RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji, Laghouat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour obtenir le grade de

Master En mathématique

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **ANALYSE FONCTIONNELLE**
Intitulé :

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ TRONQUÉS DE RANG UN.

Présenté par : **Djekhioua Aissa**
Le 18/05/2016

Devant le jury composé de :

MOKHTARI ABDELKADER	Professeur	Université de Laghouat	Président
BENDAOUD ZOHRA	Maîttre de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur
YAGOUB AMEUR	Maître Assistant A	Université de Laghouat	Co-Encadreur
CHETTIH ALI	Maître Assistant A	Université de Laghouat	Examinateur
KORRICHI FATIMA	Maîttre de conférence B	Université de Laghouat	Examinateur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir aidé et donné la possibilité de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer mon profond respect et ma reconnaissance à mon Dr.Bendaoud Zohra et Monsieur Yagoub Ameur, pour leur collaboration, soutien, conseils et leurs encouragements durant toute la période de préparation et rédaction de cette mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement mon enseignant Professeur Monsieur Mokhtari Abdelkader, pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de ce mémoire.

je remercie vivement les enseignants, Mlle Korrichi Fatima et Monsieur Chettih Ali , qui me font l'honneur de participer à ce jury.

Mes remerciements et ma reconnaissance à mes enseignants : Dr.Bendaoud Zohra, Mme Boukhatem Yamna et Mlle Korrichi Fatima, Mers Yagoub Ameur, Mokhtari Abdelkader, Rahmoun AbdelAziz, Tahari Karim, belabbaci , Nassri Mokhtar et Bachiri Mohammed.

Il est important pour moi de remercier mes parents, ma famille, qui ont toujours été une source inépuisable de soutien et encouragements.

Un grand merci à tous mes amis et mes collèges de master, Sassi Riadh, Bahloul, Chenini, Omran, Hamdi, Mokhtari, Laouti, Yahiaoui, Bachiri AEK, Mokhtar, Haweche, Ghazaoui, Lbagra, Ouarnoughi, avec qui j'ai partagé des instants inoubliables.

A la fin je remercie énormément l'attention et tout ce qui a contribuè, de près ou de loin, pour l'aboutissement de ce travail.

Résumé.

L'opérateur de Toeplitz tronqué A_Φ est la compression de l'opérateur de Toeplitz T_Φ sur l'espace modèle K_u^2, avec u est une fonction intérieure non constante, et $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ symbole de l'opérateur. Les fonctions $K_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\bar{\lambda}z}$, $\lambda, z \in \mathbb{D}$, forment le noyau reproduisant de K_u^2 dans le sens que $K_\lambda^u \in K_u^2$ et $f(\lambda) =< f, K_\lambda^u >$, pour tout $f \in K_u^2$. Le conjugué de K_λ^u est $CK_\lambda^u = \widetilde{K_\lambda^u}$ où C est un opérateur de conjugaison sur K_u^2 défini par $Cf = u\overline{zf}$.
Dans ce travail, on a étudié les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur de rang 1 sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqués de rang 1, et les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués de rang un, reste un opérateur de Toeplitz tronqué de même rang.

Mots clés :
Espaces de Hardy, espaces modèle, fonction intérieure, opérateur de conjugaison, Shift généralisé, opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués.

Abstract.

The truncated Toeplitz operator A_Φ is the compression of the Toeplitz operator T_Φ to the model space K_u^2, with u is a non constant inner function and $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$, symbol of the operator. The functions $K_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\bar{\lambda}z}$, $\lambda, z \in \mathbb{D}$, are the reproducing kernel for K_u^2 in the sens that $K_\lambda^u \in K_u^2$ and $f(\lambda) =< f, K_\lambda^u >$, for all $f \in K_u^2$. The conjugation of K_λ^u is $CK_\lambda^u = \widetilde{K_\lambda^u}$ where C is a conjugation operator to K_u^2 defined by $Cf = u\overline{zf}$.

In this work, we studied the necessary and sufficient conditions so that a rank-one operator on K_u^2 is a rank-one truncated Toeplitz operator, and the necessary and sufficient conditions for that the product of two rank-one truncated Toeplitz operators is rank-one truncated Toeplitz operator are given.

Key words :

Hardy spaces, model spaces, inner function, conjugation operator, generalized shift, Toeplitz operators, truncated Toeplitz and Toeplitz operators.

ملخّص.

مؤثر توبليتز المتقطع A_Φ هو ضغط من مؤثر توبليتز T_Φ على الفضاء النموذجي K_u^2 ، مع u هي دالّة داخلية غير ثابتة، و $\Phi \in L^2(\mathbb{T})$ ، تسمّى رمز المؤثر. الدوال $K_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\bar{\lambda}z}, \lambda, z \in \mathbb{D}$ ، تشكل نواة استنساخ K_u^2 بمعنى ان يكون $K_\lambda^u \in K_u^2$ و $f(\lambda) =< f, K_\lambda^u >$ ، من اجل كل $f \in K_u^2$. مرافق K_λ^u هو $CK_\lambda^u = \widetilde{K_\lambda^u}$ حيث C هو مؤثر الإقتران على K_u^2 معرف ب $Cf = u\overline{zf}$.

في هذه المذكرة، تمّ دراسة الشروط الآزمة و الكافية لمؤثر ذو رتبة واحدة على K_u^2 هو مؤثر توبليتز المتقطع ذو الرتبة الواحدة، و ايضا الشروط الآزمة و الكافية من اجل جداء مؤثري توبليتز المتقطعين ذوي الرتبة ١ يبقى مؤثر توبليتز الرتبة ١.

مفاتيح هذه المذكرة

فضاءات هاردي، الفضاء النموذجي ، دالّة داخلية، مؤثر الإقتران، التغير المعمّ، مؤثر توبليتز و توبليتز المتقطع.

Table des matières

Notations

$\mathbb{D}$	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\mathbb{T}$	le cercle unité.
$\widehat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espace des fonctions bornées dans $\mathbb{T}$.
$\langle , \rangle$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphe sur $\mathbb{D}$.
$L(E,F)$	l'ensemble des opérateurs linéiares bornés de E dans F.
$L(E)$	l'ensemble des opérateurs linéiares bornés de E dans E.
H	l'espace de Hilbert
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornées.
u	fonction intérieure.
K_u^2	l'espace modèle.
K_u^∞	$= K_u^2 \cap H^\infty$ est dense dans K_u^2.
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2.
P_u	projection orthogonale de L^2 sur K_u^2.
$\widehat{f}(n)$	n-éme coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$.
K	noyau reproduisant de H.
K_λ	noyau reproduisant de H^2.
K_λ^u	noyau reproduisant de K_u^2.
ADC	dérivée angulaire au sens de Carathéodory.
S	opérateur Shift sur H^2.
S_u	opérateur Shift sur K_u^2.
S_u^α	opérateur Shift généralisé(modifié) sur K_u^2, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

M_φ	opérateur de multiplication de symbole φ.
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ.
A_φ^u	opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u^2 de symbole φ.
C	opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert. $\widetilde{f} = Cf$.
$f \otimes g$	opérateur de rang 1 sur un espace de Hilbert (produit tensoriel).
$\{e_n\}_n$	base orthonormée du espace de Hilbert.
$\mathcal{T}_u$	l'ensemble de tous les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés sur K_u^2.
$\mathcal{T}_u^\alpha$	l'ensemble de tous les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α sur K_u^2.

Introduction

Ce mémoire est dédié à l'étude 'Opérateurs de Toeplitz tronqués de rang un', on note par $\mathbb{D}$ le disque unité, et $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. Soit l'espace de Hardy usuel H^2 est l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ dont la série des coefficients de Taylor à l'origine est de carré sommable. L'espace H^2 peut être identifié avec le sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ formé par les fonctions dont la série des coefficients de Fourier d'indice strictement négatif son nuls. Soit P la projection orthogonale de L^2 sur H^2. La projection P peut être exprimée explicitement par la formule :

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi), \quad pour z \in \mathbb{D}$$

Rappelons que d'après le théorème de Beurling, tout sous espace de H^2 qui est invariant par l'adjoint de l'opérateur de shift est de la forme :

$$K_u^2 := H^2 \ominus uH^2.$$

$u \in H^2$ est une fonction intérieure non constante.

Le sous espace K_u^2 ainsi défini est appelé espace modèle correspondant à la fonction intérieure u et on note par P_u la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2.

Récemment, Sarason a étudié [17] la compression de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace modèle. Cet opérateur est appelé opérateur de Toeplitz tronqué. Etant données une fonction intérieure non constante u et une fonction $\varphi \in L^2$, l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ, noté A_φ est défini sur le sous-espace dense K_u^∞ de K_u^2 par $A_\varphi = P_u M_\varphi$.
Bien que certains cas particuliers de ces opérateurs sont apparus bien avant dans la littérature, la théorie générale a été formellement introduite par Sarason ([17])en 2007. A partir de ce momment, la théorie des opérateurs de Toeplitz tronquées devient un domaine de recherche intéressant, voir par exemples les articles [3].[10].[9].

Les problèmes que nous allons résourdre dans ce mémoire concernant la stabilité de la multiplication de deux opérateurs de Toeplitz du produit définis dans l'espace de Hardy H^2, ces problèmes sont complètement résolus par Brown et Halmos dans [7]. Ils ont montré que le produit de deux opérateurs reste un opérateur de Toeplitz si et seulement si l'un des symboles est analytique ou anti-analytique.

Concernant les opérateurs de Toeplitz tronqué, les problèmes s'avèrent difficiles à résourdre. En 2010, Sedlock [16] a étudié les problèmes en montrant que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si les deux opérateurs appartient à une classe particulière appelée opérateur de Toeplitz tronqué de type α où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ce mémoire est organisée de la manière suivante :

-Le premier chapitre est consacré aux rappels et préliminaire concernant la présentation de l'espace de Hardy, avec l'identification entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$.

-Le deuxième chapitre, nous parlons des opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy. Ce chapitre nous permettent de présenter brièvement l'opérateur Sur Hilbert et l'opérateur de shift où décalage.

-Le troisième chapitre, nous étudions les espaces modèles et les noyaux reproduisants,le produit tensoriel, les opérateurs de Toeplitz tronqués et leurs properiétés algébriques(très utilisé dans la suite du mémoire), et les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

-Dans le dernier chapitre, nous décrivons les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α dans le cas de la dimension un.

Le corps de ce mémoire est destiné au dernier chapitre, qui est alors le résultat de ce travail. On cherchera quelque conditions nécéssaire et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués soit un opérateur de Toeplitz tronqué.

Chapitre 1

Espaces de Hardy

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition. 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}\, ou\, \mathbb{C})$, un produit scalaire sur E est une application, notée $\langle .,. \rangle$ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait :*

1. *$\langle x, x\rangle \geqslant 0$ et, si $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ et $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$;*
3. *$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ et $\langle x, z + y\rangle = \langle x, z\rangle + \langle x, y\rangle$*

Dans la deuxième point $\overline{\langle y, x\rangle}$ et $\overline{\alpha}$ sont les conjugués dans $\mathbb{C}$ de $\langle y, x\rangle$ et α, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ces barres du conjugaison sont inutiles.

Définition. 1.2. *On appelle espace préhilbertien (hermitien)un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace préhilbertien H lorsque nous aurons énoncé les propriétés :*

Théorème. 1.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Pour tout $x, y \in H$,on a :*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Théorème. 1.2. *(Identité du parallélogramme) Pour tout $x, y \in H$, on a :*

$$(\|x + y\|)^2 + (\|x - y\|)^2 = 2((\|x\|)^2 + (\|y\|)^2)$$

Proposition. 1.1. *Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé avec la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ induite par le produit scalaire.*

Démonstration. La seul axiome non évident a obtenir est l'inégalité triangulaire, on a :

$$(\|x+y\|)^2 = (\|x\|)^2 + (\|y\|)^2 + 2|\langle x, y\rangle|$$

de L'inégalité de Schwarz, on déduit que

$$2|\langle x, y\rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

d'où

$$(\|x+y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

Définition. 1.3. *Lorsqu'un espace préhilbertien H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que H est un espace de Hilbert.*

Exemple. 1.1.

1. *l'espace euclidien $C^k = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k); x_i \in \mathbb{C}\ ,\ i = 1, ..., k\}$ muni du produit scalaire :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

2. *l'espace $l^2 = \{x = (x_j)_{j>0}, x_j \in \mathbb{C}, \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

est un espace de Hilbert

3. *l'espace $L^2(\Omega, A, P)$ de toutes les variables aléatoires complexe X définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) telles que :*

$$E(|X|^2) < \infty$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = E(X\overline{Y}) = \int\limits_{\Omega} X(\mu)\overline{Y(\mu)}dP(\mu).$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : Tout espace vectoriel sur ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) de dimension finie sont des espaces Hilbertiens.

1.1.2 Orthogonalité

Définition. 1.4. *Deux vecteurs x, y d'un espace hilbertien H sont orthogonaux, on écrit $x \perp y$ si : $< x, y >= 0$*

Définition. 1.5. *Deux sous espaces F_1, F_2 d'un hilbertien H dont dits orthogonaux si : $\forall x \in F_1, \forall y \in F_2$; $\langle x, y\rangle = 0$.*

Proposition. 1.2. *Soit F un sous espace d'un hilbertien H, l'ensemble des vecteurs de H orthogonaux a F forme un sous espace vectoriel de H, noté $F^\perp$:*

$$F^\perp = \{x \in H / \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F\}$$

Proposition. 1.3. *(Théorème de Pythagore) Soit $x_1, x_2, ..., x_n$, n vecteurs d'un espace Hilbertien H orthogonaux deux à deux , alors :*

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n, x_1, x_2, ..., x_n\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle + ... + \langle x_n, x_n\rangle$$

1.1.3 Projection orthogonale

Théorème. 1.3. *(Théorème de Riesz de la projection orthogonale) soit H un espace de Hilbert et F un sous espace fermé, soit y un point de H n'appartenant pas à F alors le problème $\inf_{x \in F} \|y - x\|$ possède une et une seule solution notée $y^\perp \in F$ et telle que $(y - y^\perp) \in F^\perp$, cet élément $y^\perp$ est appellé projection orthogonale de y sur F et l'application associée notée $(P_F(y))$.*

Le résultat qui permet de manipuler l'application de projection orthogonale est le suivante :

Proposition. 1.4. *L'application qui à un point de H fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé F, possèdes les propriétés suivante :*

1. $P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y)$.

2. $P_F + P_{(F)^\perp} = id_H$.

3. $(\|x\|)^2 = (\|P_F(x)\|)^2 + (\|(id - P_F)(x)\|)^2$.

4. $P_F(x_n) \longrightarrow P_F(x), si\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

5. $x \in F \Leftrightarrow P_F(x) = x$.

6. $x \in F^\perp \Leftrightarrow P_F(x) = 0$.

7. $P_F(p_F)(x) = P_F(x)$.

8. $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow P_{F_1}(P_{F_2})(x) = P_{F_1}(x)$.

Théorème. 1.4. $H = F \oplus F^\perp$ *et la décomposition de* $x \in \ H$ *dans cette somme directe est :*

$$x = P(x) + (id - P)(x)$$

Démonstration. pour tout $x \in \ H$, $x = P(x) + (x - P(x))$ appartient à $H = F + F^\perp$ et $F \cap F^\perp = \{0\}$, la somme est donc directe, $H = F \oplus F^\perp$ .Ceci veut dire que p est la projection sur F parallélement à $F^\perp$. On appelle donc cette application la projection orthogonale de H sur F. □

1.1.4 Bases orthonormales

Définition. 1.6. *Soit H un espace de Hilbert ;$(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs est dite :*

1. *orthogonale si* $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$
2. *orthonormale si de plus* $|e_i| = 1$, $\forall i \in I$

Exemple. 1.2. *Soit $L^2[-\pi,+\pi]$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[-\pi,+\pi]$, la famille $(e_p(t))_{p\in\mathbb{Z}} = (e^{ipt})_{p\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.*

Définition. 1.7. *Un espace de Hilbert H est sṕarable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Théorème. 1.5. *Soit H un espace de Hilbert séparable, il possède une base et même une infinité de bases orthonormales. Toute ses bases possèdent le même nombre d'élément appelé la dimension de l'espace de Hilbert H.*

1.1.5 L'espace de Hilbert possèdent un noyau reproduisant

Définition. 1.8. *Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur $\mathbb{D}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $\mathbb{D}(z,r)$ désigne le disque ouvert centré en z de rayon r, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on note $\langle x, y\rangle$ et $\|.\|$, respectivement le produit scalaire et la norme de H. On dit qu'une application K de $D \times \mathbb{D}$ est un noyau reproduisant pour H si :*

1. *pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$, $K_z(\omega) = K(z,\omega)$ est une fonction de ω qui appartient à H.*
2. *pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $f \in H$*

$$f(z) = \langle f, K_z\rangle.$$

En particulier pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$,
$K_z(\omega) = \langle K_z, K_\omega\rangle$ *et* $\|K_z\| = \sqrt{\langle K_z, K_z\rangle} = \sqrt{K(z,z)}$.

Théorème. 1.6. *Soit H un espace de Hilbert de fonctions sur $\mathbb{D}$, alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si l'évaluation ponctuelle $f \longmapsto f(z)$ est continue sur H pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Démonstration. Si H admet un noyau reproduisant K alors :

$$|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leqslant \|f\|\|K_z\|$$

Réciproquement si $f \longmapsto f(z)$ est linéaire continue sur H pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors par le théoréme de représentation de Riesz, pour chaque $z \in \mathbb{D}$, il existe $g_z \in H$ tel que

$$f(z) = \langle f, g_z\rangle.$$

Et g_z vérifie 1) et 2) ce qui conclu. □

Proposition. 1.5. *Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ admettant un noyau reproduisant K, alors*

1. *K est unique.*
2. *pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$, $K(z,\omega) = \overline{K(\omega, z)}$.*
3. *soit $z \in D$,$K(z,z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$.*
4. *pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$,$|K(z,\omega)| \leqslant \sqrt{K(z,z)}\sqrt{K(\omega,\omega)}$*
   pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'application $K_z = K(z,.)$ est bornée sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.
5. *K est une fonction définie positive, i-e :*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \overline{a_k} K(\omega_j, \omega_k) \geqslant 0$$

pour toute suite complexe $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et tout sous-ensemble finie $\{\omega_j\}_{0 \leqslant j \leqslant n} \subset \mathbb{D}$.

Démonstration. 1. si k et k' sont deux noyaux reproduisant pour H alors

$$\begin{aligned} \|K_z - K'_z\| &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z \rangle \\ &= \langle K_z - K'_z, K_z \rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z \rangle \\ &= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\|K_z - K'_z\| = 0$, et $K_z = K'_z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc $K = K'$

2. $K(z,\omega) = \langle K_z, K_\omega \rangle = \overline{\langle K_\omega, K_z \rangle} = \overline{K(\omega, z)}$
3. $\Longleftarrow$ est évident car $K_z \in H$.
   $\Longrightarrow$ on remarque que $0 = K(z,z) = \langle K_z, K_z \rangle = (\|K_z\|)^2$, donc $K_z = 0$, ainsi $|f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| = 0$, pour tout $z \in D$.
4. L'inégalité est immédiate par l'inégalité de Cauchy Schwarz. K_z est holomorphe sur $\mathbb{D}$ donc bornée sur les compacts de $\mathbb{D}$, il est alors clair que K est bornée sur les compacts de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \overline{a_k} K(\omega_j, \omega_k) = |\sum_{j=1}^{n} a_j K_{\omega_j}|^2 \geqslant 0$$

□

1.2 Espace de Hardy

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$, $Hol(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ et soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

$$\forall z \in \mathbb{D} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Définition. 1.9. *Soit σ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$, on défini les normes L^p sur $\mathbb{T}$ par :*

$$\forall p \in]0, \infty[, \quad \|f\|_p = (\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma)^{1/p}$$

On définit deux types d'espace de Hardy, le premier est un sous espace de $Hol(\mathbb{D})$. Et le second un sous espace de $L^p(\mathbb{T})$.
Pour $1 \leqslant p < \infty$, on note :

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in Hol(\mathbb{D}), \|f\|_{H^p} = sup_{0 \leq r < 1}\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^p d\Theta\}^{1/p} < \infty\}$$

Pour $p = \infty$, on note :

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in Hol(\mathbb{D}), sup_{\xi \in \mathbb{D}} |f(\xi)| < \infty\}$$

Sur $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on définit :

$$H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$$

ici $\widehat{f}(n)$ est le n-ème coefficient de Fourier de f c-à-d :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta})e^{-in\Theta} d\Theta$$

Définition. 1.10. *pour $f \in Hol(\mathbb{D})$, on définit la quantité suivante :*

$$M_2(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 d\Theta \right\}^{1/2}.$$

L'espace de Hardy H^2 est définit par :

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f \in Hol(\mathbb{D}); sup_{0 \leqslant r<1} M_2(f,r) < \infty\}.$$

Théorème. 1.7. *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On dit que $f \in H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour $r \in [0,1[$ on a :

$$f(re^{i\Theta}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n r^n e^{in\Theta}.$$

D'aprés théorème de Plancherel-Parseval, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 d\Theta = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Par la convergence monotone discrête, on a :

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}$$

comme

$$\|f\|_2^2 = lim_{r \longrightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\Theta})|^2 d\Theta,$$

on obtient f appartient a H^2 si est seulement si

$$(\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2)^{1/2} < \infty$$

et

$$\|f\| = (\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2)^{1/2}.$$

$\square$

1.2.1 Identification entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$

Définition. 1.11. *Soient $f \in Hol(\mathbb{D})$, $0 \leqslant r < 1$, on appelle limite radiale de f, et on note f^*, la fonction définie par :*

$$f^*(e^{i\Theta}) = lim_{r \longrightarrow 1^-} f(re^{i\Theta}).$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$.

Théorème. 1.8. *[2]. L'application $\varphi : H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{T})$ tel que $\varphi(f) = f^*$ oú $H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour } n < 0\}$ est une isomorphisme isométrie.*

Compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, dans la plupart des articles de recherche on trouvera la notation H^2, laquelle désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{T})$ suivant le contexte.

1.2.2 Les propriétés de H^2

Théorème. 1.9. *H^2 est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\Theta}) \overline{g^*(e^{i\Theta})} d\Theta$$

Démonstration. Par définition $\langle f, f \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$ ($f^* \in L^2(\mathbb{T})$) comme $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$ la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire, de plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet, alors $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert

□

Théorème. 1.10. *(Growth Estimate). Pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$,*

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |z|^2}}, \forall z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{D}$ et toute $f \in H^2$, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \\ &\leq \lceil \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rceil^{1/2} \lceil \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \rceil^{1/2} \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |z|^2}} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy Schwarz. □

Corollaire. 1.6. *1. chaque suite converge de la norme dans $H^2(\mathbb{D})$ converge (au même limite) uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.*

2. $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$, généralement : si $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $fg \in H^2(\mathbb{D})$.

L'inégalité 1.1 montre que pour $\lambda \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation $f \longrightarrow f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2 et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe dans H^2 une unique fonction, notée K_λ telle que :

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$$

la fonction K_λ ainsi définie est appelée le noyau reproduisant pour l'espace H^2 .Le noyau reproduisant est un noyau de Cauchy, et on veut vérifier un calcul élémentaire que K_λ est donnée explicitement par la formule :

$$K_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}, \forall z \in \mathbb{D}. \tag{1.2}$$

Remarquons qu'en utilisant la formule 1.2, la relation 1.1 n'est autre que la formule intégrale de Cauchy de la fonction $f \in H^2$, c'est-à-dire :

$$f(z) = \int \frac{f^*(\xi)}{1 - z\overline{\xi}} d\xi,$$

pour $f \in H^2$ et $z \in \mathbb{D}$.
De même, la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimé en terme de noyau de Cauchy, autrement dit, on a :

$$P(f)(z) = \int \frac{f(\xi)}{1 - z\overline{\xi}} d\xi \quad , pour f \in L^2.$$

Remarquons aussi que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$f^{(n)}(\lambda) = \langle f, K_\lambda^n \rangle$$

où

$$K_\lambda^n(z) = \frac{n! z^n}{(1 - \overline{\lambda} z)^{n+1}}$$

est la dérivée n-ème de K_λ par rapport à $\overline{\lambda}$.

Chapitre 2

Opérateur de Toeplitz

2.1 Opérateur linéaire sur Hilbert

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K. On appelle opérateur de E dans F, toute application T défini de E dans F par :

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Tx. \end{aligned}$$

$D(T)$ désigne le domaine de définition de l'opérateur T.

Définition. 2.1. *L'opérateur T est dite linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E; \lambda, \mu \in K, T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Théorème. 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit T un opérateur linéaire de E dans F, alors : T est bornée (continue) $\Leftrightarrow$*

$$\exists M > 0, \forall x \in E : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E.$$

Le plus petit des nombres M vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur T et se note $\|T\|$.

$$\|T\| = inf\{M \geqslant 0 : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E\}$$

Remarque. 2.1. *L'ensemble $L(E, F)$ de tous les opérateurs linéiares bornés.*
Si E et F sont des espaces véctoriels normés, alors $L(E, F)$ est aussi un espace véctoriel normé. On note $L(E)$ si $E = F$.

Définition. 2.2. *Soient T et T_0 deux opérateurs linéaires, T de E dans F et T_0 de F dans G, on appelle produit T_0T de ces opérateurs l'opérateur T_1 qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'elément*

$$z = T_0(Tx) \in G.$$

1. *Le domaine de définition de $D(T_1)$ de l'opérateur T_1 est constitué par les $x \in D(T)$ tels que $Tx \in D(T_0)$.*

2. *Si T et T_0 sont des opérateurs bornés dans des espaces véctoriels normés, l'opérateur T_0T est aussi borné et :*

$$\|T_0T\| \leqslant \|T_0\|.\|T\|$$

.

Définition. 2.3. *On appelle produit kT d'un opérateur T par un scalaire k l'opérateur qui à un élément x fait correspondre l'élément kTx.*

Théorème. 2.2. *Pour tout opérateur borné T, on a :*

$$\begin{aligned} \|T\| &= sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|_F \\ &= sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

Théorème. 2.3. *Désignos par H l'espace de Hilbert, soit T un opérateur linéaire borné de H, T est dite compact si et seulement s'il existe une suite d'opérateur borné (F_n) de rang finie tel que :*

$$\|T - F_n\| \longrightarrow 0$$

Définition. 2.4. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in L(E, F)$, l'unique application linéaire $T^* \in L(F, E)$ telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$, on ait :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

S'appellé l'adjoint de T. On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$

Proposition. 2.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert, l'application $T \to T^*$ est isométrie de $L(E, F)$ dans $L(F, E)$, elle est linéaire. De plus $\forall T \in L(E, F)$*

1. *$(T^*)^* = T$*
2. *$\|T^*T\| = \|T\|^2$*

3. $(TS)^* = S^*T^*$.

Démonstration. Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tout $x \in E$, $y \in F$, $T_1, T_2 \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\
&= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}(T_2)^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (T_1)^* + \overline{\lambda}(T_2)^*)(y)\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi $T \to T^*$ est linéaire, elle est isométrie d'après la proposition de l'unicité.

1. Montrons que $(T^*)^* = T$, c-à-d on montrons $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\
&= \langle (T^*)^*(x), y\rangle
\end{aligned}$$

2. Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|.\|T\| = \|T\|^2$, d'autre part :

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| &= sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T^*T(x)\| \\
&= sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1}|\langle T^*T(x), y\rangle| \\
&\geqslant sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle T^*T(x), x\rangle| \\
&= sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle T(x), T(x)\rangle| \\
&= \|T\|^2
\end{aligned}$$

   on a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

3. Enfin pour vérifier $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer pour tout $x \in E$ et $y \in F$, $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\
&= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\
&= \langle S^*T^*(x), y\rangle
\end{aligned}$$

   donc on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

$\square$

2.2 Opérateur shift (décalage).

Définition. 2.5. *On note $S : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par $S(f) = zf$ l'opérateur de décalage à droite(Forward shift), Cet opérateur est borné et une isométrie de H^2.*
L'adjoint de S est l'opérateur de décalage à gauche (Backward shift) noté S^* défini par :

$$S^*(f) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

En effet, pour $f, g \in H^2$, on a

$$\langle Sf, g\rangle = \langle zf, g\rangle = \langle f, \overline{z}g\rangle.$$

Soit $k \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle zf, k\rangle &= \overline{k}\langle zf, 1\rangle \\
&= \overline{k}\langle zf, k_0\rangle \\
&= \overline{k}\widehat{(zf)}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, \overline{z}(g(z) - g(0))\rangle = \langle f, \frac{g(z) - g(0)}{z}\rangle.$$

2.3 Opérateur de Toeplitz :

Définition. 2.6. *Soit H un espace de Hilbert, K un sous espace fermé de H, P la projection orthogonale de H sur K, S un opérateur de H dans H et T un opérateur de K dans K. On dit que T est une compression de S ou bien S est une dilatation de T si $T_f = PSf$. Pour tout $f \in K$.*

Définition. 2.7. *Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de multiplication par φ, notée M_φ sur $L^2(\mathbb{T})$ défini par $M_\varphi(f) = \varphi f$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et φ le symbole de l'opérateur.*

Définition. 2.8. *Un opérateur de Toeplitz est la compression de l'opérateur de multiplication de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2.*
Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, on pose $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ avec $f \in H^2$, donc $\varphi f \in L^1(\mathbb{T})$, φ est appelé symbole de l'opérateur et P la projection orthogonale de L^2 dans H^2.

Remarque : Dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, l'opérateur de Toeplitz est juste l'opérateur de multiplication M_φ c'est-à-dire $T_\varphi = M_\varphi$ si $\varphi \in H^\infty$.

Théorème. 2.4. *L'opérateur de Toeplitz T_φ est borné si et seulement si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, et l'application $\varphi \longmapsto T_\varphi$ de $L^\infty(\mathbb{T})$ à l'ensemble des opérateurs continue sur H^2 est linéaire et injective.*

Proposition. 2.2. *[7]. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ tel que T_φ est un opérateur continue, alors $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition. 2.3. *[7] Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Alors*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.*
2. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
3. *L'opérateur identité I de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 1$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole O.*
4. *$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.*
5. *Pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\varphi f, g\rangle = \langle T_\varphi f, g\rangle$.*
6. *T_φ est positif si et seulement si M_φ est positif.*
7. *T_φ est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Proposition. 2.4. *L'application qui à toute fonction bornée φ assicié l'opérateur de Toeplitz T_φ est injectif, autrement dit, si $T_\varphi = 0$, alors $\varphi = 0$.*

Démonstration. Si $T_\varphi = 0$, $T_\varphi(\xi^n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où ξ^n désigne le n-ème élément de la base orthonormée de H^2. Soit maintenant $\varphi \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \xi^j$ le dévlopement en série de Fourier de φ où $a_j = \langle \varphi, \xi^j\rangle$. Alors le dévlopement en série de Fourier de $\varphi\xi^n$ est $\varphi\xi^n \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \xi^{k+n}$, pour tout entier positif n avec $k = j - n$. Ainsi, $T_\varphi(\xi^n) = P(\varphi\xi^n) = 0$, veut dire $a_k = 0$, pour $k + n \geq 0$, c'est-à-dire encore $a_k = 0$, pour $k \geq -n$, donc $a_k = 0$,pour $k \in \mathbb{Z}$, donc $\varphi = 0$. □

Théorème. 2.5. *[7] Un opérateur T continu sur H^2 est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $S^*TS = T$.*

Théorème. 2.6. *T_φ est un opérateur compact si et seulement si $\varphi = 0$.*

Le théoréme suivant du A. Brown et P. R. Halmos dans [7], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ soit un opérateur de Toeplitz.

Théorème. 2.7. *$T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ψ ou bien $\overline{\varphi}$ est holomorphe. Dans ce cas $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.*

Le théoréme suivant résume les résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dans $H^2(\mathbb{T})$.

Théorème. 2.8. *[2]. Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :*

1. *φ et ψ sont toutes les deux analytiques,*
2. *$\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ sont toutes les deux analytiques,*
3. *il existe deux constantes a et b, non tous nuls tels que $a\varphi + b\psi$ est une fonction constante.*

Chapitre 3

L'opérateur de Toeplitz tranqué

3.1 Espace modèle

Définition. 3.1. *On dit que* $u \in H^2$ *est intérieure si et seulement si* $|u| = 1$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$ *(ainsi* $u \in H^\infty$*).*

Théorème. 3.1. *(A.Beurling [5]) Un sous espace fermé* M *(*M *différent de* $\{0\}$ *et* H^2*)de* H^2 *est invariant par :*

1. *Le shift* S *si et seulement si* M *est de la forme :*
   $uH^2 := \{uh, h \in H^2\}$*, autrement dit* $SM \subseteq M$*,*
   où u *est la fonction intérieure non constante.*
   Et on a $SM \subseteq M$ *si et seulement si* $S^* M^\perp \subseteq M^\perp$
2. *De plus, si* u *et* v *sont des fonctions intérieures telles que* $uH^2 = vH^2$*, il existe une constante* c *telle que* $u = cv$*.*

Définition. 3.2. *soit* u *une fonction intérieure. On appelle Espace modèle correspondant à* u *,le sous espace de* H^2 *défini par :*

$$K_u^2 := (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle = 0, \forall g \in H^2\}$$

De plus on défini

$$K_u^\infty := K_u^2 \cap H^\infty$$

Avec K_u^∞ *est dense dans* K_u^2*.*

Théorème. 3.2. *(Douglas-Shapiro-Shields) Pour chaque fonctions intérieures* u*, l'espace modèle* K_u^2 *correspondant est l'ensemble des fonctions* $f \in H^2$ *telles que* $f = u\overline{zg}$ *presque* *partout sur $\mathbb{T}$ où $g \in H^2$. Autrement dit on a :*

$$K_u^2 = H^2(\mathbb{T}) \cap u\overline{zH^2(\mathbb{T})}$$

Démonstration. Si $f \in H^2(\mathbb{T}) \cap u\overline{zH^2(\mathbb{T})}$, il existe $h \in H^2$ telle que $f = u\overline{zh}$ presque partout, $g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle f, ug \rangle &= \langle u\overline{zh}, ug \rangle \\
&= \langle \overline{zh}, g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{\xi g(\xi) h(\xi)} d\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après théorème de Cauchy, c'est-à-dire $f \in (uH^2)^{\perp} = K_u^2$.
Réciproquement, si $f \in K_u^2$,on a : $\langle f, uz^n \rangle = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est- à-dire : $\widehat{(\overline{u}f)}(n) = 0$. Donc $\overline{u}zf \in \overline{H^2}$, ou encore $f \in u\overline{zH^2}$. □

Définition. 3.3. *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une application antilinéaire $C : H \to H$ est un opérateur de conjugaison si elle vérifie $C^2 = Id$ et $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$. L'opérateur C défini sur K_u^2 par :*

$$C(f)(\xi) = u(\xi)\overline{\xi f(\xi)}, pour \xi \in \mathbb{T}$$

est une conjugaison sur $L^2(\mathbb{T})$ et sa restriction à K_u^2 est une bijection de K_u^2 sur lui-même.
On note $\widetilde{f}(\xi) = C(f)(\xi), (\xi \in \mathbb{T})$.

L'espace modèle est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert à noyau reproduisant H^2 pour chaque fonction intérieure u non-constante, l'espace modèle K_u^2 possède un noyau reproduisant. Dans cette section, nous allons identifier ces noyaux et leurs propriétés de base. Dans [10, 13] contient plus d'informations sur le noyau reproduisant de K_u^2.
Rappelons que les noyaux $K_\lambda = (1 - \overline{\lambda}z)^{-1}$ sont les noyaux reproduisant de l'espace de Hardy (voir chapitre 2).
Si $f = uh$ dans uH^2, alors

$$f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) = u(\lambda)\langle h, K_\lambda \rangle = u(\lambda)\langle f\overline{u}, K_\lambda \rangle = \langle f, \overline{u(\lambda)}uK_\lambda \rangle$$

d'où il résulte que le noyau reproduisant pour uH^2 donné par :

$$\overline{u(\lambda)}uK_\lambda(z) = \frac{\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}.$$

Si $f \in K_u^2$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, K_\lambda \rangle \\ &= \langle f, K_\lambda \rangle - u(\lambda)\langle f, uK_\lambda \rangle \\ &= \langle f, (1-\overline{u(\lambda)}u)K_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $(1-\overline{u(\lambda)}u)K_\lambda$ dans K_u^2, donc

$$\begin{aligned} \langle uh, (1-\overline{u(\lambda)}u)K_\lambda \rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uK_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, K_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour toute $h \in H^2$. Ainsi, pour tout $f \in K_u^2$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda^u \rangle,$$

où

$$K_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}. \tag{3.1}$$

Définition. 3.4. *1. Une fonction f analytique sur $\mathbb{D}$ admet une limite non-tangentielle l au point $\omega \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$, $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(\omega) = \{z \in \mathbb{D} : |z-\omega| < \theta(1-|\theta|)\}$.*

2. Pour une fonction intérieure u et un point $\eta \in \mathbb{T}$, on dit que u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory(ADC) en η, si les limites non-tangentielles de u et u' existe en η, et $|u(\eta)| = 1$.

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations utiles de ADCs.

Théorème. 3.3 (Ahern-Clark [1].). *Pour une fonction intérieure $u = b_\Lambda s_\mu$, avec b_Λ est un produit de Blaschke avec des zéros $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, répété selon multiplicité, s_μ est une fonction intérieure singulière avec mesure singulière correspondante μ, et $\eta \in \mathbb{T}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout $f \in K_u^2$ a une limite non-tangentielle en η.*

2. *Pour tout* $f \in K_u^2$, $f(\lambda)$ *est borné en* $\lambda \to \eta$ *non-tangentielle.*

3. u *a une ADC en* η.

4. *La fonction*
$$K_\eta^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\eta)}u(z)}{1 - \overline{\eta}z},$$
dans H^2.

5. *L'assertion suivante est satisfaite*
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - |\lambda_n|^2}{|\eta - \lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - \eta|^2} < \infty.$$

3.2 Produit Tensoriel

Définition. 3.5. *soient* H *un espace de Hilbert séparable,* $a, b \in H \setminus \{0\}$*, alors on définit l'opérateur borné de rang un,* $a \otimes b$ *par :*

$$\begin{aligned} (a \otimes b) : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto \langle x, b \rangle a \end{aligned}$$

L'image de $a \otimes b$ *est le sous-espace de dimension un* $\mathbb{C}a$*. Il est clair que tout opérateur* T *de rang un peut s'écrire comme produit tensoriel* $a \otimes b$*. Comme* ImT *est de dimension un, pour* $a \in ImT$ *non nul,* $ImT = \mathbb{C}a$*. Pour tout* $x \in H$*, il existe* $c_x \in \mathbb{C}$ *tel que* $Tx = c_x a$ *et la forme linéaire* $x \in H \longmapsto c_x$ *est continue, par continuité de* $a \otimes b$*, par continuité de* $a \otimes b$*. Le Théorème de Riesz assure l'existence de* $b \in H$ *tel que* $c_x = \langle x, b \rangle$*, et alors pour* $x \in H$*,* $Tx = \langle x, b \rangle a = a \otimes b$*.*

Proposition. 3.1. *On a les propriétés suivantes : pour tout* $a, b, a', b' \in H$ *éventuellement non nuls et* T *un opérateur continu sur* H*,*

1. $T(a \otimes b) = (Ta) \otimes b$ *et* $(a \otimes b)T = a \otimes (T^*b)$.

2. $(a \otimes b)(a' \otimes b') = \langle a', b \rangle (a \otimes b')$.

3. $(a + a') \otimes b = (a \otimes b) + (a' \otimes b)$.

4. *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$ *,*
$$(\lambda a \otimes b) = \lambda (a \otimes b)$$
et
$$(a \otimes \lambda b) = \overline{\lambda}(a \otimes b)$$

5. *$Ker(a \otimes b) = (\mathbb{C}b)^{\perp}$ et $Im(a \otimes b) = \mathbb{C}a$*
6. *$(a \otimes b)^* = (b \otimes a)$.*
7. *$(a \otimes b) = (a' \otimes b')$ avec a, b, a', b' tous non nuls, si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $a = \alpha a', b = \beta b'$ et $\alpha\beta = 1$.*
8. *$(a \otimes a) = (b \otimes b) \Leftrightarrow \exists \alpha, |\alpha| \leqslant 1$ tel que $b = \alpha a$.*
9. *$(a \otimes a) \leqslant (b \otimes b) \Leftrightarrow \exists \alpha, |\alpha| \leqslant 1$ tel que $b = \alpha a$.*
10. *$a \otimes a \geqslant 0$.*

Démonstration. 1. pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} T(a \otimes b)(x) &= \langle x, b\rangle Ta \\ &= (Ta \otimes b)(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(Tx) &= \langle Tx, b\rangle a \\ &= \langle x, T^* b\rangle a \\ &= a \otimes (T^* b)(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

2. pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(a' \otimes b')(x) &= (a \otimes b)\langle x, b'\rangle a' \\ &= \langle x, b'\rangle\langle a', b\rangle a \\ &= \langle a', b\rangle(a \otimes b') \end{aligned} \tag{3.4}$$

3. Par linéarité du produit scalaire.
4. pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$(\lambda a \otimes b)(x) = \langle x, b\rangle \lambda a = \lambda\langle x, b\rangle a = \lambda(a \otimes b)$$

et

$$(a \otimes \lambda b)(x) = \langle x, \lambda b\rangle a = \overline{\lambda}\langle x, b\rangle a = \overline{\lambda}(a \otimes b)$$

5. Nous avons déjà vu la seconde affirmation. Pour la seconde :

$$\begin{aligned} Ker(a \otimes b) &= \{x \in H, (a \otimes b)(x) = 0\} \\ &= \{x \in H, \langle x, b\rangle = 0\} \\ &= (\mathbb{C}b)^{\perp} \end{aligned} \tag{3.5}$$

6. Soient $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes b)^*(x), y \rangle &= \langle x, (a \otimes b)(y) \rangle \\ &= \langle b, y \rangle \langle x, a \rangle \\ &= \langle \langle x, a \rangle b, y \rangle \\ &= \langle b \otimes a(x), y \rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

7. si $a \otimes b = a' \otimes b'$ alors ils ont même image. Or $Im(a \otimes b) = \mathbb{C}a$ et $Im(a' \otimes b') = \mathbb{C}a'$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul tel que $a = \alpha a'$ .En considérant les adjoints de ces opérateurs, l'assertion précédente affirme que $b \otimes a = b' \otimes a'$. Le raisonnement similaire au précédent affirme qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $b = \beta b'$. Ainsi $\alpha a' \otimes \beta b' = a' \otimes b'$ ce qui implique $\alpha\beta = 1$. La réciproque se vérifie trivialement.
8. Ce point est un cas particulier du précédent.
9. Ce point est aussi un cas particulier de 8.
10. D'aprés 5, l'opérateur $a \otimes a$ est auto-adjoint. Comme $Im(a \otimes a) = \mathbb{C}a$, le vecteur a est un propre pour la valeur propre $\lambda.\lambda a = a \otimes a(a) = \langle a, a \rangle a$ .Donc $\lambda = \|a^2\| \geqslant 0$.

□

3.3 Opérateurs de Toeplitz tronqué

Définition. 3.6. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et on considère l'application définie sur K_u^∞ par :*

$$K_u^\infty \longrightarrow K_u^\infty$$

$$f \longmapsto P_u(\varphi f)$$

Si cette application peut être prolongée en une application continue sur K_u^2, on note A_φ ce prolongement et on l'appelle opérateur de Toeplitz tranqué de symbole φ.
Il a été montré dans [17] que L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tranqués $\mathcal{T}_u$ est un sous espace fermé de $L(K_u^2)$ pour la 'Topologie faible des opérateurs, c'est-à-dire si $(A_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{T}_u$ et $A \in L(K_u^2)$ telle que : $lim_n \langle A_n f, g \rangle = \langle Af, g \rangle$, pour tous $f, g \in K_u^2$, alors $A \in \mathcal{T}_u$

Définition. 3.7. *L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tranqués définis sur K_u^2 est noté par $\mathcal{T}_u$*

Proposition. 3.2. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_\varphi, A_\psi \in \mathcal{T}_u$. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes a et b ,$A_{a\varphi+b\psi} = aA_\varphi + bA_\psi$.*
2. *$A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$ où A_φ^* désigne l'opérateur adjoint de A_φ.*

Rappelons que les opérateurs de Toeplitz définis dans l'espace de Hardy sont continus si et seulement si $\varphi \in L^\infty$, et $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Ce qui n'est pas le cas pour les opérateurs de Toeplitz tronqués, on a :
$0 \leqslant \|A_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ *pour tout* $\varphi \in L^\infty$
et il y a beaucoup de cas où l'inégalité est stricte. En fait, la majoration de la norme d'un opérateur de Toeplitz tronqué est un problème difficile. Garcia et Ross ont étudié ce problème dans [10] .

Un opérateur A défini sur K_u^2 est dit C-symétrique, où C est l'opérateur de conjugaison défini par : $C(f)(\xi) = u(\xi)\overline{\xi f(\xi)}, (\xi \in T)$, s'il vérifie $A^* = CAC$. La résultat suivant montre que les opérateurs de Toeplitz tronqués sont C-symétrique.

Lemme. 3.3. *(Garcia -Putinar ,[9]). Les éléments de $\mathcal{T}_u$ sont C-symétriques*

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2$ telle que $A_\varphi \in \mathcal{T}_u$. Pour tout $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle CA_\varphi Cf, g\rangle &= \langle Cg, A_\varphi Cf\rangle \\
&= \int_T u(\xi)\overline{\xi g(\xi)}.\overline{\varphi(\xi)u(\xi)}\xi f(\xi)dm(\xi) \\
&= \int_T \overline{\varphi(\xi)}f(\xi)\overline{g(\xi)}dm(\xi) \\
&= \langle A_{\overline{\varphi}}f, g\rangle \\
&= \langle A_\varphi^* f, g\rangle
\end{aligned}$$

Puisque K_u^∞ est dense dans K_u^2 ,on a le résultat .
La réciproque de ce résultat est fausse en général. En effet, Sarason a montré dans [17] que si $dim K_u^2 > 2$, il y a des opérateurs de rang un sur K_u^2 qui sont C-symétrique mais qui ne sont pas des opérateurs de Toeplitz tronqués. □

Lemme. 3.4. *([17]) $I - S_u S_u^* = K_0^u \otimes K_0^u$ et $I - S^* S_u = \widetilde{K_0^u} \otimes \widetilde{K_0^u}$*

Lemme. 3.5. *Si $\varphi \in K_u^2$, A_φ commute avec S_u et $A_{\overline{\varphi}}$ commute avec S_u^*.*

Lemme. 3.6. *1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :*

$$S_u^* K_\lambda^u = \overline{\lambda} K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{K_0^u}, S_u \widetilde{K_\lambda^u} = \lambda \widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda)K_0^u \tag{3.7}$$

2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a :*
$$S_u K_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}} K_\lambda^u - \frac{1}{\overline{\lambda}} K_0^u, S_u^* \widetilde{K_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda} \widetilde{K_\lambda^u} - \frac{1}{\lambda} \widetilde{K_0^u} \tag{3.8}$$

Si de plus u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, les relations 3.7 et 3.8 sont vraies si on replace λ par η.

Démonstration. 1. Pour la première équation, on a :

$$\begin{aligned} S_u^* K_\lambda^u &= S^*((1 - \overline{u(\lambda)} u) K_\lambda) \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)} u) S^* K_\lambda + K_\lambda(0) S^*(1 - \overline{u(\lambda)} u) \\ &= \overline{\lambda}(1 - \overline{u(\lambda)} u) K_\lambda - \overline{u(\lambda)} S^* u \\ &= \overline{\lambda} K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \widetilde{K_0^u}. \end{aligned}$$

Et ,on obtient la deuxième équation pour appliquant C à la première équation :

$$\begin{aligned} S_u \widetilde{K_\lambda^u} &= C S_u^* C C K_\lambda^u \\ &= C S_u^* K_\lambda^u \\ &= C(\overline{\lambda} K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \widetilde{K_0^u}) \\ &= \lambda \widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda) K_0^u \end{aligned}$$

2. Pour $\lambda \neq 0$, on a :

$$S_u K_\lambda^u = P_u S K_\lambda^u = P_u S((1 - \overline{u(\lambda)} u) K_\lambda) = P_u S K_\lambda$$

De puis

$$\begin{aligned} S K_\lambda(z) &= \frac{z}{1 - \overline{\lambda} z} \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}\left(\frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(K_\lambda(z) - 1) \end{aligned}$$

On trouve
$$S_u K_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}} P_u (K_\lambda - 1) = \frac{1}{\overline{\lambda}} (K_\lambda^u - K_0^u)$$

Lequel est la première équation. dans 3.7, la deuxième equation qui obtenir la première avec l'application C. □

Théorème. 3.4. *(Sarason ,Theéorème 4.1,[17]).Un opérateur A continu sur K_u^2 appartient à $\mathcal{T}_u$ si et seulement s'il existe $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :*

$$A - S_u A S_u^* = \varphi \otimes K_0^u + K_0^u \otimes \psi. \tag{3.9}$$

Dans ce cas, $A = A_{\varphi+\overline{\psi}}$.

Remarque : En appliquant l'opérateur de conjugaison C à la relation 3.9, on a la caractérisation équivalente : un opérateur A continu sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe deus fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :

$$A - S_u^* A S_u = \psi \otimes \widetilde{K_0^u} + \widetilde{K_0^u} \otimes \varphi$$

et dans ce cas, $A = A_{\varphi+\overline{\psi}}$.

Théorème. 3.5. *(Sarason[17], Brown[7]). Soit $\Phi \in L^2$. Alors $A_\Phi = 0$ si et seulement si $\Phi \in uH^2 + \overline{uH^2}$*

Démonstration. Supposons que $\Phi \in uH^2 + \overline{uH^2}$ c'est-à-dire $\Phi = \varphi + \overline{\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. pour $f \in K_u^\infty$, on a :

$$\Phi f = \varphi f + \overline{\psi} f \quad ,et \quad P_u(\Phi f) = P_u(\varphi f) + P_u(\overline{\psi} f) = 0$$

car $uK_u^\infty \subset H^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$.
Donc $A_\Phi = 0$ sur K_u^∞ et comme K_u^∞ est dense dans K_u^2, $A_\Phi = 0$ sur K_u^2.
Réciproquement, supposons que $A_\Phi = 0$ et notons $\Phi = \varphi + \overline{\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. Montrons que $\varphi \in uH^2$ et $\overline{\psi} \in \overline{uH^2}$, $A_\Phi = 0$ équivaut à $A_\varphi = -A_{\overline{\psi}}$ .D'après le Lemme 3.5, $A_{\overline{\psi}}$ et A_φ commutent respectivement avec S_u^* et S_u. Ainsi,

$$A_\varphi(I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A_\varphi \tag{3.10}$$

En utilisant le lemme 3.4 et en appliquant la relation 3.10 à K_0^u, on a

$$\langle K_0^u, K_0^u \rangle A_\varphi K_0^u = \langle A_\varphi K_0^u, K_0^u \rangle K_0^u$$

c'est-à-dire $A_\varphi K_0^u = c K_0^u$ où c est constante complexe non nulle. Il s'ensuit que

$$0 = (A_\varphi - cI) K_0^u = P_u[(\varphi - c)(1 - \overline{u(0)} u)] = P_u(\varphi - c)$$

c'est-à-dire $\varphi - c \in uH^2$ et $A_\varphi = cI$. Comme $A_\varphi = -A_{\overline{\psi}}$, $A_{\overline{\psi}} = -cI$. En faisant le même raisonnement, on a $\psi + \overline{c} \in uH^2$, c'est-à-dire $\overline{\psi} + c \in \overline{uH^2}$.
Donc $\Phi = (\varphi - c) + (\overline{\psi} + c) \in uH^2 + \overline{uH^2}$.
On a la proposition suivante : □

Proposition. 3.7. *Soient $\varphi, \psi \in K_u^2$. Alors*
$A_{\varphi+\overline{\psi}} = 0$ *si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = cK_0^u$ et $\psi = -\overline{c}K_0^u$.*

Démonstration. Si $\varphi = cK_0^u$ et $\psi = -\overline{c}K_0^u$ avec $c \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi + \overline{\psi} &= c(K_0^u - \overline{K_0^u}) \\ &= c(1 + \overline{u(0)}u - 1 + u(0)\overline{u}) \\ &= c(\overline{u(0)}u + u(0)\overline{u}) \end{aligned}$$

Donc $A_{\varphi+\overline{\psi}} = A_{c(\overline{u(0)}u+u(0)\overline{u})} = c_1 A_u + c_2 A_{\overline{u}} = 0$ car $A_u = 0$.
Réciproquement, si $A_{\varphi+\overline{\psi}} = 0$, d'après la relation 3.9, on a :

$$A_{\varphi+\overline{\psi}} - S_u A_{\varphi+\overline{\psi}} S_u^* = 0 = \varphi \otimes K_0^u + K_0^u \otimes \psi$$

c'est-à-dire

$$\varphi \otimes K_0^u = K_0^u \otimes \psi$$

Donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = cK_0^u$ et $\psi = -\overline{c}K_0^u$.

□

Comme corollaire de la proposition précédente, on a :

Corollaire. 3.8. $I = A_1 = A_{K_0^u} = A_{\overline{K_0^u}}$.

Démonstration. Pour tout $f \in K_u^2$, on a

$$A_1(f) = P_u(1f) = P_u(f)$$

on a $f \in K_u^2$, alors $A_1(f) = f = I(f)$
Et

$$A_{K_0^u} = A_{1-\overline{u(0)}u} = A - A_{\overline{u(0)}u}$$

on a $\overline{u(0)}u \in uH^2$, alors $A_{\overline{u(0)}u} = 0$, donc $A_{K_0^u} = A_1 = I$.
Le même pour $A_{\overline{K_0^u}} = A_1 = I$, car $u(0)\overline{u} \in \overline{uH^2}$ □

3.4 Opérateurs de Toeplitz tronqué de type α

Définition. 3.8. *Soient $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u$. On dit que A_Φ est de type α s'il existe $\varphi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que le symbole Φ peut s'écrire sous la forme $\Phi = \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit qu'on a un opérateur du type analytique et on dit que A_Φ est du type anti-analytique ou du type ∞ si son adjoint $A_{\overline{\Phi}}$ est du type analytique.*

Définition. 3.9. *On note par $\mathcal{T}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.*

Notons que si A_Φ est de type $\alpha(\alpha \in \mathbb{D})$, on peut aussi trouver $\varphi_0 \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi_0(0) = 0$ et $A_\Phi = A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + cK_0^u}$. En effet, supposons que $A_\Phi = A_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \gamma K_0^u}$ avec $\varphi \in K_u^2$ et $\gamma \in \mathbb{C}$. Soit φ_0 la fonction définie par :
$\varphi_0 = \varphi - \gamma_1 K_0^u$ où $\gamma_1 = \dfrac{\varphi(0)}{\|K_0^u\|^2}$.
On a :

$$S_u\widetilde{\varphi} = S_u\widetilde{\varphi_0} + \overline{\gamma_1}S_u\widetilde{K_0^u} \quad = \quad S_u\widetilde{\varphi_0} - \overline{\gamma_1}u(0)K_0^u$$

car $S_u\widetilde{K_0^u} = -u(0)K_0^u$, d'après le lemme 3.6.
Ainsi

$$\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \gamma K_0^u = \varphi_0 + \gamma_1 K_0^u + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} - \alpha\gamma_1\overline{u(0)}\overline{K_0^u} + \gamma K_0^u$$

et

$$\begin{aligned} A_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \gamma K_0^u} &= A_{\varphi_0 + \gamma_1 K_0^u + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} - \alpha\gamma_1\overline{u(0)}\overline{K_0^u} + \gamma K_0^u} \\ &= A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + (\gamma_1+\gamma)K_0^u} - \alpha\gamma_1\overline{u(0)}A_{\overline{K_0^u}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Puisque $I = A_1 = A_{K_0^u} = A_{\overline{K_0^u}}$, on a :

$$\begin{aligned} A_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \gamma K_0^u} &= A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + (\gamma_1+\gamma)K_0^u} - \alpha\gamma_1\overline{u(0)}A_{\overline{K_0^u}} \\ &= A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + [\gamma + \gamma_1(1-\alpha\overline{u(0)})]K_0^u} \end{aligned}$$

En prend $c = \gamma + \gamma_1(1 - \alpha\overline{u(0)})$, on a :

$$A_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \gamma K_0^u} = A_{\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + cK_0^u}.$$

En utilisant la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = \infty$, on a le résultat suivant :

Proposition. 3.9. *Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^\alpha$, alors $A^* \in \mathcal{T}_u^{1/\overline{\alpha}}$.*

Démonstration. Si $\alpha = 0$, $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^0$ veut dire il existe $\varphi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $\Phi = \varphi + c$. En passant à l'adjoint, $A_{\overline{\Phi}} = A_{\overline{\varphi} + \overline{c}}$ et on conclu avec la convention.
Soit maintenant $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ et $A_\Phi \in \mathcal{T}_u^\alpha$. D'aprs la remarque ci-dessus ,il existe $\varphi \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $A_\Phi = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + cK_0^u}$ Puisque $S_u C = C S_u^*$ et $\varphi(0) = 0$, on a $S_u \widetilde{S_u \widetilde{\varphi}} = \varphi$ .Soit $\psi = \overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi}$. On a :
$\frac{1}{\overline{\alpha}} \psi = S_u \widetilde{\varphi}$ et $\frac{1}{\alpha} \overline{\psi} = \widetilde{S_u \widetilde{\varphi}}$ c'est-à-dire $\varphi = \frac{1}{\alpha} S_u \widetilde{\psi}$.
Ainsi

$$A_\Phi^* = A^*_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + cK_0^u} = A_{\psi + \frac{1}{\overline{\alpha}} \overline{S_u \widetilde{\psi}} + \overline{cK_0^u}}.$$

Donc $A_\Phi^* \in \mathcal{T}_u^{1/\overline{\alpha}}$. $\square$

La proposition suivante caractérise les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Proposition. 3.10. *(Sedlock,[15]). Soient $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ et $A := A_{\varphi + \overline{\psi}} \in \mathcal{T}_u$ où $\varphi, \psi \in K_u^2$. Alors A est de type α si et seulement si $\overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi} - \psi \in \mathbb{C} K_0^u$.*

Démonstration. Supposons que A est de type α. Par définition, il existe $\chi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :
$A_{\varphi + \overline{\psi}} = A_{\chi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\chi}} + cK_0^u}$ c'est-à-dire $A_{\varphi - \chi + cK_0^u + \overline{\psi} - \alpha \overline{S_u \widetilde{\chi}}} = 0$.
Et d'après la proposition 3.7 on a :

$$\varphi - \chi = \gamma_1 K_0^u \tag{3.12}$$

et

$$\psi - \overline{\alpha} S_u \widetilde{\chi} = \gamma_2 K_0^u. \tag{3.13}$$

D'après le lemme 3.6, la relation 3.12 équivaut à $S_u \widetilde{\varphi} - S_u \widetilde{\chi} = \gamma_3 K_0^u$ .Ainsi,

$$\overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi} = \overline{\alpha} S_u \widetilde{\chi} + \overline{\alpha} \gamma_3 K_0^u. \tag{3.14}$$

D'autre part, la relation 3.13 donne :

$$-\psi = \gamma_2 K_0^u - \overline{\alpha} S_u \widetilde{\chi}. \tag{3.15}$$

Les relations 3.14 et 3.15 donnent $\overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi} - \psi = \gamma K_0^u$ avec $\gamma = \overline{\alpha}\gamma_3 + \gamma_2 \in \mathbb{C}$.
Réciproquement, si $\overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi} - \psi = \gamma K_0^u$, $A_{\varphi + \overline{\psi}} = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} - \gamma K_0^u}$ et comme $A_{K_0^u} = A_{\overline{K_0^u}} = A_1$, alors $A_{\varphi + \overline{\psi}}$ est de type α. $\square$

Bien qu'il y a une infinité de classes d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α, on peut se réduire à l'étude de deux classes : $\mathcal{T}_u^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{T}$ et $\mathcal{T}_u^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{D}$, car dans le cas où $|\alpha| > 1$, il suffit de prendre l'adjoint.
Sedlock a caractérisé les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α à l'aide de l'opérateur de shift modifié.

Définition. 3.10. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ tel que $1 - \alpha\overline{u(0)} \neq 0$. L'opérateurs shift modifié noté S_u^α est défini par :*

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} K_0^u \otimes \widetilde{K_0^u}.$$

L'opérateur S_u^α est une généralisation du shift. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$,cet opérateur est défini et étudié par Sarason [17].
Dans le cas $|\alpha| = 1$, S_u^α est un opérateur unitaire appelé opérateur unitaire de Clark. Ces opérateurs ont été étudiés en détail par D.N.Clark dans[8]
Il a été montré par Sedlock [16] que pour chaque $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, S_u^α est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α. De plus, on a :

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A_{S_u K_0^u + \alpha\overline{\widetilde{K_0^u}}}$$

Théorème. 3.6. *(Sedlock). Soient $A \in \mathcal{T}_u$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors A est de type α si et seulement si $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$.*

Théorème. 3.7. *(Sedlock,[15]). Soient $A_\varphi, A_\psi \in \mathcal{T}_u$. Alors le produit $A_\varphi A_\psi \in \mathcal{T}_u$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vraie :*

1. *A_φ ou A_ψ est un multiple de l'identité ou bien.*
2. *il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que A_φ et A_ψ sont tous les deux de type α.*

On a le corollaire suivant, concernant l'inverse de l'opérateur.

Corollaire. 3.11. *Soit $A_\varphi \in \mathcal{T}_u$ tel que A_φ est inversible. Alors A_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si A_φ est de type α.*

Démonstration. Si A_φ^{-1} est un opérateur de Toeplitz tronqué, d'après le théorème 3.7 il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que A_φ et A_φ^{-1} sont tous les deux de type α.
Réciproquement, si A_φ est de type α, on a $A_\varphi S_u^\alpha = S_u^\alpha A_\varphi$ d'après le théorème 3.6. Ainsi,

$$A_\varphi^{-1} S_u^\alpha = A_\varphi^{-1} S_u^\alpha A_\varphi A_\varphi^{-1} = A_\varphi^{-1} A_\varphi S_u^\alpha A_\varphi^{-1} = S_u^\alpha A_\varphi^{-1}$$

c'est-à-dire A_φ^{-1} est de type α □

Chapitre 4

Opérateurs de Toeplitz tronqué de rang un

4.1 Opérateurs de Toeplitz tronqué de rang un

Dans cette section, nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour les opérateurs bornés sur K_u^2, soit opérateus de Toeplitz tronqués de rang un.

Théorème. 4.1. *(Theorem 5.1. [17]).*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, les opérateurs $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ et $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\dfrac{\overline{u}}{\overline{z} - \overline{\lambda}}$ et $\dfrac{u}{z-\lambda}$.*
2. *Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une ADC (dérivée angulaire au sens de Carathéodory) en η, l'opérateur $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $K_\eta^u + \overline{K_\eta^u} - 1$.*
3. *Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués non nul de rang un sont des multiples des opérateurs dans (1) et (2).*

Démonstration. 1. Nous considérons la première au point $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et on appliquant le critère du théorème 3.4 au l'opérateur $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$, et d'après lemme 3.6, on a :

$$\begin{aligned} S_u(K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u})S_u^* &= S_u K_\lambda^u \otimes S_u \widetilde{K_\lambda^u} \\ &= (\frac{1}{\overline{\lambda}} K_\lambda^u - \frac{1}{\overline{\lambda}} K_0^u) \otimes (\lambda \widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda) K_0^u) \\ &= (K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}) - (K_0^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}) - \frac{\overline{u(\lambda)}}{\overline{\lambda}}(K_\lambda^u \otimes K_0^u) + \frac{\overline{u(\lambda)}}{\overline{\lambda}}(K_0^u \otimes K_0^u). \end{aligned}$$

Donc

$$K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u} - S_u(K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u})S_u^* = (K_0^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}) + \frac{\overline{u(\lambda)}}{\overline{\lambda}}((K_\lambda^u - K_0^u) \otimes K_0^u).$$

Par théorème 3.4, l'opérateur $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\frac{\overline{u(\lambda)}}{\overline{\lambda}}(K_\lambda^u - K_0^u) + \overline{\widetilde{K_\lambda^u}}$. Remplacons K_0^u par 1 et K_λ^u par K_λ (car : $A_{K_0^u} = I = A_1$ et $A_{K_\lambda^u} = A_{K_\lambda}$) dans l'expression précédente du symbole, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{u(\lambda)}}{\overline{\lambda}}\left(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - 1\right) + \frac{\overline{u} - \overline{u(\lambda)}}{\overline{z} - \overline{\lambda}} &= \overline{u(\lambda)}\left(\frac{z}{1-\overline{\lambda}z}\right) + \frac{z(\overline{u} - \overline{u(\lambda)})}{1-\overline{\lambda}z} \\
&= \frac{z\overline{u}}{1-\overline{\lambda}z} \\
&= \frac{\overline{u}}{\overline{z} - \overline{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\frac{\overline{u}}{\overline{z} - \overline{\lambda}}$. On appliquons l'opérateur de conjugaison C à $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$, nous trouvons :

$$C(K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u})C = CK_\lambda^u \otimes C\widetilde{K_\lambda^u} = \widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$$

de plus $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ est un opérateur de Toeplitz tronqué, alors, il est C-symétrique $\Leftrightarrow$ $CAC = A^*$, donc $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\frac{u}{z-\lambda}$. Pour $\lambda = 0$, on prend la limite $\lambda \longrightarrow 0$, nous trouvons que $K_0^u \otimes \widetilde{K_0^u}$ et $\widetilde{K_0^u} \otimes K_0^u$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole $\frac{\overline{u}}{\overline{z}}$ et $\frac{u}{z}$ respectivement.

2. pour η un point de $\mathbb{T}$ quand u est une ADC. Par lemme 3.6, on va remplacer η par λ dans la première partie du preuve (1), on a $K_\eta^u \otimes \widetilde{K_\eta^u}$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole
$$\frac{\overline{u(\eta)}}{\overline{\eta}}((K_\eta^u - K_0^u) + \overline{\widetilde{K_\eta^u}},$$
avec $\widetilde{K_\eta^u} = \overline{\eta}u(\eta)K_\eta^u$. Par la conclusion précédente, on trouve $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $K_\eta^u + \overline{K_\eta^u} - K_0^u$. Dans la preuve par (1), peut remplacons K_0^u par 1, on obtient le symbole $K_\eta^u + \overline{K_\eta^u} - 1$.

3. supposons σ, τ deux fonctions non nulles dans K_u^2, avec l'opérateur $\sigma \otimes \tau$ appartient à $\mathcal{T}(K_u^2)$. Alors $\sigma \otimes \tau$ est C-symétrique, on a :
$$\tau \otimes \sigma = C(\sigma \otimes \tau)C = \widetilde{\sigma} \otimes \widetilde{\tau}.$$
Par conséquent τ et $\widetilde{\sigma}$ sont linéairement indépendante, donc, on peut supposer que $\tau = \widetilde{\sigma}$. Par théorème 3.4, il existe deux fonctions ψ et χ dans K_u^2 , tel que
$$(\sigma \otimes \widetilde{\sigma}) - (S_u\sigma \otimes S_u\widetilde{\sigma}) = (\psi \otimes K_0^u) + (K_0^u \otimes \chi). \tag{4.1}$$
On a plusieurs cas :

(a) La fonction ψ ou la fonction χ nulle.

Si $\psi = 0$, alors l'égalité 4.1 donné par

$$(\sigma \otimes \widetilde{\sigma}) - (S_u\sigma \otimes S_u\widetilde{\sigma}) = K_0^u \otimes \chi. \tag{4.2}$$

Comme l'opérateur $K_0^u \otimes \chi$ est un l'opérateur de rang un, alors σ et $S_u\sigma$ sont linéairement dépendants ou $\widetilde{\sigma}$ et $S_u\widetilde{\sigma}$ linéairement dépendants. Supposons que σ et $S_u\sigma$ sont linéairement dépendants, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$S_u\sigma = \lambda\sigma.$$

σ est un valeur propre de S_u, par Lemma(2.5) de ([17]) on a $|\lambda| < 1$, $u(\lambda) = 0$, et

$$\sigma = \gamma\widetilde{K_\lambda^u},$$

Donc

$$(\sigma \otimes \widetilde{\sigma}) = \gamma_1\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u.$$

Si $\widetilde{\sigma}$ et $S_u\widetilde{\sigma}$ sont linéairement dépendants, alors $S_u\widetilde{\sigma} = \lambda\widetilde{\sigma}$, même preuve dans le cas σ et $S_u\sigma$ sont linéairement dépendants.

Si $\chi = 0$, on appliquons l'opérateur de conjugaison C, on trouve le même preuve dans le cas $\psi = 0$.

Pour le reste de la démonstration, nous supposons que ni ψ ni χ est nulle. d'après l'égalité 4.1, K_0^u est combinaison linéaire de σ et $S_u\sigma$, ou K_0^u est combinaison linéaire de $\widetilde{\sigma}$ et $S_u\widetilde{\sigma}$. Depuis σ et $\widetilde{\sigma}$ sont interchangeables, on va étudier le cas K_0^u est combinaison linéaire de σ et $S_u\sigma$, nous avons

$$K_0^u = a\sigma + bS_u\sigma.$$

(b) $b = 0$

$K_0^u = a\sigma$, donc

$$(\sigma \otimes \widetilde{\sigma}) = c_1K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}.$$

(c) $a = 0$.

Dans ce cas $K_0^u = bS_u\sigma$. Alors $u(0) \neq 0$ (autrement, si $u(0) = 0$, alors $K_0^u = 1$ et $S_u^*K_0^u = 0$), et donc S_u est inversible, par Lemma(2.5) de ([17]). par lemme 3.4 on a $S_u\widetilde{K_0^u} = -u(0)K_0^u$, alors

$$\sigma = \frac{1}{b}S_u^{-1}K_0^u = c_4\widetilde{K_0^u},$$

et donc

$$(\sigma \otimes \widetilde{\sigma}) = c_5 K_0^u \otimes \widetilde{K_0^u}.$$

Dans tous les autres cas, $a \neq 0 \neq b$. Remplacons σ par $a\sigma$ et soit $\lambda = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, nous transformons l'équation $K_0^u = a\sigma + bS_u\sigma$ à $K_0^u = (I - \overline{\lambda}S_u)\sigma$, $\lambda \neq 0$.

(d) $0 < |\lambda| < 1$.

Dans ce cas, l'opérateur $I - \overline{\lambda}S_u$ est inversible, et par lemme 3.6 on a

$$\widetilde{K_\lambda^u} - \overline{\lambda}S_u\widetilde{K_\lambda^u} = K_0^u$$

Ainsi $\sigma = \widetilde{K_\lambda^u}$, et $\sigma \otimes \widetilde{\sigma} = \widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$.

(e) $|\lambda| > 1$, $u(\frac{1}{\overline{\lambda}}) \neq 0$

Dans ce cas, l'opérateur $I - \overline{\lambda}S_u$ est inversible, et par lemme 3.6 on a

$$\overline{\lambda}S_u\widetilde{K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}^u} = \widetilde{K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}^u} - \overline{\lambda}u(\frac{1}{\overline{\lambda}})K_0^u,$$

alors

$$\sigma = \frac{1}{\overline{\lambda}u(\frac{1}{\overline{\lambda}})}\widetilde{K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}^u},$$

par un calcul simple on a

$$\sigma \otimes \widetilde{\sigma} = c_3\widetilde{K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}^u} \otimes \widetilde{K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}^u}.$$

(f) $|\lambda| > 1$, $u(\frac{1}{\overline{\lambda}}) = 0$

Dans ce cas, par Lemma(2.5) de ([17]), l'opérateur $I - \lambda S_u^*$ est un noyau de dimension 1 engendré par la fonction $K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}$, si K_0^u étaient dans la rang de $I - \overline{\lambda}S_u$ il est orthogonal de $K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}$, donc n'est pas vrai car $K_{\frac{1}{\overline{\lambda}}}(0) = 1$. Ce cas ne se pose donc pas.

(g) $|\lambda| = 1$.

Dans ce cas, parce que l'opérateur S_u n'a pas de valeurs propres à $\mathbb{T}$ (Lemma2,5 de [17]),la fonction σ est uniquement déterminée par la condition $K_0^u = \sigma - \overline{\lambda}S_u\sigma$. On appliquons de l'opérateur de conjugaison C à la dernière égalité, nous obtenons $\widetilde{K_0^u} = \widetilde{\sigma} - \lambda S^*\widetilde{\sigma}$, en d'autres terme,

$$\frac{u - u(0)}{z} = \widetilde{\sigma} - \frac{\lambda(\widetilde{\sigma} - \widetilde{\sigma}(0))}{z}$$

Par coséquent

$$\widetilde{\sigma} = \frac{u - \gamma}{z - \lambda},$$

avec $\gamma = u(0) + \lambda\widetilde{\sigma}(0)$, Comme $\widetilde{\sigma} \in H^2$ alors γ de module 1, et u admis une limite non tangentiel à λ (puisque les fonctions de H^2 sont $o(\dfrac{1}{1-|z|}))$ pour $|z| \longrightarrow 1$), en peut écrire :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{u - u(\lambda)}{z - \lambda}$$

En particulier, la fonction $\dfrac{u - u(\lambda)}{z - \lambda}$ est dans H^2, d'après théorème 3.3, on a u a un ADC en λ, Donc $\widetilde{\sigma} = \widetilde{K_\lambda^u}$, et

$$\sigma \otimes \widetilde{\sigma} = K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}.$$

□

4.2 Opérateurs de Toeplitz tronqué de type α

Théorème. 4.2. *Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ et soit u la fonction intérieure, considérer le rang un de l'opérateur de Toeplitz tronqué de $A = \widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$, alors $(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^2 = u'(\lambda)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)$, il en résulte que $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est de type α avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.*
En autre, dans le cas où $u'(\lambda) = 1$, A est un idempotent, et dans le cas $u'(\lambda) = 0$, A est un nilpotent. Par théorème 4.1, $\dfrac{u}{z-\lambda}$ le symbole de A, et depuis

$$\begin{aligned}
\frac{u}{z-\lambda} &= \frac{u(z) - u(\lambda) + u(\lambda)}{z - \lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + \frac{u(\lambda)}{z-\lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{zK_\lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u K_\lambda^u} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

A de type $u(\lambda)$.
Maintenant, suppose que $\lambda \in \mathbb{T}$ avec u admet une ADC au point λ, et considérer $A = K_\lambda^u \otimes K_\lambda^u$.
Encore, il est clair que A^2 est le produit scalaire de A. Et donc A est de type α, pour certain α.
Depuis A est auto-adjoint, il en résulte que α est unimodulaire.
A calcul simple montre que $\widetilde{K_\lambda^u} = \overline{\lambda} u(\lambda) K_\lambda^u$, alors

$$S_u\widetilde{K_\lambda^u} = \lambda\widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda)K_0^u = u(\lambda)(K_\lambda^u - K_0^u)$$

Ainsi, $K_\lambda^u - 1 = \overline{u(\lambda)} S_u \widetilde{K_\lambda^u}$, et par théorème 4.1, $K_\lambda^u + u(\lambda)\overline{S_u\widetilde{K_\lambda^u}}$ est le symbole de A qui est donc de type $\alpha = u(\lambda)$.

Lemme. 4.1. *(Sedlock [15]) .Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$,*

1. *si $\lambda \in \mathbb{D}$, les opérateurs $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ et $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de types respectif $u(\lambda)$ et $\dfrac{1}{\overline{u(\lambda)}}$.*
2. *Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une ADC (dérivée angulaire au sens de Carathéodory) en η, l'opérateur $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué du type $u(\eta)$ et son symbole est la fonction $\Phi = K_\eta^u + u(\eta)\overline{S_u \widetilde{K_\eta^u}}$.*

Démonstration. 1. pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ et pour tout $z \in \mathbb{T}$ et soit u la fonction intérieure, on va montrer que l'opérateur $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est de type $\alpha = u(\lambda)$, on a d'après 4.1, le symbole de $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est $\dfrac{u}{z-\lambda}$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{u}{z-\lambda} &= \frac{u(z) - u(\lambda) + u(\lambda)}{z-\lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + \frac{u(\lambda)}{z-\lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{zK_\lambda} \\
&= \widetilde{K_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u K_\lambda^u}
\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est de type $\alpha = u(\lambda)$.
De plus, on a $(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \in \mathcal{T}_u$, alors d'après la proposition 3.9, l'adjoint $(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^* \in \mathcal{T}^{1/\overline{\alpha}}$.
Ainsi, $(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^* = K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$, donc l'opérateur $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u} \in \mathcal{T}^{1/\overline{\alpha}}$, c'est-à-dire $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ est de type $\dfrac{1}{\overline{\alpha}} = \dfrac{1}{\overline{u(\lambda)}}$.

2. pour $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une ADC au point η, et considérons l'opérateur de Toeplitz tronqué $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$. D'après le théorème 4.2, $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est de symbole $K_\eta^u + u(\eta)\overline{S_u \widetilde{K_\eta^u}}$ qui est donc de type $\alpha = u(\eta)$.

□

Théorème. 4.3. *([11]) Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1 est de type α et α est de la forme $\alpha = u(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T}_u$ tel que A soit de rang 1. D'après le théorème 4.1

1. ou bien, A est multiple de l'un des opérateurs $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ et $K_\lambda^u \otimes \widetilde{K_\lambda^u}$ avec $\lambda \in \mathbb{D}$.
2. ou bien A est multiple de $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ avec $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point η

Et on conclu avec le lemme 4.1

□

4.3 Résultats principaux

Théorème. 4.4. *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$ et soit u la fonction intérieure, on a l'égalité suivante, pour tout n entier strictement positif :*

$$(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^n = [u'(\lambda)]^{n-1}(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned}(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^2 &= (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \\ &= \langle \widetilde{K_\lambda^u}, K_\lambda^u \rangle (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \\ &= \widetilde{K_\lambda^u}(\lambda)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u), \quad car : \langle f, K_\lambda \rangle = f(\lambda) \\ &= lim_{z \longrightarrow \lambda} \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \\ &= u'(\lambda)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u). \end{aligned} \tag{4.4}$$

On a deux cas :

1. si $u'(\lambda) = 0 \Rightarrow (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) = 0$. Alors $\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ est un nilpotent.
2. si $u'(\lambda) \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^3 &= u'(\lambda)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^2 \\ &= (u'(\lambda))^2(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u), \quad d'après\ 4.4 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Par récurrence, on a

$$(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)^n = (u'(\lambda))^{n-1}(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u).$$

□

Théorème. 4.5. *Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ et soit u la fonction intérieure, soit A un opérateur borné sur K_u^2, alors*

$$(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)A(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)$$

est un opérateur de Toeplitz tronqué.

Démonstration. 1. Si $A \in \mathcal{T}_u^\alpha$ donc le produit est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α, d'après théorème 3.7.

2. Si A n'appartient pas $\mathcal{T}_u^\alpha$ et A borné sur K_u^2, alors :

$$\begin{aligned}
(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) A (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) &= (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)(A\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \\
&= < A\widetilde{K_\lambda^u}, K_\lambda^u > (\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u) \\
&= A\widetilde{K_\lambda^u}(\lambda)(\widetilde{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u)
\end{aligned}$$

On a une condition pour vérifie que le produit est un opérateur de Toeplitz tronqué, si A est un opérateur borné .

□

Bibliographie

[1] P.R. Ahern, , D.N. Clark, : Radial limits and invariant subspaces. Amer. J. Math. 92, 332-342 (1970).

[2] R.A. M. Avenda ño, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.

[3] A. Baranov, I. Chalendar, , E. Fricain, J. Mashreghi, D. Timotin : Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators. J. Funct. Anal., (259) :2673-2701, 2010.

[4] R. Bessonov, : Truncated Toeplitz operators of finite rank. Proc. Amer. Math. Soc., 142(4) :1301- 1313, 2014.

[5] A. Beurling. Etude sur un problème de majoration. Thèse de Doctorat. Uppsala University, 1933.

[6] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[7] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[8] D.N. Clark, One dimensional perturbations of restricted shifts, J. Analyse Math. 25 (1972), 169-191.

[9] S. R. Garcia , M. Putinar, Complex symmetric operators and applications, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1285-1315.

[10] S.R. Garcia, W.T. Ross, , Model spaces : a survey, Contemp. Math. 638 (2015), 197-245.

[11] F.Korrichi et Randriamahaleo.F : Matrix characterization of truncated Toeplitz operators of type α .Preprint

[12] F. Korrichi : Opérateurs de Toeplitz tronqués et de composition. 2016, université de Biskra.

[13] N. K. Nikol'skii : Treatise on the shift operator : spectral function theory. Grundlehren der mathematischenWissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.

[14] F. R. Randriamahaleo, Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Teoplitz tronqués de rang fini. IMB - Institut de Mathématiques de Bordeaux, 2015.

[15] N. A. Sedlock, Algebras of truncated Toeplitz operators , Oper. Matrices 5 (2011), 309-326.

[16] N. A. Sedlock, Properties of Truncated Toeplitz Operators, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Ph.D. thesis, Washington University in St. Louis.

[17] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Oper. Matrices 1(4), 491-526 (2007).

[18] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc 127 (1967), 179-203.