voisinage de 7, 24, et 39.

5. Soient  $1, 3 \in \mathbb{N}$ , et  $\forall V \in \mathcal{V}(1), \forall U \in \mathcal{V}(3)$  on a  $V \cap U \supset A_3 \neq \emptyset$ , donc  $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$  n'est pas séparé.

**Exercice 1.6.** Soient  $\mathbb{X} = ]0, +\infty[$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\theta_\alpha = ]\alpha, +\infty[, \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  constitue une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

2. Déterminer les fermés de l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ .

3. Donner (sans démonstration)  $\overset{\circ}{A}$  et  $\overline{A}$  pour  $A = ]0, 1[$ ,  $A = [2, +\infty[$ , et  $A = \mathbb{N}^*$ .
4. Montrer que  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  n'est pas séparé.

**Solution 1.6.** Soient  $\mathbb{X} = ]0, +\infty[$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{\theta_\alpha = ]\alpha, +\infty[, \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ .

1.  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$ , car :

(a)  $\emptyset, \mathbb{X} = \theta_0 \in \mathcal{T}$ .

- (b) Toute réunion d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{\theta_{\alpha_i}, i \in I\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcup_{i \in I} \theta_{\alpha_i} = ]\alpha_0, +\infty[ \in \mathcal{T}, \text{ avec } \alpha_0 = \inf_{i \in I} \alpha_i \geq 0.$$

- (c) Toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{\theta_{\alpha_i}, i \in I \text{ fini}\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcap_{i \in I \text{ fini}} \theta_{\alpha_i} = ]\alpha_0, +\infty[ \in \mathcal{T}, \text{ avec } \alpha_0 = \max_{i \in I \text{ fini}} \alpha_i \geq 0.$$

2. La partie  $F \in \mathbb{X}$  est fermée si et seulement si le complément  $C_{\mathbb{X}}^F \in \mathcal{T}$ , donc les fermés de l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , sont  $\emptyset, \mathbb{X}$  et  $]0, \beta]$ ,  $\beta > 0$ .
3. (a) Si  $A = ]0, 1[$ , alors  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ,  $\overline{A} = ]0, 1[$ .
- (b) Si  $A = [2, +\infty[$ , alors  $\overset{\circ}{A} = ]2, +\infty[$ ,  $\overline{A} = \mathbb{X}$ .
- (c) Si  $A = \mathbb{N}^*$ , alors  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ,  $\overline{A} = \mathbb{X}$ .
4.  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas séparé, car  $\exists 1, 2 \in \mathbb{X}$  tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}(1), \forall W \in \mathcal{V}(2), ]2, +\infty[ \subset V \cap W \neq \emptyset.$$

**Exercice 1.7.** Soient  $\mathbb{X} = [0, 1[$  et  $\mathcal{T} = \{\theta_\alpha = [0, \alpha[, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  constitue une topologie sur  $X$ .
2. Déterminer les fermés de l'espace topologique  $(X, \mathcal{T})$ .
3. Soit  $A = [a, b] \subset [0, 1[$ , trouver  $\overline{A}$  et  $\overset{\circ}{A}$ .
4. Montrer que  $(X, \mathcal{T})$  n'est pas séparé.

**Solution 1.7.** Soient  $\mathbb{X} = [0, 1[$  et  $\mathcal{T} = \{\theta_\alpha = [0, \alpha[, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ .

1.  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $X$ , car :

(a)  $\emptyset = \theta_0 \in \mathcal{T}, \mathbb{X} = \theta_1 \in \mathcal{T}$ .

(b) Toute réunion d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{\theta_{\alpha_i} = [0, \alpha_i[, i \in I\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcup_{i \in I} \theta_{\alpha_i} = [0, \alpha_0[ \in \mathcal{T}, \text{ avec } \alpha_0 = \inf_{i \in I} \alpha_i.$$

(c) Toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ , c-à-d : pour toute famille  $\{\theta_{\alpha_i} = [0, \alpha_i[, i \in I \text{ fini}\}$  de parties de  $\mathcal{T}$ , on a

$$\bigcap_{i \in I \text{ fini}} \theta_{\alpha_i} = [0, \alpha_0[ \in \mathcal{T}, \text{ avec } \alpha_0 = \max_{i \in I \text{ fini}} \alpha_i \geq 0.$$

2. La partie  $F \in \mathbb{X}$  est fermée si et seulement si le complément  $C_{\mathbb{X}}^F \in \mathcal{T}$ , donc les fermés de l'espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , de la forme  $[\beta, 1[, 0 \leq \beta \leq 1$ .
3. Si  $A = [a, b] \subset [0, 1[, \bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ , donc  $\bar{A} = [a, 1[$ . De même,  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ , donc si  $a \neq 0$ ,  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  et si  $a = 0$ ,  $\overset{\circ}{A} = [0, b[$ .
4. Cette topologie n'est pas séparée. Soient en effet  $x, y \in [0, 1[, x < y$ . Tout voisinage de  $y$  contient  $[0, x]$ , donc rencontre tout voisinage de  $x$ .

**Exercice 1.8.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique ; pour  $A, B \subset \mathbb{X}$ , on pose

$$\alpha(A) = \overset{\circ}{\bar{A}} \text{ et } \beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}.$$

1. Montrer que  $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$  et  $\beta(A) \subset \beta(B)$ .
2. Montrer que  $\overline{\alpha(A)} = \beta(\bar{A})$ ,  $\widehat{\beta(A)} = \alpha(\overset{\circ}{A})$ .
3. Montrer que  $A$  ouvert entraîne  $A \subset \alpha(A)$  et  $A$  fermé entraîne  $\beta(A) \subset A$ .
4. Montrer qu'on a toujours  $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$  et  $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ .
5. Soient  $A$  et  $B$  deux ouverts dans  $\mathbb{X}$ . Montrer que si  $A \cap B = \emptyset$ , alors on a  $\alpha(A) \cap \alpha(B) = \emptyset$ .
6. On pose maintenant,  $\alpha(A) = \overset{\circ}{\bar{A}}$  et  $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ .
  - (a) Montrer que la famille  $\mathcal{T}_\alpha = \{\alpha(A), A \in \mathcal{P}(\mathbb{X})\}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ .
  - (b) Montrer que la famille  $\mathcal{F} = \{\beta(A), A \in \mathcal{P}(\mathbb{X})\}$  est l'ensemble des fermés d'une topologie  $\mathcal{T}_\alpha$  sur  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.8.** Soient  $\alpha(A) = \overset{\circ}{\bar{A}}$  et  $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ .

1.  $A \subset B \Rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B} \text{ et } \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B})$  alors  $(\overset{\circ}{\bar{A}} \subset \overset{\circ}{\bar{B}} \text{ et } \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{B}})$  d'où  $\alpha(A) \subset \alpha(B)$  et  $\beta(A) \subset \beta(B)$ .

2. On a  $\overline{\alpha(A)} = \overline{\overline{A}} = \overline{\beta(A)}$ , et  $\overset{\circ}{\beta(A)} = \overset{\circ}{A} = \alpha(A)$
3. On a  $A \subset \overline{A}$  alors  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} = \alpha(A)$ , donc  $A$  ouvert  $\Rightarrow \overset{\circ}{A} = A \subset \alpha(A)$  et on a  $\overset{\circ}{A} \subset A$  alors  $\overline{\overset{\circ}{A}} = \beta(A) \subset \overline{A}$ , donc  $A$  fermé  $\Rightarrow \beta(A) \subset A$ .
4. On a  $\alpha(A)$  est ouvert, donc  $\alpha(A) = \overset{\circ}{\alpha(A)} \subset \overline{\overset{\circ}{\alpha(A)}}$ , alors

$$\alpha(A) = \overset{\circ}{\alpha(A)} \subset \overline{\overset{\circ}{\alpha(A)}} = \alpha(\alpha(A)),$$

de plus, d'après 2) et 3), on a  $\overline{\alpha(A)} = \beta(\overline{A}) \subset \overline{A}$ , d'où  $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$ .

Pour la deuxième égalité, on a  $\beta(A)$  est fermé, d'après 3),  $\beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$ , de plus, d'après 2) et 3)

$$\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\beta(A)} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \beta(A) \subset \overline{\overset{\circ}{\beta(A)}} = \beta(\beta(A)).$$

5. Soient  $A$  et  $B$  deux ouverts dans  $\mathbb{X}$ . On a  $A \cap B = \emptyset$ , d'où  $A \subset C_{\mathbb{X}}^B$  qui est fermé dans  $\mathbb{X}$ , donc on a  $\overline{A} \subset C_{\mathbb{X}}^B$ . Par conséquent, on a  $\overline{A} \cap B = \emptyset$  et  $\alpha(A) \cap B = \emptyset$ . On en déduit que  $B \subset C_{\mathbb{X}}^{\alpha(A)}$  qui est fermé dans  $\mathbb{X}$ , d'où  $\overline{B} \subset C_{\mathbb{X}}^{\alpha(A)}$ . Donc on a  $\alpha(B) \subset C_{\mathbb{X}}^{\alpha(A)}$ , d'où  $\alpha(A) \cap \alpha(B) = \emptyset$ .
6. Soient  $\alpha(A) = \overset{\circ}{A}$  et  $\beta(A) = \overline{A}$ .

(a) On a  $\alpha(\mathbb{X}) = \overset{\circ}{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \in \mathcal{T}_{\alpha}$ . On a  $\alpha(\emptyset) = \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset \in \mathcal{T}_{\alpha}$ .

Soient  $\alpha(A), \alpha(B) \in \mathcal{T}_{\alpha}$ , alors on a

$$\alpha(A) \cap \alpha(B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B} = \alpha(A \cap B) \in \mathcal{T}_{\alpha}.$$

Donc  $\mathcal{T}_{\alpha}$  est stable par intersection finie.

Soit  $\alpha(A_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{T}_{\alpha}$ , d'après 1) on a pour tout  $i \in I$ ,  $\alpha(A_i) \subset \alpha(\bigcup_{i \in I} A_i)$ , d'où  $\bigcup_{i \in I} \alpha(A_i) \subset \alpha(\bigcup_{i \in I} A_i)$ . Par conséquent, d'après 4), on a

$$\bigcup_{i \in I} \alpha(A_i) = \bigcup_{i \in I} \alpha(\alpha(A_i)) \subset \alpha(\bigcup_{i \in I} \alpha(A_i)) \subset \bigcup_{i \in I} \alpha(A_i),$$

d'où on a  $\bigcup_{i \in I} \alpha(A_i) = \alpha(\bigcup_{i \in I} \alpha(A_i)) \in \mathcal{T}_{\alpha}$ . Donc  $\mathcal{T}_{\alpha}$  est stable par réunion quelconque. Donc  $\mathcal{T}_{\alpha}$  est bien une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

(b) On a  $\beta(\mathbb{X}) = \overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}$  est fermé dans  $\mathcal{F}$ . On a  $\beta(\emptyset) = \overline{\emptyset} = \emptyset$  est fermé dans  $\mathcal{F}$ .

Soient  $\beta(A), \beta(B) \in \mathcal{F}$ , alors on a

$$\beta(A) \cup \beta(B) = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = \beta(A \cup B) \text{ est fermé dans } \mathcal{F}.$$

Donc  $\mathcal{F}$  est stable par réunion finie.

Soit  $\beta(A_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{F}$ , d'après 1) on a pour tout  $i \in I$ ,  $\beta(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \beta(A_i)$ , d'où  $\beta(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} \beta(A_i)$ . Par conséquent, on a

$$\bigcap_{i \in I} \beta(A_i) \subset \beta\left(\bigcap_{i \in I} \beta(A_i)\right) \subset \bigcap_{i \in I} \beta(\beta(A_i)) = \bigcap_{i \in I} \beta(A_i),$$

d'où on a  $\bigcap_{i \in I} \beta(A_i) = \beta(\bigcap_{i \in I} \beta(A_i))$  ouvert dans  $\mathcal{F}$ . Donc  $\mathcal{F}$  est stable par intersection quelconque. Donc  $\mathcal{F}$  est bien l'ensemble des fermés d'une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 1.9.** Dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ , soit  $A = ([0, 1[ \cup ]1, 2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer l'intérieur et l'adhérence de  $[4, 5] \cap \mathbb{Q}$ .
2. Montrer que les parties suivantes

$$A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} \text{ et } \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}.$$

sont deux à deux distincts.

**Solution 1.9.** Soit  $A = ([0, 1[ \cup ]1, 2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5])$ . Alors

1.  $\overline{[4, 5] \cap \mathbb{Q}} = [4, 5] \cap \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = [4, 5] \cap \mathbb{R} = [4, 5]$ , et  $\overline{(\mathbb{Q} \cap [4, 5])} = [4, 5]$ .
2.  $\overset{\circ}{A} = ]0, 1[ \cup ]1, 2[$ ,  $\overline{\overset{\circ}{A}} = [0, 2]$ ,  $\overset{\circ}{\bar{A}} = ]0, 2[$ ,  $\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$ ,  $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = ]0, 2[ \cup [4, 5]$ ,  $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = [0, 2] \cup [4, 5]$ . Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

**Exercice 1.10.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique, et  $A, B$  deux parties de  $\mathbb{X}$ .

1. Montrer que si  $x \in \text{Is}(\bar{A})$ , alors  $x \in \text{Is}(A)$ .
2. Si  $\mathbb{X}$  est séparé, montrer que  $(\bar{A})' = A'$  et  $A'$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ . En déduire que  $(A')' \subset A'$ .
3. Montrer que  $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$ ,  $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$  et donner des exemples où ces inclusions sont strictes.
4. Montrer que,  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X} \Leftrightarrow \text{Fr}(A) \subset A$ .
5. Montrer que,  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X} \Leftrightarrow \text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$ .
6. Montrer que, si  $A$  est ouvert (ou fermé) dans  $\mathbb{X}$ , alors  $\overline{\text{Fr}(A)} = \emptyset$ .
7. Montrer que,  $A$  est ouvert et fermé dans  $\mathbb{X} \Leftrightarrow \text{Fr}(A) = \emptyset$ .

8. Montrer que  $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$  et donner un exemple où cette inclusion est stricte.

**Solution 1.10.** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .

1. Si  $x \in Is(\bar{A})$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $V \cap \bar{A} = \{x\}$ . Puisque  $V \cap A \neq \emptyset$  et  $V \cap A \subset V \cap \bar{A}$ , alors  $V \cap A = \{x\}$ , donc  $x$  est un point isolé de  $A$ .
2. Soit  $\mathbb{X}$  est séparé, on a  $A \subset \bar{A}$ , d'où  $A' \subset (\bar{A})'$ . Inversement, soit  $x \in (\bar{A})'$ , alors pour tout voisinage ouvert  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , on a  $V \setminus \{x\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . On en déduit que  $V \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ , car  $V \setminus \{x\}$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , donc  $x \in A'$ . Par conséquent,  $A' = (\bar{A})'$ .

De-plus, pour montrer que  $A'$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , on montre que  $C_{\mathbb{X}}^{A'}$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ . Soit  $x \in \mathbb{X}$ , alors  $x \in C_{\mathbb{X}}^{A'}$  si et seulement s'il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{X}$  contenant  $x$  tel que  $V \cap A = \{x\}$  ou  $V \cap A = \emptyset$ . Supposons  $x \in C_{\mathbb{X}}^{A'}$ , et soit  $y \in V$  tel que  $y \neq x$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $y$  dans  $\mathbb{X}$  tel que  $x \notin W$  et  $W \subset V$ . Alors on a  $W \cap A = \emptyset$ , donc  $y \in C_{\mathbb{X}}^{A'}$ . D'où  $V \subset C_{\mathbb{X}}^{A'}$ . donc  $C_{\mathbb{X}}^{A'}$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ . Finalement  $A'$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , alors  $\bar{A}' = A'$ , et on a toujours  $(A')' \subset \bar{A}' = A'$ .

3. Par définition, on a  $Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ , alors, puisque  $\overset{\circ}{A} \subset \bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ , on a  $(\bar{A} - \overset{\circ}{A}) \subset (\bar{\bar{A}} - \overset{\circ}{A})$ , d'où  $Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$ . De-plus puisque  $\overset{\circ}{A} \subset \bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ , on a  $(\bar{A} - \overset{\circ}{A}) \subset (\bar{\bar{A}} - \overset{\circ}{A})$ , d'où  $Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$ .

Dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  et  $A = \mathbb{Q}$ , on a  $Fr(\bar{\mathbb{Q}}) = Fr(\mathbb{R}) = \emptyset$ ,  $Fr(\overset{\circ}{\mathbb{Q}}) = Fr(\emptyset) = \emptyset$  et  $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ .

4. On a  $Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A} \subset \bar{A}$ , si  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , alors  $A = \bar{A}$ , d'où  $Fr(A) \subset A$ . Réciproquement, si  $Fr(A) \subset A$ , on a  $\bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A) \subset \overset{\circ}{A} \cup A = A$ , d'où  $\bar{A} = A$  donc  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ .

5. Si  $A$  est ouvert dans  $X$ , alors  $\overset{\circ}{A} = A$ , d'où  $Fr(A) \cap A = (\bar{A} - A) \cap A = \emptyset$ . Inversement, supposons  $Fr(A) \cap A = \emptyset$ . Comme on a  $A \subset \bar{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$ , alors  $A \subset \overset{\circ}{A}$ . Donc  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

6. Si  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ , d'après 4., on a  $Fr(A) \subset A$  alors  $\overbrace{Fr(A)}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$ , et  $Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$  or on a  $Fr(A) \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset \Rightarrow \overbrace{Fr(A)}^{\circ} \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$ , d'où  $\overbrace{Fr(A)}^{\circ} = \emptyset$ .

Si  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ , alors on a

$$Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A} = \bar{A} - A = \bar{A} \cap C_{\mathbb{X}}^A.$$

On déduit que

$$\overbrace{Fr(A)}^{\circ} = \overline{A} \cap \overbrace{C_{\mathbb{X}}^A}^{\circ} = \overline{A} \cap \overbrace{C_{\mathbb{X}}^A}^{\circ} = \overline{A} \cap C_{\mathbb{X}}^{\overline{A}} = \overline{A} - \overline{A} = \emptyset.$$

7. D'après 4. et 5. on a,  $A$  est ouvert et fermé dans  $\mathbb{X} \Leftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset \wedge Fr(A) \subset A \Leftrightarrow Fr(A) = \emptyset$ .

8. Soient  $A, B \subset \mathbb{X}$ , alors

$$\begin{aligned} Fr(A \cup B) &= \overline{(A \cup B)} \cap \overbrace{C_{\mathbb{X}}^{(A \cup B)}}^{\circ} \\ &= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \left( \overbrace{C_{\mathbb{X}}^A \cap C_{\mathbb{X}}^B}^{\circ} \right) \\ &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \left( \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^B} \right) \\ &= \left( \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^B} \right) \cup \left( \overline{B} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^B} \right) \\ &\subset \left( \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^A} \right) \cup \left( \overline{B} \cap \overline{C_{\mathbb{X}}^B} \right) \\ &= Fr(A) \cup Fr(B). \end{aligned}$$

Dans  $(\mathbb{X}, \mathbb{R})$  muni de la topologie usuelle et  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ , on a  $Fr(A \cup B) = Fr(\mathbb{R}) = \emptyset$  et  $Fr(A) = Fr(B) = \mathbb{R}$ .

**Exercice 1.11.** Soient  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  deux espaces topologiques et  $A \subset \mathbb{X}_1, B \subset \mathbb{X}_2$ . Déterminer la frontière de  $A \times B$ .

**Solution 1.11.** Puisque  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$  et  $\overbrace{A \times B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ , alors :

$$\begin{aligned} Fr(A \times B) &= \overline{A \times B} - \overbrace{A \times B}^{\circ}, \\ &= \overline{A} \times \overline{B} - \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}, \\ &= \left[ (\overline{A} - \overset{\circ}{A}) \times \overline{B} \right] \cup \left[ \overline{A} \times (\overline{B} - \overset{\circ}{B}) \right], \\ &= [Fr(A) \times \overline{B}] \cup [\overline{A} \times Fr(B)]. \end{aligned}$$

**Exercice 1.12.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A, B \subset \mathbb{X}$ . Montrer que si  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  et  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ , mais que  $\overline{A} \cap \overline{B}$  n'est pas nécessairement vide.

**Solution 1.12.** Supposons l'inverse,  $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ , c'est-à-dire, il existe  $x \in A$  et  $x \in \overline{B}$ , comme  $A$  est un ouvert, alors  $A \in \mathcal{V}(x)$ , puis  $x$  est point adhérent à  $B$ , par définition, on a  $A \cap B \neq \emptyset$ , d'où la contradiction car  $A \cap B = \emptyset$ .  $\overline{A} \cap \overline{B}$  n'est pas nécessairement vide, par exemple : dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ , on a  $A = ]0, 1[$  et  $B = ]1, 2]$ , alors  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$ , mais  $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} \neq \emptyset$ .

**Exercice 1.13.** Soient  $A, B$  et  $C$  des parties d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  vérifiant  $A \subset B \cap C$ . Montrer que si  $A$  est ouvert (resp., fermé) à la fois dans  $B$  et  $C$ , il est ouvert (resp., fermé) dans  $B \cup C$ .

**Solution 1.13.** Supposons  $A$  ouvert dans  $B$  et dans  $C$ . Il existe des ouverts  $V$  et  $V'$  de  $\mathbb{X}$  tels que  $A = V \cap B = V' \cap C$ . On a alors

$$(V \cap V') \cap (B \cup C) = (V \cap B \cap V') \cup (V \cap V' \cap C) = A \cup A = A,$$

comme  $V \cap V'$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ , cela prouve que  $A$  est ouvert dans  $B \cup C$ . Le raisonnement est identique lorsque  $A$  est fermé dans  $B$  et dans  $C$ .

**Exercice 1.14.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A \subset \mathbb{X}$  muni de la topologie induite par celle de  $\mathbb{X}$ , et  $B$  un sous-ensemble de  $A$ . Montrer que si  $B$  est dense dans  $A$  et  $A$  est dense dans  $\mathbb{X}$ , alors  $B$  est dense dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.14.** Soit  $\overline{B}_A$  l'adhérence de  $B$  dans  $A$ , on a  $A = \overline{B}_A = \overline{B} \cap A$ , d'où  $A \subset \overline{B}$ . Or on a  $\overline{A} = \mathbb{X}$ , donc  $\overline{B} = \mathbb{X}$ , i.e.  $B$  est dense dans  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 1.15.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé,  $\Delta$  la diagonale de  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  (c'est-à-dire l'ensemble des  $(x, x)$  où  $x$  parcourt  $\mathbb{X}$ ). Alors  $\Delta$  est fermé dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ .

**Solution 1.15.** Montrons que  $C_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}^\Delta$  est ouvert dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ , c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Soit  $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ . Si  $(x, y) \notin \Delta$ , on a  $x \neq y$ . Puisque  $\mathbb{X}$  est séparé, il existe des voisinages disjoints  $V, W$  de  $x, y$ . Alors  $V \times W$  est un voisinage de  $(x, y)$  dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ , et  $V \times W$  est disjoint de  $\Delta$ , c'est-à-dire contenu dans  $C_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}^\Delta$ . Ainsi,  $C_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}^\Delta$  est voisinage de  $(x, y)$ , d'où  $C_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}^\Delta$  est ouvert, donc  $\Delta$  est fermé.

**Exercice 1.16.** Soit  $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$  un espace topologique produit, et  $a = (a_i, i \in I)$  un point de  $\mathbb{X}$ . Montrer que l'ensemble des points  $b = (b_i, i \in I)$  de  $\mathbb{X}$  tels que  $b_i = a_i$  sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice  $i \in I$ , est dense dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.16.** Soient  $x = (x_i, i \in I)$  et  $a = (a_i, i \in I)$  des points de  $\mathbb{X}$ . Soit l'ensemble

$$S = \{b = (b_i, i \in I), b_i = a_i, \text{ sauf un nombre fini de l'indice } i \in I\}$$

dans  $\mathbb{X}$ , et  $V$  un voisinage de  $x$ . Alors  $V$  contient un ouvert élémentaire  $\prod_{i \in I} V_i$ ,  $V_i$  voisinage ouvert de  $x_i$  dans  $\mathbb{X}_i$  et  $V_i = \mathbb{X}_i$  sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice  $i \in I$ . Soit  $I_1 \subset I$  l'ensemble des  $i \in I$  tels que  $V_i \neq \mathbb{X}_i$ ,

$$I_1 = \{i \in I, V_i \neq \mathbb{X}_i\}.$$

C'est un ensemble fini. Soit  $b = (b_i, i \in I) \in S$  le point de  $\mathbb{X}$  défini par

$$b_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in I_1, \\ a_i & \text{si } i \notin C_I^{I_1} \end{cases}$$

Visiblement,  $b \in \prod_{i \in I} V_i \subset V$ , et  $b_i = a_i$  sauf pour un nombre fini de valeurs de l'indice  $i \in I$ , donc  $V \cap S \neq \emptyset$ , alors  $\overline{S} = \mathbb{X}$ , ce qui prouve le résultat annoncé.

**Exercice 1.17** (Espace de Sierpinski). Soient  $\mathbb{X} = \{0, 1\}$  et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{X}\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$ .
2. Quelles sont les suites dans  $\mathbb{X}$  qui convergent vers 0 ?
3. Quelles sont celles qui convergent vers 1 ?
4. Dans un espace topologique arbitraire, quelles sont les parties dont la fonction indicatrice, à valeurs dans  $\mathbb{X}$ , est continue ?

**Solution 1.17.** 1.  $\mathcal{T}$  contient  $\emptyset$  et  $\mathbb{X}$  et, puisqu'elle ne contient qu'une seule autre partie, elle est stable par intersections (en particulier par intersections finies) et par réunions. C'est donc une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

2. Toute suite dans  $\mathbb{X}$  converge vers 0 puisque  $\mathbb{X}$  est le seul voisinage de 0.
3. Une suite  $(x_n)$  converge vers 1 si et seulement si  $\{1\}$  (seul voisinage de 1 à part  $\mathbb{X}$ ) contient tous les  $x_n$  à partir d'un certain rang.
4.  $1_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  et  $1_A^{-1}(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$  sont toujours des ouverts de  $\mathbb{Y}$ , donc  $1_A$  est continue si et seulement si  $1_A^{-1}(\{1\}) = A$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$ .

**Exercice 1.18.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé.

1. Soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$  une famille finie d'éléments deux à deux disjoints de  $\mathbb{X}$ . Montrer qu'il existe, pour chaque  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), un voisinage  $V_i$  de  $x_i$ , les  $V_i$  étant deux à deux disjoints. Cette propriété subsiste-t-elle pour une famille infinie d'éléments de  $\mathbb{X}$  ?
2. Montrer que toute partie finie de  $\mathbb{X}$  est fermée.

**Solution 1.18.** 1. La propriété est vraie pour  $n = 2$ , d'après la définition même d'un espace séparé. Supposons-la vraie pour  $n \leq p$ , et soient  $\{x_1, \dots, x_{p+1}\}$  une famille de  $p+1$  points deux à deux distincts de  $\mathbb{X}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, pour  $1 \leq i \leq p$ , il existe un voisinage  $W_i$  de  $x_i$ , les  $W_i$  étant deux à deux disjoints. Puisque  $x_i \neq x_{p+1}$ , il existe un voisinage  $U_i$  de  $x_i$  et un voisinage  $Z_i$  de  $x_{p+1}$  vérifiant  $U_i \cap Z_i = \emptyset$ . Pour

$1 \leq i \leq p$ ,  $V_i = W_i \cap U_i$  est un voisinage de  $x_i$ , et  $V_{p+1} = \bigcap_{1 \leq i \leq p} Z_i$  un voisinage de  $x_{p+1}$ , et on vérifie aisément que les  $V_j$ , avec  $1 \leq j \leq p+1$ , sont deux à deux disjoints. La propriété ne subsiste pas en général pour une famille dénombrable de points deux à deux distincts : prenons par exemple  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ . Tout voisinage de  $x_0$  contient une infinité de points  $x_n$  distincts, donc ne saurait être disjoint des voisinages de ces points.

2. Soit  $F = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  une partie finie de  $\mathbb{X}$ , les  $x_i$  étant deux à deux distincts. Soit  $x_n \in C_{\mathbb{X}}^F$ . D'après la question précédente, il existe des voisinages respectifs  $V_1$  de  $x_1$ ,  $V_2$  de  $x_2, \dots$ ,  $V_n$  de  $x_n$  deux à deux disjoints. Donc  $V_n \subset C_{\mathbb{X}}^F$ , ce qui prouve que  $C_{\mathbb{X}}^F$  est ouvert, ou encore que  $F$  est fermé.

**Exercice 1.19.** Soit  $(u_n, n \in \mathbb{N})$  une suite dans un espace topologique  $\mathbb{X}$ . On note  $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble des points de cette suite. Montrer que l'adhérence  $\overline{E}$  de  $E$  est la réunion de  $E$  et de l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n, n \in \mathbb{N})$ .

**Solution 1.19.** Notons  $ad(u_n)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n, n \in \mathbb{N})$ . Nous avons

$$ad(u_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_m, m \geq n\}}.$$

Cela prouve que  $ad(u_n) \subset \overline{E}$ . On a bien sûr aussi  $E \subset \overline{E}$ , et par suite  $(ad(u_n) \cup E) \subset \overline{E}$ . Réciproquement, soit  $x \in \overline{E}$  et  $(v_n, n \in \mathbb{N})$  une suite d'éléments de  $E$  qui converge vers  $x$ . On pose  $V = \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Nous allons considérer séparément deux cas, selon que  $V$  est fini ou infini. Supposons l'ensemble  $V$  fini. La suite  $(v_n)$  est donc constante à partir d'un certain rang et, pour  $n$  assez grand, nous avons  $v_n = x$ , donc  $x \in E$ . Supposons l'ensemble  $V$  infini. Il existe une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{f(n)}$ . On cherche à construire une suite extraite de  $(v_n)$  qui soit aussi une sous-suite de  $(u_n)$ , c'est-à-dire une fonction strictement croissante  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  telle que  $f \circ \varphi$  soit aussi strictement croissante. On définit  $\varphi$  par récurrence. On pose  $\varphi(0) = 0$ . On suppose  $\varphi(n)$  déterminé tel que  $\varphi(n) > \varphi(n-1)$  et  $f \circ \varphi(n) > f \circ \varphi(n-1)$ . Puisque  $V$  est infini, l'ensemble  $f(\mathbb{N})$  est infini et en particulier l'ensemble  $\{p \in \mathbb{N}, f(p) > f \circ \varphi(n)\}$  est infini. On choisit dans cet ensemble un élément, noté  $\varphi(n+1)$ , tel que  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ . On a bien  $f \circ \varphi(n+1) > f \circ \varphi(n)$ . La suite  $v_{\varphi(n)}$  ainsi obtenue est extraite de la suite  $(u_n)$  et converge vers  $x$ , ce qui prouve que  $x \in ad(u_n)$ .

**Exercice 1.20.** Soit  $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}^*\}$  dans la topologie  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ .

1. Calculer  $\sup(A)$  et  $\inf(A)$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\varepsilon > 0$  pour que l'intervalle  $]\frac{1}{(p+1)} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon[$  ne soit pas vide. Montrer qu'alors il ne contient qu'un nombre fini de points de  $A$ .
3. Trouver tous les points d'accumulation de  $A$ .
4. La partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est-elle ouverte ? est-elle fermée ?

**Solution 1.20.** Soit  $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}^*\}$ .

1. On a  $\sup(A) = 2$  et  $\inf(A) = 0$ .
2. Un calcul simple montre que  $]\frac{1}{(p+1)} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon[$  si et seulement si  $\varepsilon < \frac{1}{(2p(p+1))}$ . Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\frac{1}{(p+1)} + \varepsilon < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{p} - \varepsilon$ . La seconde inégalité montre que  $\frac{1}{m} < \frac{1}{p}$  et  $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$ , donc que  $m \geq p+1$  et  $n \geq p+1$ . La première donne alors  $\frac{1}{(p+1)} + \varepsilon < \frac{1}{m} + \frac{1}{(p+1)}$ , donc  $m < \frac{1}{\varepsilon}$ , et de même  $n < \frac{1}{\varepsilon}$ . En résumé, les entiers  $m$  et  $n$  doivent appartenir à l'intervalle  $[p+1, \frac{1}{\varepsilon}[$ . Le couple  $(m, n)$  ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs.
3. Tout point d'accumulation  $x$  de  $A$  vérifie, d'après la question 1,  $0 \leq x \leq 2$ . De plus,  $x$  ne peut pas appartenir à un intervalle de la forme  $]\frac{1}{(p+1)}, \frac{1}{p}[$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , car il existerait alors un  $\varepsilon > 0$  tel que  $]\frac{1}{(p+1)} + \varepsilon, \frac{1}{p} - \varepsilon[$  soit un voisinage de  $x$ , ce voisinage ne contiendrait, d'après 2, qu'un nombre fini d'éléments de  $A$ , ce qui contredirait le fait que  $x$  est point d'accumulation de  $A$ . On voit de même que  $x$  ne peut pas appartenir à l'intervalle  $]1, 2]$ . Seuls peuvent donc être points d'accumulation de  $A$  l'origine 0 et les points de la forme  $\frac{1}{p}$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . On vérifie immédiatement que chacun de ces points est effectivement point d'accumulation de  $A$  :  $\frac{1}{p}$  et 0 sont en effet limites des suites strictement décroissantes de points de  $A$ ,  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ , et  $(\frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ , respectivement.
4. La partie  $A$  n'est pas ouverte car si elle l'était, il existerait un intervalle ouvert non vide dont tous les points seraient points d'accumulation de  $A$ . Elle n'est pas non plus fermée car l'origine 0 appartient à  $\overline{A}$ , mais pas à  $A$ .

**Exercice 1.21.** Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  une application d'un ensemble non vide  $\mathbb{X}$  dans un espace topologique  $\mathbb{Y}$ . Soit  $\mathcal{T}$  la famille des images réciproques par  $f$  des ouverts de  $\mathbb{Y}$ .i.e

$$\mathcal{T} = \{O, O = f^{-1}(U), U \in \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}\}.$$

Montrer que  $\mathcal{T}$  est la famille des ouverts d'une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.21.** 1. La partie vide  $\emptyset$  et  $\mathbb{X}$  étant des ouverts de  $\mathbb{Y}$ , leurs images réciproques, qui sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{X}$ , sont éléments de  $\mathcal{T}$ .

2. Soit  $O_1, O_2$  deux d'éléments de  $\mathcal{T}$ . Alors il existe des ouverts  $U_1, U_2$  de  $\mathbb{Y}$  tel que  $O_1 = f^{-1}(U_1), O_2 = f^{-1}(U_2)$ . on a

$$O_1 \cap O_2 = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2),$$

comme  $U_1 \cap U_2$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$  (intersection d'ouverts de  $\mathbb{Y}$ ), donc  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ .

3. Soit  $(O_i, i \in I)$  une famille d'éléments de  $\mathcal{T}$ . pour chaque  $i \in I$ , il existe un ouvert  $U_i$  de  $\mathbb{Y}$  tel que  $O_i = f^{-1}(U_i)$ . on a

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right),$$

comme  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $\mathbb{Y}$  (réunion d'ouverts de  $\mathbb{Y}$ ), donc  $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

Nous avons montré que  $\mathcal{T}$  vérifie les axiomes des ouverts. c'est donc bien la famille des ouverts pour une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 1.22.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ , et  $1_A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction caractéristique de  $A$  définie par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1. Pour tout sous-ensemble ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , trouver l'image réciproque de  $I$  par  $1_A$ .
2. Montrer que  $1_A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue  $\Leftrightarrow A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.22.** Soit  $1_A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :  $1_A(x) = 1$  si  $x \in A$ , et  $1_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ .

1. Pour tout sous-ensemble ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$1_A^{-1}(I) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 1 \notin I \wedge 0 \notin I, \\ \mathbb{X} & \text{si } 1 \in I \wedge 0 \in I \\ A & \text{si } 1 \in I \wedge 0 \notin I \\ C_{\mathbb{X}}^A & \text{si } 1 \notin I \wedge 0 \in I \end{cases}$$

2.  $1_A$  est continue sur  $\mathbb{X} \Leftrightarrow 1_A^{-1}(I)$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$  pour tout ouvert  $I$  de  $\mathbb{R} \Leftrightarrow \emptyset, \mathbb{X}, A$  et  $C_{\mathbb{X}}^A$  sont ouverts  $\Leftrightarrow A$  est ouvert et fermé.

**Exercice 1.23.** Soit  $f$  une application continue injective sur un espace topologique  $\mathbb{X}$  dans un espace topologique séparé  $\mathbb{Y}$ . Montrer que  $\mathbb{X}$  est séparé.

**Solution 1.23.** Soient  $x, y$  des points distincts de  $\mathbb{X}$  et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application injective continue. Puisque  $f$  est injective, on a  $f(x) \neq f(y)$ . Comme  $\mathbb{Y}$  est séparé, il existe un voisinage  $V$  de  $f(x)$  dans  $\mathbb{Y}$  et un voisinage  $W$  de  $f(y)$  dans  $\mathbb{Y}$  tels que  $V \cap W = \emptyset$ . Alors  $f^{-1}(V)$  et  $f^{-1}(W)$  sont des voisinages disjoints de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{X}$ . Donc  $\mathbb{X}$  est séparé.

**Exercice 1.24.** Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces topologiques quelconques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application continue et  $A, B$  deux parties de  $\mathbb{X}$  ayant même adhérence. Montrer que  $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$ .

**Solution 1.24.**  $f(\overline{A}) = f(\overline{B})$  (car  $\overline{A} = \overline{B}$ ) et  $f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)}$  (car  $f$  est continue) donc  $f(A)$  est inclus dans le fermé  $\overline{f(B)}$ , donc  $\overline{f(A)} \subset \overline{f(B)}$ . Idem en intervertissant  $A$  et  $B$ , d'où l'égalité.

**Exercice 1.25.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur un espace topologique  $\mathbb{X}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (topologie usuelle).

1. Montrer que l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{X}, 1 < f(x) < 2\}$  est ouvert.
2. Montrer que l'ensemble  $B = \{x \in \mathbb{X}, f(x) \leq g(x)\}$  est fermé.

**Solution 1.25.** 1. Comme  $f$  est continue et que l'intervalle  $]1, 2[$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$ , il suit que  $A = f^{-1}(]1, 2[)$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

2. On a clairement  $B = \{x \in \mathbb{X}, f(x) - g(x) \in ]-\infty, 0]\} = (f - g)^{-1}(]-\infty, 0])$ . Or  $f, g$  continues implique que  $f - g$  est continue. Comme  $]-\infty, 0]$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ , il suit que  $B$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 1.26.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues sur un espace topologique  $\mathbb{X}$  et à valeurs dans un espace topologique séparé  $\mathbb{Y}$ .

1. Vérifier que l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{X}, f(x) = g(x)\}$ , est un fermé de  $\mathbb{X}$ .
2. Si  $f = g$  sur une partie dense dans  $\mathbb{X}$ , alors  $f = g$  sur  $\mathbb{X}$ .

**Solution 1.26.** 1. On va montrer que  $C_{\mathbb{X}}^A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ . Soit  $y \in C_{\mathbb{X}}^A$  alors  $f(y) \neq g(y)$ . Puisque  $\mathbb{Y}$  est séparé ils existent des ouverts  $U, V$  dans  $\mathbb{Y}$  tels que  $f(y) \in U$ ,  $g(y) \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ . Donc  $y \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$  est un ouvert dans  $\mathbb{X}$ , car  $f, g$  sont continues et  $U, V$  sont ouverts dans  $\mathbb{Y}$ . De plus l'ouvert  $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset C_{\mathbb{X}}^A$  qui entraîne que  $C_{\mathbb{X}}^A$  est ouvert et donc  $A$  est fermé.

2. Soit  $B$  une partie dense dans  $\mathbb{X}$  telle que pour tout  $x \in B$ , on a  $f(x) = g(x)$ . On en déduit que  $B \subset A$ . Par conséquent, on a  $\mathbb{X} = \overline{B} \subset \overline{A}$ , d'où  $\mathbb{X} = A$  (d'après 1.  $A$  est fermé). Autrement dit, on a  $f = g$  sur  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 1.27.** Soient  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  et  $\mathbb{Z}$  trois espaces topologiques, et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ ,  $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$  des applications.

1. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont ouvertes (resp., fermées), alors  $g \circ f$  est ouverte (resp., fermée).
2. Montrer que si  $g \circ f$  est ouverte (resp., fermée) et si  $g$  est injective et continue, alors  $f$  est ouverte (resp., fermée).
3. Montrer que si  $g \circ f$  est ouverte (resp., fermée) et si  $f$  est surjective et continue, alors  $g$  est ouverte (resp., fermée).

**Solution 1.27.** 1. Pour toute partie  $A$  ouverte (resp., fermée) de  $\mathbb{X}$ , on a  $g \circ f(A) = g(f(A))$  est ouverte (resp., fermée). On en déduit immédiatement le résultat annoncé.

2. Supposons  $g$  injective. Alors pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{X}$ ,  $f(A) = g^{-1}(g \circ f(A))$ . Si de plus  $g$  est continue et  $g \circ f$  ouverte (resp., fermée), pour toute partie ouverte (resp., fermée)  $A$  de  $\mathbb{X}$ ,  $g \circ f(A)$  est ouvert (resp., fermé), ainsi que son image réciproque par  $g$ , donc  $f(A)$  est ouvert (resp., fermé).

3. Supposons  $f$  surjective. Alors pour toute partie  $B$  de  $\mathbb{Y}$ ,  $g(B) = g \circ f(f^{-1}(B))$ . Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet alors de conclure.

**Exercice 1.28.** Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  dans un espace topologique  $\mathbb{Y}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{X}$  telles que  $A \cup B = \mathbb{X}$ . Soient  $f_A$  et  $f_B$  les restrictions de  $f$  à  $A$  et  $B$ .

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont ouverts (resp. fermés) la continuité de  $f_A$  et de  $f_B$  entraîne celle de  $f$ .

**Solution 1.28.** Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathbb{X}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{Y}$ ,  $f^{-1}(U) = f_A^{-1}(U) \cup f_B^{-1}(U)$ , mais  $f_A^{-1}(U)$  est un ouvert de  $A$ , c'est-à-dire un ouvert de  $\mathbb{X}$  contenu dans  $A$ , et de même  $f_B^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$  contenu dans  $B$ . Par suite,  $f^{-1}(U)$  est ouvert comme réunion de deux ouverts. Le raisonnement est analogue si  $A$  et  $B$  sont fermés, en remplaçant  $U$  par une partie fermée de  $F$ .

**Exercice 1.29.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On appelle graphe, épigraphe et typographe de  $f$  les parties  $G, G^+$  et  $G^-$  de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}, \\ G^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > f(x)\}, \\ G^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < f(x)\}. \end{aligned}$$

1. On suppose  $f$  continue. Montrer que  $G^+$  et  $G^-$  sont des ouverts, et  $G$  un fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer  $\overline{G^+}$ ,  $\overline{G^-}$ ,  $Fr(G^+)$ , et  $Fr(G^-)$ .
2. On suppose le graphe  $G$  de  $f$  fermé dans  $\mathbb{R}^2$ . Peut-on en déduire que  $f$  est continue ?
3. Plus généralement, soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application continue d'un espace topologique  $\mathbb{X}$  dans un espace topologique séparé  $\mathbb{Y}$ , et  $G = \{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, y = f(x)\}$ , son graphe. Montrer que  $G$  est fermé dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ .

**Solution 1.29.** 1. L'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x, y) = y - f(x)$  est continue car composée de  $(x, y) \mapsto (f(x), y)$  qui est continue puisque ses deux composantes le sont, et de  $(x, y) \mapsto z - y$ , qui est continue puisque linéaire. Nous avons

$$\begin{aligned} G &= \varphi^{-1}(\{0\}), \\ G^+ &= \varphi^{-1}(]0, +\infty[), \\ G^- &= \varphi^{-1}(]-\infty, 0]), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $G$  est fermé,  $G^+$  et  $G^-$  ouverts.

Tout voisinage d'un point  $(x, y)$  de  $G$  rencontre à la fois  $G^+$  et  $G^-$ , donc  $G \subset Fr(G^+) \cap Fr(G^-)$ . Comme  $G$ ,  $G^+$  et  $G^-$  forment une partition de  $\mathbb{R}^2$ , avec  $G^+$  et  $G^-$  ouverts,  $G = Fr(G^+) = Fr(G^-)$ ,  $\overline{G^+} = G^+ \cup G$ ,  $\overline{G^-} = G^- \cup G$ .

2. Non,  $f$  n'est pas nécessairement continue. Considérons par exemple la application

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^{-1} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Elle n'est pas continue à l'origine. Son graphe  $G$  est réunion de  $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ , qui est fermé puisque image réciproque de  $\{0\}$  par l'application continue  $(x, y) \mapsto xy - 1$ , et du singleton  $G_2 = \{(0, 0)\}$ , qui est fermé puisque  $\mathbb{R}^2$  est séparé. Le graphe  $G$  est fermé puisque réunion de deux fermés.

3. L'application  $\varphi : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ,  $(x, y) \mapsto (f(x), y)$ , est continue car ses deux composantes le sont. La diagonale  $\Delta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}, y_1 = y_2\}$  est une partie fermée de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ , on voit en effet qu'exprimer que son complémentaire est ouvert équivaut à exprimer que  $\mathbb{Y}$  est séparé (voir Exercice 1.15). Le graphe  $G$  de  $f$  n'est autre que  $\varphi^{-1}(\Delta)$ , il est donc fermé.

# Chapitre 2

## Espaces métriques.

Les espaces métriques forment une sous-classe très importante d'espace topologiques particuliers où les ouverts sont définies à l'aide d'une distance. Le terme " métrique" vient du grec metrikos, signifiant " qui peut être mesuré ".

### 2.1 Distance, Espace métrique.

**Définition 2.1** (Espace métrique). Une distance (ou métrique) sur un ensemble  $\mathbb{X}$  est une application :

$$\begin{aligned}d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\(x, y) &\longmapsto d(x, y)\end{aligned}$$

possédant, pour tous  $x, y, z \in \mathbb{X}$ , les propriétés suivantes :

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  ( propriété de séparation).
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  ( propriété de symétrie).
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( inégalité triangulaire).

Muni de la distance  $d$ ,  $\mathbb{X}$  est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace  $(\mathbb{X}, d)$ . Le nombre réel positif  $d(x, y)$  est appelé la distance entre  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{X}$ .

**Définition 2.2** (Sous-espace métrique). Si  $A \subset \mathbb{X}$  alors la restriction de  $d$  à  $A \times A$ , notée  $d_A$ , possède les propriétés de distance ci-dessus. On dit que le couple  $(A, d_A)$  est un sous-espace métrique de  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Remarque 2.1.** Pour montrer qu'un espace est métrique on doit vérifier les 3 conditions ci-dessus. Les deux premières sont faciles, c'est l'inégalité triangulaire qui demande généralement du travail.

**Exemple 2.1.** 1. L'application  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

constitue une distance sur  $\mathbb{R}$ , on l'appelle la distance usuelle de  $\mathbb{R}$  et on la désigne souvent par  $d_u$ .

2. L'application  $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

constitue une distance sur  $\mathbb{C}$ , on l'appelle la distance usuelle de  $\mathbb{C}$  et on la désigne souvent par  $d_u$ .

3. Dans  $\mathbb{K}^n$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on peut alors définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Pour deux éléments arbitraires de  $\mathbb{K}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , alors les applications suivantes

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ et } d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - y_i|,$$

sont des distances sur  $\mathbb{K}^n$ . La distance  $d_2$  est appelée la distance euclidienne sur  $\mathbb{K}^n$ .

4. Soit  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  avec la distance usuelle  $d(x, y) = |x - y|$  et  $A = [a, b]$ , avec  $a \neq b$ , alors  $(A, d_A)$  où  $d_A(x, y) = |x - y|$  pour tout  $x, y \in A$  est un espace métrique. On peut générer ainsi une infinité de sous-espace métriques de  $\mathbb{R}$ .

5. La distance  $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

est appelée la distance discrète. L'espace métrique muni de cette distance est appelé espace métrique discret.

6. Soit  $C[a, b]$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$ , et on définit sur  $C[a, b]$

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|,$$

alors  $(C[a, b], d)$  est aussi un espace métrique.

7. Soit  $\mathbb{X} = C([0, 1], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $f, g \in \mathbb{X}$ , on pose

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Alors  $d$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ .

8. Sur  $\overline{\mathbb{R}}$  la fonction  $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ , où  $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ , et  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  est une distance.

**Proposition. 2.1.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. La distance entre les distances est plus petite que la distance, ie, pour tout  $x, y, z \in \mathbb{X}$ , on a

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

*Démonstration.* D'après les propriétés de distance, on a  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$  et  $d(z, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$ , d'où  $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$  et  $d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y)$ . Par conséquent, on a  $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ . □

## 2.2 Boules dans un espace métrique.

**Définition 2.3** (Boules dans un espace métrique). Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique,  $a \in \mathbb{X}$  et  $r > 0$ .

1. On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(a, x) < r\}.$$

2. On appelle boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(a, x) \leq r\}.$$

3. On appelle sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(a, x) = r\}.$$

**Remarque 2.2.** 1. Notons que l'on a  $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ .

2. Toute boule contient son centre et par conséquent est non vide.

3. Si  $0 < r < s$  alors,

$$\{a\} \subset B(a, r) \subset \overline{B}(a, r) \subset B(a, s).$$

4. Si  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sont toutes des distances sur le même espace  $\mathbb{X}$ , alors on notera les boules par rapport aux différentes distances par  $B_{d_1}(a, r), \overline{B}_{d_1}(a, r), \dots, B_{d_n}(a, r)$ .

**Exemple 2.2.** 1. Si  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  avec la distance usuelle alors :

(a)  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |a - x| < r\} = ]a - r, a + r[.$

(b)  $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |a - x| \leq r\} = [a - r, a + r].$

(c)  $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |a - x| = r\} = \{a - r, a + r\}.$

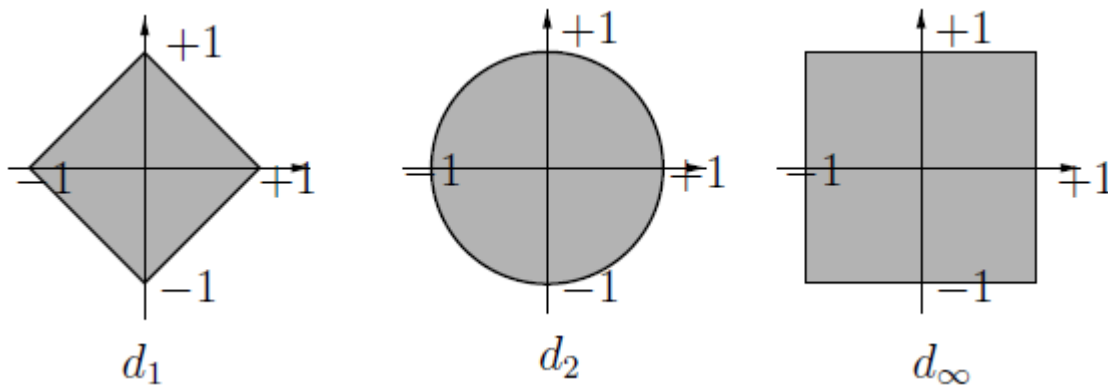
2. Dans  $(\mathbb{X}, \delta)$  l'espace métrique discret, soient  $a \in \mathbb{X}$  et  $r > 0$ , on a

(a) Si  $0 < r < 1$ , on a  $B(a, r) = \overline{B}(a, r) = \{a\}$  et  $S(a, r) = \emptyset$ .

(b) Si  $0r = 1$ , on a  $B(a, r) = \{a\}$ ,  $\overline{B}(a, r) = \mathbb{X}$  et  $S(a, r) = \mathbb{X} - \{a\}$ .

(c) Si  $1 < r$ , on a  $B(a, r) = \overline{B}(a, r) = \mathbb{X}$  et  $S(a, r) = \emptyset$ .

3. Dans  $\mathbb{R}^2$  les boules de centre 0 et de rayon 1 ont la forme suivante :



**Définition 2.4 (Parties bornées).** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .  $A$  est une partie bornée de  $\mathbb{X}$  s'il existe une boule fermée  $\overline{B}(a, r)$  de  $\mathbb{X}$  contenant  $A$ .

$$\forall x \in A, d(x, a) \leq r.$$

**Remarque 2.3.** Compte tenu de la remarque ci-dessus sur les inclusions des boules, il est clair que l'on peut remplacer la boule fermée par la boule ouverte. De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de  $A$  ne dépend pas du choix de  $a$  (avec un  $b$  il suffit de remplacer  $r$  par  $r_0 = r + d(a, b)$ ).

**Définition 2.5 (Suites bornées).** Une suite  $(x_n)_n$  dans  $(\mathbb{X}, d)$  est dite bornée si l'ensemble  $\{x_n, n \geq 0\}$  est borné dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Définition 2.6 (Fonctions bornées).** Soient  $\mathbb{X}$  un ensemble et  $(\mathbb{Y}, d)$  un espace métrique. On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est bornée si son image  $f(\mathbb{X})$  est bornée.

## 2.3 Distance entre deux parties et diamètre.

**Définition 2.7 (Distance entre deux parties).** Soit  $A$  et  $B$  deux parties quelconques d'un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$ . On appelle distance de  $A$  et  $B$ , et l'on note  $\text{dist}(A, B)$  la quantité positive définie par

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

On a évidemment

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A).$$

Si  $A = \{a\}$ , cette distance se nomme distance du point  $a$  à l'ensemble  $B$  et se note :

$$\text{dist}(a, B) = \inf_{y \in B} d(a, y).$$

**Remarque 2.4.** 1. Si  $a \in B$  on a évidemment  $d(a, B) = 0$ .

1. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $(\mathbb{X}, d)$  on a :

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \text{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \text{dist}(A, y).$$

2. Si  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \text{dist}(A, B) = 0$ . La réciproque de l'implication n'est pas toujours vraie. Par exemple, on prend  $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$  et  $B = \{\frac{1}{1+n}, n \in \mathbb{N}\}$  dans la distance usuelle, on a  $d(A, B) = 0$ , et  $A \cap B = \emptyset$ .

3.  $\text{dist}(A, B)$  n'est pas une distance sur l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{X})$  des parties de  $\mathbb{X}$ . Par exemple  $\text{dist}(A, B) = 0$  n'entraîne pas  $A = B$ . Si  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $A = [0, 2]$ ,  $B = [2, 3]$ ,  $\text{dist}(A, B) = 0$  mais  $A \neq B$ .

**Exemple 2.3.** 1. Dans  $(\mathbb{R}, d_u)$ ,  $\text{dist}(a, \mathbb{Q}) = 0$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $A = \emptyset$ ,  $\{d(x, a)\} = \emptyset$ ,  $a \in \emptyset$  et donc  $\text{dist}(x, A) = \inf\{\emptyset\}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m$  est un minorant de  $\emptyset$  si pour tout  $x \in \emptyset$ ,  $m \leq x$ , et donc  $d(x, \emptyset) = +\infty$ .

**Définition 2.8 (Diamètre d'une partie).** On appelle diamètre d'une partie  $A$  de  $\mathbb{X}$ , et l'on note par  $\text{diam}(A)$  ou  $\delta(A)$ , la quantité :

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

**Remarque 2.5.** On vérifie immédiatement qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{X}$  est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

## 2.4 Topologie des espaces métriques.

Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique.

**Définition 2.9 (Partie ouverte dans espace métrique).** Une partie  $O \subset \mathbb{X}$  est ouverte si, pour tout point  $x \in O$ , il existe une boule ouverte  $B(x, r)$  centrée en  $x$  et de rayon non nul incluse dans  $O$ .

$$O \text{ est ouvert dans } \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O.$$

En particulier, la partie vide est ouverte.

**Définition 2.10 (Voisinage d'un espace métrique).** Soit  $V_x$  partie de  $\mathbb{X}$ ,  $V_x$  est un voisinage de  $x \in \mathbb{X} \Leftrightarrow \exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset V_x$ .

**Proposition. 2.2.** 1. La boule ouverte  $B(x, r)$  est un ouvert.

2. La boule fermée  $\overline{B}(x, r)$  et la sphère  $S(x, r)$  sont des fermés.

*Démonstration.* 1. Soit  $B(x, r)$  une boule ouverte et  $y \in B(x, r)$ . Alors  $d(x, y) < r$ . Soit  $r_y > 0$  tel que  $r_y < r - d(x, y)$ . Alors si  $z \in B(y, r_y)$  on a

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r_y + d(y, x) < (r - d(x, y)) + d(y, x) = r.$$

Donc  $z \in B(x, r)$ . Ainsi  $B(y, r_y) \subset B(x, r)$ . Donc  $B(x, r)$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

2.  $\overline{B}(x, r)$  est fermé si et seulement si son complémentaire est un ouvert. Donc, montrons que  $A(x, r) = C_{\mathbb{X}}^{\overline{B}(x, r)} = \{y \in \mathbb{X}, d(y, x) > r\}$  est un ouvert. Si  $y \in A(x, r)$  alors  $d(y, x) > r$  et pour  $0 < \rho < d(y, x) - r$  on a  $B(y, \rho) \subset A(x, r)$ . Donc  $A(x, r)$  est ouvert.

Pour  $S(x, r)$ , il suffit de noter que

$$S(x, r) = \{a \in \mathbb{X}, d(x, a) \leq r\} \cap \{a \in \mathbb{X}, d(x, a) \geq r\},$$

les deux ensembles étant fermés,  $S(x, r)$  est fermé. □

**Proposition. 2.3.** Un ouvert de  $(\mathbb{X}, d)$  est une union quelconque de boules ouvertes.

*Démonstration.* Soit  $O \subset \mathbb{X}$  un ouvert et  $x \in O$ . Comme  $O$  est ouvert,  $\forall x \in O, \exists r_x > 0$  tel que  $B(x, r_x) \subset O$ . Posons  $V = \bigcup_{x \in O} B(x, r_x)$ . Pour tout  $y \in O$  on a  $y \in B(y, r_y)$  et  $B(y, r_y) \subset V$ . Donc  $y \in V$  et on en déduit l'inclusion  $O \subset V$ . De plus,  $O$  contient toute les boules  $B(y, r_y)$  donc leur réunion. D'où  $V \subset O$  et par suite  $O = V$ . □

**Proposition. 2.4.** Soit  $\mathcal{T}_{di}$  la famille des ouverts dans  $\mathbb{X}$ . Alors,  $\mathcal{T}_{di}$  est une topologie sur  $\mathbb{X}$  telle que la famille des boules ouvertes est une base de cette topologie.

*Démonstration.* 1.  $\mathcal{T}_{di}$  est une topologie car

- (a)  $\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{T}_{di}$ .
- (b) Soient  $O = \bigcup_{i \in I} O_i$  et  $x \in O$ . Alors  $\exists i_0 \in I$  tel que  $x \in O_{i_0}$ . Comme  $O_{i_0}$  est ouvert  $\Rightarrow \exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset O_{i_0} \Rightarrow B(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} O_i = O$ . Comme  $x \in O$  était quelconque  $\Rightarrow O$  est ouvert.
- (c) Soit  $x \in O_1 \cap O_2$ . Alors  $x \in O_1$  et  $x \in O_2$ . Comme  $O_1, O_2$  sont des ouverts, il existe  $r_1 > 0, r_2 > 0$  tels que  $B(x, r_1) \subset O_1, B(x, r_2) \subset O_2$ . Soit  $r = \min(r_1, r_2) > 0$ . Alors  $B(x, r) \subset O_1 \cap O_2$ . Donc  $O_1 \cap O_2$  est ouvert.

2. On a  $B(x, r)$  est un ouvert dans  $\mathcal{T}_d$ . De-plus, soit  $O \in \mathcal{T}_d$ , pour tout  $x \in O$ , il existe  $B(x, r_x) \subset O$ . Par conséquent  $\bigcup_{x \in O} B(x, r_x) \supset O$  et d'où le résultat. □

**Définition 2.11 (Topologie associée à une métrique).** La topologie  $\mathcal{T}_d$  est appelée la topologie associée à la distance  $d$ . Un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  sera toujours considéré comme un espace topologique, muni de la topologie  $\mathcal{T}_d$ .

**Exemple 2.4.** 1. si  $\delta$  est la métrique discrète,  $\mathcal{T}_d$  est la topologie discrète. En-effet, pour  $x$  dans  $\mathbb{X}$  on a

$$B(x, r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ avec } r < 1 \text{ et } \{x\} \in \mathcal{T}_d.$$

2. Pour tout point  $x$  de  $\mathbb{X}$ ,  $(B(x, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , forme un système fondamental dénombrable de voisinages de  $x$  dans  $(\mathbb{X}, d)$ , et

$$\mathcal{B} = \left\{ B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{X} \right\},$$

est une base d'ouverts de  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Proposition. 2.5.** Un espace métrique est séparé.

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $\mathbb{X}$ . Posons  $e = d(x, y)$ , on a  $e > 0$ . Les boules ouvertes  $U$  et  $V$  de centres  $x$  et  $y$ , de rayon  $e/3$ , qui sont des voisinages de  $x$  et  $y$  sont disjointes. En effet s'il existait  $a \in U \cap V$ , de  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y)$  on déduirait  $e < e/3 + e/3$ , ce qui est absurde. □

**Définition 2.12 (Convergence de suites dans espace métrique).** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $(x_n)_n$  une suite de  $\mathbb{X}$ . On dit que  $(x_n)_n$  converge vers  $l \in \mathbb{X}$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1, \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in B(l, \varepsilon),$$

et on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$ . Autrement dit, la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $l \in \mathbb{X}$  si, et seulement si, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, l) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.13 (Suites bornées).** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $(x_n)_n$  une suite de  $\mathbb{X}$ . On dit que  $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$  est bornée s'il existe  $a \in \mathbb{X}$  et  $r > 0$  tels que  $d(a, x_n) \leq r, \forall n$ .

**Exemple 2.5.** Soit  $d$  la distance discret défini sur  $\mathbb{R}$ . Si  $(x_n)_n$  converge vers  $l$  dans  $(\mathbb{R}, d)$ , alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0, x_n = l.$$

Par exemple, la suite  $(e^{-n})_n$  ne converge pas dans l'espace métrique discrète, mais  $(e^{-n})_n$  converge vers 0 dans l'espace métrique usuelle.

**Proposition. 2.6.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A \subset \mathbb{X}$ .

1.  $x \in \overset{\circ}{A}$  si et seulement s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .
2.  $x \in \bar{A}$  si et seulement si  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* La démonstration est assez simple et consiste à remplacer les voisinages par les boules, qu'on a vu dans le premier chapitre. □

**Remarque 2.6.** Les propriétés et les définitions de ces points ( Intérieur, extérieur, adhérence, frontière ...), qu'on a vu dans le premier chapitre restent valable dans ce chapitre.

**Proposition. 2.7 (Caractérisation des ensembles à l'aide des suites).** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $F$  une partie de  $\mathbb{X}$ . On a

$$\bar{A} = \left\{ x \in \mathbb{X}, \exists (x_n)_n \subset A, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \right\}.$$

*Démonstration.*  $\supset$ ) On considère un  $x$  appartenant à l'ensemble de droite. Soit  $r > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in B(x, r)$ , pour tout  $n \geq n_0$ . En particulier,  $x_{n_0} \in B(x, r) \cap A$ , donc  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ , d'où  $x \in \bar{A}$ .

$\subset$ ) Soit  $x \in \bar{A}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère un  $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n+1})$ , Alors  $(x_n)_n \subset A$ ,  $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ . □

**Proposition. 2.8.** *A est un fermé si et seulement si pour toute suite convergente  $(x_n)_n \subset A$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Si  $x$  est tel qu'il existe une suite  $(x_n) \subset A$  telle que  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x \in \bar{A} = A$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $x \in \bar{A}$ , il existe une suite  $(x_n) \subset A$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . Par conséquent,  $x \in A$ , et donc  $\bar{A} \subset A$ . Comme on a toujours  $\bar{A} = A$ , donc  $A$  est fermé.  $\square$

**Proposition. 2.9.** *Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{X}$ , et  $a$  un point de  $\mathbb{X}$ . Alors*

1.  $a \in \bar{A}$  si et seulement si  $\text{dist}(a, A) = 0$ .
2.  $a \in \overset{\circ}{A}$  si et seulement si  $\text{dist}(a, C_{\mathbb{X}}^A) > 0$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $x \in \mathbb{X}$ . Si  $x \in \bar{A}$ , alors il existe une suite  $(a_n)_n$  dans  $A$  telle que  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, a_n) = 0$ . Comme pour tout  $n \geq 0$ , on a  $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(a_n, A)| \leq d(x, a_n)$  et  $\text{dist}(a_n, A) = 0$ , alors on a  $\text{dist}(x, A) = 0$ . Réciproquement, supposons que  $\text{dist}(x, A) = 0$ . Comme on a  $\text{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ , alors pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $a_n \in A$  tel que  $d(x, a_n) < \frac{1}{n+1}$ . Par conséquent, la suite  $(a_n)_n$  converge vers  $x$ , d'où on a  $x \in \bar{A}$ .

2. On a  $\overset{\circ}{A} = C_{\mathbb{X}}^{\bar{A}}$ , d'où  $a \in \overset{\circ}{A}$  si et seulement si  $\text{dist}(a, C_{\mathbb{X}}^A) > 0$ .

$\square$

**Proposition. 2.10.**  *$x$  est valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$  si et seulement si il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  de la suite  $(x_n)_n$ , telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = x$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Par définition d'une valeur d'adhérence, l'ensemble  $B(x, 1)$  contient au moins un point de la suite disons  $x_{n_1}$ . Par récurrence, supposons qu'il existe  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  construits tels que  $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$ . L'ensemble  $B(x, \frac{1}{k+1})$  est un voisinage de  $x$ . Donc l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \frac{1}{k+1})\}$  est infini. Donc il existe  $n_{k+1} > n_k$  tel que  $x_{n_{k+1}} \in B(x, \frac{1}{k+1})$ . On construit ainsi une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ . En faisant tendre  $k \rightarrow \infty$ , on obtient alors que  $(x_{n_k})_k$  converge vers  $x$ .

$\Leftarrow$ ) Voir Proposition 1.47.  $\square$

**Définition 2.14 (Topologie métrisable).** *On dit qu'une topologie  $\mathcal{T}$  sur un ensemble  $\mathbb{X}$  est métrisable si on peut trouver une distance  $d$  sur  $\mathbb{X}$  qui donne la topologie  $\mathcal{T}$ , c'est à dire  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ .*

**Remarque 2.7.** *Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est métrisable, alors il existe une infinité de distances permettant de définir la topologie  $\mathcal{T}$ . En-effet, si la distance  $d$  existe, alors pour tout  $r > 0$ , la distance  $d_r = rd$  définie par  $d_r(x, y) = rd(x, y)$  vérifie aussi  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_r}$ .*

**Exemple 2.6.** *Tout espace topologique discret est métrisable, en fait, la distance discrète induit la topologie discrète.*

Il y a au moins deux façons de comparer deux distances définies sur un même ensemble  $\mathbb{X}$ . On peut se contenter de comparer les topologies associées ou faire une comparaison plus quantitative.

**Définition 2.15** (Équivalence de deux distances). *Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$ .*

1. *On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie ( $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ ).*
2. *On dit que  $d_1$  et  $d_2$  sont métriquement équivalentes si il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y).$$

**Proposition. 2.11.** *Soient  $d_1$  et  $d_2$  des distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$ . Notons  $B_1$  (resp  $B_2$ ) les boules ouvertes de l'espace  $(\mathbb{X}, d_1)$  (resp.  $(\mathbb{X}, d_2)$ ). Alors  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles vérifient les deux conditions :*

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall r > 0, \exists r' > 0, B_2(x, r') \subset B_1(x, r).$$

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall r' > 0, \exists r > 0, B_1(x, r) \subset B_2(x, r').$$

*Démonstration.* On constate que la première équation traduit la continuité de l'application  $Id : x \mapsto x$  de l'espace topologique  $(\mathbb{X}, d_1)$  dans l'espace topologique  $(\mathbb{X}, d_2)$ , en tout point  $x \in \mathbb{X}$ . Il en résulte que la première équation à  $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ . De même la deuxième équation équivaut à  $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$ . □

**Proposition. 2.12.** *Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$ . Les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont métriquement équivalentes alors elles sont topologiquement équivalentes.*

*Démonstration.* Soient  $d_1$  et  $d_2$  sont métriquement équivalentes alors  $\forall x, y \in \mathbb{X}, \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$ . Soit  $O$  un ouvert de  $(\mathbb{X}, d_1)$ . Soit  $a \in O$ . Alors  $\exists r > 0$  tel que  $B_{d_1}(a, r) \subset O$ . On pose  $r^* = r\alpha$ . Si  $d_2(a, x) < r^*$ , alors  $d_1(x, a) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, a) < \frac{r^*}{\alpha}$  et donc  $d_1(x, a) < r$ . D'où  $x \in O$ . Ainsi pour  $r^* = r\alpha$  on a

$$B_{d_2}(a, r^*) = \{x \in \mathbb{X}, d_2(x, a) < r^*\} \subset O.$$

Donc  $O$  est ouvert dans  $(\mathbb{X}, d_2)$ . Réciproquement en permutant les rôles de  $d_1$  et  $d_2$  il vient que si  $O$  est un ouvert de  $(\mathbb{X}, d_2)$  alors  $O$  est un ouvert de  $(\mathbb{X}, d_1)$ . Donc  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes.  $\square$

**Exemple 2.7.** 1. Sur  $\mathbb{R}^+$  les distances  $d_1(x, y) = |x - y|$  et  $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$  sont topologiquement équivalentes mais pas métriquement équivalentes.

2. Les distances  $d_1, d_2$  et  $d_\infty$  définies sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes puisque :  $d_\infty \leq d_1 \leq nd_\infty$ ,  $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{n}d_\infty$ , et  $d_2 \leq d_1 \leq nd_2$ .

## 2.5 Continuité uniforme.

**Définition 2.16 (Continuité dans les espaces métriques).** Si  $(\mathbb{X}, d_1), (\mathbb{Y}, d_2)$  sont métriques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est dite continue en  $a \in \mathbb{X}$  si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{X}) : d_1(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

On a vu dans le premier chapitre que la continuité implique la continuité séquentielle et que la réciproque n'est pas vraie. La proposition suivante montre que la continuité et la continuité séquentielle sont équivalentes dans les espaces métriques.

**Proposition. 2.13.** Si  $(\mathbb{X}, d_1), (\mathbb{Y}, d_2)$  sont métriques, soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors,  $f$  est continue si et seulement si  $f$  est séquentiellement continue.

*Démonstration.* Soit  $a \in \mathbb{X}$ .  $\Rightarrow$  Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour le  $\delta$  correspondant, il existe un  $n_0$  tel que  $d_1(x_n, a) < \delta, n \geq n_0$ . Alors  $d_2(f(x_n), f(a)) < \varepsilon, n \geq n_0$ , d'où  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

$\Leftarrow$  Par l'absurde : si  $f$  n'est pas continue en  $a$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un  $x$  tel que  $d_1(x, a) < \delta$  mais  $d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$ . Pour  $\delta = \frac{1}{(n+1)}$ , on trouve un  $x_n$  tel que  $d_1(x_n, a) < \frac{1}{(n+1)}$  et  $d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$ . On a donc  $x_n \rightarrow a$  mais  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ , contradiction.  $\square$

**Définition 2.17 (Continuité uniforme).** Si  $(\mathbb{X}, d_1), (\mathbb{Y}, d_2)$  sont métriques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  est dite uniformément continue si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in \mathbb{X}) : d_1(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

**Remarque 2.8.** 1. Dans la continuité uniforme, on a  $\delta$  ne dépend pas de  $x_0$ . Clairement, la continuité uniforme entraîne la continuité.

2. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.
3. La notion de continuité uniforme, dans des espaces métriques, n'est pas généralisable sur des espaces topologiques quelconques.
4. Les seuls polynômes uniformément continus sont les polynômes du premier degré.

**Définition 2.18** (Applications lipschitzienne, contractante, et isométrie). Soient  $(\mathbb{X}, d_1)$  et  $(\mathbb{Y}, d_2)$  deux espaces métriques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application et  $k$  un réel strictement positif.

1. On dit que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$  (ou simplement  $k$ -lipschitzienne) si :

$$\forall x, x' \in \mathbb{X} : d_2(f(x), f(x')) \leq kd_1(x, x').$$

2. On dit que  $f$  est bilipschitzienne si elle est bijective et chacune des deux applications  $f$  et  $f^{-1}$  est lipschitzienne.
3. On dit que  $f$  est contractante si elle est lipschitzienne de rapport inférieur strictement à 1.
4. On dit que  $f$  est une isométrie si :

$$\forall x, x' \in \mathbb{X} : d_2(f(x), f(x')) = d_1(x, x').$$

En d'autres termes : une isométrie est une application qui conserve les distances.

**Remarque 2.9.** Les fonctions  $k$ -lipschitziennes sont uniformément continues (si  $k = 0$  elles sont constantes. Sinon on pose  $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ ). En particulier, elles sont évidemment continues.

**Remarque 2.10.** 1. On montre aisément que toute isométrie est injective.

2. Il est immédiat que toute isométrie est lipschitzienne de rapport 1, elle est donc uniformément continue sur  $\mathbb{X}$ .
3. La composée de deux isométries est une isométrie.

**Proposition. 2.14.** Soient  $(\mathbb{X}, d_1)$  et  $(\mathbb{Y}, d_2)$  deux espaces métriques,  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Alors  $f$  est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites  $(x_n)_n$  et  $(z_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(x_n, z_n) = 0$ , on ait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_2(f(x_n), f(z_n)) = 0$ .

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ). Soient  $((x_n)_n$  et  $(z_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(x_n, z_n) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x, z \in \mathbb{X}$  vérifiant  $d_1(x, z) < \eta$ , on ait  $d_2(f(x), f(z)) < \varepsilon$ . Comme on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(x_n, z_n) = 0$ , il

existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $d_1(x_n, z_n) < \eta$ , d'où on a  $d_2(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon$ . Par conséquent, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_2(f(x_n), f(z_n)) = 0$ .

$\Leftarrow$ ). Supposons que  $f$  n'est pas uniformément continue. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $x, z \in \mathbb{X}$  tels que  $d_1(x, z) < \eta$  et  $d_2(f(x), f(z)) \geq \varepsilon$ . En prenant,  $\eta = \frac{1}{n}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , on trouve deux suites  $(x_n)_n$  et  $(z_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$  telles que pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $d_1(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$  et  $d_2(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$ . Par conséquent, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(x_n, z_n) = 0$ , mais la suite de réels  $(d_2(f(x_n), f(z_n)))_n$  ne converge pas vers 0 dans  $\mathbb{R}$ . C'est une contradiction.  $\square$

**Exemple 2.8.** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  est continue, mais elle n'est pas uniformément continue. En effet, on pose  $x_n = n + \frac{1}{n}$  et  $y_n = n$ , alors  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ , mais  $f(n + \frac{1}{n}) - f(n) = 2 + \frac{1}{n}$  ne tend pas vers 0.

**Proposition. 2.15.** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$ .

1. Les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont métriquement équivalentes si et seulement si l'application identité  $Id : (\mathbb{X}, d_1) \rightarrow (\mathbb{X}, d_2)$  est bilipschitzienne.
2. Les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité  $Id : (\mathbb{X}, d_1) \rightarrow (\mathbb{X}, d_2)$  est bicontinue.

*Démonstration.* Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$ .

1. L'application  $Id : (\mathbb{X}, d_1) \rightarrow (\mathbb{X}, d_2)$  est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un  $k > 0$  tel que :  $d_2 \leq kd_1$ . De même, son application inverse  $Id^{-1} : (\mathbb{X}, d_2) \rightarrow (\mathbb{X}, d_1)$  est lipschitzienne équivaut à l'existence d'un  $l > 0$  tel que :  $d_1 \leq ld_2$ . On obtient que l'application  $Id : (\mathbb{X}, d_1) \rightarrow (\mathbb{X}, d_2)$  est bilipschitzienne si et seulement s'il existe  $k, l > 0$  tels que :  $\frac{1}{l}d_1 \leq d_2 \leq kd_1$ .
2. L'application  $Id : (\mathbb{X}, d_1) \rightarrow (\mathbb{X}, d_2)$  est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de  $(\mathbb{X}, d_2)$  est un ouvert de  $(\mathbb{X}, d_1)$ , ce qui revient simplement à dire (puisque  $Id$  est l'identité) que  $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$ . On montre de la même façon que l'application inverse  $Id^{-1} : (\mathbb{X}, d_2) \rightarrow (\mathbb{X}, d_1)$  est continue si et seulement si  $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ .  $\square$

## 2.6 Produits d'espaces métriques.

**Proposition. 2.16.** Soient  $(\mathbb{X}_1, d_1), \dots, (\mathbb{X}_n, d_n)$  des espaces métriques et  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$  l'ensemble produit. Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{X}$ , on pose :

$$D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \quad D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}, \quad D_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i).$$

Alors  $D_1, D_2$  et  $D_\infty$  sont trois distances équivalentes sur  $\mathbb{X}$ , et la topologie associée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $D_1$  et  $D_\infty$  sont des distances sur  $\mathbb{X}$ . Vérifions que  $D_2$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ . Il est clair que l'on a  $D_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ , et que  $D_2(x, y) = D_2(y, x)$ . Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour tous  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{X}$ , on a :

$$\begin{aligned} D_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, z_i)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(y_i, z_i)^2} \quad (\text{Minkowski voir exo 2.3}) \\ &= D_2(x, y) + D_2(y, z). \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout  $x, y \in \mathbb{X}$ , on a  $D_\infty(x, y) \leq D_1(x, y) \leq \sqrt{n}D_2(x, y) \leq nD_\infty(x, y)$ . L'inégalité  $D_1(x, y) \leq \sqrt{n}D_2(x, y)$  est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir Exercice 2.3). Donc  $D_1, D_2$  et  $D_\infty$  sont équivalentes. Ainsi, les trois distances  $D_1, D_2$  et  $D_\infty$  définissent la même topologie sur  $\mathbb{X}$ . Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , on note  $B_\infty(x, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  dans  $(\mathbb{X}, D_\infty)$ , et on note  $B_i(x_i, \varepsilon)$  la boule ouverte de centre  $x_i$  et de rayon  $\varepsilon$  dans  $(X_i, d_i)$ . Comme on a  $B_\infty(x, \varepsilon) = B_1(x_1, \varepsilon) \times \dots \times B_n(x_n, \varepsilon)$ , on en déduit que la topologie produit sur  $\mathbb{X}$  coïncide avec la topologie associée à la distance  $D_\infty$ .  $\square$

**Définition 2.19 (Espace métrique produit).** L'espace  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_n$  muni de l'une des distances ci-dessus est dit l'espace métrique produit des espaces métriques  $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ .

## 2.7 Exercices avec Solutions.

**Exercice 2.1.** Soit  $\mathbb{X}$  un ensemble non vide. Soit  $d$  une distance sur  $\mathbb{X}$ . Montrer que  $\delta = \min(1, d)$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ .

**Solution 2.1.** On va vérifier les trois propriétés qui définissent une distance.

1.  $\delta(x, y) = 0 \Rightarrow \min(1, d(x, y)) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ . Aussi, si  $x = y$  alors  $\delta(x, y) = 0$ .
2.  $\min(1, d(x, y)) = \min(1, d(y, x))$  évidemment.
3. A-t-on que  $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ ? On va pour montrer que c'est vrai en distinguant plusieurs cas. Supposons que  $d(x, z) \leq 1$  alors c'est clairement par l'inégalité triangulaire appliquée à  $d(x, z)$ , est vrai. Supposons que  $d(x, z) > 1$ . A-t-on alors  $1 \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ ? C'est clairement oui si  $d(x, y) \geq 1$  ou  $d(y, z) \geq 1$ . Si cela n'est pas le cas et comme  $d(x, z) > 1$  il suffit de remarquer que, puisque par l'inégalité triangulaire,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , on a nécessairement que  $d(x, y) + d(y, z) > 1$ .

**Exercice 2.2.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A, B$  deux parties non vides de  $\mathbb{X}$ . Montrer que

1. Si  $A \subset B$ , alors  $\delta(A) \subset \delta(B)$ .
2. On a  $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$ .
3. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et tout  $r > 0$ , on a  $\delta(B(x, r)) \leq \delta(\overline{B}(x, r)) \leq 2r$ .
4. On a  $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\overline{A}, B) = \text{dist}(A, \overline{B}) = \text{dist}(\overline{A}, \overline{B})$ .
5. On a  $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$ .

**Solution 2.2.** 1. On suppose  $A \subset B$ . Pour tout  $x, y \in A$ , on a  $d(x, y) \leq \delta(B)$ , d'où  $\delta(A) \subset \delta(B)$ .

2. D'après ce qui précède, on a  $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$ . Réciproquement, soient  $x, y \in \overline{A}$ , alors il existe des suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  dans  $A$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ . D'où on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ , or pour tout  $n$  on a  $d(x_n, y_n) \leq \delta(A)$ , d'où  $d(x, y) \leq \delta(A)$ . Par conséquent, on a  $\delta(A) \geq \delta(\overline{A})$ .
3. Puisque  $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$ , on a  $\delta(B(x, r)) \leq \delta(\overline{B}(x, r))$ . Soient  $y, z \in \overline{B}(x, r)$ , alors on a  $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 2r$ , d'où  $\delta(\overline{B}(x, r)) \leq 2r$ .
4. Puisque,  $A \subset \overline{A}$  et  $B \subset \overline{B}$ , alors on a  $\text{dist}(\overline{A}, \overline{B}) \leq \text{dist}(\overline{A}, B) \leq \text{dist}(A, B)$  et  $\text{dist}(\overline{A}, \overline{B}) \leq \text{dist}(A, \overline{B}) \leq \text{dist}(A, B)$ . Soient  $x \in \overline{A}$  et  $y \in \overline{B}$ , alors il existe des

suites  $(a_n)_n, (b_n)_n$  dans  $A$  et  $B$  respectivement telles que  $a_n \rightarrow x$  et  $b_n \rightarrow y$ . D'où on a  $d(a_n, b_n) \rightarrow d(x, y)$ . Or pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\text{dist}(A, B) \leq d(a_n, b_n)$ , d'où  $\text{dist}(A, B) \leq d(x, y)$ . Donc on a  $\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(\overline{A}, \overline{B})$ . Par conséquent,  $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \text{dist}(A, \overline{B}) = \text{dist}(\overline{A}, B)$ .

5. Soient  $x, y \in A \cup B$ . Si  $x, y \in A$  alors  $d(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$ . Si  $x, y \in B$  alors  $d(x, y) \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$ . Supposons que  $x \in A, y \in B$ . Pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$ , on a  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$ . Par conséquent, on a  $d(x, y) \leq \delta(b) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$ , d'où  $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \text{dist}(A, B)$ .

**Exercice 2.3.** Pour tous  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a :

1.

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}).$$

2.

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{inégalité de Minkowski}).$$

**Solution 2.3.** On a :

1.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 - \sum_{i,j=1}^n x_i y_j x_j y_i \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^n (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) - \sum_{i,j=1}^n 2x_i y_j x_j y_i \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2
\end{aligned}$$

**Exercice 2.4.** Soit  $\mathbb{X}$  l'ensemble des suites réelles,  $\mathbb{X} = \{x = (x_n)_n : (x_n)_n \text{ une suite réelles}\}$ .

Pour  $x = (x_n)_n$  et  $y = (y_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$ , on pose

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}.$$

1. Montrer que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ .

2. Montrer que  $(\mathbb{X}, d)$  est borné.

**Solution 2.4.** 1. Soit  $x, y, z \in \mathbb{X}$ , posons  $u_n = \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $0 \leq u_n \leq 1$ , alors

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{|x_n - y_n| + 1} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

donc, l'application  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est bien défini. Il est clair que  $d(x, y) = d(y, x)$  et  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

Posons  $f(t) = \frac{t}{t+1}$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , on vérifie facilement que  $f$  est strictement croissante et que

$$f(t+s) \leq f(t) + f(s), \forall t, s \in [0, +\infty[,$$

alors

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} f(|x_n - y_n|) \\
&\leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} f(|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\
&\leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} f(|x_n - z_n|) + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} f(|z_n - y_n|) \\
&= d(x, z) + d(z, y).
\end{aligned}$$

donc,  $d$  est aussi une distance sur  $\mathbb{X}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{X}$ , on a

$$d(x, 0) = \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{|x_n| + 1} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 1,$$

alors  $x \in \overline{B}_d(0, 1)$ , d'où  $(\mathbb{X}, d)$  est borné.

**Exercice 2.5.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , dessiner les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 pour les distances suivantes :

1.  $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

2.  $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ .

3.  $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ .

**Solution 2.5.** On a, par définition  $B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, d_i(x-0, y-0) = d_i(x, y) < 1\}$  pour  $i = 1, 2, \infty$ . Pour  $d_1$  on obtient un losange s'appuyant sur les points  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$ . Pour  $d_2$  la sphère usuelle centrée en  $(0, 0)$  et de rayon 1. Pour  $d_\infty$  on obtient le carré de coté 1 centré en  $(0, 0)$ . On vérifie sur ces exemples que la notion de boule dépend de la distance choisie.

**Exercice 2.6.** Soient  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  deux suites convergentes dans  $(\mathbb{X}, d)$  respectivement vers  $x$  et  $y$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution 2.6.** On a

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &\leq |d(x, y) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq |d(x, y) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x_n, y_n)| \\ &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n). \end{aligned}$$

Comme on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(y_n, y) = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ .

**Exercice 2.7.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique,  $x \in \mathbb{X}$ , et  $r > 0$ . Soient  $B(x, r)$  est la boule ouverte (est une partie ouverte sur  $\mathbb{X}$ ), et  $\overline{B}(x, r)$  est la boule fermée (est une partie fermée sur  $\mathbb{X}$ ).

1. Montrer les inclusions  $B(x, r) \subset \overbrace{\overline{B}(x, r)}^{\circ}$  et  $\overline{\overbrace{B(x, r)}^{\circ}} \subset \overline{B}(x, r)$ .

2. Soit  $\delta$  la distance discrète sur  $\mathbb{X}$ . Calculer  $B(x, 1)$ ,  $\overline{B}(x, 1)$ ,  $\overline{\overbrace{B(x, 1)}^{\circ}}$  et  $\overbrace{\overline{B}(x, 1)}^{\circ}$ . Vérifier que les inclusions précédentes peuvent être strictes.

**Solution 2.7.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique,  $x \in \mathbb{X}$ , et  $r > 0$ .

1. On a  $B(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$ , et puisque  $B(x, r)$  est une partie ouverte sur  $\mathbb{X}$ , alors

$$B(x, r) = \overbrace{B(x, r)}^{\circ} \subset \overbrace{\overline{B(x, r)}}^{\circ}$$

et puisque  $\overline{B(x, r)}$  est une partie fermée sur  $\mathbb{X}$ , alors

$$\overline{B(x, r)} \subset \overline{\overline{B(x, r)}} = \overline{B(x, r)}$$

2. Si  $\delta$  la distance discrète sur  $\mathbb{X}$ , on a

$$B(x, 1) = \{x\}, \overline{B(x, 1)} = \mathbb{X}, \overline{B(x, 1)} = \{x\}, \overbrace{\overline{B(x, 1)}}^{\circ} = \mathbb{X},$$

donc en générale, on a

$$\overline{B(x, r)} \subsetneq \overline{\overline{B(x, r)}}, B(x, r) \subsetneq \overbrace{\overline{B(x, r)}}^{\circ}.$$

**Exercice 2.8.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique.

1. Montrer que  $d' = \frac{d}{1+d}$  est une distance sur  $\mathbb{X}$  topologiquement équivalente à  $d$ .
2. En prenant  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  au point (1) montrer que  $d$  et  $d'$  ne est pas métriquement équivalents.

**Solution 2.8.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique.

1. Montrons que  $\forall x \in \mathbb{X}, \forall r > 0$  il existe  $r' > 0$  tel que

$$B_{d'}(x, r') \subset B_d(x, r).$$

Pour cela il faut montrer que,  $r > 0$  étant fixé on peut trouver un  $r' > 0$  (assez petit) pour lequel

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < r' \Rightarrow d(x, y) < r.$$

Mais  $d(x, y) < r' + r'd(x, y) \Rightarrow d(x, y)(1 - r') < r' \Rightarrow d(x, y) < \frac{r'}{1+r'}$  et en prenant  $r' > 0$  assez petit on a bien que  $\frac{r'}{1+r'} < r$ . On procède de même pour l'inclusion d'une boule  $B_d(x, r) \subset B_{d'}(x, r)$ .

2. On voit que si  $|x - y| \rightarrow \infty$  alors

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \rightarrow 1.$$

On ne peut donc pas métriquement équivalents (raisonner par l'absurde en posant  $d_1 = d$ ,  $d_2 = d'$  et en supposant que  $\alpha > 0$  existe).

**Exercice 2.9.** Soit  $d_1, d_2$  deux distances sur un ensemble  $\mathbb{X}$  non vide. Montrer que si pour toute suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $\mathbb{X}$  et tout  $x \in \mathbb{X}$  on a la propriété :

$$x_n \rightarrow x \text{ au sens } d_1 \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ au sens } d_2,$$

alors  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes. Est ce que cette condition est nécessaire ?

**Solution 2.9.** On va utiliser le fait que deux distances sont topologiquement équivalentes si elles définissent les mêmes fermés (car alors les ouverts sont les mêmes). Montrons tout d'abord que si  $F$  est un fermé au sens  $d_1$  alors  $F$  est fermé au sens  $d_2$ . Pour cela on va utiliser les suites. Soit  $(x_n)_n \subset F$  tel que  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{X}$  au sens  $d_2$ , il faut montrer que  $x \in F$ . Mais par hypothèse on a alors que  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_1$  et comme  $F$  est un fermé de  $\mathbb{X}$  on a que  $x \in F$ . On conclut par l'unicité de la limite. Les rôles de  $d_1$  et  $d_2$  étant symétrique cela termine la preuve.

Cet exercice montre qu'il est suffisant de montrer que  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_1$  si et seulement si  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_2$  pour prouver que  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes. Clairement la réciproque est vraie car la notion de convergence de suite ne dépend que de la notion d'ouvert.

**Exercice 2.10.** 1. Montrer que  $d : (x, y) \rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$  est une distance sur  $]0, 1[$ .

2. Montrer que  $d$  est topologiquement équivalente sur  $]0, 1[$  à  $d_u$  définie par  $d_u(x, y) = |x - y|$ .

3. Montrer qu'il n'existe pas de distance  $D$  sur  $\mathbb{R}$  topologiquement équivalente à  $d_u$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $D$  et  $d$  coïncident sur  $]0, 1[$ .

**Solution 2.10.** 1. Il convient principalement de vérifier (les deux autres propriétés sont immédiates) que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in ]0, 1[.$$

On a

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| = d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in ]0, 1[.$$

2. Puisque la convergence des suites définit la topologie (voir l'exercice 2.9) il suffit de vérifier que  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d$  si et seulement si  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_u$ . Il est clair que  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d$  implique que  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_u$  car, comme  $|x|, |x_n| < 1$ ,

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{xx_n} \right| \geq |x_n - x|.$$

Réciproquement si  $x_n \rightarrow x$  au sens  $d_u$  alors, pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand ( $x_n$ ) reste bornée loin de zéro, disons que  $x_n \geq \frac{x}{2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand et il vient alors que

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{2}{x^2} |x_n - x|.$$

3. Supposons, par l'absurde, qu'une telle distance  $D$  existe. On considère alors la suite des couples  $\{\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n}\} \subset ]0, 1[$  pour  $n \geq 1$ . Comme  $d$  et  $d_u$  sont topologiquement équivalentes sur  $\mathbb{R}$  et que  $d_u(\frac{1}{2n}, 0) \rightarrow 0$  on a que  $D(\frac{1}{2n}, 0) \rightarrow 0$ . De même  $D(\frac{1}{4n}, 0) \rightarrow 0$ . Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$D(\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n}) \leq D(\frac{1}{2n}, 0) + D(\frac{1}{4n}, 0).$$

Comme, par hypothèse,  $D(\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n}) = d(\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n}) = 2n$  on obtient alors une contradiction.

**Exercice 2.11.** Soit  $A$  une partie non vide d'un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$ . Montrer que, pour tout  $x, y \in \mathbb{X}$ , on a  $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$ . En particulier, l'application  $x \mapsto \text{dist}(x, A)$  est continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution 2.11.** Pour tout  $z \in A$ ,  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , d'où on a :

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) &\leq \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) \\ &= d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) \\ &= d(x, y) + \text{dist}(y, A). \end{aligned}$$

Donc on a  $\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq d(x, y)$ . De même, on a  $\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ . Par conséquent, on a  $|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$ . De plus, l'application  $f(x) = \text{dist}(x, A)$ , est lipschitzienne de rapport 1, alors est continue.

**Exercice 2.12.** Montrer que dans un espace métrique, tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

**Solution 2.12.** Soient  $F$  un fermé d'un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \text{dist}(x, F)$  (continue). Puisque, on a  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{dist}(A, x) = 0$ , alors

$$F = \overline{F} = f^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}\left(] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right),$$

intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 2.13.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $f : (\mathbb{X}, d) \rightarrow (\mathbb{X}, d)$  un homéomorphisme. Montrer qu'alors

$$\delta : (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \delta(x, y) = d(f(x), f(y)),$$

est une distance topologiquement équivalente à  $d$ .

**Solution 2.13.** Soit  $f : (\mathbb{X}, d) \rightarrow (\mathbb{X}, d)$  un homéomorphisme.

1. On a  $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$  ( $f$  est bijective).
2.  $\delta(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = \delta(y, x)$ .
3.  $\delta(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = \delta(x, y) + \delta(y, z)$ .

Donc  $\delta$  est une distance. Pour prouver que  $d$  et  $\delta$  sont topologiquement équivalentes on va utiliser le fait que deux distances  $d_1$  et  $d_2$  sont topologiquement équivalentes si  $(\mathbb{X}, d_1)$  et  $(\mathbb{X}, d_2)$  ont les mêmes suites convergentes (voir l'exercice 2.8). Soit  $x_n \rightarrow x$  dans  $(\mathbb{X}, d)$  (i.e.  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ) alors, par continuité de  $f$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dans  $(\mathbb{X}, d)$ . Autrement dit  $\delta(x_n, x) = d(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$ . Réciproquement si  $\delta(x_n, x) \rightarrow 0$ , i.e.  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dans  $(\mathbb{X}, d)$  on a, par continuité de  $f^{-1}$ ,  $x_n \rightarrow x$  dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Exercice 2.14.** Soit  $F$  un fermé non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $F$  est majoré (respectivement minoré), alors  $\sup F \in F$  (respectivement  $\inf F \in F$ ).

**Solution 2.14.** On suppose, par exemple,  $F$  majoré. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un  $x_n \in F$  tel que  $\sup F - \frac{1}{n+1} < x_n \leq \sup F$ . Il s'ensuit que  $x_n \rightarrow \sup F$ , et donc  $\sup F \in F$ .

**Exercice 2.15.** Soient  $(\mathbb{X}, d_1)$  et  $(\mathbb{Y}, d_2)$  deux espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application. Pour tout  $a, b \in \mathbb{X}$ , on pose

$$d_f(a, b) = d_1(a, b) + d_2(f(a), f(b)).$$

1. Montrer que  $d_f$  est une distance sur  $\mathbb{X}$  et que  $f$  est une application lipschitzienne de  $(\mathbb{X}, d_f)$  dans  $(\mathbb{Y}, d_2)$ .
2. Montrer que  $d_f$  est topologiquement équivalente (resp. équivalente) à  $d_1$  si et seulement si  $f$  est continue (resp. lipschitzienne) de  $(\mathbb{X}, d_1)$  dans  $(\mathbb{Y}, d_2)$ .

**Solution 2.15.** Soit  $d_f(a, b) = d_1(a, b) + d_2(f(a), f(b))$ .

1. Il est clair que  $d_f(a, b) = d_f(b, a)$  et  $d_f(a, b) = 0 \Rightarrow d_1(a, b) = 0 \wedge d_2(f(a), f(b)) = 0 \Rightarrow a = b$ . De-plus, Pour tout  $a, b, c \in \mathbb{X}$

$$\begin{aligned} d_f(a, c) &= d_1(a, c) + d_2(f(a), f(c)) \\ &\leq d_1(a, b) + d_1(b, c) + d_2(f(a), f(b)) + d_2(f(b), f(c)) \\ &= d_f(a, b) + d_f(b, c), \end{aligned}$$

d'où  $d_f$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ .

Pour tout  $a, b \in \mathbb{X}$ , on a  $d_2(f(a), f(b)) \leq d_f(a, b)$ . Donc  $f$  est lipschitzienne de  $(\mathbb{X}, d_f)$  dans  $(\mathbb{Y}, d_2)$ .

2. Pour tous  $a, b \in \mathbb{X}$ , on a  $d_1(a, b) \leq d_f(a, b)$ , donc l'application identique de  $(\mathbb{X}, d_f)$  dans  $(\mathbb{X}, d_1)$  est lipschitzienne. Par conséquent,  $d_f$  est topologiquement équivalente (resp. équivalente) à  $d_1$  si et seulement si l'application identique de  $(\mathbb{X}, d_1)$  dans  $(\mathbb{X}, d_f)$  est continue ( resp. lipschitzienne). Or il est clair que l'application identique de  $(\mathbb{X}, d_1)$  dans  $(\mathbb{X}, d_f)$  est continue (resp. lipschitzienne) si et seulement si l'application  $f$  est continue ( resp. lipschitzienne) de  $(\mathbb{X}, d_1)$  dans  $(\mathbb{Y}, d_2)$ . D'où le résultat.

**Exercice 2.16.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. On munit l'espace produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  de la distance  $D_\infty((x, z), (y, t)) = \max\{d(x, z), d(y, t)\}$ ,  $\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ . Montrer que l'application  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  est lipschitzienne de  $(\mathbb{X} \times \mathbb{X}, D_\infty)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution 2.16.** On a

$$\begin{aligned}
 |d(x, y) - d(z, t)| &= |d(x, y) - d(y, z) + d(y, z) - d(z, t)| \\
 &\leq |d(x, y) - d(y, z)| + |d(y, z) - d(z, t)| \\
 &\leq d(x, z) + d(y, t) \\
 &\leq D_\infty((x, z), (y, t)).
 \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Espaces complets.

Nous allons aborder l'étude d'une classe particulièrement importante d'espaces métriques, c'est-à-dire la complétude est une notion métrique. Dans tout ce chapitre,  $(\mathbb{X}, d)$  désigne un espace métrique muni de la topologie associée à  $d$ .

### 3.1 Suites de Cauchy.

**Définition 3.1 (Suite de Cauchy).** *On appelle suite de Cauchy toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{X}$  vérifiant :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

**Remarque 3.1.** *La définition est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N, d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon.$$

**Proposition. 3.1.** *Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. Alors*

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
3. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
4. *Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.*
5. *Une suite de Cauchy converge si et seulement si elle a une valeur d'adhérence.*

*Démonstration.* 1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ , on ait  $d(x_p, x_q) < 1$ . Soit :

$$r = \max\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Alors  $r \in ]0, +\infty[$  et pour tout  $n \geq 0$ , on a  $x_n \in B(x_N, r)$ . Donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

2. considérons une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers une limite  $l$ . Pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $n_0$  tel que l'on ait

$$\forall n \geq n_0, d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, si  $p$  et  $q$  sont deux entiers plus grands que  $n_0$ , on a

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(x_q, l) \leq \varepsilon.$$

3. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$  et  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ , on ait  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ . On a  $n_k$  une application strictement croissante, d'où pour tout  $k \geq 0$ ,  $n_k \geq k$ . Donc, pour tout  $k, m \geq N$ , on a  $n_k \geq n_N \geq N$  et  $n_m \geq n_N \geq N$ , d'où  $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon$ . Donc  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

4. Soient  $a, b \in \mathbb{X}$  tels que, pour deux sous-suites,  $(x_{n_k})_k$  et  $(x_{n_s})_s$ , on ait  $x_{n_k} \rightarrow a$  et  $x_{n_s} \rightarrow b$ . On suppose par l'absurde  $a \neq b$  et soit  $\varepsilon = d(a, b) > 0$ . Il existe trois entiers,  $n_0, n_1, n_2$ , tels que :  $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$  si  $n, m \geq n_0$ ,  $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{3}$  si  $n \geq n_1$ ,  $d(x_{n_s}, b) < \frac{\varepsilon}{3}$  si  $n \geq n_2$ . Par ailleurs, on a  $x_{n_k} \rightarrow \infty$  et  $x_{n_s} \rightarrow \infty$ , et donc il existe un  $k'$  tel que  $k' \geq n_1$  et  $n_{k'} \geq n_0$ , respectivement un  $s'$  tel que  $s' \geq n_2$  et  $n_{s'} \geq n_0$ . On obtient la contradiction

$$\varepsilon = d(a, b) \leq d(x_{n_{k'}}, a) + d(x_{n_{k'}}, x_{n_{s'}}) + d(x_{n_{s'}}, b) < \varepsilon.$$

5.  $\Rightarrow$ ) Une suite convergente a une valeur d'adhérence (voir Proposition 1.42).

$\Leftarrow$ ) Si  $a$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ , il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  telle que  $x_{n_k} \rightarrow a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un  $n_1$  tel que  $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$  si  $n \geq n_1$ . Avec le  $n_0$  correspondant à  $\frac{\varepsilon}{2}$  dans la définition d'une suite de Cauchy, il existe un  $k' \geq n_1$  tel que  $n_{k'} \geq n_0$ . Pour  $n \geq n_0$ , on trouve

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_{k'}}) + d(x_{n_{k'}}, a) < \varepsilon, n \geq n_0.$$

□

**Exemple 3.1.** 1. La réciproque de 1) est fautive. Dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $x_n = (-1)^n$ , est bornée, mais pas de Cauchy. En-effet,  $d(0, x_n) \leq 1, \forall n$ . Comme 1 et  $-1$  sont des valeurs d'adhérence de  $(x_n)$ , cette suite n'est pas de Cauchy.

2. La réciproque de 2) est fautive. Dans  $\mathbb{Q}$  muni de la distance usuelle dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $(x_n)_n = \frac{E(2^n \sqrt{2})}{2^n}$  est de Cauchy, mais ne converge pas. En-effet, on a  $\frac{E(2^n \sqrt{2})}{2^n} < x_n \leq \frac{1}{2}$ , d'où  $x_n \rightarrow \sqrt{2}$  dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $(x_n)$  est une suite de Cauchy. Par ailleurs,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . L'unicité de la limite implique que  $(x_n)$  ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Remarque 3.2.** On conclure que, si  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente si et seulement si elle possède une sous-suite convergente. Autrement dit, une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$  possédant une valeur d'adhérence est convergente. La valeur d'adhérence est alors unique, c'est la limite de la suite.

**Proposition. 3.2.** Soient  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  deux espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application uniformément continue. Alors pour toute suite de Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ .

*Démonstration.* Soient  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  deux espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application uniformément continue et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est uniformément continue, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x, z \in \mathbb{X}$  vérifiant  $d_{\mathbb{X}}(x, z) < \eta$ , on ait  $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(z)) < \varepsilon$ . Comme  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, q \geq N$ , on ait  $d_{\mathbb{X}}(x_p, x_q) < \eta$ , d'où pour tout  $p, q \geq N$ , on a  $d_{\mathbb{Y}}(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$ . Par conséquent, la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ . □

**Remarque 3.3.** La continuité uniforme est indispensable dans la proposition précédente. En-effet, soient  $\mathbb{X} = ]0, +\infty[$  muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{1}{x}$ , alors  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{X}$  sur  $\mathbb{X}$  et si on note  $x_n = \frac{1}{n}$ , alors  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ , mais  $(f(x_n))_n$  n'est pas de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ .

## 3.2 Espaces métriques complets.

**Définition 3.2 (Espace métrique complet).** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique.

1. Un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy de  $\mathbb{X}$  est convergente.
2. Un sous-ensemble  $A$  de  $(\mathbb{X}, d)$  est dit complet si  $A$  muni de la distance induite est un espace métrique complet.

**Exemple 3.2.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est complet. En-effet, Soient  $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ,  $a_n = \inf A_n$ ,  $b_n = \sup A_n$ . On a  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , car  $A_n$  est borné. Clairement,  $a_n \leq b_n$ ,  $(a_n)$  est croissante,  $(b_n)$

décroissante. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un  $n_0$  tel que  $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$  si  $n, m \geq n_0$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a donc  $A_n \subset [x_{n_0} - \varepsilon/2, x_{n_0} + \varepsilon/2]$ , ce qui implique  $x_{n_0} - \varepsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq x_{n_0} + \varepsilon/2$ ; d'où  $b_n - a_n \leq \varepsilon$ . Il s'ensuit que les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sont adjacentes. Par conséquent, il existe un  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ . Comme  $a_n \leq x_n \leq b_n$ , on trouve  $x_n \rightarrow a$ .

**Exemple 3.3.** 1.  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  n'est pas complet (voir Exemple 3.1).

2. Si  $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ ,  $(\mathbb{R}, d)$  n'est pas complet bien que  $d$  soit topologiquement équivalente à  $|\cdot|$ . En-effet, la suite des entiers naturels est de Cauchy pour  $d$  puisque :

$$d(p, q) = |\arctan p - \arctan q| \rightarrow \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right| = 0,$$

quand  $p$  et  $q \rightarrow +\infty$ , mais la suite ne converge pas dans  $(\mathbb{R}, d)$ , sinon elle convergerait dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , ce qui n'est pas le cas.

3. Considérons  $A = ]0, 1]$  muni de la distance usuelle  $|\cdot|$  et  $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n \subset A$ . Puisque  $x_n \rightarrow 0$  dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  et donc de Cauchy dans  $(A, |\cdot|)$ . Pourtant elle ne converge pas dans  $(A, |\cdot|)$ .

**Proposition. 3.3.** Soient  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  deux espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  un homéomorphisme. Si  $f$  est uniformément continue et si  $\mathbb{Y}$  est complet, alors  $\mathbb{X}$  est complet.

*Démonstration.* Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ . Puisque  $\mathbb{Y}$  est complet, alors D'après,  $(f(x_n))_n$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ , donc elle converge vers un élément  $l \in \mathbb{Y}$ . Puisque  $f^{-1}$  est continue de  $\mathbb{Y}$  dans  $\mathbb{X}$ , alors  $(x_n)_n$  converge vers  $f^{-1}(l) \in \mathbb{X}$ . Donc  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  est complet. □

On va donner la relation entre la complétude et fermeture d'une partie.

**Proposition. 3.4.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique, et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .

1. Si le sous-espace  $(A, d)$  est complet, alors  $A$  est un fermé de  $\mathbb{X}$ .
2. Si  $(\mathbb{X}, d)$  est complet et  $A$  est un fermé de  $\mathbb{X}$ , alors le sous-espace  $(A, d)$  est complet.

*Démonstration.* Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique, et  $A \subset \mathbb{X}$ .

1. Soient  $(x_n) \subset A$  et  $a \in \mathbb{X}$  tels que  $x_n \rightarrow a$ . Alors  $(x_n)$  est une suite de Cauchy, donc convergente (dans  $A$ ) vers un  $b \in A$ . L'unicité de la limite (dans  $\mathbb{X}$ ) implique  $a = b \in A$ . Il s'ensuit que  $\bar{A} \subset A$ , d'où  $A$  fermé.

2. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $A$ . Alors il existe un  $a \in \mathbb{X}$  tel que  $x_n \rightarrow a$  dans  $\mathbb{X}$  (complet). Il s'ensuit que  $a \in \bar{A} = A$ , et donc  $(x_n)$  converge dans  $A$ .

□

**Remarque 3.4.** D'après la proposition précédente, on a

1. dans un espace métrique complet,  $A$  complet  $\Leftrightarrow A$  fermé de  $\mathbb{X}$ .
2. Si  $A$  est dense dans  $\mathbb{X}$  et  $A \neq \mathbb{X}$ , alors  $A$  n'est pas complet.

**Proposition. 3.5.** Soient  $(\mathbb{X}_i, d_i), 1 \leq i \leq n$ , une famille finie d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n$  est complet si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(\mathbb{X}_i, d_i)$  est complet.

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $n$  en se servant de deux espaces.

Supposons que l'espace produit  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$  est complet, avec  $d = \max\{d_1, d_2\}$ . Soient alors  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  deux suites de Cauchy de  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  et  $(\mathbb{X}_2, d_2)$ . Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q > n_0 &\Rightarrow d_1(x_p, x_q) < \varepsilon \wedge d_2(y_p, y_q) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \max\{d_1(x_p, x_q), d_2(y_p, y_q)\} < \varepsilon \\ &\Rightarrow d((x_p, y_p), (x_q, y_q)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc la suite  $((x_n, y_n))_n$  de  $\mathbb{X}$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$ . Puisque  $(\mathbb{X}, d)$  est complet, alors la suite  $((x_n, y_n))_n$  est convergente dans  $(\mathbb{X}, d)$ . En désignant par  $(l_1, l_2) \in \mathbb{X}$  sa limite, on a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 &\Rightarrow d((x_n, y_n), (l_1, l_2)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow d_1(x_n, l_1) < \varepsilon \wedge d_2(y_n, l_2) < \varepsilon, \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite  $(x_n)_n$  converge vers  $l_1$  (dans  $(\mathbb{X}_1, d_1)$ ) et la suite  $(y_n)_n$  converge vers  $l_2$  (dans  $(\mathbb{X}_2, d_2)$ ). D'où la complétude de chacun des espaces métriques  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  et  $(\mathbb{X}_2, d_2)$ . Réciproquement, supposons que les espaces métriques  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  et  $(\mathbb{X}_2, d_2)$  sont complets, soit  $((x_n, y_n))_n$  une suite de Cauchy de  $(\mathbb{X}, d)$ , par hypothèse, on a :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p > q > n_0$  alors

$$d_1(x_p, x_q) < d((x_p, y_p), (x_q, y_q)) < \varepsilon \wedge d_2(y_p, y_q) < d((x_p, y_p), (x_q, y_q)) < \varepsilon.$$

alors  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  deux suites de Cauchy de  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  et  $(\mathbb{X}_2, d_2)$ . Comme chacun des deux espaces métriques  $(\mathbb{X}_1, d_1)$  et  $(\mathbb{X}_2, d_2)$  sont complets, il s'ensuit que chacune de ces deux suites est convergente dans l'espace où elle est définie. Et on déduit aussi que si  $x_n \rightarrow l_1$  et  $y_n \rightarrow l_2$ , alors  $(x_n, y_n) \rightarrow (l_1, l_2)$ . □

**Exemple 3.4.** Pour tout  $n \geq 1$ , les espaces métriques  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont complets.

### 3.3 Prolongement d'une application uniformément continue .

Une propriété fort utile des espaces complets est la possibilité de prolonger des applications uniformément continues définies sur une partie dense.

**Proposition. 3.6 (Théorème de prolongement).** / Soient  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  deux espaces métriques,  $A$  une partie dense dans  $\mathbb{X}$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{Y}$  une application uniformément continue. Si  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  est complet,  $f$  se prolonge de manière unique en une application continue  $\widehat{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ . De plus,  $\widehat{f}$  elle-même est uniformément continue.

*Démonstration.* Si  $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$  sont deux prolongements possibles,  $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$  sur  $A$ , donc  $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$  sur  $\overline{A} = \mathbb{X}$  (voir Exercice 1.26).

Soit  $x \in \mathbb{X}$  et  $(x_n)_n$  une suite de points de  $A$  qui converge vers  $x$  (une telle suite existe puisque  $A$  est dense dans  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ ). La suite  $(x_n)_n$  étant de Cauchy dans  $(A, d)$ , la suite  $(f(x_n))_n$  est aussi de Cauchy dans  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  (puisque  $f$  est uniformément continue), et donc convergente (puisque  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  est complet). l'idée est de poser  $\widehat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ , encore faut-il s'assurer que la limite de la suite  $(f(x_n))_n$  ne dépend pas du choix de la suite  $(x_n)_n$  de points de  $A$  qui converge vers  $x$ . Soit donc  $(x'_n)_n$  une autre suite de points de  $A$  qui converge aussi vers  $x$  dans  $\mathbb{X}$ , les suites  $(x_n)_n$  et  $(x'_n)_n$  sont donc Cauchy et équivalentes dans  $A$ , ce qui implique que leurs images  $(f(x_n))_n$  et  $(f(x'_n))_n$  sont Cauchy et équivalentes dans  $\mathbb{Y}$  puisque  $f : A \rightarrow \mathbb{Y}$  est uniformément continue. Il en résulte immédiatement que ces suites convergent vers la même limite, puisque  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  est complet. L'égalité  $\widehat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$  définit donc sans ambiguïté une application  $\widehat{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  qui prolonge  $f$  à  $\mathbb{X}$  (si  $x \in A$ , on a  $\widehat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$ , puisque  $f$  est continue).

Prouvons que  $\widehat{f}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{X}$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$ , comme  $f$  est uniformément continue sur  $A$ , il existe un  $\eta > 0$  tel que l'on ait  $d_{\mathbb{Y}}(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $a, b \in A$  vérifiant  $d_{\mathbb{X}}(a, b) < 2\eta$ . Considérons alors  $x, y \in \mathbb{X}$  vérifiant  $d_{\mathbb{X}}(x, y) < \eta$ , et montrons que  $d_{\mathbb{Y}}(\widehat{f}(x), \widehat{f}(y)) < \varepsilon$ .  $A$  étant dense dans  $\mathbb{X}$ , il existe deux suites  $(x_n)_n, (y_n)_n$  dans  $A$  qui convergent respectivement vers  $x$  et  $y$ , d'après ce qui précède, on a  $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) < 2\eta$ . Mais comme  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ , on sait qu'il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout entier  $n \geq N$ , on ait  $d_{\mathbb{X}}(x_n, x) < \frac{\eta}{2}$  et  $d_{\mathbb{X}}(y_n, y) < \frac{\eta}{2}$ , donc aussi  $d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) \leq d_{\mathbb{X}}(x_n, x) + d_{\mathbb{X}}(x, y) + d_{\mathbb{X}}(y, y_n) < 2\eta$  et donc aussi  $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Par un passage à la limite, on obtient, en utilisant la continuité de  $d_{\mathbb{Y}}$ ,  $d_{\mathbb{Y}}(\widehat{f}(x), \widehat{f}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

□

**Remarque 3.5.** Soient  $\mathbb{X} = [0, 1]$ ,  $A = [0, 1[$  et l'application  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{R}$  est un espace métrique complet et  $f$  est une application continue, mais  $f$  ne se prolonge pas par continuité sur  $\mathbb{X}$ . Donc l'hypothèse  $f$  est uniformément continue dans le théorème précédent est indispensable.

### 3.4 Théorème du point fixe.

Le théorème du point fixe est un outil fondamental de l'analyse numérique (résolution d'équations par la méthode des approximations successives).

**Définition 3.3** (**[Point fixe]**). Soient  $\mathbb{X}$  un ensemble et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  une application. On dit qu'un point  $x \in \mathbb{X}$  est un point fixe de  $f$  lorsque l'on a  $f(x) = x$ .

**Théorème 3.1** (**Théorème du point fixe**). Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique complet et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  une application contractante. Alors  $f$  possède un unique point fixe  $x \in \mathbb{X}$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord l'unicité. Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$  tels que  $f(x_1) = x_1$  et  $f(x_2) = x_2$ . Alors on a  $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1, x_2)$ , d'où  $0 \leq (1-k)d(x_1, x_2) \leq 0$ . Donc on a  $(1-k)d(x_1, x_2) = 0$ . Or  $1-k \neq 0$ , d'où  $d(x_1, x_2) = 0$ , i.e.  $x_1 = x_2$ .

Montrons l'existence du point fixe. Soit  $x_0 = x \in \mathbb{X}$ , et pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $x_n = f(x_{n-1})$ , i.e.  $x_n = f^n(x_0)$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad p_n.$$

Si  $n = 0$ , on a  $d(x_{n+1}, x_n) = d(x_1, x_0) = k^0 d(x_1, x_0)$ , donc  $(P_0)$  est vraie. Supposons que  $(P_n)$  est vraie, et montrons qu'alors  $(P_{n+1})$  est vraie. On a :

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(f^{n+2}(x_0), f^{n+1}(x_0)) = d(f(f^{n+1}(x_0)), f(f^n(x_0))) \\ &\leq kd(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \\ &= kd(x_{n+1}, x_n) = k^{n+1}d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Donc  $(P_{n+1})$  est vraie. Par conséquent, pour tout  $n \geq 0$ ,  $(P_n)$  est vraie. On a  $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$ , d'où  $d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + \dots + k^n)d(x_1, x_0)$ . Or on a  $k^n + \dots + k^{n+p-1} = \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k}$ , donc  $d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n - k^{n+p}}{1-k}d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x_1, x_0)$ . Comme on a  $k \in [0, 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{1-k}d(x_1, x_0) = 0$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $p \geq 0$ , on ait  $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ . Autrement dit, la suite  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$  qui est complet,

donc il existe  $x \in \mathbb{X}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ . Comme on a  $0 \leq d(f(x), x_n) \leq kd(x, x_{n-1})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f(x), x_n) = d(f(x), x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, x_{n-1}) = d(x, x) = 0$ , alors  $d(f(x), x) = 0$ , i.e.  $f(x) = x$ . Autrement dit,  $x$  est un point fixe de  $f$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** 1. Si  $k = 1$  le théorème est faux, il n'y a ni existence, ni unicité. A titre d'exemples : considérer dans  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  et la fonction  $f(x) = x + 1$ . Alors  $d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y| = d(x, y)$  et il n'existe pas de point fixe.

2. Le théorème est faux si  $(\mathbb{X}, d)$  est non complet. A titre de contre exemple, considérer  $\mathbb{X} = ]0, 1[$  et  $f(x) = \frac{x}{2}$ .

**Proposition. 3.7.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique complet et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ . S'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  telle que  $f^n$  soit contractante, alors  $f$  admet un unique point fixe.

*Démonstration.* Puisque  $(\mathbb{X}, d)$  est complet et  $f^n$  une application contractante, alors  $f^n$  possède un unique point fixe  $x \in \mathbb{X}$ . Comme  $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x)$  on en déduit, par l'unicité du point fixe de  $f^n$ , que  $f(x) = x$  d'où  $x$  est l'unique point fixe de  $f$ .  $\square$

**Proposition. 3.8.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $|f'| \leq k < 1$ , alors  $f$  possède un unique point fixe.

*Démonstration.* On a :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq k|x - y|,$$

et donc  $f$  est 1-Lipschitzienne. Alors  $f$  est une contraction, et puisque  $\mathbb{R}$  est complet on conclut que  $f$  possède un unique point fixe.  $\square$

**Exemple 3.5.** Trouver le nombre des Solutions de l'équation  $\cos x = x$ . On a  $\cos x = x \Rightarrow x \in [-1, 1]$ . Soit  $f : \mathbb{X} = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $f(x) = \cos x$ .  $[-1, 1]$  est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, on a  $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$ ,  $x \in \mathbb{X}$ . Le théorème des accroissements finis implique  $|f(x) - f(y)| \leq \sin(1)|x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{X}$ . Il s'ensuit que l'équation  $\cos x = x$  a exactement une Solution.

## 3.5 Exercices avec Solutions.

**Exercice 3.1.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. Montrer que, si toutes les parties fermées et bornées de  $\mathbb{X}$  sont complètes, alors  $\mathbb{X}$  est complet.

**Solution 3.1.** Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ . Alors  $(x_n)$  est bornée, et donc  $(x_n) \subset \overline{B}(a, r)$  pour un  $a \in \mathbb{X}$  et un  $r > 0$ .  $\overline{B}(a, r)$  étant un fermé borné,  $(x_n)$  converge dans  $\overline{B}(a, r)$ , et donc dans  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 3.2.** Soit  $S$  un ensemble. On note  $\mathcal{B}(S)$  l'ensemble des fonctions  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  bornées sur  $S$ . On pose, pour tous  $f$  et  $g \in \mathcal{B}(S)$ ,  $d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|$ . Montrer que  $d$  est une distance sur  $\mathcal{B}(S)$  et que, pour cette distance, cet espace est complet.

**Solution 3.2.** Les propriétés faisant de  $d$  une distance sur  $\mathcal{B}(S)$  se déduisent immédiatement des propriétés de la valeur absolue dans  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $(\mathcal{B}(S), d)$  est complet. Soit  $(f_n)_n$  une suite dans  $\mathcal{B}(S)$ , de Cauchy pour la distance  $d$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $p$  et  $q \in \mathbb{N}$  vérifiant  $p \geq N$  et  $q \geq N$ , on ait  $d(f_p, f_q) < \varepsilon$ . Pour tout  $x \in S$ , on a  $|f_p(x) - f_q(x)| \leq d(f_p, f_q) < \varepsilon$ , ce qui prouve que la suite réelle  $(f_n(x))_n$  est de Cauchy. Comme  $\mathbb{R}$  est complet, cette suite converge. Soit  $f(x)$  sa limite. On a ainsi défini une fonction  $f$  sur  $S$ . En faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$ , on voit que pour tout  $x \in S$  et tout entier  $p > N$ ,  $|f_p(x) - f(x)| = \lim_{q \rightarrow +\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ , et par suite  $|f(x)| \leq \sup_{y \in S} |f_p(y)| + \varepsilon$ . Cette inégalité prouve que  $f$  est bornée, donc élément de  $\mathcal{B}(S)$ , tandis que l'inégalité précédente exprime que pour  $p > N$ ,  $d(f_p, f) \leq \varepsilon$ , donc que la suite  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  dans  $(\mathcal{B}(S), d)$ . On a ainsi prouvé que cet espace est complet.

**Exercice 3.3** (Fermés emboîtés). Montrer l'équivalence entre :

1.  $(\mathbb{X}, d)$  est complet.
2. Toute suite décroissante de fermés non vides  $F_n$  dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non vide (donc réduite à un point).

**Solution 3.3.** 1.  $\Rightarrow$  2. Choisissons un point  $x_n$  dans chaque  $F_n$ , si  $q > p$ ,  $x_p, x_q \in F_p$  et  $d(x_p, x_q) \leq \text{diam} F_p$ , la suite  $(x_n)_n$  est donc de Cauchy, soit  $x$  sa limite, pour tout  $p$ ,  $x$  est aussi la limite de  $(y_n) = (x_{n+p})$  qui est une suite dans  $F_p$ , donc  $x \in \overline{F_p} = F_p$  et  $\bigcap_1^\infty F_p$  contient  $x$ .

2.  $\Rightarrow$  1. Si  $(x_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ , soit  $A_n = \{x_n, x_{n+l}, \dots\}$  et  $F_n = \overline{A_n}$ ,  $\text{diam} F_n = \text{diam} A_n$  tend vers zéro par l'hypothèse sur  $(x_n)_n$ , l'intersection des  $F_n$  contient donc un point  $x$  tel que  $d(x, x_n) \leq \text{diam} F_n$ , et  $x_n$  tend vers  $x$ .

**Exercice 3.4.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{X}$ . On suppose que  $\exists \alpha > 0$  telle que  $\forall a, b \in A, a \neq b$ , on ait  $d(a, b) \geq \alpha$ . Montrer que  $(A, d)$  est un espace complet. En déduire que  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 3.4.** Soit  $(a_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $A$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $n, m \geq N$ , on ait  $d(a_n, a_m) < \alpha$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq N$ , on a  $a_n = a_N$ . Donc la suite  $(a_n)_n$  converge vers  $a_N \in A$ . Donc  $(A, d)$  est complet, donc  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ . Par exemple pour cette situation, on pose  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ,  $A = \mathbb{Z}$  ou  $A = \mathbb{N}$  et  $\alpha = 1$ .

**Exercice 3.5.** Pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$d(n, m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \text{ si } m \neq n, \text{ et } d(n, n) = 0.$$

1. Montrer que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{N}^*$ .
2. Montrer que  $(\mathbb{N}^*, d)$  est complet. (Induction : on a  $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, d(n, m) \geq 1$ .)
3. Soit  $f(n) = n + 1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $d(f(n), f(m)) < d(n, m)$  si  $n \neq m$  mais que  $f$  n'est pas de contractante.

**Solution 3.5.** Pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$d(n, m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \text{ si } m \neq n, \text{ et } d(n, n) = 0.$$

1. Il est clair que pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , on a  $d(n, m) \geq 0$ ,  $d(n, m) = d(m, n)$  et que  $d(n, m) = 0 \Leftrightarrow n = m$ . Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soient  $n, p$  et  $m$  trois éléments distincts de  $\mathbb{N}^*$ , on a

$$d(n, m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = d(n, p) + d(p, m).$$

Donc  $d$  est bien une distance sur  $\mathbb{N}^*$ .

2.  $(\mathbb{N}^*, d)$  est un complet. Pour tous éléments distincts  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $d(n, m) \geq 1$ . Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{N}^*$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $n, m \geq N$ , on ait  $d(a_n, a_m) < 1$ . Donc  $a_n = a_m$  pour tous  $n, m \geq N$ . Donc la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $a_N \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $(\mathbb{N}^*, d)$  est complet.
3. Soit  $f(n) = n + 1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n \neq m$ , on a

$$d(f(n), f(m)) = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = d(n, m).$$

Comme  $f$  n'admet pas de point fixe, il résulte du théorème de point fixe que  $f$  n'est pas contractante. Une autre manière de montrer que  $f$  n'est pas contractante. Si  $f$  est contractante, il existe  $k \in [0, 1[$  tel que pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $d(f(n), f(n+1)) \leq kd(n, n+1)$ , d'où  $1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \leq k(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$ , et donc on a  $\frac{n+1}{n+2} \leq k$  pour tout  $n \geq 1$ . On en déduit  $1 \leq k$ , ce qui est impossible. Donc  $f$  n'est pas contractante.

**Exercice 3.6.** Soient  $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$  et  $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  deux espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application isométrique. Montrer que l'image par  $f$  d'une partie complète de  $\mathbb{X}$  est fermée dans  $\mathbb{Y}$ .

**Solution 3.6.** Soit  $A \subset \mathbb{X}$  une partie complète. Pour montrer que  $f(A) \subset \mathbb{Y}$  est fermée il faut montrer que pour toute suite  $(y_n) \subset f(A)$  telle que  $y_n \rightarrow y$  il existe  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ . Puisque  $(y_n) \subset f(A)$ ,  $\exists (x_n) \subset A$  tel que  $f(x_n) = y_n$ . Maintenant  $(y_n) \subset f(A)$  est de Cauchy (puisque'elle converge) et  $f$  est une isométrie. Par suite  $(x_n) \subset A$  est aussi de Cauchy. Donc, puisque  $A$  est complet,  $x_n \cup x \in A$ . Finalement, par la continuité de  $f$  (évidente car  $f$  est une isométrie), il vient que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Par l'unicité de la limite on déduit que  $y = f(x)$ .

**Exercice 3.7.** Montrer qu'un espace métrique  $\mathbb{X}$  est complet si et seulement si toute suite  $(u_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$  telle que  $d(u_n, u_{n+1}) \leq 2^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  converge.

**Solution 3.7.** Montrons l'implication directe. Pour cela il convient de montrer que les suites  $(u_n) \subset \mathbb{X}$  telles que  $d(u_n, u_{n+1}) \leq 2^{-n}$  sont de Cauchy. On peut écrire, pour tout  $m \geq n$ ,

$$\begin{aligned} d(u_m, u_n) &\leq d(u_m, u_{m-1}) + \dots + d(u_{n+1}, u_n) \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

et donc  $(u_n) \subset \mathbb{X}$  est bien de Cauchy.

Montrons maintenant l'implication inverse. Pour cela on considère une suite de Cauchy et on montre qu'elle converge. On va utiliser le fait qu'une suite de Cauchy qui contient une sous-suite convergente est convergente. Montrons donc que si  $(u_n) \subset \mathbb{X}$  est une suite de Cauchy on peut trouver une sous-suite, notée  $(u_{n_k})$  telle que  $d(u_{n_{k+1}}, u_{n_k}) \leq 2^{-k}$ . Soit  $n_1 \in \mathbb{N}$  telle que  $d(u_p, u_q) \leq \frac{1}{2}$  si  $p, q \leq n_1$ . On définit par récurrence  $n_{k+1}$  comme le plus petit des entiers strictement plus grand que  $n_k \in \mathbb{N}$  tel que  $d(u_p, u_q) \leq 2^{-(k+1)}$  si  $p, q \geq n_{k+1}$ , la sous-suite ainsi construite répond à la question.

**Exercice 3.8.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. Montrer que, si toutes les parties fermées et bornées de  $\mathbb{X}$  sont complètes, alors  $\mathbb{X}$  est complet.

**Solution 3.8.** Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ . Alors  $(x_n)_n$  est bornée, et donc  $(x_n) \subset \overline{B}(a, r)$  pour un  $a \in \mathbb{X}$  et un  $r > 0$ .  $\overline{B}(a, r)$  étant un fermé borné,  $(x_n)_n$  converge dans  $\overline{B}(a, r)$ , et donc dans  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 3.9.** Dans un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$ , soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , la suite  $(d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f(x)$  sa limite.
2. Montrer que  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.
3. Calculer  $\inf_{x \in \mathbb{X}} f(x)$ . Quand cette limite est-elle atteinte ?
4. Dédurre de ce qui précède que si  $\mathbb{X}$  n'est pas complet, il existe une application  $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et non bornée.

**Solution 3.9.** 1. La suite réelle  $(d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy car  $|d(x, a_p) - d(x, a_q)| \leq d(a_p, a_q)$ . Par complétude de  $\mathbb{R}$ , elle est donc convergente.

2.  $f$  est continue et même 1-lipschitzienne, par passage à la limite dans les inégalités  $|d(x, a_n) - d(y, a_n)| \leq d(x, y)$ .
3.  $\inf_{x \in \mathbb{X}} f(x) = 0$  car  $f(a_n) \rightarrow 0$ . En-effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon$  tel que

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, d(a_n, a_m) \leq \varepsilon,$$

donc (en faisant  $m \rightarrow \infty$  pour  $n$  fixé)  $\forall n \geq N_\varepsilon, f(a_n) \leq \varepsilon$ . Cette limite est atteinte s'il existe un  $x \in \mathbb{X}$  tel que  $f(x) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $a_n \rightarrow x$ , autrement dit si la suite  $(a_n)_n$  converge dans  $\mathbb{X}$ .

4. Dans  $\mathbb{X}$  non complet, soit  $(a_n)_n$  une suite de Cauchy non convergente. L'application continue associée  $f$  a pour inf 0, non atteint. L'application  $g = \frac{1}{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est donc bien définie et continue, mais non majorée.

**Exercice 3.10.** Soit  $\mathbb{X} = ]0 + \infty[$ . Pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{X}$ , on pose

$$\delta(x, y) = |\ln x - \ln y|.$$

1. Vérifier que  $\delta$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ .
2. Soit  $d$  la distance usuelle sur  $\mathbb{X}$ . Montrer que  $d$  et  $\delta$  sont deux distances topologiquement équivalentes ( $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\delta$ ).
3. Montrer que  $(\mathbb{X}, d)$  n'est pas complet.
4. La suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ , est-elle convergente dans l'espace métrique  $(\mathbb{X}, \delta)$ . Est-elle de une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, \delta)$ .
5. Montrer que l'espace métrique  $(\mathbb{X}, \delta)$  est complet.

6. Soit  $f \in C^1(\mathbb{X}, \mathbb{X})$  telle que  $x|f'(x)| \leq kf(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{X}$ , où  $k \in [0, 1[$ . Montrer que  $f$  a un point fixe et un seul dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 3.10.** 1. Il est facile de voir que  $\delta$  est une distance.

2. Par continuité de la fonction  $x \rightarrow \ln x$  sur  $]0 + \infty[$ , montre que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in ]0 + \infty[$ ,  $|x - x_0| < \eta$  implique  $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$  c'est-à-dire  $B_d(x_0, \eta) \subset B_\delta(x_0, \varepsilon)$  donc  $\mathcal{T}_d \supset \mathcal{T}_\delta$ .

Inversement, par continuité de la fonction  $x \rightarrow \exp x$  sur  $]0 + \infty[$ , montre que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in ]0 + \infty[$ ,  $|\ln x - \ln x_0| < \eta$  implique  $|x - x_0| < \varepsilon$  c'est-à-dire  $B_\delta(x_0, \eta) \subset B_d(x_0, \varepsilon)$  donc  $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_\delta$ . D'où  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\delta$ .

3. La suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, d)$  mais ne converge pas dans  $(\mathbb{X}, d)$ , donc  $(\mathbb{X}, d)$  n'est pas complet.

4. Supposons que la suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  converge dans  $(\mathbb{X}, \delta)$ . Il existerait  $l \in \mathbb{X}$  tel que  $|\ln(\frac{1}{n}) - \ln l| = |\ln n + \ln l| \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ce qui est impossible. La suite  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  diverge donc dans  $(\mathbb{X}, \delta)$ . Supposons que  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  soit une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{X}, \delta)$ , il vient

$$|\ln(\frac{1}{n}) - \ln(\frac{1}{m})| = |\ln n - \ln m| \rightarrow 0, n, m \rightarrow +\infty.$$

Cela veut dire que la suite  $(\ln n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  et donc converge, ce qui est absurde.

5. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy de  $(\mathbb{X}, \delta)$ . On a  $|\ln x_n - \ln x_m| \rightarrow 0$ , lorsque  $n, m \rightarrow +\infty$ . Cela montre que la suite  $(\ln x_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  complet, donc  $(\ln x_n)_n$  converge, si  $l$  est sa limite,  $|\ln x_n - l| \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire que  $(x_n)_n$  converge vers  $e^l$  dans  $(\mathbb{X}, \delta)$ .

6. Si  $0 < u < v$ ,

$$\begin{aligned} d[f(u), f(v)] &= |\ln f(v) - \ln f(u)| = \left| \int_u^v \frac{f'(t)}{f(t)} dt \right| \leq \int_u^v \frac{|f'(t)|}{f(t)} dt \\ &\leq \int_u^v \frac{k}{t} dt = k |\ln v - \ln u| = kd(u, v), \end{aligned}$$

donc  $f$  est  $k$ -contractante de  $(\mathbb{X}, d)$  dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Exercice 3.11.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ , non convergente.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{X}$  la suite  $(d(x, x_n))_n \subset \mathbb{R}$  est convergente vers un nombre  $g(x) > 0$ .

2. Montrer que l'application  $x \rightarrow \frac{1}{g(x)}$  est continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que l'application  $x \rightarrow \frac{1}{g(x)}$  n'est pas bornée.

**Solution 3.11.** 1. On va montrer que  $(d(x, x_n)) \subset \mathbb{R}$  est de Cauchy. On a

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n).$$

D'où

$$d(x, x_n) - d(x, x_m) \leq d(x_m, x_n)$$

et en échangeant le rôle de  $n$  et  $m$  on a globalement

$$|d(x, x_n) - d(x, x_m)| \leq d(x_n, x_m).$$

Par suite  $(d(x, x_n))$  est bien de Cauchy et donc elle converge vers un  $g(x) \in \mathbb{R}$ . Maintenant si  $g(x) = 0$  alors  $d(x, x_n) \rightarrow 0$ , c'est à dire que  $x_n \rightarrow x$  et donc que  $(x_n)$  est convergente contrairement à l'hypothèse. Donc  $g(x) > 0$ .

2. Puisque  $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{X}$  il suffit de montrer que  $x \rightarrow g(x)$  est continue. Soit  $(y_m) \cap \mathbb{X}$  tel que  $y_m \rightarrow y$ . Montrons qu'alors  $g(y_m) \rightarrow g(y)$ . On peut écrire, pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$|d(x_n, y_m) - d(x_n, y)| \leq d(y, y_m).$$

En posant à la limite  $n \rightarrow \infty$ , pour  $m \in \mathbb{N}$  fixé il vient

$$|g(y_m) - g(y)| \leq d(y, y_m).$$

En passant à la limite  $m \rightarrow \infty$  il vient alors, puisque  $d(y, y_m) \rightarrow 0$ , que  $g(y_m) \rightarrow g(y)$ .

3. Dire que  $\frac{1}{g(x)}$  est bornée c'est dire que

$$\exists \alpha > 0, g(y) \geq \alpha, \forall y \in \mathbb{X}.$$

Mais puisque  $(x_n) \subset \mathbb{X}$  est une suite de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, d(x_{n_0}, x_n) \leq \frac{\alpha}{2}, \forall n \geq n_0.$$

En prenant  $y = x_{n_0}$  on a  $d(y, x_n) \rightarrow g(y)$  d'où nécessairement  $g(y) \leq \frac{\alpha}{2}$  ce qui est une contradiction.

# Chapitre 4

## Espaces compacts.

**Définition 4.1** (Recouvrement ouvert d'un espace topologique). Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$  est une famille d'ouverts  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de  $\mathbb{X}$  telle que  $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Si  $I$  est un ensemble fini, on dit que  $(A_i)_{i \in I}$  est un recouvrement fini de  $\mathbb{X}$ . De plus si  $\exists J \subset I$  tel que  $\mathbb{X} = \bigcup_{j \in J} A_j$ , on dit que  $(A_j)_{j \in J}$  est un sous-recouvrement de  $(A_i)_{i \in I}$ .

**Proposition. 4.1.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. De tout recouvrement de  $\mathbb{X}$  par une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. De toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés de  $\mathbb{X}$ , dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

*Démonstration.* Vérification immédiate par passage aux complémentaires.

□

**Définition 4.2** (Espace topologique compact). Un espace topologique est dit compact si et seulement s'il est séparé, et s'il vérifie l'assertion (1.) de la proposition 4.1, qui est dite propriété de Borel-Lebesgue.

**Définition 4.3** (Compacité par les suites). Un espace métrique  $\mathbb{X}$  est compact si, de toute suite  $(x_n)_n$  à valeurs dans  $\mathbb{X}$ , on peut extraire une sous-suite convergente, qui est dite propriété de Bolzano-Weierstrass

Autrement dit, un espace métrique  $\mathbb{X}$  est compact si et seulement si toute suite de points de  $\mathbb{X}$  admet une valeur d'adhérence.

**Remarque 4.1.** 1. Il y a la compacité à la Borel-Lebesgue (qui est plus générale puisqu'elle définit la compacité d'un espace topologique quelconque) et la compacité à la Bolzano-Weierstrass (qui est restreinte aux espaces métriques).

2. L'hypothèse de séparation est toujours vérifiée pour les espaces topologiques dans les espaces compacts.

**Exemple 4.1.** 1. Tout espace topologique séparé et fini est compact.

2. L'espace discret est compact si et seulement s'il est fini. En-effet, si  $\mathbb{X}$  est fini, évident  $\mathbb{X}$  est compact. Réciproquement, supposons que  $\mathbb{X}$  est compact. Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , soit  $O_x = \{x\}$ , alors  $(O_x)_{x \in \mathbb{X}}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$ , donc il existe  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{X}$  tels que  $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^p O_i = \{x_1, \dots, x_p\}$ . Par conséquent,  $\mathbb{X}$  est fini.

3.  $\mathbb{R}$  n'est pas compact. Soit  $A_n = ]-n, +\infty[$ .  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un recouvrement par des ouverts, il n'existe pas de sous-recouvrement fini.

**Définition 4.4 (Partie compacte).** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ .  $A$  est dite partie compacte de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  si et seulement si le sous-espace  $(A, \mathcal{T}_A)$  est compact.

En utilisant la définition de la topologie induite, on obtient les caractérisations suivantes :

**Proposition. 4.2.** Soit  $A$  une partie de l'espace topologique séparé  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ . Alors

1.  $A$  est compact si et seulement si, pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $\mathbb{X}$  tels que  $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$  il existe une sous-famille finie  $(A_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$  telle que :

$$A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_{i_k}.$$

2.  $A$  est compacte si et seulement si, pour toute famille  $(F_i)_{i \in I}$  de fermés de  $\mathbb{X}$  tels que  $A \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$ , il existe une sous-famille finie  $(F_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$  telle que :

$$A \cap \left( \bigcap_{1 \leq k \leq n} F_{i_k} \right) = \emptyset.$$

*Démonstration.* 1.  $\Rightarrow$ ) Soit  $(A_i)_{i \in I}$  la famille d'ouverts recouvrant  $A$ . Les  $A_i \cap A$  sont des ouverts de  $A$ . Si  $A$  est compact, alors on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe  $i_k$  fini  $\subset I$  tel que  $\bigcup_{1 \leq k \leq n} (A_{i_k} \cap A) = A$ . Et par conséquent  $A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_{i_k}$ .

$\Leftarrow$ ) Soit  $(\omega_i)_{i \in I}$  la famille d'ouverts de  $A$  telle que  $\bigcup_{i \in I} \omega_i = A$ . Pour tout  $i \in I$ ,  $\omega_i = A_i \cap A$  et donc  $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap A) = A$ , soit encore  $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . Par hypothèse, il existe une sous-famille finie  $(A_{i_k})_{1 \leq k \leq n}$  tel que  $A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_{i_k}$ , ce qui donne  $\bigcup_{1 \leq k \leq n} (A_{i_k} \cap A) = \bigcup_{1 \leq k \leq n} (\omega_{i_k}) = A$ , et par conséquent  $A$  est compact.

2.  $\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  est compact, alors on a

$$A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset \Rightarrow A \subset C_{\mathbb{X}}^{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcup_{i \in I} C_{\mathbb{X}}^{F_i}.$$

puisque  $\{C_{\mathbb{X}}^{F_i}\}_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , on déduit que, il existe une sous-famille finie  $(C_{\mathbb{X}}^{F_{i_k}})_{1 \leq k \leq n}$  telle que :

$$A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} C_{\mathbb{X}}^{F_{i_k}}.$$

D'où  $A \cap \left( \bigcap_{1 \leq k \leq n} F_{i_k} \right) = \emptyset$ .

$\Leftarrow$ ) On a

$$A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_{\mathbb{X}}^{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcup_{i \in I} C_{\mathbb{X}}^{F_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset &\Rightarrow \exists \{i_1, \dots, i_n\}, A \cap \left( \bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \right) = \emptyset \\ &\Rightarrow \exists \{i_1, \dots, i_n\}, A \subset \bigcup_{k=1}^n C_{\mathbb{X}}^{F_{i_k}}, \end{aligned}$$

et puisque  $\{C_{\mathbb{X}}^{F_{i_k}}, k \in \{1, \dots, n\}\}$  est une famille d'ouverts de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  on conclut que  $A$  est compact .

□

**Exemple 4.2.** 1. Dans tout espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , les singletons, et plus généralement les sous-ensembles finis, sont compacts.

2. Dans  $\mathbb{X}$  séparé, soit  $(x_n)$  une suite convergente vers  $a$ , alors

$$A = \{a, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

est compacte. En-effet  $A$  est compacte car si  $a \in V$  avec  $V \in \mathcal{V}(a)$ , alors  $V$  contient tous les éléments de la suite sauf un nombre fini, ce qui montre qu'un nombre fini d'ouverts recouvrira les autres points, et donc  $A$  est compacte.

3.  $A = ]0, 1]$  n'est pas compact dans  $\mathbb{R}$  car  $I_n = ]\frac{1}{n}, 1]$  est une suite d'ouverts de  $A$  recouvrant  $A$  ( $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]\frac{1}{n}, 1]$ ) et dont on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini.

**Définition 4.5 (Partie relativement compacte).** Soient  $\mathbb{X}$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . On dit que  $A$  est relativement compacte si  $\overline{A}$  est compact.

**Proposition. 4.3** (Propriété des fermés emboîtés). Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace compact et  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides. Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* supposons  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ . De (2.) de la proposition 4.1, on déduit l'existence d'une sous-famille finie de  $(F_n)$  d'intersection vide. Mais, la suite  $(F_n)$  étant décroissante, l'intersection d'une telle sous-famille est égale à l'un des  $F_n$  qui n'est pas vide. On aboutit à une contradiction. □

**Proposition. 4.4.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique compact. Alors

1. Toute suite de  $\mathbb{X}$  possède au moins une valeur d'adhérence.
2. Une suite dans  $\mathbb{X}$  est convergente si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence, qui est alors sa limite.

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique compact.

1. Soit  $A_n = \{x_i, i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Alors  $a$  est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  si, pour tout  $n$ ,  $a \in \overline{A_n}$ . L'ensemble des valeurs d'adhérence est  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $A$  est donc l'intersection de la suite décroissante des fermés non vides  $F_n = \overline{A_n}$ , (puisque  $\mathbb{X}$  est compact), donc  $A$  possède au moins un élément.
2. Une suite convergente dans un espace topologique quelconque a une unique valeur d'adhérence.

Supposons maintenant que la suite  $(x_n)_n$  a une unique valeur d'adhérence  $\alpha$ . Procédons par l'absurde et supposons que  $(x_n)$  ne converge pas vers  $\alpha$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $V \in \mathcal{V}(\alpha)$  telle que  $F = C_{\mathbb{X}}^V$  contienne une infinité de termes de la suite. Cette partie  $F$  est fermée dans  $\mathbb{X}$ , donc compacte. On obtient donc une seconde valeur d'adhérence  $\beta \in F$  (et donc avec  $\alpha \neq \beta$ ) pour  $(x_n)_n$ . □

**Exemple 4.3.** Pour  $n \geq 1$ , on pose  $a_{2n} = \frac{1}{2n}$  et  $a_{2n+1} = 2n + 1$ . Alors la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  admet 0 comme unique valeur d'adhérence, mais  $(a_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas dans  $\mathbb{R}$  (car  $\mathbb{R}$  est non compact).

**Proposition. 4.5.** Toute partie infinie  $A$  de  $\mathbb{X}$  compact admet au moins un point d'accumulation.

*Démonstration.* Si  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{X}$  qui ne possède aucun point d'accumulation, alors pour tout  $x \in \mathbb{X}$  il existe un voisinage ouvert  $V_x \in \mathcal{V}(x)$  tel que  $V_x \cap A = \{x\}$  si  $x \in A$ , et  $V_x \cap A = \emptyset$  si  $x \notin A$ . d'où la famille  $\{V_x, x \in \mathbb{X}\}$  est un recouvrement d'ouverts de  $\mathbb{X}$  qui est compact. Donc, on peut extraire un sous-recouvrement fini  $\{V_{x_i}, i = 1, \dots, n\}$  tel que  $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ . Mais,  $A = A \cap \mathbb{X} = A \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n (A \cap V_{x_i})$  et donc  $A$  contient au plus  $n$  éléments ce contredit que  $A$  est infini.  $\square$

**Remarque 4.2.** Dans  $\mathbb{X}$  compact, si  $A = \{(x_n)\}$ , alors  $A$  n'admet pas nécessairement un point d'accumulation, car  $A$  peut être fini ou réduit à un point (cas de suite constante).

**Proposition. 4.6.** Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est compact si et seulement si  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont compacts.

*Démonstration.* Si  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est compact, alors  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont compacts car ils sont les images des projections continues  $P_{\mathbb{X}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{X}$  et  $P_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) = \mathbb{Y}$ .

Supposons que  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont compacts. Soit  $\{O_i, i \in I\}$  un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  ils existent  $U_{(x,y)} \in \mathcal{T}_{\mathbb{X}}$  et  $V_{(x,y)} \in \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}$  tels que  $(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq O_{(x,y)}$  avec  $O_{(x,y)} \in \{O_i, i \in I\}$ . On remarque que pour tout  $x \in \mathbb{X}$  la famille  $\{V_{(x,y)}, y \in \mathbb{Y}\}$  est un recouvrement ouvert de l'espace compact  $\mathbb{Y}$  et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini  $\{V_{(x,y_i)}, i = 1, \dots, n\}$  pour ce dernier. D'autre part, si on prend  $W_x = \bigcup_{i=1}^n U_{(x,y_i)}$  alors la famille  $\{W_x, x \in \mathbb{X}\}$  est un recouvrement ouvert de l'espace compact  $\mathbb{X}$  et donc on peut extraire un sous-recouvrement fini  $\{W_{x_j}, j = 1, \dots, m\}$ . On en déduit que la famille  $\{W_{x_j} \times V_{(x_j,y_i)} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  est un recouvrement fini de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ . Mais, on a :

$$W_{x_j} \times V_{(x_j,y_i)} \subset U_{(x_j,y_i)} \times V_{(x_j,y_i)} \subset O_{(x_j,y_i)}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Donc, la famille  $\{O_{(x_j,y_i)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  ce qui montre que  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est compact.  $\square$

Une conséquence immédiate

**Corollaire 4.7** (Théorème de Tychonoff). Soient  $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$  des espaces topologiques non vides. Alors  $X_1 \times \dots \times X_n$  est compact  $\Leftrightarrow X_1, \dots, X_n$  sont compacts.

## 4.1 Propriétés des espaces topologiques compacts.

**Proposition. 4.8.** *Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique séparé. Alors toute partie compacte de  $\mathbb{X}$  est fermée.*

*Démonstration.* Soit  $A$  est une partie compacte de  $\mathbb{X}$ . Montrons que  $C_{\mathbb{X}}^A$  est ouvert, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Soit  $x \in C_{\mathbb{X}}^A$  et  $a \in A$ . Comme  $\mathbb{X}$  est séparé, alors il existe  $O_a$  ouvert  $\in \mathcal{V}(a)$  et il existe  $V_a \in \mathcal{V}(x)$  tels que  $O_a \cap V_a = \emptyset$ . Maintenant  $A \subset \bigcup_{a \in A} O_a$  compacte, donc il existe  $B$  fini  $\subset A$  tel que  $A \subset \bigcup_{a \in B} O_a$ . Soit alors  $V = \bigcap_{a \in B} V_a \in \mathcal{V}(x)$  (car intersection finie). Comme  $V \cap A = \emptyset$ , alors  $V \subset C_{\mathbb{X}}^A$ , soit encore  $C_{\mathbb{X}}^A \in \mathcal{V}(x)$  et donc  $C_{\mathbb{X}}^A$  est ouvert, c'est-à-dire  $A$  fermé. □

**Proposition. 4.9.** *Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique compact. Alors toute partie fermée de  $\mathbb{X}$  est compacte.*

*Démonstration.* Soit  $A$  est une partie fermée de  $\mathbb{X}$ . Alors, si  $\{F_i, i \in I\}$  est une famille de fermés de  $\mathbb{X}$  telle que  $A \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \emptyset$ , on obtient  $\bigcap_{i \in I} (A \cap F_i) = \emptyset$ . Puisque  $\mathbb{X}$  est compact, il existe  $J$  (fini)  $\subset I$  tel que  $\emptyset = \bigcap_{i \in J} (A \cap F_i) = A \cap (\bigcap_{i \in J} F_i)$ . Donc,  $A$  est compact. □

**Remarque 4.3.** 1. *D'après les propositions précédentes, on voit que dans un espace topologique compact, on a équivalence entre partie fermée et partie compacte.*

2. *Toute partie fermée incluse dans une partie compacte d'un espace topologique est, elle-même, compacte.*

3. *Toute partie non vide d'un espace compact est relativement compacte.*

4. *Toute partie compacte est relativement compacte.*

Voici une nouvelle propriété de stabilité de la compacité, très utile dans la pratique.

**Proposition. 4.10.** *Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces topologiques, avec  $\mathbb{Y}$  séparé, et  $f$  une application continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$ . Alors*

1. *L'image par  $f$  de toute partie compacte de  $\mathbb{X}$  est une partie compacte de  $\mathbb{Y}$ .*

2. *Si  $\mathbb{X}$  est compact, alors  $f$  est une application fermée.*

3. *Si  $\mathbb{X}$  est compact et si  $f$  est bijective, alors  $f$  est un homéomorphisme.*

- Démonstration.* 1. Soient  $A$  est compact de  $\mathbb{X}$ , avec  $f(A) = B$ .  $B$  étant séparé par hypothèse, considérons une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $B$  tels que  $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ .  $f$  étant continue,  $f^{-1}(A_i)$  est un ouvert de  $A$ . D'autre part  $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = A$ . On dispose donc d'un recouvrement ouvert de  $A$ , on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $(f^{-1}(A_i))_{i \in J}$ . De  $\bigcup_{i \in J} f^{-1}(A_i) = A$  on déduit  $f(A) \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ .
2. Soit  $\mathbb{X}$  est compact. Soit  $F$  une partie fermée de  $\mathbb{X}$ , alors  $F$  est une partie compacte de  $\mathbb{X}$ , donc  $f(F)$  est une partie compacte de  $\mathbb{Y}$ . On déduit que  $f(F)$  est une fermée de  $\mathbb{Y}$ . Par conséquent,  $f$  est une application fermée.
3. Ceci résulte de 2. □

## 4.2 Propriétés des espaces métriques compacts.

**Proposition. 4.11.** *Un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  compact est complet.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace compact. Alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est donc convergente, par conséquent,  $(\mathbb{X}, d)$  est complet. □

**Remarque 4.4.** *La réciproque de la proposition précédente est fausse. En-effet :  $\mathbb{R}$  est complet mais non compact*

**Proposition. 4.12.** *Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.*

*Démonstration.* Comme on a  $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, 1)$  et  $A$  est compacte, alors il existe un sous-ensemble fini  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de  $A$  tel que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, 1)$ . Soit  $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} d(a_1, a_i)$ , alors on a  $A \subset B(a_1, \alpha + 1)$ . Donc  $A$  est bornée. □

**Proposition. 4.13.** *Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .*

1. [Bolzano-Weierstrass.] *Tout intervalle fermé et borné de  $\mathbb{R}$  est compact.*
2. *Les parties compactes de  $\mathbb{R}$  sont les parties fermées et bornées.*

*Démonstration.* 1. Montrons que  $[a, b]$  est compact. Il est clair que  $[a, b]$  est séparé. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille de parties ouvertes de  $\mathbb{R}$  recouvrant  $[a, b]$ . Soit  $A$  l'ensemble des  $x \in [a, b]$  tels que  $[a, x]$  soit recouvert par un nombre fini de parties  $U_i$ . L'ensemble  $A$  est non vide car  $a \in A$ . Il est contenu dans  $[a, b]$ , donc il est majoré. Soit  $m$  sa borne supérieure. On a  $a \leq m \leq b$ . Il existe  $J \in I$  tel que  $m \in U_j$ . Puisque  $U_j$  est ouvert

dans  $\mathbb{R}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $[m - \varepsilon, m + \varepsilon] \subset U_j$ . Puisque  $m$  est la borne supérieure de  $A$ , il existe  $x \in A$  tel que  $m - \varepsilon < x \leq m$ . Alors  $[a, x]$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$  et  $[x, m + \varepsilon] \subset U_j$ , donc  $[a, m + \varepsilon]$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$ . Si  $m < b$ , on voit, en diminuant au besoin  $\varepsilon$  de manière que  $m + \varepsilon \in [a, b]$ , que  $m + \varepsilon \in A$ , ce qui contredit la définition de la borne supérieure. Donc  $m = b$ , et  $[a, b]$  est recouvert par un nombre fini de  $U_i$ .

2. Soit  $A$  une partie compacte de  $\mathbb{R}$ . Alors  $A$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ . D'autre part, il est clair que

$$A \subset \bigcup_{x \in A} ]x - 1, x + 1[,$$

donc  $A$  est recouvert par un nombre fini d'intervalles  $]x_i - 1, x_i + 1[$ , donc est borné. Soit  $B$  une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$ . Il existe un intervalle  $[a, b]$  tel que  $B \subset [a, b]$ . Alors  $[a, b]$  est compact,  $B$  est fermé dans  $[a, b]$ , donc compact. □

**Remarque 4.5.** *D'après la proposition précédente, on a équivalence entre,  $A$  relativement compacte et  $A$  bornée.*

**Proposition. 4.14.** *Soient non vide,  $f$  une fonction continue réelle sur  $\mathbb{X}$ . Alors  $f$  est bornée, et atteint ses bornes inférieure et supérieure.*

*Démonstration.* On a  $\mathbb{X}$  est compact, alors  $f(\mathbb{X})$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ , donc une partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f(\mathbb{X})$  est bornée,  $f$  est bornée. Puisque  $f(\mathbb{X})$  est de plus fermée,  $f(\mathbb{X})$  possède un plus petit et un plus grand élément. Si, par exemple,  $f(x_0)$  est le plus grand élément de  $f(\mathbb{X})$ ,  $f$  atteint sa borne supérieure en  $x_0$ . □

**Proposition. 4.15.** *Si  $f : (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \rightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$  est continue et  $\mathbb{X}$  est compact, alors  $f$  est uniformément continue.*

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n, y_n \in \mathbb{X}$  tels que  $d_{\mathbb{X}}(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$  et  $d_{\mathbb{Y}}(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$ . La suite  $(x_n, y_n)_n$  est une suite de  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  qui est compact. Soit  $(x_{n_k}, y_{n_k})_k$  une sous-suite convergente qui converge vers  $(a, b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ . Comme  $d_{\mathbb{X}}(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $a = b$ . La fonction  $f$  est continue, on a  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(a)$  et  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(b) = f(a)$  ce qui est impossible. □

**Définition 4.6 (Espace métrique précompact).** 1. *Un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  est dit précompact si, pour tout  $r > 0$ , il existe un recouvrement fini de  $\mathbb{X}$  par des boules de*

rayon  $r$ . ie

$$\forall r > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}, \mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r).$$

2. On dit que une partie  $A$ , dans  $\mathbb{X}$ , est précompacte si

$$\forall r > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in A, A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r).$$

**Remarque 4.6.** 1. Toute partie précompacte est bornée. En-effet, si  $A$  est précompact, alors pour tout  $r > 0$  ils existent  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Donc

$$\text{diam}A \leq \sum_{i=1}^n \text{diam}B(x_i, r) = 2nr.$$

2. Tout espace métrique compact est précompact. En-effet, soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique compact et  $r > 0$ . Comme  $(B(x, r))_{x \in \mathbb{X}}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$ , alors il existe  $x_1, \dots, x_n, \mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Par conséquent,  $(\mathbb{X}, d)$  est un espace précompact.

**Proposition. 4.16.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . Alors

1. Si  $(\mathbb{X}, d)$  est précompact, alors  $A$  est précompact.
2. Si  $A$  est précompact, alors  $\overline{A}$  est précompact.

*Démonstration.* 1. Par définition.

2. Supposons que  $A$  est précompact donc pour tout  $r > 0$  ils existent  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r)$ . Si  $y \in \overline{A} - A$ , alors  $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ , il existe donc  $z \in B(x_k, r) \cap A$  pour un certain  $x_k$ . On a  $d(y, x_k) \leq d(y, z) + d(z, x_k) \leq 2r$  donc  $y \in B(x_k, 2r)$ . Donc  $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 2r)$  qui montre que  $\overline{A}$  est précompact. □

**Proposition. 4.17.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique précompact. Alors  $\mathbb{X}$  est séparable.

*Démonstration.* Si  $\mathbb{X}$  est précompact, alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe un sous-ensemble fini  $D_n$  de  $\mathbb{X}$  tel que  $\mathbb{X} = \bigcup_{x \in D_n} B(x, \frac{1}{n})$ . Soit  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$ , alors  $D$  est dénombrable. Soient  $y \in \mathbb{X}$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $n \geq 1$  tel que  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Comme on a  $\mathbb{X} = \bigcup_{x \in D_n} B(x, \frac{1}{n})$ , il existe  $x \in D_n \subset D$  tel que  $y \in B(x, \frac{1}{n})$ , d'où  $d(y, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ . Donc  $D$  est dense dans  $\mathbb{X}$ . Par conséquent,  $(\mathbb{X}, d)$  est séparable. □

**Remarque 4.7.** En particulier, tout espace métrique compact est séparable car, tout espace métrique compact est précompact.

**Proposition. 4.18** ((Lebesgue)). *Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique possède la propriété de Bolzano-Weierstrass et  $(O_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$ . Alors, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{X}$  la boule  $B(x, r)$  est contenue dans l'un des ouverts  $O_i$ .*

On va donner le résultat fondamental de la compacité d'un espace métrique.

**Proposition. 4.19.** *Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mathbb{X}$  est compact.
2. L'espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  est précompact et complet.
3. Toute partie infinie de  $\mathbb{X}$  possède au moins un point d'accumulation.
4. Toute suite de  $\mathbb{X}$  possède une sous-suite convergente.

*Démonstration.* - 1.  $\Rightarrow$  2. Puisque  $\mathbb{X}$  est compact, d'après la remarque 4.6,  $(\mathbb{X}, d)$  est précompact, et par la proposition 4.11,  $\mathbb{X}$  est complet.

- 2.  $\Rightarrow$  1. Soit  $G = \{O_i, i \in I\}$  un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$ . Puisque  $\mathbb{X}$  est précompact, alors pour tout  $r > 0$  ils existent  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$  tels que  $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r)$ . Mais, pour tout  $1 \leq k \leq n$  il existe  $O_k \in G$  tel que  $x_k \in O_k$ . Donc, il suffit de choisir  $r > 0$  tel que  $B(x_k, r) \subset O_k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$  ( par le proposition 4.18, et  $\mathbb{X}$  est complet). On en déduit que  $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r) \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$ , ce qui montre que la famille  $\{O_k, k = 1, \dots, n\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $\mathbb{X}$  et donc compact.

- 1.  $\Rightarrow$  3. Voir Proposition 4.5.

- 3.  $\Rightarrow$  4. Soit  $(x_n)_n$  une suite dans  $\mathbb{X}$ , on distingue deux cas :

Premier cas : l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est fini. Alors il existe  $x \in \mathbb{X}$  et une partie infinie  $D$  de  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in D$ , on ait  $x_n = x$ . Soit  $\varphi(0)$  le plus petit élément de  $D$ , et par récurrence,  $\varphi(n+1)$  le plus petit élément de  $D$  strictement plus grand que  $\varphi(n)$ . Alors  $(x_{\varphi(n)})_n$  sous-suite de  $(x_n)_n$  qui converge vers  $x$ .

Deuxième cas : l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est infini. Par hypothèse, cet ensemble possède un point d'accumulation noté  $y$ . Vérifions que  $y$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Soient  $C = \{d(y, x_n), 0 \leq n \leq N, x_n \neq y\} \cup \{\varepsilon\}$  et  $\varepsilon' = \inf(C)$ , alors  $\varepsilon' > 0$ . Comme  $y$  est un point d'accumulation de l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ , il existe  $x_n \in B(y, \varepsilon') - \{y\}$ , d'où  $n > N$ . Ainsi, pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n > N$  tel que  $x_n \in B(y, \varepsilon)$ . Donc  $y$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_n$ .

- 1.  $\Rightarrow$  4. Voir Proposition 4.4, puisque toute suite d'éléments de  $(\mathbb{X}, d)$  admet une valeur d'adhérence (i.e de toute suite d'éléments de  $(\mathbb{X}, d)$  on peut extraire une sous-suite convergente).
- 4.  $\Rightarrow$  1. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $\mathbb{X}$ . Par la proposition 4.18, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , il existe  $i \in I$  pour lequel  $B(x, r) \subset U_i$ . Supposons qu'il n'existe pas de sous-ensemble  $J$  de  $I$  tel que  $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in J} U_i$ . Alors pour toute partie finie  $B$  de  $\mathbb{X}$ , comme  $\bigcup_{x \in B} B(x, r)$  est inclus dans un nombre fini d'ouverts est  $U_i$ , il existe  $y \in \mathbb{X}$  tel que  $d(x, y) \geq r$  pour tout  $x \in B$ . On choisit un point  $x_0 \in \mathbb{X}$ , puis un point  $x_1 \in \mathbb{X}$  tel que  $d(x_0, x_1) \geq r$ , puis un point  $x_2 \in \mathbb{X}$  que tel  $d(x_0, x_2) \geq r$  et  $d(x_1, x_2) \geq r$  et, par récurrence, une suite  $(x_n)_n$  dans  $\mathbb{X}$  telle que pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $p \neq q$  on ait  $d(x_p, x_q) \geq r$ . Par conséquent, la suite  $(x_n)_n$  n'admet aucune sous-suite convergente, c'est une contradiction. Donc il existe bien un sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  tel que  $\mathbb{X} = \bigcup_{i \in J} U_i$ .

□

**Proposition. 4.20.** *Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $A$  est relativement compacte.
2. Il existe une partie compacte de  $\mathbb{X}$  contenant  $A$ .
3. Toute suite dans  $A$  possède une sous-suite convergente dans  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* - L'implication 1.  $\Rightarrow$  2.) est triviale,  $\bar{A}$  la partie compacte de  $\mathbb{X}$  contenant  $A$ .

- L'implication 2.  $\Rightarrow$  3. résulte immédiatement de la Proposition 4.19.

- 3.  $\Rightarrow$  1.) Soit  $(x_n)_n$  une suite dans  $\bar{A}$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $a_n \in A$  tel que  $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n+1}$ . Par hypothèse, il existe une sous-suite convergente  $(a_{n_k})_k$  de  $(a_n)_n$ . Soit  $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$ . Pour tout  $k \geq 0$ , on a  $0 \leq d(a, x_{n_k}) \leq d(a, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, x_{n_k}) < d(a, a_{n_k}) + \frac{1}{n_k+1}$  et on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k+1} = 0$ , donc  $(x_{n_k})_k$  converge aussi vers  $a$ . Il résulte de la proposition 4.19 que  $\bar{A}$  est compact.

□

## 4.3 Espaces localement compacts.

De nombreux espaces topologiques que l'on rencontre dans les applications de la topologie ne sont pas compacts, mais ont une propriété plus faible, la compacité locale.

**Définition 4.7 (Espace localement compact).** *Un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est localement compact si tout point de  $\mathbb{X}$  a un voisinage compact.*

**Remarque 4.8.** *Évidemment, tout espace compact  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est localement compact, puisque  $\mathbb{X}$  est voisinage de chacun de ses points. La réciproque est fautive, considérer  $\mathbb{R}$ .*

**Exemple 4.4.** 1.  $\mathbb{R}$  est localement compact puisque  $\mathbb{R}$  est séparé et pour chaque point  $x$  de  $\mathbb{R}$  admet un voisinage compact  $[x - r, x + r]$ , ( $r > 0$ ).

2. Montrons que  $\mathbb{Q}$  n'est pas localement compact. Supposons que le point 0 de  $\mathbb{Q}$  possède dans  $\mathbb{Q}$  un voisinage compact  $V$ . Il existe un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}$  tel que  $V = W \cap \mathbb{Q}$ . Puis il existe  $\alpha > 0$  tel que  $] - \alpha, \alpha[ \subset W$ , d'où  $] - \alpha, \alpha[ \cap \mathbb{Q} \subset V$ . Par ailleurs, puisque  $V$  est compact,  $V$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ . Or tout nombre réel de  $] - \alpha, \alpha[$  est adhérent à  $] - \alpha, \alpha[ \cap \mathbb{Q}$ , d'où  $] - \alpha, \alpha[ \subset V$ , ce qui est absurde puisque  $V \subset \mathbb{Q}$ .

3.  $\mathbb{X}$  discret est localement compact. En-effet,  $\mathbb{X}$  est séparé et, pour tout  $x \in \mathbb{X}$ ,  $\{x\} \in \mathcal{V}(x)$  et  $\{x\}$  est compact. Remarquons que si  $\mathbb{X}$  discret est infini, alors  $\mathbb{X}$  est localement compact mais non compact.

**Proposition. 4.21.** *L'intersection de deux sous-espaces localement compacts d'un espace topologique séparé est localement compacte.*

*Démonstration.* Soient  $A$  et  $B$  sont deux sous-espaces localement compacts dans  $\mathbb{X}$  séparé, et  $C = A \cap B$ . On a  $C$  est séparé (car sous-espace de  $\mathbb{X}$  séparé). Soit  $a \in C$ . Comme  $a \in A$  localement compact, alors il existe  $K_1 \in \mathcal{V}(a)$ ,  $K_1$  compact  $\subset A$ . Comme  $a \in B$  localement compact, alors il existe  $K_2 \in \mathcal{V}(a)$ ,  $K_2$  compact  $\subset B$ . Ainsi nous avons  $K_1 \cap C \in \mathcal{V}_C(a)$  et  $K_2 \cap C \in \mathcal{V}_C(a)$ . Soit alors  $K = K_1 \cap K_2$  est un compact (car intersection de compacts) et  $K = (K_1 \cap C) \cap (K_2 \cap C) \in \mathcal{V}_C(a)$ . Et donc  $C$  est localement compact. □

**Remarque 4.9.** *La réunion de deux parties localement compactes n'est pas toujours localement compacte. En-effet : considérer  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$  et  $A = \{(0, y), y > 0\}$  et  $B = \{0\}$ .  $A$  et  $B$  sont localement compacts et  $A \cup B$  est non localement compacts car 0 n'admet pas de voisinage compact.*

**Proposition. 4.22.** *Si  $f$  est un homéomorphisme  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  et si  $\mathbb{X}$  est localement compact, alors  $\mathbb{Y}$  est localement compact.*

*Démonstration.*  $\mathbb{Y}$  est séparé car  $f$  est un homéomorphisme. Soit  $x' \in \mathbb{Y}$ , alors  $x' = f(x)$  où  $x \in \mathbb{X}$ . Comme  $\mathbb{X}$  est localement compact, il existe  $K$  compact  $\in \mathcal{V}(x)$ . Par conséquent  $f(K)$  est compact et  $f(K) = K' \in \mathcal{V}(x')$ .

□

**Remarque 4.10.** Si  $f$  est continue :  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ , avec  $\mathbb{X}$  localement compact et  $\mathbb{Y}$  séparé, alors  $f(\mathbb{X})$  n'est pas nécessairement localement compact. En-effet : considérons  $\mathbb{X} = \mathbb{N}$  discret et  $\mathbb{Y} = \mathbb{Q}$  (sous-espace de  $\mathbb{R}$ ). Alors  $\mathbb{X}$  est localement compact et  $\mathbb{Y}$  est non localement compact. On sait qu'il existe une bijection  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  qui est donc continue puisque  $\mathbb{X}$  est discret.

**Proposition. 4.23.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace localement compact,  $A$  une partie ouverte ou fermée de  $\mathbb{X}$ . Alors l'espace  $A$  est localement compact.

*Démonstration.* D'abord,  $A$  est séparé. D'autre part, soit  $y \in A$ . Il existe un voisinage compact  $V$  de  $y$  dans  $\mathbb{X}$ . Alors  $V \cap A$  est un voisinage de  $y$  dans  $A$ . Si  $A$  est fermé dans  $\mathbb{X}$ ,  $V \cap A$  est fermé dans  $A$ , donc compact. Si  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ , on peut supposer  $V \subset A$ , et alors  $V \cap A = V$ .

□

**Proposition. 4.24.** Soient  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est localement compact si et seulement si  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont localement compacts.

*Démonstration.* L'espace topologique produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est séparé si et seulement si  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont séparés. Supposons d'abord que l'espace topologique produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  est localement compact. Puisque les projections canoniques de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  sur les  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont continues, surjectives et ouvertes, on déduit que  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont localement compacts.

Réciproquement, supposons que  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  sont localement compact. Soit  $x = (x_1, x_2)$ , soit  $V_1, V_2$  des voisinages compacts de  $x_1, x_2$  dans  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  respectivement. Alors  $V = V_1 \times V_2$  est un voisinage compact de  $x$  dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ . Donc  $\mathbb{X}$  est localement compact. □

**Exemple 4.5.**  $\mathbb{R}^n$  est localement compact (sans être compact). En-effet,  $\mathbb{R}^n$  est séparé, et tout point de  $\mathbb{R}^n$  admet pour voisinage une boule fermée, laquelle est compacte.

## 4.4 Exercices avec Solutions.

**Exercice 4.1.** Dans l'espace métrique  $(\mathbb{Q}, d_u)$  où  $d_u(x, y) = |x - y|$  et

$$A = \{x \in \mathbb{Q}, 2 < x^2 < 3\}.$$

Montrer que  $A$  est fermé et borné mais n'est pas compact.

**Solution 4.1.** Il est clair que  $A$  est borné. On peut écrire  $A$  comme :

$$A = \{x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\} \cup \{x \in \mathbb{Q}, -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}\} = A_1 \cup A_2.$$

De plus on a  $A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$  et  $A_2 = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ . Donc  $A_1$  et  $A_2$  sont fermés dans  $\mathbb{Q}$ . Pour la compacité considérons  $G = \{G_n, n \geq 1\}$  où  $G_n = \{x \in \mathbb{Q}, 2 + \frac{1}{n} < x^2 < 3 - \frac{1}{n}\}$ .  $G$  est un recouvrement ouvert de  $A$  qui ne possède aucun sous-recouvrement fini.

**Exercice 4.2.** Montrer que l'ensemble suivant est compact

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**Solution 4.2.** Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2.$$

On remarque que  $A$  est fermé puisque  $A = f^{-1}([0, 1])$ . D'autre part  $A$  est borné car  $A \subset B((0, 0), 1)$ .

**Exercice 4.3.** Soient  $A$  une partie compacte et  $B$  une partie fermée de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$C = A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que  $C$  est fermé.
2. Montrer que si  $B$  est compact, alors  $C$  est compact.

**Solution 4.3.** 1. Soit  $c \in \overline{C}$ . Il existe une suite  $(c_n)_n$  de points de  $C$  qui converge vers  $c$ . Pour chaque entier  $n$ , il existe  $a_n \in A$  et  $b_n \in B$  tels que  $c_n = a_n + b_n$ . La suite  $(a_n)_n$  est contenue dans le compact  $A$ , on peut donc en extraire une sous-suite  $(a_{n_k})_k$  qui converge vers une limite  $a \in A$ . La sous-suite  $(c_{n_k})_k$  de  $(c_n)_n$  converge vers  $c$ , et puisque, pour tout entier  $n$ ,  $b_{n_k} = c_{n_k} - a_{n_k}$  la sous-suite  $(b_{n_k})_k$  de  $(b_n)_n$  converge vers  $c - a$ . Or  $B$  est fermé, donc  $c - a \in B$  soit, en posant  $b = c - a$ ,  $c = a + b$ , avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . Ceci prouve que  $c \in C$  donc que  $C$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}$ .

2. Si  $A$  et  $B$  sont tous deux compacts, ils sont bornés. Il existe donc  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$  vérifient  $|a| \leq \alpha$ , et  $|b| \leq \beta$ . Mais alors si  $c = a + b$ ,  $|c| \leq |a| + |b| \leq \alpha + \beta$  qui prouve que  $C$  est borné. Mais d'après la question précédente,  $C$  est fermé. Les parties compactes de  $\mathbb{R}$  étant les parties fermées et bornées,  $C$  est compact.

**Exercice 4.4.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé. Montrer que

1. union finie de compacts est compacte.
2. Intersection quelconque de parties compactes est compacte.

**Solution 4.4.** 1. Soit  $\{K_k, k = 1, \dots, n\}$  une famille finie de compacts dans un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  et soit  $K = \bigcap_{k=1}^n K_k$ . Alors, tout recouvrement d'ouverts  $\{O_i, i \in I\}$  de  $K$  est un recouvrement d'ouverts de  $K_k$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ . Donc, il existe  $J_k$  (fini)  $\subset I$  tel que  $K_k \subset \bigcup_{i \in J_k} O_i$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ . On prend  $J = J_1 \cup \dots \cup J_n$ , alors  $\bigcup_{i \in J} O_i$  est un sous-recouvrement fini de  $K$  et donc  $K$  est compact.

2. Soit  $\{K_i, i \in I\}$  une famille de compacts dans un espace topologique séparé  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  et soit  $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ . Alors,  $K$  est un fermé (car c'est une intersection de fermé) dans un compacts  $K_{i_0}$ ,  $i_0 \in I$ . Donc  $K$  est compact.

**Exercice 4.5.** Soient  $K$  un compact de l'espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  et  $r > 0$ .

1. Montrer que  $F = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$  est fermé dans  $(\mathbb{X}, d)$ .
2. Montrer que  $U = \bigcap_{x \in K} B(x, r)$  est ouvert dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Solution 4.5.** 1. Soient  $(y_n)_n$  une suite dans  $F$  et  $y \in \mathbb{X}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $a_n \in K$  tel que  $d(a_n, y_n) \leq r$ . Puisque  $K$  est compact, la suite  $(a_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(a_{n_k})_k$  vers un élément  $a \in K$ , d'où on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(a_{n_k}, b_{n_k}) = d(a, y)$ . Par conséquent, on a  $d(a, y) \leq r$ , d'où  $y \in \overline{B}(a, r) \subset F$ . Donc  $F$  est fermé dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

2. Montrons que  $C_{\mathbb{X}}^U = \bigcup_{x \in K} C_{\mathbb{X}}^{B(x, r)}$  est fermé dans  $(\mathbb{X}, d)$ . Soient  $(y_n)_n$  une suite dans  $C_{\mathbb{X}}^U$  et  $y \in \mathbb{X}$  tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ . Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $x_n \in K$  tel que  $d(x_n, y_n) \geq r$ . Puisque  $K$  est compact, la suite  $(x_n)_n$  admet une sous-suite convergente  $(x_{n_k})_k$  vers un élément  $x \in K$ , d'où on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k}, b_{n_k}) = d(x, y)$ . Par conséquent, on a  $d(x, y) \geq r$ , d'où  $y \in C_{\mathbb{X}}^{B(x, r)} \subset C_{\mathbb{X}}^U$ . Donc  $C_{\mathbb{X}}^U$  est fermé dans  $(\mathbb{X}, d)$ .

**Exercice 4.6.** Soient  $K$  une partie compacte non vide d'un espace métrique  $(\mathbb{X}, d)$  et  $(x_n)_n$  une suite dans  $\mathbb{X}$  telle que la suite de réelle  $(\text{dist}(x_n, K))_n$  tende vers 0. Montrer qu'il existe une sous-suite de  $(x_n)_n$  convergeant vers un point de  $K$ .

**Solution 4.6.** Pour tout  $n \geq 0$ , il existe  $a_n \in K$  tel que  $d(x_n, a_n) < \text{dist}(x_n, K) + \frac{1}{n+1}$ . Comme  $K$  est compacte, il existe une sous-suite convergente  $(a_{n_k})_k$  de  $(a_n)_n$ . Soit  $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k}$ , alors  $a \in K$  et pour tout  $k \geq 0$ , on a  $0 \leq d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \text{dist}(x_{n_k}, K) + \frac{1}{n_{k+1}+1} + d(a_{n_k}, a)$ . Donc on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k}, a) = 0$ , i.e. la sous-suite  $(x_{n_k})_k$  converge vers  $a$ .

**Exercice 4.7.** Soit  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique compact et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y.$$

Le but de cet exercice est de montrer que  $f$  admet un point fixe unique  $p \in \mathbb{X}$ .

1. Montrer que les ensembles  $X_n = f^n(\mathbb{X}), n \in \mathbb{N}$ , forment une suite décroissante de compacts et que  $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$  n'est pas vide.
2. Montrer que  $Y$  est un ensemble invariant, i.e.  $f(Y) = Y$ , et en déduire que le diamètre de cet ensemble est 0.
3. Conclure que  $f$  a un unique point fixe  $p \in \mathbb{X}$  et que  $\forall x_0 \in \mathbb{X}$ , la suite  $(x_n)_n$  définie par  $x_n = f^n(x_0)$  converge vers  $p$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ .

**Solution 4.7.** 1. La suite donnée est décroissante car on a

$$X_{n+1} = f^{n+1}(\mathbb{X}) = f^n(f(\mathbb{X})) \subset f^n(\mathbb{X}) = X_n.$$

Vérifions que  $X_n$  est compact pour tout entier  $n \geq 0$ . C'est vrai pour  $n = 0$  car  $\mathbb{X}$  est compact par hypothèse. On suppose que  $X_n$  est compact, puisque  $f$  est continue et que l'espace d'arrivée est séparé, l'image  $f(X_n)$  du compact  $X_n$  est aussi un compact. Montrons à présent que  $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$  est non vide.  $(X_n)_n$  est une famille de compacts dont l'intersection de toute sous-famille finie est non vide (en-effet :  $\bigcap_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} X_i = X_{\max\{i_1, \dots, i_k\}}$  qui est non vide), puisque cette famille est dans l'espace  $\mathbb{X}$  qui est compact, alors l'intersection de tous les éléments de la famille, c'est à dire  $Y$ , est non vide.

2. Montrons l'égalité  $Y = f(Y)$ . On a  $f(\bigcap_n X_n) \subset \bigcap_n f(X_n)$ , d'où l'inclusion  $f(Y) \subset Y$ . Inversement, soit  $\alpha \in Y$ , alors  $\alpha$  s'écrit sous la forme

$$\alpha = f(\alpha_1) = f^2(\alpha_2) = \dots = f^p(\alpha_p) = \dots,$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots$  est une suite convenable dans  $\mathbb{X}$ . Si on considère la suite  $(\gamma_p)_p = (f^{p-1}(\alpha_p))_p$ , elle admet une valeur d'adhérence  $\lambda$  car  $\mathbb{X}$  est compact. De plus, comme cette suite se trouve dans  $X_n$ , pour tout  $n$ , à partir d'un certain rang, par conséquent, une suite extraite convergente vers  $\lambda$  dans  $\mathbb{X}$  est aussi convergente vers  $\lambda$  dans  $X_n$  pour tout  $n$ , car  $X_n$  est fermé. Ainsi, on a obtenu  $\lambda \in Y$ . D'autre part,  $f$  étant continue, la suite  $(\gamma_n)_n$  admettant une suite extraite convergente  $(\gamma_{n_k})_k$  vers  $\lambda$ , la suite  $(f(\gamma_{n_k}))_k$  tend vers  $f(\lambda)$  qui est aussi  $\alpha$ . Nous avons donc établi que pour tout  $\alpha \in Y$ , il existe  $\lambda \in Y$  tel que  $f(\lambda) = \alpha$ , d'où l'autre inclusion  $Y \subset f(Y)$ .

Supposons que  $\delta(Y) = \delta(f(Y)) > 0$ . Tout d'abord, rappelons que si  $K$  est une partie

non vide, compacte d'un espace métrique, alors il existe deux éléments  $k, k_0$  de  $K$  tels que  $\delta(K) = d(k, k_0)$ . ( Ceci est dû à fait que l'application distance est continue, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , donc elle est bornée sur un compact et atteint ses bornes sur ce compact.) Ainsi, il existe  $y_1, y_2$  deux éléments de  $Y$  tels que  $\delta(f(Y)) = d(f(y_1), f(y_2))$ . Puisqu'on a  $d(f(y_1), f(y_2)) < d(y_1, y_2)$ , alors  $\delta(Y) \geq d(y_1, y_2) > \delta(f(Y))$ , ce qui est une contradiction. Par conséquent, on a  $\delta(Y) = 0$  et  $Y$  est réduit à un seul élément noté  $\lambda$ .

3. On a obtenu  $Y = \{\lambda\}$  avec  $f(\lambda) = \lambda$ , c'est donc un point fixe qu'on note aussi  $p$ . Il est unique car si on raisonne par l'absurde, on suppose l'existence de deux points fixes  $y_0 \neq y_1$ , on aboutit à  $d(f(y_0), f(y_1)) = d(y_0, y_1) < d(y_0, y_1)$  ce qui est une contradiction. Soit  $x_0 \in \mathbb{X}$  quelconque, la suite  $(f^n(x_0))_n$  est dans le compact  $\mathbb{X}$ , elle admet donc une valeur d'adhérence qu'on note  $\beta$ . Comme précédemment, cette valeur d'adhérence appartient à  $Y$ , c'est donc forcément  $\lambda$  qui est le point fixe unique.

**Exercice 4.8.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé et  $A, B$  deux parties compactes de  $\mathbb{X}$  telles que  $A \cap B = \emptyset$ . Montrer qu'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  dans  $\mathbb{X}$  tels que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

**Solution 4.8.** Soit  $b \in B$ . Comme  $\mathbb{X}$  est séparé, pour tout  $a \in A$ , il existe  $U_{a,b}$  et  $V_{a,b}$  deux ouverts de  $\mathbb{X}$  tels que  $a \in U_{a,b}$ ,  $b \in V_{a,b}$  et  $U_{a,b} \cap V_{a,b} = \emptyset$ . Comme  $A$  est compact et comme on a  $A \subset \bigcup_{a \in A} U_{a,b}$ , alors il existe un sous-ensemble fini  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de  $A$  tel que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i,b}$ . Soient  $U_b = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i,b}$  et  $V_b = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i,b}$ , alors  $U_b$  et  $V_b$  sont deux ouverts de  $\mathbb{X}$  tels que  $A \subset U_b$ ,  $b \in V_b$  et  $U_b \cap V_b = \emptyset$ . Comme  $B$  est aussi compact et on  $B \subset \bigcup_{b \in B} V_b$ , alors il existe un sous-ensemble fini  $\{b_1, \dots, b_p\}$  de  $B$  tel que  $B \subset \bigcup_{j=1}^p V_{b_j}$ . Soient  $U = \bigcap_{j=1}^p U_{b_j}$  et  $V = \bigcup_{j=1}^p V_{b_j}$ , alors  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $\mathbb{X}$  tels que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

**Exercice 4.9.** Soient  $(\mathbb{X}, d)$  un espace métrique compact et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  une application continue telle que  $f(x) \neq x$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$ . Montrer qu'il existe  $k > 0$  tel que  $d(x, f(x)) \geq k$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$ .

**Solution 4.9.** Pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , soit  $g(x) = d(x, f(x))$ , alors  $g$  est une application continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , on a  $g(x) > 0$ . Comme  $\mathbb{X}$  est compact, il existe  $x_0 \in \mathbb{X}$  tel que  $\inf_{x \in \mathbb{X}} g(x) = g(x_0)$ . Soit  $k = g(x_0)$ , alors  $k > 0$  et pour tout  $x \in \mathbb{X}$ , on a  $d(x, f(x)) \geq k$ .

**Exercice 4.10.** Soient  $(\mathbb{X}, d_X)$ ,  $(\mathbb{Y}, d_Y)$  des espaces métriques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application.

1. Montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $f|_K$  est continue pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{X}$ .
2. On suppose que  $f$  est injective et que  $\forall K \subset \mathbb{X}$  compact,  $f(K)$  est compact de  $\mathbb{Y}$ . Montrer qu'alors  $f$  est continue.

**Solution 4.10.** 1. Si  $f$  est continue, alors la restriction de  $f$  à toute partie  $A$  de  $\mathbb{X}$  est continue.

Réciproquement, supposons que pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{X}$ ,  $f|_K$  est continue sur  $K$ . Soient  $x \in \mathbb{X}$  et  $(x_n)_n$  une suite dans  $\mathbb{X}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ . Alors l'ensemble  $K = \{x\} \cup \{x_n, n \geq 0\}$  est un compact de  $\mathbb{X}$ . Comme  $f|_K$  est continue en  $x$ , alors on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$ . Par conséquent,  $f$  est continue en  $x$ , donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{X}$ .

2. Soit  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{X}$ . Alors  $f(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{Y}$ . Soit  $g : K \rightarrow f(K)$  définie par  $g(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in K$ . Alors  $g$  est une application bijective. Soit  $F$  un fermé de  $K$ , alors  $F$  est un compact, donc  $g(F) = f(F)$  est un compact, d'où  $g(F)$  est une partie fermée de  $f(K)$ . Par conséquent, l'application  $g^{-1}$  est continue. On déduit que  $g$  est continue, d'où  $f|_K$  est continue. Il résulte de 1 que  $f$  est continue.

**Exercice 4.11.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace topologique séparé et  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{X}$  localement compact pour la topologie induite par celle de  $\mathbb{X}$ . Montrer que, si  $A$  est dense dans  $\mathbb{X}$ , alors  $A$  est ouvert dans  $\mathbb{X}$ .

**Solution 4.11.** Soit  $y \in A$ . Puisque  $A$  est localement compact,  $y$  possède un voisinage compact  $K$  dans  $A$ . Alors  $K$  est aussi un voisinage compact de  $y$  dans  $\mathbb{X}$ , donc  $A$  est un voisinage de  $y$  dans  $\mathbb{X}$ . Par conséquent,  $A$  est voisinage de chacun de ses points dans  $\mathbb{X}$ , donc  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{X}$ .

**Exercice 4.12.** On munit  $\mathbb{R}$  de la topologie usuelle et soit  $\mathbb{X} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{X}$  n'est pas localement compact.
2. Montrer que  $\mathbb{X} - \{0\}$  est localement compact. En déduire qu'une réunion de deux parties localement compactes de  $\mathbb{R}$  n'est pas toujours localement compacte.
3. Montrer qu'une intersection dénombrable de parties localement compactes de  $\mathbb{R}$  n'est pas toujours localement compacte.

**Solution 4.12.** Soit  $\mathbb{X} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ .

1. On a  $\mathbb{X}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Si  $\mathbb{X}$  était localement compact, alors  $\mathbb{X}$  serait ouvert dans  $\mathbb{R}$ , voir Exercice 4.11, ce qui est impossible, car pour tout  $r > 0$ ,  $]r, r[ \subset \mathbb{X}$ . Donc  $\mathbb{X}$  n'est pas localement compact.
2. On a  $\mathbb{X} - \{0\} = \mathbb{R} - K$ , où  $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc  $\mathbb{X} - \{0\}$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$ . Par la proposition 4.23,  $\mathbb{X} - \{0\}$  est localement compact. On a  $\mathbb{X} = (\mathbb{X} - \{0\}) \cup \{0\}$  et  $\mathbb{X} - \{0\}$  et  $\{0\}$  sont localement compacts, mais  $\mathbb{X}$  n'est pas localement compact.
3. On a  $\mathbb{X} = \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{R} - \{\frac{1}{n}\}$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{n}\}$  est localement compact, mais  $\mathbb{X}$  n'est pas localement compact.

**Exercice 4.13.** Si  $A$  et  $B$  sont deux parties compactes d'un espace métrique  $\mathbb{X}$ , montrer que

1.  $\exists a \in A, b \in B, d(a, b) = \text{dist}(A, B)$ .
2.  $\text{dist}(A, B) = 0$  si et seulement si  $A \cap B$  n'est pas vide.

**Solution 4.13.** 1. L'application  $f : (x, y) \in A \times B \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$  est continue sur  $A \times B$ .

Or  $A$  et  $B$  sont compactes, donc  $A \times B$  est compact, et par conséquent  $f$  atteint sa borne inférieure dans  $A \times B$  qui est  $\text{dist}(A, B)$ .

2. " $\Leftarrow$ " évident. " $\Rightarrow$ " si  $\text{dist}(A, B) = 0$ , d'après 1.  $\exists a \in A, b \in B, d(a, b) = \text{dist}(A, B)$ , alors  $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in A \cap B$ .

# Chapitre 5

## Espaces connexes.

**Définition 5.1 (Espace connexe).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. On dit que  $\mathbb{X}$  est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit, pour tous ouverts disjoints  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{X}$  tels que  $X = U \cup V$ , alors on ait  $U = \emptyset$  ou  $V = \emptyset$ .

**Remarque 5.1.** Les définitions et les propriétés de la connexité dans les espaces métriques sont les mêmes que les espaces topologiques.

**Exemple 5.1.** 1. L'ensemble vide  $\emptyset$  est connexe.

2. Soit l'espace  $(\mathbb{X}, |\cdot|)$  tels que  $\mathbb{X} = ]-1, 0[ \cup ]1, 5[$ , les deux parties  $O_1 = ]-1, 0[$  et  $O_2 = ]1, 5[$  sont à la fois ouvert et fermé dans  $\mathbb{X}$  car  $O_1 = \mathbb{X} \cap ]-1, 0[ = \mathbb{X} \cap [-1, 0]$  et  $O_2 = \mathbb{X} \cap ]1, 5[ = \mathbb{X} \cap [1, 5]$ . De plus, on a  $\mathbb{X} = O_1 \cup O_2$  et donc la famille  $\{O_1, O_2\}$  est une partition de  $\mathbb{X}$  en deux ouverts (en deux fermés) disjoints. Dans ce cas on va dire que  $\mathbb{X}$  n'est pas connexe.

3. Tout espace discret  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  tel que  $\text{card}(\mathbb{X}) \geq 2$  n'est pas connexe. En-effet, si  $x \in \mathbb{X}$  alors on a  $\{x\} \cup C_{\mathbb{X}}^{\{x\}} = \mathbb{X}$  et  $\{x\} \cap C_{\mathbb{X}}^{\{x\}} = \emptyset$  avec  $\{x\}$  et  $C_{\mathbb{X}}^{\{x\}}$  sont deux ouverts.

4. L'espace muni de la topologie grossière est connexe.

**Proposition. 5.1.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. L'espace  $\mathbb{X}$  est connexe.

2. L'espace  $\mathbb{X}$  n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.

3. Il n'existe pas dans  $\mathbb{X}$  d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que  $\mathbb{X}$  et  $\emptyset$ .

4. Toute application continue de  $\mathbb{X}$  dans l'espace discret  $\mathbb{Z}$  est constante.

5. Toute application continue de  $\mathbb{X}$  dans l'espace discret  $\{0, 1\}$  est constante.

*Démonstration.* L'équivalence (1)  $\Leftrightarrow$  (2) s'obtient par passage aux complémentaires.

Pour (2)  $\Rightarrow$  (3). Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{X}$  et supposons que  $A$  est à la fois ouverte et fermée dans  $\mathbb{X}$ . Soit  $B = C_{\mathbb{X}}^A$ , alors  $B$  est fermé dans  $\mathbb{X}$  tel que  $X = A \cup B$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Donc on a  $B = \emptyset$ , d'où  $A = \mathbb{X}$ .

Pour (3)  $\Rightarrow$  (4). Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$  une application continue. Soit  $x_0 \in \mathbb{X}$ , alors  $\{f(x_0)\}$  est une partie à la fois ouverte et fermée dans  $\mathbb{Z}$ . Comme  $f$  est continue, alors  $f^{-1}(\{f(x_0)\})$  est une partie non vide à la fois ouverte et fermée dans  $\mathbb{X}$ , donc on a  $\mathbb{X} = f^{-1}(\{f(x_0)\})$ , d'où  $f(x) = f(x_0)$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$ . Autrement dit,  $f$  est constante.

Pour (4)  $\Rightarrow$  (5). Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Or l'injection  $i : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$  est continue. Donc  $i \circ f$  est constante. Par conséquent,  $f$  est constante.

Pour (5)  $\Rightarrow$  (1). Si  $\mathbb{X}$  n'était pas connexe, alors il existerait deux ouverts non vides et disjoints  $U$  et  $V$  dans  $\mathbb{X}$  tels que  $\mathbb{X} = U \cup V$ . Pour tout  $x \in U$ , on pose  $f(x) = 0$  et pour tout  $x \in V$ , on pose  $f(x) = 1$ , alors  $f$  est une application continue non constante de  $\mathbb{X}$  dans l'espace discret  $\{0, 1\}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $\mathbb{X}$  est bien connexe.  $\square$

Comme d'habitude, on peut définir la connexité d'une partie.

**Définition 5.2 (Partie connexe).** Une partie  $A$  de  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est connexe si l'espace topologique  $(A, \mathcal{T}_A)$  est connexe.

**Proposition. 5.2.** Si une partie  $A$  d'un espace topologique  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est connexe, alors l'existence de deux ouverts  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  tels que  $A \subset O_1 \cup O_2$  et  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$  entraîne  $A \subset O_1$  ou  $A \subset O_2$ .

*Démonstration.* Supposons que  $A$  est connexe et soient  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  tels que  $A \subset O_1 \cup O_2$  et  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Alors,  $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$  et  $(A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = \emptyset$ . Comme  $A$  est connexe on obtient  $(A \cap O_1 = \emptyset)$  ou  $(A \cap O_2 = \emptyset)$  d'où  $A \subset O_1$  ou  $A \subset O_2$ .  $\square$

On rappelle qu'un intervalle  $A$  est, par définition, une partie telle que pour tout  $a, b \in A$ , l'intervalle  $[a, b] \subset A$ . On admet que  $\emptyset$  et  $\{a\}$  sont des intervalles.

**Proposition. 5.3** (parties connexes de  $\mathbb{R}$ ). Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  est connexe si et seulement si  $A$  est un intervalle.

*Démonstration.* Si  $A$  n'est pas un intervalle, alors il existe  $x < z < y$  tels que  $x, y \in A$ , mais  $z \notin A$ . Alors  $U = A \cap ]-\infty, z[$ ,  $V = A \cap ]z, +\infty[$  sont des ouverts non vides et disjoints de  $A$  tels que  $A = U \cup V$ , et donc  $A$  n'est pas connexe.

Réciproquement, supposons  $A$  intervalle et soit  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ . Si, par l'absurde,  $f$  n'est pas constante, alors il existe  $x, y \in A$  tels que  $f(x) = 0$  et  $f(y) = 1$ . De par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un  $z$  compris entre  $x$  et  $y$  (donc appartenant à  $A$ ) tel que  $f(z) = \frac{1}{2}$ , contradiction.  $\square$

**Exemple 5.2.** 1. L'ensemble  $\{x\}$ , dans l'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ , est connexe.

2. Une partie de  $\mathbb{R}$  est, donc connexe si et seulement si elle est de la forme  $]a, b[, [a, b], [a, b[, ]a, b]$ , avec  $a$  et  $b$  éventuellement égaux à  $\pm\infty$ .

3.  $A = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$  n'est pas connexe.

4. L'espace  $(\mathbb{R}^*, |\cdot|)$  n'est pas connexe.

5.  $\mathbb{Q}$  n'est pas connexe avec  $\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[ \cap \mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[ \cap \mathbb{Q})$ .

6. En générale, un sous espace d'un espace connexe n'est pas connexe.

**Proposition. 5.4.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique et soit  $A \subset \mathbb{X}$  un ensemble connexe. Alors tout ensemble  $B$  tel que  $A \subset B \subset \bar{A}$  est connexe. En particulier  $\bar{A}$  est connexe.

*Démonstration.* Soit  $f : B \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue. Alors  $f|_A$  est une fonction continue sur  $A$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Comme  $A$  est connexe,  $f|_A$  est constante, on note  $a \in \{0, 1\}$  la valeur de la constante. Soit  $x \in B$ . Comme  $x \in \bar{A}$ , il existe une suite  $(x_n) \subset A$  tel que  $x_n \rightarrow x$ . Alors  $f(x_n) = a, \forall n \in \mathbb{N}$  (car  $x_n \in A$ ) et aussi  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  car  $f$  est continue. D'où  $f(x) = a$ . Donc  $f$  est constante sur  $B$  et donc  $B$  est connexe. En particulier si  $B = \bar{A}$ , alors  $\bar{A}$  est connexe.  $\square$

**Proposition. 5.5.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique connexe et soit  $A$  une partie non vide dans  $\mathbb{X}$ , avec  $A \neq \mathbb{X}$ , alors la frontière de  $A$ ,  $Fr(A) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* On a  $Fr(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ , et  $\mathbb{X} = Ext(A) \cup \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$ , avec  $Ext(A)$ ,  $\overset{\circ}{A}$  et  $\cup Fr(A)$  sont disjoints, alors  $Ext(A)$ ,  $\overset{\circ}{A}$  et  $\cup Fr(A)$  forment une partition de  $\mathbb{X}$ . Ainsi si  $Fr(A) = \emptyset$  alors on aurait  $\mathbb{X} = Ext(A) \cup \overset{\circ}{A}$  et donc  $\mathbb{X}$  ne serait pas connexe.  $\square$

**Remarque 5.2.** Cette proposition peut également s'énoncer sous la forme : Dans  $\mathbb{X}$  connexe, soit  $A \subset \mathbb{X}$ . Si  $Fr(A) = \emptyset$  alors  $A = \emptyset$  ou  $A = \mathbb{X}$ .

**Proposition. 5.6.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$ ,  $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$  deux espaces topologiques, et  $f$  une application continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{Y}$ . Alors, si  $\mathbb{X}$  est connexe alors  $f(\mathbb{X})$  est une partie connexe de  $\mathbb{Y}$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  une partie ouverte et fermée de  $f(\mathbb{X})$  pour la topologie induite. Comme  $f$  est continue comme application à valeurs dans  $f(\mathbb{X})$  muni de la topologie induite, on en déduit que  $f^{-1}(G)$  est à la fois ouverte et fermée dans  $\mathbb{X}$ . Puisque  $\mathbb{X}$  est connexe, on en déduit que  $f^{-1}(G) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(G) = \mathbb{X}$ . Comme  $f(f^{-1}(G)) = G$  on obtient que  $G = \emptyset$  ou  $G = f(\mathbb{X})$  ce qui montre que  $f(\mathbb{X})$  est connexe.  $\square$

**Proposition. 5.7** (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue avec  $\mathbb{X}$  connexe. Alors, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{X}^2$ ,  $f$  prend toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .*

*Démonstration.*  $\mathbb{X}$  est connexe, donc  $f(\mathbb{X})$  est une partie connexe de  $\mathbb{R}$  donc, il s'agira d'un intervalle. Mais  $f(a)$  et  $f(b)$  appartiennent à l'intervalle  $f(\mathbb{X})$ , donc toutes les valeurs comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$  également.  $\square$

**Proposition. 5.8.** *Soient  $\{(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_{\mathbb{X}_i})\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  des espaces topologiques. Alors  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_n$  est connexe si et seulement si  $\mathbb{X}_i$  sont connexes  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Siot  $\mathbb{X}$  est connexe. On a  $p_{\mathbb{X}_i}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}_i$  telles que  $\{p_{\mathbb{X}_i}\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  sont les projection canonique continues. On en déduit que  $\mathbb{X}_i$  sont connexes  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\Leftarrow$ ) supposons que  $\mathbb{X}_i$  sont connexes  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , et soit  $f : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Donc, il suffit de montrer que  $f$  est constante. Comme  $\mathbb{X}_i$  est connexe, alors l'application  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n) : \mathbb{X}_i \rightarrow \{0, 1\}$  sont constantes, et donc  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, y_2, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Donc  $f(x_1, \dots, x_n) = f(x'_1, \dots, x'_n)$  pour tout  $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{X}$  ce qui montre que  $f$  est constante et donc  $\mathbb{X}$  est connexe.  $\square$

**Exemple 5.3.** 1. *L'ensemble  $\mathbb{C}$  (muni de sa topologie usuelle) est connexe. En-effet : on se sert de l'isométrie bijective  $f : (\mathbb{C}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$   $f(z) = (Re(z), Im(z))$ , qui est un homéomorphisme.*

2. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les espaces  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont connexes.*

## 5.1 Composantes connexes.

Quand un espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  n'est pas connexe, il est naturel de le décomposer en "morceaux connexes". C'est l'idée des composantes connexes.

**Définition 5.3** (Composante connexe). *Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique et soit  $a \in \mathbb{X}$ .*

1. La composante connexe de  $\mathbb{X}$  contenant  $a$  est la plus grande partie connexe de  $\mathbb{X}$  contenant  $a$ , noté  $C(a)$ .

$$C(a) = \bigcup_{U \text{ connexe}, a \in U} U.$$

2. Une partie  $A$  de  $\mathbb{X}$  est une composante connexe s'il existe un  $a$  tel que  $A = C(a)$ . Autrement dit  $A$  est connexe et n'est pas contenu dans une autre partie connexe.
3. On appelle composantes connexes de  $A$  les composantes connexes de  $(A, \mathcal{T}_A)$ .

**Exemple 5.4.** 1. Si  $A \subset \mathbb{R}$  et  $x \in A$ , alors la composante connexe de  $x$  dans  $A$  est le plus grand intervalle contenant  $x$  et contenu dans  $A$ . En-effet : posons  $J = \{I \text{ intervalle} \subset A, x \in I\}$ .  $J$  est un intervalle, car une union d'intervalles dont l'intersection est non vide (ce qui est le cas ici, car  $x$  est dans chaque intervalle) est un intervalle. Par définition de  $J$ , c'est le plus grand intervalle de  $A$  contenant  $x$ , donc  $J$  est connexe et donc  $J \subset C(x)$ . Par ailleurs,  $C(x)$  est un intervalle contenant  $x$ , d'où  $C(x) \subset J$ . Finalement,  $C(x) = J$ .

2. Si  $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$ , alors  $C(x) = \{x\}, x \in \mathbb{Q}$ . En-effet,  $\mathbb{Q}$  ne contient pas d'intervalle non trivial, car entre deux rationnels il existe toujours un irrationnel.
3.  $\mathbb{R} - \{0\}$  a deux composantes connexes  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ .
4.  $\mathbb{R}^2 - \{x = y\}$  a deux composantes connexes  $\{x > y\}$  et  $\{x < y\}$ .
5. La seule composante connexe dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  c'est  $\mathbb{R}$  lui même.
6. Les composantes connexes d'un espace discret sont les parties singletons.

**Proposition. 5.9.** Soient  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique,  $a, b \in \mathbb{X}$ .

1.  $C(a)$  est un fermé de  $\mathbb{X}$ .
2. Si les composantes connexes sont en nombre fini, alors chaque composante connexe est ouverte dans  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* 1. Puisque  $C(a)$  est connexe, d'après la proposition 5.4, on a  $\overline{C(a)}$  est connexe de  $\mathbb{X}$  contenant  $a$ . Donc  $\overline{C(a)} \subset \bigcup_{U \text{ connexe}, a \in U} U = C(a)$ . D'où  $\overline{C(a)} = C(a)$  c'est à dire que  $C(a)$  est fermé.

2. On a  $C_{\mathbb{X}}^{C(a)} = \{C(b), C(a) \cap C(b) \neq \emptyset\}$ . C'est une union finie de fermés, donc un fermé. Il s'ensuit que  $C(a)$  est un ouvert.

□

**Proposition. 5.10.** les composantes connexes forment une partition de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* Si  $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ , alors  $C(a) \cup C(b)$  est connexe et contient  $a$ . On trouve  $C(a) \cup C(b) \subset C(a)$ , d'où  $C(b) \subset C(a)$ , de même, on a  $C(a) \subset C(b)$ , d'où  $C(a) = C(b)$ . Par ailleurs, on a

$$\mathbb{X} = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{X}} C(x) \subset \mathbb{X}, \text{ d'où } \bigcup_{x \in \mathbb{X}} C(x) = \mathbb{X}.$$

□

## 5.2 Espaces localement connexes.

**Définition 5.4 (Espace localement connexe).** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique. On dit que  $\mathbb{X}$  est localement connexe si, tout point admet une base de voisinages connexes.

**Remarque 5.3.** La définition veut dire que, pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et pour tout  $V \in \mathcal{V}(x)$ , alors  $V$  contient un voisinage  $O$  de  $x$  qui est connexe.

**Exemple 5.5.** 1.  $\mathbb{R}$  est localement connexe, car tout voisinage  $V$  de  $x$  contient, pour  $h$  convenable,  $]x - h, x + h[$  qui est connexe.

2. L'espace  $\mathbb{R}^n$  est localement connexe, puisque les boules ouvertes centrées sur un point sont connexes et forment un système fondamental de voisinages de ce point.

3. Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est localement connexe.

4.  $\mathbb{X}$  discret est localement connexe, car tout voisinage  $V \in \mathcal{V}(x)$ , contient  $\{x\}$  qui est connexe.

5. L'ensemble  $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}$  est discret, donc localement connexe. Mais  $\bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  n'est pas localement connexe, car aucun voisinage  $v$  de 0 dans  $\bar{A}$  n'est connexe. En-effet pour  $n$  assez grand  $\{\frac{1}{n}\}$  est non vide et distinct de  $v$ .

**Proposition. 5.11.** Soit  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  un espace topologique.  $\mathbb{X}$  est localement connexe si et seulement si les composantes connexes des ouverts de  $\mathbb{X}$  sont des ouverts de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons que  $\mathbb{X}$  est localement connexe. Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{X}$  et soit  $C(O)$  une composante connexe de  $O$ . Alors, pour tout  $a \in C(O)$ , il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $V$  est connexe et  $V \subset O$ . Donc,  $V \subset C(O)$  ce qui montre que  $C(O)$  est ouvert (un voisinage de chacun de ses points).

$\Leftarrow$ ) Soit  $a \in \mathbb{X}$  et  $V$  un voisinage ouvert de  $x$ . Donc, la composante connexe de  $a$  dans  $V$  est ouvert ce qui montre que  $\mathbb{X}$  localement connexe.

□

**Proposition. 5.12.** *Si  $f$  est un homéomorphisme  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  et si  $\mathbb{X}$  est localement connexe, alors  $\mathbb{Y}$  est localement connexe.*

*Démonstration.* Soit  $x' \in \mathbb{Y}, x' = f(x)$  avec  $x \in \mathbb{X}$ . Soit  $V' \in \mathcal{V}(x'), V = f^{-1}(V')$  est un voisinage de  $x$ .  $\mathbb{X}$  étant localement connexe, alors il existe  $U \subset V, U$  connexe  $\in \mathcal{V}(x)$ .  $U' = f(U) \subset V'$  est connexe et  $U' \subset V'$ , donc  $\mathbb{Y}$  est localement connexe. □

**Remarque 5.4.** *Dans un espace topologique localement connexe, chaque composante connexe est à la fois ouverte et fermée. En-effet : on sait déjà que chaque composante connexe d'un espace topologique est fermée. Si l'espace considéré est localement connexe on voit aisément que chaque composante connexe est voisinage de chacun de ses points, donc est ouverte.*

### 5.3 Connexité par arcs.

**Définition 5.5 (Espace connexe par arcs).** *Un chemin ou arc de  $\mathbb{X}$  joignant un point  $x$  à un point  $y$  est une application continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$  telle que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .*

*L'espace  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est connexe par arcs si pour tout couple de points  $(x, y) \in \mathbb{X}^2$ , il existe un arc joignant  $x$  à  $y$ .*

**Remarque 5.5.** 1. *La notion de connexité par arcs est plus forte que la notion de connexité.*

2. *L'espace est localement connexe par arcs s'il possède une base d'ouverts connexes par arcs.*

**Exemple 5.6.** 1.  *$\mathbb{R}$  est connexe par arcs. Il suffit de prendre comme chemin dans  $\mathbb{R}$  l'application  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = a + x(b - a)$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

2.  *$\mathbb{R} - \{0\}$  n'est pas connexe par arcs (nous ne pouvons pas joindre un réel négatif à un réel positif par un chemin continu sans passer par 0).*

3. *les boules ouvertes (fermées) sont connexes par arcs.*

4.  *$\mathbb{Q}$  et  $C_{\mathbb{X}}^{\mathbb{Q}}$  ne sont pas connexes par arcs.*

5.  *$\mathbb{R}^2 - \{0\}$  est connexe par arcs, mais  $\mathbb{R} - \{ droite \}$  n'est pas connexe par arcs. (Si  $x$  et  $y$  ne sont pas du même côté de la droite, alors tout chemin continu reliant  $x$  à  $y$  rencontre la droite).*

**Proposition. 5.13.** 1. *Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est connexe par arcs, il est connexe.*

2. Si  $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$  est localement connexe par arcs, alors  $\mathbb{X}$  est localement connexe.

*Démonstration.* 1. Raisonnement par l'absurde. Nous supposons  $\mathbb{X}$  connexe par arcs mais  $\mathbb{X}$  non connexe. Il existe alors une décomposition  $\mathbb{X} = U \cup V$  en deux ouverts disjoints non-vides. Nous choisissons  $x \in U$ , et  $y \in V$ . Comme  $\mathbb{X}$  est connexe par arcs, nous pouvons joindre  $x$  et  $y$  par un chemin continu  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ , tel que  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ , mais puisque  $\mathbb{X} = U \cup V$ , nous obtenons que  $[0, 1] = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  qui sont deux ouverts non vides. Cela contredit donc le fait que  $[0, 1]$  est connexe.

2. Ceci résulte immédiatement de 1. □

**Proposition 5.14.** *Si l'application  $f$  est continue :  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  et si  $\mathbb{X}$  est connexe par arcs, alors  $f(\mathbb{X})$  est connexe par arcs.*

*Démonstration.* Soient  $x' = f(x) \in f(\mathbb{X})$  et  $y' = f(y) \in f(\mathbb{X})$ . Comme  $x, y \in \mathbb{X}$  connexe par arcs, cela implique qu'il existe un chemin  $\varphi$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$  ( $\varphi(0) = x$  et  $\varphi(1) = y$ ). Ainsi  $f \circ \varphi$  est continue :  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}$  avec  $f \circ \varphi(0) = x'$  et  $f \circ \varphi(1) = y'$ . Par conséquent,  $f(\mathbb{X})$  est connexe par arcs. □

**Remarque 5.6.** *Les définitions et les propriétés de la connexité dans les espaces métriques sont les même qu'on a vus dans les espaces topologiques.*

## 5.4 Exercices avec Solutions.

**Exercice 5.1.** *Soit  $A, B$  connexes de  $\mathbb{X}$  tels que  $\overline{A} \cup B \neq \emptyset$ , montrer que  $A \cup B$  est connexe.*

**Solution 5.1.** *Soit  $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{Z}$  continue,  $A$  et  $B$  étant connexes, il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $f|_A = a$  et  $f|_B = b$  par continuité,  $f$  vaut encore  $a$  sur  $\overline{A} \cap (A \cup B)$  qui est l'adhérence de  $A$  dans  $A \cup B$ , a fortiori,  $f$  vaut  $a$  sur  $\overline{A} \cup B$ , d'où  $a = b$  et  $f$  est constante.*

**Exercice 5.2.** *Soit  $\mathbb{X}$  un espace topologique.*

1. *Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties connexes de  $\mathbb{X}$ . Si pour tout  $i, j \in I$ , avec  $i \neq j$ , on a  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe. En particulier, si on a  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe.*
2. *Si  $(A_n)_n$  est une famille de parties connexes de  $\mathbb{X}$  telle que pour tout  $n \geq 0$ , on ait  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ , alors  $\bigcup_{n \geq 0} A_n$  est connexe.*

3. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties connexes de  $\mathbb{X}$ . S'il existe  $k \in I$  tel que  $A_k \cap A_i \neq \emptyset$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe.

**Solution 5.2.** 1. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties connexes de  $\mathbb{X}$ . Soit  $f : \bigcap_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue, où  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie discrète. Soient  $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ , alors il existe  $i, j \in I$  tels que  $x \in A_i$  et  $y \in A_j$ . Comme les restrictions  $f|_{A_i}$  et  $f|_{A_j}$  sont continues et  $A_i$  et  $A_j$  sont connexes, alors  $f|_{A_i}$  et  $f|_{A_j}$  sont constantes. Puisque  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , alors il existe  $z \in A_i \cap A_j$ , d'où on a  $f(x) = f(z) = f(y)$ . Donc  $f$  est constante. Par conséquent,  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est connexe.

2. Soit  $f : \bigcup_{n \geq 0} A_n \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue, où  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie discrète. Comme pour tout  $n \geq 0$ ,  $A_n$  est connexe, alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $f|_{A_n}$  est constante. Soient  $x, y \in \bigcup_{n \geq 0} A_n$ , alors il existe  $n, m \geq 0$  tels que  $x \in A_n$  et  $y \in A_m$ . On peut supposer que  $m \geq n$ . Pour tout  $i \in \{n, \dots, m-1\}$ , soit  $x_i \in A_i \cap A_{i+1}$ . Alors on a  $f(x) = f(x_n) = f(x_{n+1}) = \dots = f(x_{m-1}) = f(y)$ . Donc  $f$  est constante. Par conséquent,  $\bigcup_{n \geq 0} A_n$  est connexe.

3. Pour tout  $i \in I$ , soit  $B_i = A_k \cup A_i$ , alors  $B_i$  est une partie connexe de  $\mathbb{X}$  et on a ?  $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ . Or on a  $\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i$ , donc  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est connexe.

**Exercice 5.3.** Soit  $d$  la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ). On considère les sous-ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \text{dist}(x, \mathbb{Z}) < r\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C}, \text{dist}(z, \mathbb{Z}) < r\}.$$

A quelle condition sur  $r$  a-t-on  $A$  connexe puis  $B$  connexe ?

**Solution 5.3.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $x \in A$  si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $d(x, n) < r$ . Donc on a  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(n, r)$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $r \leq \frac{1}{2}$ , alors  $B(n, r) \cap B(m, r) = \emptyset$  si  $n, m \in \mathbb{Z}$  tels que  $n \neq m$ . Donc  $A$  n'est pas connexe. Si  $r > \frac{1}{2}$ , alors  $B(n, r) \cap B(n+1, r) \neq \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Il résulte du Exercice 5.2 que  $A$  est connexe. De même, on a  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(n, r)$  dans  $\mathbb{C}$  et  $B$  est connexe si et seulement si  $r > \frac{1}{2}$ .

**Exercice 5.4.** Notons  $A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, -1] \times \{0\})$  muni de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Montrer que  $A$  est compact et connexe et que  $f(A)$  est un segment si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.
2. Déterminer les points  $x \in A$  pour lesquels  $A - \{x\}$  est connexe.
3. Montrer que  $A$  n'est homéomorphe à aucune partie de  $\mathbb{R}$ .

- Solution 5.4.** 1.  $A$  est compact car c'est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $g : A \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Par connexité du segment  $[-1, 1]$ ,  $g$  est constante sur  $\{0\} \times [-1, 1]$  (et vaut  $v$ ),  $g$  est aussi constante sur  $[-1, 1] \times \{0\}$  et vaut  $v'$ . Mais alors  $v = g(0, 0) = v'$  donc  $g$  est constante sur  $A$ . Donc  $A$  est connexe. Pour  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.  $A$  est compact donc  $f(A)$  est compact.  $A$  est connexe donc  $f(A)$  est connexe. Donc  $f(A)$  est un compact connexe de  $\mathbb{R}$  c'est donc un segment compact.
2. Ce sont les quatre points cardinaux  $x_1 = (0, 1)$ ,  $x_2 = (0, -1)$ ,  $x_3 = (1, 0)$ ,  $x_4 = (-1, 0)$ .
3. Par l'absurde, supposons que  $A$  soit homéomorphe à une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ , alors il existe un homéomorphisme  $f : A \rightarrow I$ . Par le premier point  $I$  est un segment compact  $I = [a, b]$ .  $A - \{x_1\}$  est connexe donc son image par  $f$ ,  $f(A - \{x_1\})$  est connexe, mais c'est aussi le segment  $I$  privé d'un point.  $I$  privé d'un point étant connexe, le point retiré est nécessairement une extrémité. Donc  $f(x_1) = a$  ou  $f(x_1) = b$ . Supposons par exemple  $f(x_1) = a$ . On refait le même raisonnement avec  $x_2$ , qui s'envoie aussi sur une extrémité, comme  $f$  est bijective cela ne peut être  $a$ , donc  $f(x_2) = b$ . Maintenant  $f(x_3)$  est aussi une extrémité donc  $f(x_3) \in \{a, b\}$ . Mais alors  $f$  n'est plus injective car on a  $f(x_1) = f(x_3)$  ou  $f(x_3) = f(x_2)$ . Contradiction.

**Exercice 5.5.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , soit

$$B_a = \begin{cases} \{a\} \times ]0, 1] & \text{si } a \in \mathbb{Q} \\ \{a\} \times ]-1, 0] & \text{si } a \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que

$$B = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} B_a,$$

est une partie connexe de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solution 5.5.** Montrons que  $f : B \rightarrow \{0, 1\}$  une fonction continue et montrons qu'elle est constante. Remarquons que la restriction de  $f$  à tout ensemble  $B_a$  est constante ( $B_a$  est connexe). On définit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  tel que  $g(x)$  prend la valeur qu'a  $f$  sur  $B_x$ . Nous allons montrer que  $g$  est localement constante (on ne sait pas si  $g$  est continue).

- Soit  $a \notin \mathbb{Q}$  alors on a  $(a, 0) \in B$ ,  $f$  est une fonction continue et  $\{f(a, 0)\}$  est un ouvert de  $\{0, 1\}$ , donc  $f^{-1}(\{f(a, 0)\})$  est un ouvert de  $B$ . Donc il existe  $\epsilon > 0$  tel que si  $(x, y) \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \times ]- \epsilon, \epsilon]$  alors  $f(x, y) = f(a, 0)$ . Alors pour  $x \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[$  on a  $g(x) = g(a)$ , si  $x \notin \mathbb{Q}$  alors  $g(x) = f(x, 0) = f(a, 0) = g(a)$ , et si  $x \in \mathbb{Q}$  alors  $g(x) = f(x, \frac{\epsilon}{2}) = f(a, 0) = g(a)$ . Donc  $g$  est localement constante au voisinage des points irrationnels.
- Si  $a \in \mathbb{Q}$  et soit  $b \in ]0, 1]$  alors  $f$  est continue en  $(a, b)$  donc il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout

$x \in ]a - e, a + e[ \cap \mathbb{Q}$ ,  $g(x) = f(x, b) = f(a, b) = g(a)$ . Si maintenant  $x \in ]a - e, a + e[ \cap (C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}})$ , on prend une suite  $(x_n)$  de rationnels qui tendent vers  $x$ . Comme  $f$  est continue alors  $g(a) = g(x_n) = f(x_n, b)$  tend vers  $f(x, b) = g(x)$ . Donc  $g(a) = g(x)$ . Nous avons montré que  $g$  est localement constante au voisinage des points rationnels.

Finalement  $g$  est localement constante sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $\mathbb{R}$  est connexe, alors  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.6.** Soient  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  des espaces topologiques et  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  une application continue. Montrer que si  $\mathbb{X}$  est connexe, alors le graphe de  $f$  est une partie connexe de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ .

**Solution 5.6.** Comme  $f$  est continue, l'application  $x \mapsto (x, f(x))$  est continue de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ , et son image est le graphe de  $f$ . Comme  $\mathbb{X}$  est connexe, alors le graphe de  $f$  est une partie connexe de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ .

**Exercice 5.7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Montrer que  $f$  est monotone si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\{x\})$  est connexe.

**Solution 5.7.** Supposons que  $f$  est monotone. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $a, b \in f^{-1}(\{x\})$  tels que  $a < b$ . Alors on a  $f(a) = f(b) = x$ . Si  $f$  est croissante, alors pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ , d'où  $f(t) = x$ , donc on a  $t \in f^{-1}(\{x\})$ . Si  $f$  est décroissante, alors pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $f(b) \leq f(t) \leq f(a)$ , d'où  $f(t) = x$ , donc on a  $t \in f^{-1}(\{x\})$ . Par conséquent,  $f^{-1}(\{x\})$  est un intervalle. Donc  $f^{-1}(\{x\})$  est connexe.

Réciproquement, supposons que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\{x\})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  n'est pas monotone, alors il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b < c$  et vérifiant  $f(b) < f(a) = f(c)$ , ou  $f(a) = f(c) < f(b)$ . Par conséquent,  $f^{-1}(\{f(a)\})$  n'est pas un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $f$  est bien monotone.

**Exercice 5.8.** Dans  $\mathbb{R}^2$  on considère l'ensemble  $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 0\}$ .

1. Montrer que  $A$  est une partie connexe et connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer  $\bar{A}$  et justifier que  $\bar{A}$  est connexe.
3. Montrer que  $\bar{A}$  n'est pas connexe par arcs.

**Solution 5.8.** 1. Si  $(x_1, \sin(\frac{1}{x_1}))$  et  $(x_2, \sin(\frac{1}{x_2}))$  sont deux points de  $A$  alors le graphe au dessus de  $[x_1, x_2]$  définit un chemin reliant ces deux points. Plus précisément le chemin est l'application  $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $g(t) = (t, \sin(\frac{1}{t}))$ . Donc  $A$  est connexe par arcs donc connexe.

2. Montrons que  $\bar{A} = A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ .  $\subset$ ) Soit  $(x, y) \in \bar{A}$ . Alors il existe une suite  $((x_n, y_n))_n$  de  $A$  qui converge vers  $(x, y)$ . Si  $x > 0$  alors  $y_n = \sin(\frac{1}{x_n})$  converge vers  $\sin(\frac{1}{x})$  (par continuité de  $\sin$ ) d'où  $(x, y) \in A$ . Dans le cas  $x = 0$ , on a  $y_n = \sin(\frac{1}{x_n})$  d'où  $y_n \in [-1, 1]$ . Par conséquent, à la limite on a  $y \in [-1, 1]$ . D'où  $(x, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$ . Montrons l'inclusion  $\supset$ ). Soit  $(x, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$ , le but étant de montrer qu'il existe une suite  $((x_n, y_n))_n$  de  $A$  qui converge vers  $(x, y)$ . Si  $x > 0$ , une telle suite existe trivialement (il suffit de prendre la suite constante égale à  $(x, y)$ ). On suppose donc  $x = 0$ . Ainsi  $y \in [-1, 1]$  est quelconque. Soit  $z \geq 1$  tel que  $\sin(z) = y$ . Soit alors  $x_n = \frac{1}{(z+2\pi n)}$ . On aura  $\sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(z) = y$  Par conséquent la suite  $((x_n, \sin(\frac{1}{x_n}))_n$  est une suite de  $A$  qui tend vers  $(0, y)$  d'où l'inclusion voulue. On a  $A$  est connexe alors  $\bar{A}$  est connexe.
3. Par l'absurde, supposons  $\bar{A}$  connexe par arcs. Il existe  $c : [0, 1] \rightarrow \bar{A}$  continue tel que  $c(0) = (1, \sin(1))$  et  $c(1) = (0, 0)$ . Notons  $c(t) = (x(t), y(t))$ . Notons  $T_0 = \{t \in [0, 1], x(t) > 0\}$ . Cet ensemble est non vide puisque  $0 \in T_0$ . On considère alors  $t_0 = \sup(T_0)$ . Par l'absurde, supposons  $x(t_0) > 0$ . Alors par continuité de  $x$ , on aurait  $x > 0$  sur un voisinage de  $t_0$  ce qui en contredit la définition. Par conséquent  $x(t_0) = 0$ . Ainsi par continuité de  $x$  en  $t_0$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = 0$ . Ainsi il existe une suite  $(\tau_n)$  qui tend en croissant vers  $t_0$  telle que la suite  $(x(\tau_n))$  tend en décroissant vers 0. Notons  $c(t_0) = (0, y_0)$ . Soit  $y \in [-1, 1] - \{y_0\}$ . Soit  $z > 0$  tel que  $\sin(z) = y$ . Pour tout  $n$ , il existe un entier  $k_n$  assez grand pour que  $x_n := \frac{1}{2\pi k_n + z} < x(\tau_n)$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à  $x$ , il existe  $t_n \in [\tau_n, t_0]$  tel que  $x(t_n) = x_n$ . On a alors  $c(t_n) = (x_n, \sin(2\pi k_n + z)) = (x_n, y)$ . Ainsi la suite  $t_n$  tend vers  $t_0$  et  $c(t_n)$  tend vers  $(0, y) \neq c(t_0)$ . Contradiction.

**Exercice 5.9.** Montrer qu'une partie ouverte et connexe de  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs.

**Solution 5.9.** Soit  $G$  un partie ouverte et connexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in G$ . Soit  $A = \{x \in G \text{ qui ont un arc joignant } x_0 \text{ et } x\}$ .  $A$  est connexe par arcs. Si on montre que  $A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $G = A \cup (G - A)$  serait une partition d'ouverts de la partie connexe  $G$ . Donc soit  $A = \emptyset$  ou bien  $G - A = \emptyset$ . Puisque  $x_0 \in A$  alors on a  $G - A = \emptyset$ . Donc  $G = A$  est connexe par arc.

Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $x \in A \subset G$ , puisque  $G$  est ouvert alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset G$ . Tout point  $y \in B(x, r)$  peut être joint à  $x$  par un segment de ligne droite dans  $B(x, r)$  donc tout point  $y \in B(x, r)$  peut être joint à  $x_0$  par un arc et donc  $B(x, r) \subset A$  qui montre que  $A$  est ouvert.

Montrons que  $G - A$  est ouvert aussi. Soit  $x \in G - A$  alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset G - A$ . Sinon cela veut dire que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Soit  $y \in B(x, r) \cap A$  alors on peut joindre  $x_0$  à  $y$  et  $y$  à  $x$  qui est une contradiction car  $x \in G - A$ . Donc  $G - A$  est ouvert.

**Exercice 5.10.** Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

**Solution 5.10.** Les composantes connexes par arcs d'un espace  $\mathbb{X}$  forment une partition et en notant que les composantes connexes par arcs sont non-vides et ouvertes (être localement connexe par arcs implique que chaque point a un voisinage connexe par arcs), la connexité de  $\mathbb{X}$  implique qu'il y a qu'une seule composante connexe par arcs.

**Exercice 5.11.** Montrer que  $\mathbb{X} = C([0, 1])$  avec  $d(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$  est connexe par arcs et donc connexe.

**Solution 5.11.** Supposons que  $f, g$  sont deux éléments quelconques dans  $C[0, 1]$ . On définit un chemin  $h : [0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  par  $h(t) = tf + (1-t)g$ . Alors pour chaque  $t \in [0, 1]$  la fonction  $h(t)$  est continue donc est un élément de  $C[0, 1]$ . De plus, la fonction  $h$  est continue puisque

$$d(h(t), h(s)) = \sup_{x \in [0, 1]} |(t-s)f(x) + (s-t)g(x)| \leq |t-s|(M_f + M_g),$$

où  $|f(x)| \leq M_f$  et  $|g(x)| \leq M_g$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $\delta = \frac{\varepsilon}{(M_f + M_g)}$ , alors on obtient  $d(h(t), h(s)) < \varepsilon$  quand  $|t-s| < \delta$ . Finalement,  $h(0) = g$  et  $h(1) = f$ , donc  $h$  est un chemin continu dans  $C[0, 1]$  de  $g$  vers  $f$ . Donc  $C[0, 1]$  est connexe par arcs et donc connexe.

# Chapitre 6

## Espaces vectoriels normés.

Nous définissons maintenant les espaces vectoriels normés qui forment une classe d'espaces métriques qui jouent un rôle très important dans l'analyse. On considère un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{X}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 6.1 Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.

**Définition 6.1** (Norme sur un espace vectoriel). *On appelle norme sur  $\mathbb{X}$ , toute application*

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\|\end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{X}, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (homogénéité).
2.  $\forall x \in \mathbb{X}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
3.  $\forall x, y \in \mathbb{X}, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

**Définition 6.2** (Espace vectoriel normé). *Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  où  $\mathbb{X}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{X}$ .*

**Exemple 6.1** (Normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ ). 1. Sur  $\mathbb{R}$  (considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel), la norme usuelle est la valeur absolue ( $\|x\| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$ ). Sur  $\mathbb{C}$  (considéré comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel), la norme usuelle est le module ( $\|z\| = |z|, \forall z \in \mathbb{C}$ ).

2. Étant donné  $n \geq 2$  un entier, on peut définir sur  $\mathbb{R}^n$  plusieurs normes, ces normes sont les plus utilisées sur  $\mathbb{R}^n$  et sont définies par :  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_3 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

3. Pour  $\mathbb{R}^n : \forall z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}, \quad \|z\|_3 = \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \|z\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ , la norme  $\|\cdot\|_2$  s'appelle la norme euclidienne.

**Exemple 6.2.** 1. Soient  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espace normé et  $A$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}$ .

La restriction de la norme  $\|\cdot\|$  sur  $A$  est une norme, appelée norme induite.

2. Soient  $\mathbb{X}$  un ensemble non vide et  $B(\mathbb{X}, \mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications bornées définies sur  $\mathbb{X}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $f \in B(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ , on pose  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$ . Alors  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $B(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ .

3. Soient  $\mathbb{X}$  un espace compact et  $C(\mathbb{X})$  l'espace vectoriel des applications continues de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{K}$ , on a  $C(\mathbb{X}) \subset B(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ . Donc  $(C(\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace normé.

4. Soient  $\mathbb{X}$  un espace localement compact et  $C_0(\mathbb{X})$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{K}$  continues et tendant vers 0 à l'infini, on a  $C_0(\mathbb{X}) \subset B(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ . Donc  $(C_0(\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace normé.

5. Sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $C([0, 1])$  des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{K}$ , on a la norme suivante : pour tout  $f \in C([0, 1])$ ,  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

**Remarque 6.1.** Sur un espace vectoriel admettant plusieurs normes, le choix d'une norme donnée dépend de ce que l'on veut étudier exactement.

## 6.2 Distance associée à une norme.

**Définition 6.3 (Distance associée à une norme).** Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un e.v.n. On définit :

$$d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|.$$

On vérifie aisément que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ . Cette distance est appelée la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{X}$ . La distance  $d$  associée à la norme possède les propriétés suivantes :

1.  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$  quels que soient  $x, y, z \in \mathbb{X}$ .
2.  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$  pour tout  $x \in \mathbb{X}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Remarque 6.2.** 1. Grâce à la notion de la distance associée à une norme, un e.v.n est vu comme un cas particulier d'un espace métrique; qui est à son tour (comme on le sait) un cas particulier d'un espace topologique.

2. Les définitions de boule ouverte, boule fermée, sphère, ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, limite, continuité, etc dans un e.v.n sont simplement celles relatives à la distance associée à sa norme.

**Définition 6.4 (Espace de Banach).** On dit que l'espace normé  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  est de Banach, si  $\mathbb{X}$  est complet pour la distance associée à  $\|\cdot\|$ .

## 6.3 Normes équivalentes.

**Définition 6.5 (Normes équivalentes).** Soient  $\mathbb{X}$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $\mathbb{X}$ .

1. On dit que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont topologiquement équivalentes si les distances associées sont topologiquement équivalentes, c'est-à-dire si les topologies associées sont identiques.
2. On dit que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes si les distances associées sont équivalentes, c'est-à-dire s'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que :  $\alpha\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta\|\cdot\|_1$ .

**Remarque 6.3.** Dans les espaces métriques, on a vu que deux distances équivalentes sont forcément topologiquement équivalentes, mais que l'inverse est généralement faux. Dans les e.v.n, on a deux normes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

**Exemple 6.3.** Sur  $\mathbb{R}^n$ , les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes. Plus précisément, on a  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 6.1.** Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

*Démonstration.* Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base fixée de l'espace de dimension finie  $\mathbb{X}$ . Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ , qui est clairement linéaire et bijective. Soient

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  deux normes sur  $\mathbb{X}$ . On définit  $\|x\|_j = \|Tx\|_j, j = 1, 2$ . Il est immédiat que  $\|\cdot\|_j$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ . Il existe alors  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$C_1\|e\|_1 = C_1\|T^{-1}e\|_1 \leq \|e\|_2 = \|T^{-1}e\|_2 \leq C_2\|e\|_1 = C_2\|T^{-1}e\|_1, \quad \forall e \in \mathbb{X}.$$

□

**Remarque 6.4.** *Ce résultat est faux si  $\mathbb{X}$  n'est pas supposé de dimension finie, par exemple, dans  $\mathcal{C}([a; b]; \mathbb{K})$ , les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes.*

**Exemple 6.4.** *Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.*

## 6.4 Exercices avec Solutions.

**Exercice 6.1.** *Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.*

1. *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}$ . Montrer que  $\overline{F}$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}$ .*
2. *Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}$  d'intérieur non vide. Montrer que  $F = \mathbb{X}$ .*

**Solution 6.1.** *Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.*

1. *Il nous faut montrer que  $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$ , pour tout  $x, y \in \overline{F}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Puisque  $x \in \overline{F}$  il existe  $(x_n) \subset F$  tel que  $x_n \rightarrow x$ . De même il existe  $(y_n) \subset F$  tel que  $y_n \rightarrow y$ . On a  $\alpha x_n + \beta y_n \in F$  car  $F \subset \mathbb{X}$  est un sous-espace vectoriel et clairement aussi  $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y$ . D'où  $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$ .*
2. *Supposons, par l'absurde, qu'il existe  $x \in \mathbb{X} - F$ . Soit  $x_0 \in \overset{\circ}{F}$  un point intérieur de  $F$ . Il existe alors  $B(x_0, 2r) \subset F$ . Maintenant on peut écrire :*

$$x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + \frac{\|x - x_0\|}{r} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$$

*ce qui montre que  $x \in F$  puisque  $x_0 \in F, \frac{\|x - x_0\|}{r} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \in F$  et que  $F$  est un sous-espace vectoriel. Cette contradiction montre que l'on a bien que  $F = \mathbb{X}$ .*

**Exercice 6.2.** *Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espace normé sur  $\mathbb{R}$ .*

1. *Montrer que la distance  $d$  associée 'à  $\|\cdot\|$  vérifie :*

$$\forall x, y, t \in \mathbb{X}, d(x + t, y + t) = d(x, y),$$

$$\forall x, y \in \mathbb{X}, \lambda \in \mathbb{R}, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y).$$

2. Montrer (si  $\mathbb{X}$  n'est pas réduit à un point) que quelle que soit la distance  $d'$ ,  $d = \min(1, d')$  est une distance qui ne découle pas d'une norme.

**Solution 6.2.** 1. On a immédiatement,  $\forall x, y, t \in \mathbb{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$d(x+t, y+t) = \|(x+t) - (y+t)\| = \|x-y\| = d(x, y).$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y).$$

2. Si l'on suppose qu'il existe une norme correspondant à cette distance (on a montré à l'exercice 2.8 qu'il s'agit bien d'une distance) on devrait avoir, en particulier, que  $d(0, \lambda y) = |\lambda| d(0, y)$ . Mais  $d(0, \lambda y) \leq 1$ ,  $d(0, y) > 0$  et  $|\lambda| \rightarrow \infty$  et l'on obtient une contradiction.

**Exercice 6.3.** On considère sur  $\mathbb{X} = C([0, 1], \mathbb{R})$  les deux normes définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

**Solution 6.3.** Pour tout  $f \in \mathbb{X}$ , on a  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ . Supposons que les deux normes soient équivalentes, il existe alors  $c > 0$  tel que

$$\forall f \in \mathbb{X}, \|f\|_\infty \leq c \|f\|_1.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n(t) = t^n$  la fonction définie sur  $[0, 1]$ . On a  $\|f_n\|_\infty = 1$ ,  $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et l'inégalité  $1 \leq \frac{c}{n+1}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ne peut être satisfaite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 6.4.** Soient  $\mathbb{X}$  un espace vectoriel normé,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $A$  une partie de  $\mathbb{X}$  telle que

$$(x, y) \in A^2, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| \geq \alpha.$$

Montrer que  $A$  est une partie complète de  $\mathbb{X}$ .

**Solution 6.4.** Soit  $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$  une suite de Cauchy, alors pour  $n, m \in \mathbb{N}$  assez grand on a  $\|x_n - x_m\| \leq \frac{\alpha}{2}$ . D'où nécessairement  $(x_n) \subset \mathbb{X}$  est constante à partir d'un certain indice. D'où  $(x_n) \subset \mathbb{X}$  converge.

**Exercice 6.5.** Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $(x_n)_n$  une suite de Cauchy de  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  et soit  $M > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$ . Montrer que la suite  $(\frac{x_n}{M})_n$  est une suite de Cauchy dans la boule unité fermée. En déduire, que  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  est complet si et seulement si la boule unité fermée est complète.

**Solution 6.5.** Soit  $(x_n)_n \subset \mathbb{X}$  une suite de Cauchy telle que  $\|x_n\| \leq M$ . On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| \leq M\varepsilon.$$

Donc il vient immédiatement que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \left\| \frac{x_n}{M} - \frac{x_m}{M} \right\| \leq \varepsilon,$$

et donc la suite  $(\frac{x_n}{M})_n$  est bien de Cauchy dans la boule unité fermée. Si  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  est complet alors  $\overline{B(0,1)}$  est complète (car elle est fermée). Si  $\overline{B(0,1)}$  est complète montrons que  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  est complet. Soit  $(x_n)_n \subset (\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  une suite de Cauchy, on sait que toute suite de Cauchy est bornée et donc par ce qui précède il existe  $M > 0$  telle que  $(\frac{x_n}{M})_n$  est de Cauchy dans  $\overline{B(0,1)}$ . Donc, par hypothèse, elle converge dans  $\overline{B(0,1)}$ , c'est à dire que pour un  $y \in \overline{B(0,1)}$  on a  $(\frac{x_n}{M})_n \rightarrow y$ . Maintenant il est facile de voir que  $x_n \rightarrow My \in \mathbb{X}$ .

**Exercice 6.6.** Soit  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espace normé de dimension finie. Alors :

1.  $\mathbb{X}$  est complet.
2.  $A \subset \mathbb{X}$  est complet  $\iff A$  est fermé.
3.  $A \subset \mathbb{X}$  est compact  $\iff A$  est fermé et borné.

**Solution 6.6.** Soit  $T$  l'application définie par  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . Il suffit de considérer sur  $\mathbb{X}$  la norme  $\|e\| = \|T^{-1}e\|_\infty$ .

1. Si  $(e^n)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{X}$ , il est clair que  $(T^{-1}e^n)$  est une suite de Cauchy dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , qui est complet. Si  $T^{-1}e^n \rightarrow x$ , alors clairement  $e^n \rightarrow Tx$ .
2. " $\implies$ " Un sous-espace complet est toujours fermé. " $\impliedby$ " Soit  $(e^n)$  une suite de Cauchy de  $A$ . Alors  $(T^{-1}e^n)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x$  est la limite de cette deuxième suite, alors  $e^n \rightarrow Tx$  dans  $\mathbb{X}$ .  $A$  étant fermé, on trouve que  $Tx \in A$ ; par conséquent, toute suite de Cauchy de  $A$  converge dans  $A$ .
3. " $\implies$ " est vraie dans tout espace métrique. " $\impliedby$ " Clairement, si  $A$  est fermé et borné,  $T^{-1}(A)$  l'est aussi. Donc  $T^{-1}(A)$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Il s'ensuit que  $A = T(T^{-1}(A))$  est un compact de  $\mathbb{X}$  (car image d'un compact par une fonction continue).

**Exercice 6.7.** Soit  $\mathbb{X}$  un espace vectoriel norme sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Montrer que les applications  $x \mapsto \|x\|$  de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  de  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  dans  $\mathbb{X}$ , et  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  de  $\mathbb{K} \times \mathbb{X}$  dans  $\mathbb{X}$ , sont continues.

**Solution 6.7.** pour tous  $x$  et  $y \in \mathbb{X}$  on a, d'après l'inégalité triangulaire,  $|||x| - |y||| \leq \|x + y\|$ , ce qui prouve que l'application  $x \mapsto \|x\|$  est lipschitzienne, donc uniformément continue sur  $\mathbb{X}$ .

On munit l'espace produit  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  de la norme  $(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ . pour tous  $x, y, x', y' \in \mathbb{X}$  on a, par application de l'inégalité triangulaire,

$$\|(x + y) - (x' + y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\|.$$

Mais  $\|x - x'\| + \|y - y'\| = \|(x - x', y - y')\| = \|(x, y) - (x', y')\|$ . d'où finalement

$$\|(x + y) - (x' + y')\| \leq \|(x, y) - (x', y')\|,$$

ce qui prouve que l'application  $(x, y) \mapsto x + y$  est lipschitzienne, donc uniformément continue sur  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ .

On munit l'espace produit  $\mathbb{K} \times \mathbb{X}$  de la norme  $(\alpha, x) \mapsto \|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|$ . Pour tous  $x, x' \in \mathbb{X}$  et tous  $\alpha, \alpha_0 \in \mathbb{K}$ , on a

$$\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| \leq |\alpha| \|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0| \|x_0\|.$$

le second membre de cette inégalité a pour limite 0 lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  et  $\alpha$  vers  $\alpha_0$ , c'est-à-dire lorsque  $(\alpha, x)$  tend vers  $(\alpha_0, x_0)$ . ainsi, l'application  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  est continue au point  $(\alpha_0, x_0)$ .

**Exercice 6.8.** Soit  $\mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels et de degré  $n \leq 2$ . On pose, pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[\mathbb{X}]$  donné par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  :

$$\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \text{ et } \|P\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

Montrer que ces deux normes sont équivalentes.

**Solution 6.8.** Si  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , on a  $|P(x)| \leq |a|x^2 + |b|x + |c| \leq |a| + |b| + |c|, \forall x \in [0, 1]$ . Par suite, on a :  $\|P\|_\infty \leq |a| + |b| + |c| \leq 3 \max\{|a|, |b|, |c|\} = \|P\|$ . On a également,  $P(1) = a + b + c$ ,  $P(0) = c$  et  $P(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ . On peut calculer  $a, b$  et  $c$  en fonction de  $P(0), P(1)$  et  $P(\frac{1}{2})$ . On obtient :  $a = -4P(\frac{1}{2}) + 2P(1) + 2P(0)$ ,  $b = 4P(\frac{1}{2}) - P(1) - 3P(0)$  et  $c = P(0)$ . D'où  $|a| \leq 8\|P\|_\infty$ ,  $|b| \leq 8\|P\|_\infty$  et  $|c| \leq \|P\|_\infty$  et on obtient  $\|P\| \leq 8\|P\|_\infty$ .

**Exercice 6.9.** Soit  $\mathbb{X} = C([0, 1], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $f \in \mathbb{X}$ , on pose :

$$N(f) = \int_0^1 t|f(t)|dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{X}$ .
2. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Calculer  $\|f_n\|_\infty$  et  $N(f_n)$ . En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

**Solution 6.9.** 1. Pour tout  $f, g \in \mathbb{X}$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$N(\lambda f) = \int_0^1 t|\lambda f(t)|dt = \int_0^1 t|\lambda||f(t)|dt = |\lambda|N(f),$$

et

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \int_0^1 t|f(t)+g(t)|dt \leq \int_0^1 t|f(t)| + |g(t)|dt \\ &= \int_0^1 t|f(t)|dt + \int_0^1 t|g(t)|dt = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

On a  $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ , donc  $N$  est une norme sur  $\mathbb{X}$ .

2. Pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $\|f_n\|_\infty = 1$  et  $N(f_n) = \int_0^1 t|f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2)dt = \frac{1}{6n^2}$ .  
Donc les deux normes ne sont pas équivalentes (n'existe pas  $\alpha, \beta > 0, \alpha N(f_n) \leq \|f_n\|_\infty \leq \beta N(f_n)$ ).

**Exercice 6.10.**  $\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R} ; (x_n) \text{ bornée}\}$  muni de la norme  $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$  est un espace de Banach.

**Solution 6.10.** On munit  $\mathbb{N}$  de la distance discrète  $d$ . Si  $(a_k) \subset \mathbb{N}$ , on a  $a_k \rightarrow a \Leftrightarrow$  il existe un rang  $k_0$  tel que  $a_k = a$  pour  $k \geq k_0$ . " $\Leftarrow$ " est claire. Pour " $\Rightarrow$ ",  $\exists k_0$  tel que  $d(a_k, a) < 1/2$  si  $k \geq k_0$ ; il s'ensuit que  $a_k = a$  si  $k \geq k_0$ . Conséquence : toute application  $f : (\mathbb{N}, d) \rightarrow (\mathbb{Y}, D)$  est continue, quel que soit l'espace métrique  $(\mathbb{Y}, D)$ . On trouve que  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) = C_b((\mathbb{N}, d), (\mathbb{R}, |\cdot|))$  qui complet.

# Bibliographie

- [1] I.T. Adamson. A General Topology Workbook, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [2] N. Bourbaki. Topologie Générale, Chapitres 5 à 10, Diffusion C.C.L.S, nouvelle édition, 1974.
- [3] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chapitres 1 à 4, Masson, nouvelle édition, 1990.
- [4] N. Chougui. Introduction à la topologie, Université Ferhat Abbas, Sétif 1. 2018.
- [5] G. Christol, A. Cot et C-M. Marle. Topologie, Ellipses, 1997.
- [6] G. Choquet. Cours de Topologie, Masson, 1969, deuxième édition, 1992.
- [7] J. Dixmier. Topologie Générale, Presses Universitaires de France, Paris, 1981.
- [8] G. Flory. Topologie et Analyse, Tome 1 : Topologie (exercices avec solutions), Broché, 2017.
- [9] B. Gostiaux. Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 : Topologie, analyse réelle, Presses Universitaires de France, Paris, 1993.
- [10] M. Hazi. Espaces topologiques en général et espaces métriques en particulier, Office des Publications Universitaires, 1993.
- [11] M. Hazi. Introduction aux espaces normés, Office des Publications Universitaires, 1994.
- [12] M. Hazi. Topologie au delà des travaux dirigés, Office des Publications Universitaires, 2006.
- [13] S. Lipschutz. Topologie, Cours et problèmes, Broché, 1999.
- [14] J. Munkres. Topology, Pearson New International Edition, 2014.
- [15] H. H. Nawfal El. Topologie générale et espaces normés. Paris : Dunod, 2011.
- [16] H. Queffélec. Topologie, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2007.
- [17] A. Saadi. Introduction à la topologie, Université Mohamed Boudiaf-M'sila. 2017.
- [18] L. Schwartz. Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Herman, 1980.
- [19] C. Wagschal. Topologie et Analyse Fonctionnelle, Hermann Éditeurs, Paris, 2012.