

REPUBLIQUE ALGERINNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT FACULTE DES
SCIENCES DE L'INGENIEUR DEPARTEMENT DE GENIE
MECANIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de MAGISTER

Ecole doctorale Energétique et environnement

Option : Machines thermiques, application et risques environnementaux

***Simulation 2D par volumes finis d'un écoulement non
linéaire à surface libre variable***

Par

BOUZIDI Kheira

Devant les membres de jury :

Mr ALLAQUI Omar	Président	Université de LAGHOUAT
Mr BENCHATTI Ahmed	Encadreur	Université de LAGHOUAT
Mr BOUALI Belkacem	Co- encadreur	Université de LAGHOUAT
Mr MEDJELLED Ahmed	Examineur	Université de LAGHOUAT
Mr AOUISSI Mokhtar	Examineur	Université de LAGHOUAT

Année 2012

RESUME :

L'objectif de cette étude est de présenter un modèle de calcul aux volumes finis destiné à la simulation bidimensionnelle d'un écoulement non linéaire à surface libre variable. Ce modèle utilise une approche eulérienne sur un maillage fixe, Les équations aux dérivées partielles (équations de Navier Stokes) écrites pour une configuration diphasique air /eau, peuvent être reformulées sous une forme « 1-fluide » dans lequel intervient un fluide équivalent aux caractéristiques variables.

Le modèle ainsi formé est résolu par la méthode des volumes finis. La capture de l'interface est assurée par une méthode de capture de front dite VOF (Volume of Fluid) qui prend comme fonction indicatrice la fraction volumique d'une des deux phases fluides. Le code a été vérifié sur des cas tests académiques concernant le problème de rupture d'un barrage, Onde permanente dans un bassin, la propagation d'une onde solitaire et le problème du générateur d'onde.

MOT-CLES : Surface libre, volumes finis, équations de Navier Stokes, Ondes non linéaire, volume of fluide, reconstruction géométriques.

Abstract :

This work presents developments of a numerical method for computing incompressible nonlinear free surface flow. This model uses an Eulerian approach on a fixed mesh, the partial differential equations (Navier Stokes) written for a two-phase configuration air / water, can be reformulated in a form "one-fluid" and solved by the finite volume method. The Interface transport is performed using a front capturing method known as Volume of fluid method VOF. This method was able to predict large interface distortions with a good accuracy. This approach uses the volume fraction of one of two fluid phases. The code was tested on academic test cases on the issue of a dam break problem, Standing wave, Solitary wave and Wave maker problem

Key word:

Free surface flow, Navier Stokes equations, Volume of fluid method, nonlinear flow, Interface transport.

ملخص :

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم نموذج رقمي ثنائي الأبعاد لمحاكاة الانسياب الغير خطي ذي السطح الحر. هذا النموذج يستخدم شبكة ثابتة، ويمكن إعادة صياغة جملة المعادلات التفاضلية الجزئية (Navier Stokes) على شكل جملة "مائع واحد" بخصائص مختلفة. قمنا بحل المعادلات التي تتحكم في هذا الانسياب باستعمال النظرية العددية للحجوم المنتهية.

يعد تمثيل شكل السطح الفاصل بين الماء و الهواء من أهم الصعوبات إثناء الحل الرقمي للانسياب ذي السطح الحر، وهناك عدة طرق لتتبع شكل هذا السطح من بينها الطريقة التي يطلق عليها بالإنجليزية (Volume of fluid method -VOF) التي تستعمل النسبة الحجمية لأحد الموائع في الخلايا التي يمر بها السطح الحر. لقد تم مقارنة النتائج المتحصل عليها بواسطة برنامج فلونت بالنتائج التي تم نشرها مثل عملية انهيار السد، موجة دائمة في حوض، وانتشار موجة الانفرادي، و مولد الأمواج.

الكلمات الرئيسية :

الانسياب ذي السطح /النظرية العددية للحجوم المنتهية/ محاكاة الانسياب الغير خطي /المعادلات التفاضلية الجزئية (Navier Stokes).

Dédicaces

A mon père et ma très chère maman, qui m'ont éclairés
Le chemin en me donnant la main tout au long de mes années d'étude
Que dieu me les garde
A mon frère et mes sœurs.
A tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin

Je remercie vivement et chaleureusement mon encadreur Monsieur **BENCHATTI .Ahmed**, pour la confiance dont il a fait preuve à mon égard et pour les encouragements et les subtiles orientations prodiguées tout le long de ce travail.

Je tiens a remercie mon co-encadreur Monsieur **BOUALI .Belkacem** pour les intentions dont j'ai pu bénéficier et pour m'avoir dirigé avec compétence et rigueur tout le long de ce travail.

Je remercie vivement **Mrs, ALLAQUI Omar, MEDJELLED Ahmed** et **AOUISSI Mokhtar** pour avoir accepté de faire partie du jury qui va examiner mon travail.

J'exprime mes vifs remerciements à l'ensemble des enseignants du département génie mécanique pour leurs efforts au service de l'enseignement et à la recherche scientifique

A touts, je tiens a exprimer mes sincères remerciements.

TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION	
CHAPITRE 1 : Etude bibliographique	9
CHAPITRE 2 : Aspect physique des ondes de gravité de surface	19
2.1 Paramètres caractéristiques des ondes de gravité de surface.	20
2.2 Classification des ondes de gravité de surface	21
2.3 Génération des ondes de gravité de surface	24
2.4 Caractéristiques énergétiques de la houle	26
2.5 Les systèmes existants de récupération de l'énergie des vagues	28
CHAPITRE 3 : modèle mathématique de l'hydrodynamique à surface libre	
Introduction.	36
3.1 Présentation du domaine d'étude	36
3.2 Formulation du problème à résoudre	37
3.2.1 Conservation de masse ou équation de continuité	38
3.2.2 Conservation de quantité de mouvement	39
3.3 Conditions aux Limites	41
3.3.1 Forme générale des conditions d'imperméabilité	41
3.3.2 Conditions cinématique à la surface libre	42
3.3.3 Condition au fond	43
3.3.4 Condition sur les parois rigides	45
3.4 La théorie linéaire.	46
3.4 .1 Approximation pour la linéarisation des ondes de petite amplitude	46
3.4.2 Houle de Stokes du premier ordre	49
3.5 La théorie non linéaire	57
3.5.1 Limite de la théorie linéaire	57
3.5.2 Approche utilisée	57
3.5.3 Houle de Stokes du deuxième ordre	58
3.5.4 Houle de Stokes du troisième ordre	61
3.5.5 Houle de Stokes du quatrième ordre	64

Chapitre 4. Formulation du modèle aux volumes finis pour une houle linéaire

Introduction	65
4.1 Le problème à résoudre	65
4.2 Principe de la méthode des volumes finis	66
4.3 Maillage	67
4.4 Discrétisation des équations différentielles	70
4.4.1 Approximation du terme temporel	70
4.4.2 Approximation du flux convectif	71
4.4.3 Approximation du terme source	72
4.4.4 Discrétisation de l'équation de continuité	73
4.4.5 Discrétisation des conditions aux limites	74
4.5 Schémas de discrétisation	75
4.5.1 Schéma de discrétisation temporelle	75
4.5.2 Schéma de discrétisation spatiale	76
4.5.3 Discrétisation du flux convectif	79
4.6 L'équation algébrique	80
4.7 Résolution des équations algébriques	81
4.7.1 Couplage vitesse pression	81
4.7.2 La sous relaxation	85
4.8 Techniques de suivi d'interface	87
4.8.1 Principe de La méthode VOF	87
4.8.2 Cas de l'écoulement de fluide non miscibles	88
4.8.3 La représentation diphasique dans un modèle VOF	88
4.8.4 Les caractéristiques du fluide diphasique dans chaque maille	89
4.9 Discrétisation de la fraction volumique	89
4.10 L'algorithme de résolution du modèle 1- fluide	90
4.10.1 Déplacement de la surface libre	90
4.10.2 Détermination des interfaces dans les cellules	93
4.10.3 Evaluation de la pression à la surface libre	94

Chapitre 5 Applications, Résultats et Interprétations

Introduction	95
5.1 Présentation du logiciel ANSYS	95
5.2 Problème de rupture d'un barrage	96
5.3 Onde permanente dans un bassin (Standing wave)	101
5.4 Propagation d'une onde solitaire (Soliton)	106
5.5 Problème du générateur d'onde (Wave maker)	108
5.6 Commentaires	113

Conclusion

Nomenclature

(x, y, z)	Coordonnées cartésiennes
$P(x, y, z, t)$	La pression
$U(x, y, z, t)$	La vitesse
ρ	Masse volumique ;
g	l'accélération de la pesanteur ;
ν	Constante de viscosité cinématique ;
ϕ	Potentiel de vitesse
∇	Laplacien
Pa	Pression atmosphérique
$z = \eta$	L'élévation de la surface libre
t	le temps
T	La période.
H	La hauteur de l'onde
L	La longueur d'onde.
C	La célérité de l'onde
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	La fréquence
$k = \frac{2\pi}{L}$	Le nombre d'onde.
n	Vecteur unitaire.
h	profondeur à la longueur d'onde.
A,B	les demis axes de l'ellipse
R	le rayon
ε	Paramètres de perturbation
C_ϕ	Vitesse de phase
Ω	Un ouvert borné polygonal de R^2
Γ_f	Le font du domaine Ω
C	Fraction de volume

C_{cfl}	le nombre de Courant
P_e	Le nombre de Peclet
(a_E, a_W, a_N, a_S)	des coefficients de discrétisation.

INTRODUCTION GENERALE

En quelques décennies, les simulations numériques sont devenues un outil privilégié d'investigation dans les sciences et les technologies. Elles ont pour but de reproduire par le calcul le comportement d'un système décrit par un modèle, très souvent constitué d'équations aux dérivées partielles.

La modélisation et la simulation numérique des écoulements à surface libre et spécialement les vagues non linéaires recouvrent des enjeux importants en hydrologie des eaux continentales, dans une perspective d'une meilleure prédiction de la dynamique de ces systèmes et des transferts associés. Cette invasion a permis une meilleure compréhension des phénomènes complexes dans les fluides.

La maîtrise de ces phénomènes est essentielle dans plusieurs domaines. Dans le domaine de l'énergétique, la simulation des ondes de gravité non linéaires ; telles que la propagation et la déformation des houles en provenance du large, est essentielle pour la prévision et la captation de la quantité d'énergie véhiculée. Sujet qui est devenu au cœur des recherches actuelles en ce qui concerne les énergies renouvelables et le développement durable.

Cependant, à ce jour, les processus de formation et de propagation de la houle sont loin d'être complètement connus. En effet, d'une part les observations des vagues en milieu naturel présentent des difficultés matérielles et d'autre part l'eau des océans ne satisfait pas aux hypothèses de fluides parfaits utilisés dans la plupart des modèles mathématiques de comportement de la houle. Certains résultats sont néanmoins désormais bien établis, tout au moins en première approximation.

Les difficultés qui surgissent de ces applications sont de taille, aussi bien du point de vue mathématique que numérique. Mathématiquement, la variation du domaine d'étude au cours du temps ne permet pas de bien définir les paramètres physiques qui décrivent le problème. Du point de vue numérique on doit identifier les parties inconnues des frontières et de résoudre le fort couplage entre le mouvement de frontières et la cinématique des milieux continus.

En conséquence, l'élaboration d'un modèle numérique pour le calcul du niveau d'agitation d'un écoulement à surface libre nécessite, d'une part un modèle théorique régissant la propagation des ondes de gravité de surface et la prise en compte des

processus d'interaction air-mer (surface libre) et d'autre part la formulation des conditions aux limites du domaine. La difficulté majeure de l'étude des écoulements à surface libre réside dans le traitement des conditions aux limites. Ces conditions concernant la surface libre qui est une des inconnues majeures du problème, le fond variable qui occasionne des déformations à la houle (réfraction, diffraction, etc.) les frontières réfléchissantes est ouvertes qui délimitent le domaine d'étude. L'interaction et la complexité des phénomènes physiques qui ont lieu sur ces frontières rendent leurs formulations confuses. La prise en compte de ces conditions demeure, une difficulté majeure.

L'objet de ce mémoire est la présentation d'un modèle de calcul aux volumes finis destiné à la simulation bidimensionnelle d'un écoulement non linéaire à surface libre variable. Ce modèle utilise une approche eulérienne sur un maillage fixe, où la fraction volumique permet de localiser les fluides présents à l'interface. L'interface est reconstruite à partir du changement des propriétés physiques. On retrouve pour ces méthodes eulériennes deux grandes familles, les méthodes de suivi de front et les méthodes de suivi en volume, plus communément appelées méthodes VOF, qui nous intéresse ici.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres et aborde successivement l'aspect physique, le modèle mathématiques, et la résolution numérique ainsi que l'exploitation des résultats obtenus dans un but d'une compréhension du phénomène étudié.

Le premier chapitre porte sur une synthèse des connaissances et un état de l'art sur les écoulements à surface libre ou nous présentons une analyse bibliographique des différents travaux qui ont traité ce type de phénomène dans laquelle nous rappelons, d'une part, les principaux résultats expérimentaux consacrés à l'étude des écoulements à surface libre. D'autre part, les approches de modélisation utilisée pour l'étude d'un tel phénomène.

Le second chapitre est centré dans sa première partie sur l'aspect physique des ondes de gravité à surface libre. La seconde partie est consacrée aux différentes techniques de récupération de l'énergie des vagues où en passe en revue le principe de la conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique.

Le troisième chapitre traite le développement du modèle mathématique des ondes de gravité non linéaire à travers un rappel des équations de base de la mécanique des fluides. Ensuite on procède à la linéarisation des termes non linéaires par la théorie de stocks. Au terme de ce chapitre on abouti à un système d'équations aux dérivées partielles fermé par les conditions aux limites imposées.

L'objectif du quatrième chapitre est de développer les différentes étapes pour la formulation d'un modèle aux volumes finis destiné à la simulation bidimensionnelle d'un écoulement non linéaire à surface libre variable. L'écoulement étant considéré comme un écoulement diphasique, Les équations aux dérivées partielles écrites pour une configuration diphasique peuvent être reformulées sous une forme « 1-fluide » dans lequel intervient un fluide équivalent aux caractéristiques variables. Le modèle ainsi formé est résolu par la méthode des volumes finis. La surface libre est prédite par une méthode de capture d'interface VOF (Volume Of Fluid) ou La variable qui permet de caractériser le fluide dans la cellule considérée se nomme la fraction volumique et elle correspond au rapport entre le volume du fluide 1 et le volume de l'élément considéré.

Quant au cinquième chapitre, il est consacré aux applications servant à la validation du modèle. Ce dernier est conduit sur plusieurs cas tests disponibles dans la littérature. Des interprétations et des commentaires sont présentés pour justifier les résultats obtenus et éventuellement toute déviation par rapport aux modèles tests.

Nous achevons ce mémoire par une conclusion générale dans laquelle nous dresserons le bilan de notre contribution, tant sur le plan expérimental que numérique. Nous ouvrons des perspectives sur nos travaux futurs.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La théorie de propagation et de déformation des petites vagues date du XIXème siècle. Cette théorie emploie soit des modèles linéaires ou des modèles non linéaires. En partant des équations de quantité de mouvement et de masse, Gerstner, en 1802 avait déterminé une solution qui satisfait exactement la condition pression nulle à la surface, mais avec un rotationnel non nul. La théorie d'Airy en (1845) donne une solution approchée du problème linéaire. En 1847 Stokes a étendu la solution d'Airy (chapitre 3) à des termes non linéaires, qui améliorent l'accord de la théorie avec les observations de vagues dans l'océan, l'ensemble des observations montre que les vagues sont irrotationnelles et sont bien décrites par les théories d'Airy et Stokes.

Mais l'histoire de la modélisation numérique océanique débuta il y a près de quarante ans avec le premier modèle numérique de la circulation générale océanique de Bryan et Cox (Cox, 1967; Bryan, 1969). Depuis lors, une multitude de modèles numériques de la circulation océanique ont été développés. Profitant des nombreux progrès effectués entre autres dans les l'assimilation de données et la gestion des codes informatiques, ces modèles se sont imposés comme des outils incontournables dans de nombreuses études. Mais malgré toutes ces avancées, les modèles restent, conceptuellement parlant, semblables au prototype de Bryan ; ils résolvent les équations des fluides à l'aide d'une méthode de différences finies conservatives sur des grilles structurées. Cette approche conduit à des codes informatiques faciles à développer, comprendre et utiliser. Mais elle n'offre pas la flexibilité géométrique inhérente aux maillages non-structurés. C'est pourquoi, l'introduction de ces derniers (maillages non-structurés) en modélisation océanique est vue par certains auteurs comme l'émergence d'une seconde génération de modèles numériques de la circulation océanique.

Malgré leur apparente simplicité, notons que les équations des eaux peu profondes permettent la modélisation de nombreux phénomènes. Par exemple, elles sont utilisées avec succès dans la modélisation des ondes de marée, de tempêtes, de ruptures de barrage, de tsunamis....etc.

Les méthodes numériques qui servent à résoudre les problèmes mobiles sont classifiées en trois catégories selon le type de description cinématique : Les approches lagrangiennes, eulériennes et les approches mixtes eulériennes lagrangiennes ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian).

Dans le premier groupe de méthodes (Approche Lagrangienne) les particules du fluide se déplacent avec le champ de vitesse. La méthode des éléments finis a été utilisée en formulation purement Lagrangienne pour simuler les écoulements visqueux à surface libre qui sont généralement à faible nombre de Reynolds. Ces méthodes sont relativement précises et s'adaptent très bien avec la nature des écoulements étudiés et présentent la facilité de localiser automatiquement la surface libre. Cependant, en plus de leur instabilité, un remaillage fréquent est nécessaire pour suivre le comportement du fluide lorsque la frontière de celui-ci bouge. De nos jours, avec le développement des outils informatiques et l'augmentation exponentielle de la puissance de calcul, le problème de remaillage systématique à chaque pas de temps commence à être surmonté.

Dans le cas des méthodes à description Eulérienne, les positions des points de la frontière sont localisées dans un maillage fixe. Les équations qui régissent l'écoulement sont résolues dans un domaine plus grand que le domaine réel et l'interface entre les endroits secs et mouillés doit être détectée. Toutefois, la détection de cette interface nécessite un raffinement de maille afin d'obtenir une précision suffisante. Ce raffinement est une tâche complexe et coûteuse surtout en deux et en trois dimensions.

Une autre méthode a été introduite pour combiner les avantages des deux types d'approches citées précédemment qui est la méthode mixte lagrangienne Eulériennes (ALE) ou le domaine d'étude est complètement occupé par le fluide et donc par le maillage qui peut bouger avec son propre champ de vitesse. Au niveau de la frontière mobile, les vitesses des points du maillage sont reliées avec les vitesses du fluide.

La répartition évoquée précédemment se base sur la description cinématique et sur le mouvement relatif matière/maillage. Une autre classification des approches numériques utilisées se base sur la méthode de discrétisation. Ainsi, on peut différencier trois familles d'approches :

- La méthode des différences finis (MDF).
- la méthode des volumes finis (MVF)
- la méthode des éléments finis (MEF)

Dans les années soixante dix, les différences finies ont été les premières méthodes de discrétisation d'équations d'ondes. Ces méthodes sont simples et efficaces sur une grille cartésienne régulière. Cependant, leurs qualités sont fortement dégradées en présence d'interfaces : sans précautions particulières, on observe des diffractions parasites, une chute de la précision des calculs, et enfin les conditions aux interfaces ne sont pas prises en compte.

La méthode des différences finis (MDF) consiste à se donner un certain nombre de points dans l'espace et/ou dans le temps. Les opérateurs différentiels sont discrétisés en utilisant des quotients inspirés des développements en séries de Taylor.

Du fait que cette méthode requiert une discrétisation structurée, la MDF n'est pas adaptée à la simulation des écoulements à surface libre qui, à l'origine, sont physiquement complexes et souvent définis sur des domaines à géométrie complexe. Des approches plus perfectionnées ont alors été élaborées : éléments finis, volumes finis, Galerkin discontinu. Ces schémas d'intégration utilisent un maillage adapté aux interfaces, éliminant ainsi les défauts mentionnés plus haut. En contrepartie, la durée des calculs croît fortement.

Les algorithmes de simulation numérique pour l'étude des problèmes d'interface sont basés sur la méthode des éléments finis. Sont très intéressants, cela est dû en grande partie au cadre mathématique qu'elle fournit, qui permet d'aborder naturellement la formulation faible de problèmes d'écoulements, mais son succès provient surtout de la possibilité d'appuyer les éléments finis sur des maillages irréguliers. Il est toujours possible de construire un maillage « conforme », cette conformité est préservée grâce à une opération de remaillage.

En élément finis, l'équation différentielle fermée par les conditions aux limites est remplacée par une formulation variationnelle construite dans un espace de Hilbert H bien choisi. La discrétisation consiste à remplacer l'espace H par un sous-espace de dimension finie H_k . La méthode des éléments finis fournit une précision d'ordre élevé, en particulier pour les ondes non linéaires. Car cette méthode aboutie à une matrice creuse qui peut être efficacement résolue avec les solveurs itératifs.

Récemment, les méthodes de Galerkin discontinue (DG) aux éléments finis sont devenues très populaires en raison de leur flexibilité à l'adaptation de maillage tout en maintenant une bonne précision sur des maillages non structurés.

La méthode des volumes finis MVF, est souvent utilisée pour les lois de conservation en mécanique des fluides. L'idée principale se base sur le calcul des flux entrants et sortants sur les bords des "volumes de contrôles". À la base, la méthode des volumes finis a été développée pour traiter les équations d'Euler, qui sont intimement similaires à ceux de Saint-Venant. Le succès qu'a trouvé la MVF en hydraulique revient en grande partie à l'esprit de conservation locale intrinsèquement existant dans la formulation de la méthode. De plus, la MVF présente l'avantage de bien s'adapter aux discontinuités fréquemment rencontrées en aérodynamique et dans les écoulements à surface libre et surtout dans la simulation du problème de bris de barrage.

C'est ainsi que la MVF est actuellement l'approche la plus populaire aussi bien pour simuler les écoulements à surface libre que la dynamique des gaz.

L'objet de ce mémoire est la présentation d'un modèle de calcul aux volumes finis – VOF destiné à la simulation bidimensionnelle d'un écoulement non linéaire à surface libre variable. Ce modèle utilise une approche eulérienne sur un maillage fixe, où la fraction volumique permet de localiser les fluides présents à l'interface.

Pour ces raisons, et pour justifier notre choix, il est indispensable d'entamer cette étude par une synthèse bibliographique des travaux antérieurs qui ont traité du problème d'onde de gravité de surface par différentes méthodes.

L'un des problèmes majeurs rencontré dans la simulation directe des écoulements diphasiques concerne le suivi d'interface au cours du temps, La méthode VOF est une méthode qui a été introduite par **Hirt & Coll [04]** en 1981 qui s'utilise pour la simulation d'écoulements entre plusieurs phases non miscibles. Elle est particulièrement adaptée dans le cas d'écoulements à interfaces fortement déformées, puisqu'elle permet de suivre la position de l'interface dans un maillage fixe.

Kennedy & Fenton [01] on utilisés une approximation polynomiale locale (LPA) pour des topographies variables .En supposant que le potentiel de vitesse est représenté localement par un polynôme satisfaisant analytiquement l'équation de Laplace, cette méthode est développée pour calculer l'évolution de vague de gravité à surface libre pour une dimension d'espace. Cette approximation polynomiale locale est une méthode rapide et simple et n'a pas d'approximations essentielles dans le traitement des conditions aux limites à la surface libre. En plus, différents degrés d'approximation polynomiale peuvent êtres utilisé, ce qui rend cette méthode très flexible.

Min-Joon Kim, Hie-Tae Moon, Yong-Bum Lee, Seok-Ki Choi, Yong-Kyun Kim, Ho-Yun Nam And Mann Cho [22] ont utilisé la méthode spectrale pour un écoulement supposé potentiel, avec une géométrie simple, ce qui simplifie les équations gouvernante de l'écoulement à surface libre à une équation de Laplace. Qui est traitée au moyen d'une série de développement du potentiel de vitesse.

Mitsuhiro Tanaka [23] a combiner l'avantage d'un ordre élevé de la méthode spectrale Et la fonction l'amplitude complexe introduite par Zakharov pour d'étude de domaine aléatoire non linéaire de vagues de gravité à surface libre. La méthode spectrale d'ordre élevé, lorsque l'ordre de non linéarité est correctement choisi, donne exactement le même résultat que l'équation de Zakharov dans un temps de calcul beaucoup plus court.

K.J. Bai, S.M. Choo, S.K. Chung, D.Y. Kim [15] leur travail est consacré principalement à l'analyse des solutions obtenues par la méthode des éléments finis pour les problèmes de vagues non linéaires. Du point de vue existence des solutions, stabilité et convergence avec les estimations d'erreur.

Rainald Lohner, Chi Yang et Eugenio Onate [30] ont étudié l'interaction de vagues extrêmes avec une structure tridimensionnelle. Le modèle proposé utilise un maillage non structuré et les équations de Navier-Stokes/ Euler pour un écoulement incompressible sont couplées à une approche VOF. Le système étudié étant composé de deux phases liquide/gaz, l'approche VOF est utilisée pour déterminer les champs de pression et de vitesse dans la phase gaz près de l'interface. Cette approche est validée par des tests concernant le problème classique de bris de barrage « dam break problème ».

Nan-Jing Wu, Ting-Kuei Tsay et D. L. Young [27] ont proposé un modèle numérique sans maillage pour les vagues non linéaires à surface libre. En proposant une approche pour manipuler le mouvement des frontières de la surface libre. En utilisant la solution fondamentale de l'équation de Laplace. Le problème est résolu en utilisant un ensemble discret de points plus-ou-moins aléatoirement distribués dans le domaine et sur la frontière. Ce modèle donne de bons résultats comparés aux données expérimentales et à d'autres modèles numériques. Il est utilisé pour simuler les vagues périodiques d'amplitude finie générées par le mouvement harmonique d'un générateur de vague et le problème de vagues monochromatiques passant au-dessus d'un obstacle submergé.

C.Z. Wang & G.X. Wu [03] ont opté pour un maillage non structuré, pour la simulation bidimensionnelle de l'interaction entre les vagues non linéaires et les structures flottantes. Par la méthode des éléments finis. Le maillage non-structuré offre une grande flexibilité géométrique, la théorie du potentiel de vitesse permet de calculer le

potentiel à chaque pas de temps en résolvant une les équations écrites sous forme matricielle basée sur la méthode de Galerkin.

V. Sriram, S.A. Sannasiraj, V. Sundar [38] ont utilisés la méthode des éléments finis pour la simulation d'un écoulement de vague non linéaire afin de déterminer le profil de la surface libre au cours du temps. L'expérience consiste à générer des vagues périodiques dans un récipient, par le mouvement harmonique d'un générateur de vagues. La méthode des éléments finis est utilisée pour déterminer le potentiel de vitesse. La vitesse des nœuds est ensuite évaluée par une technique d'interpolation Spline cubic.

Thomas Bonometti & Jacques Magnaudet [26] ont utilisé une méthode de capture d'interface pour la simulation tridimensionnelle d'un écoulement diphasique de fluide newtonien incompressible. L'écoulement est considéré sans changement de phase avec une tension surfacique uniforme Cette méthode consiste à résoudre les équations de Navier Stokes pour un modèle à 1-fluide. L'approche utilisée, est basé sur la méthode VOF « Volume Of Fluid » qui prend comme fonction indicatrice une fraction volumique d'une des deux phases fluide. Et la technique LS « Level Set » qui prend comme fonction indicatrice la fonction distance à l'interface qui est reconstruite explicitement. Les équations gouvernantes sont ensuite utilisées pour investigué les aspects fondamentaux de la dynamique des écoulements à bulles.

V. Sriram, S.A. Sannasiraj, V. Sundar [37] ont amélioré leur ancien modèle en utilisant la méthode des moindres carrés à la place de spline cubique pour calculer la vitesse à partir du potentiel de vitesse, cela pour améliorer le caractère dispersive pour des ondes longues non linéaires.

Carlos M.P. Silva Santos, Deborah M. Greaves [02] une approche mixte Eulérienne lagrangienne est appliquée par sur un modèle bidimensionnelle pour la simulation de vagues entièrement non linéaires. Le domaine d'étude est discrétisé dans un mode Eulérien utilisant un maillage Cartésien hiérarchique, pendant que la position de la

surface libre est explicitement suivie à la trace en utilisant une approche Lagrangienne. L'exactitude de la méthode dépend fortement de la qualité d'approximation de la vitesse des particules à la surface libre calculer. La méthode est vérifiée par les simulations de vague déferlante asymétrique. Et les vagues d'amplitude modérée à comportement non linéaire.

S.K. Tomar & J.J.W. van der Vegt [34] ont utilisé une approche Runge- Kutta / Galerkin discontinue pour les ondes de gravité linéaire. Une étape considérée comme essentielle avant de passé au développement de cette méthode pour des vagues non linéaires. Les équations de surface libre sont discrétisé par la méthode Runge-Kutta classique. Mais pour contourner les instabilités numériques résultant du maillage asymétrique, un terme de stabilisation est ajouté aux équations de la surface libre. En association avec une technique de rétablissement de vitesse d'ordre supérieur, cela stabilise la discrétisation numérique avec un effet minimal sur l'exactitude des calculs de vague.

David P. Nicholls [06] C'est intéressés à la simulation numérique de vague océanique à surface libre par la méthodes de Perturbation de Frontière, tout en passant en revue un large ordre de techniques qui a été appliqué à l'analyse des équations Euler, dont les solutions se rapprochent précisément d'une vaste gamme de problèmes physiques du transport de polluants, aux forces exercées sur des plates-formes pétrolières par des vagues.

M.Doring, Y.Andrillon, B.Alessandrini and P.Ferrant [18] ont utilisé deux codes de calcul destinés à la simulation d'écoulement à surface libre complexes. Ces deux codes utilisent des approches différentes pour modéliser l'écoulement ainsi que la surface libre. Le premier est fondé sue l'approche lagrangienne appelée « Smooth Particule hydrodynamics » SPH. Elle a pour principe d'assimiler le fluide à un grand nombre de particule en interaction. Le second utilise une approche eulérienne ; l'écoulement du fluide est déterminé résolvant les équations de Navier Stokes et la surface libre est prédite par une méthode de capture d'interface. Différentes simulations sont réalisées afin de comparer ces deux codes à des données expérimentales.

Deborah Greaves [07] a appliqué la méthode de volumes finis pour la simulation de vagues de surfaces non linéaire pour un écoulement d'un fluide visqueux. En présence des deux phases air/eau, cette approche consiste à résoudre les équations de Navier Stokes pour les deux phases. Différentes approches sont ensuite utilisés pour le couplage pression-vitesse. Ainsi que le suivie d'interface.

G.D. Weymouth, Dick K.-P. Yue [10] ont présenté un algorithme pour la reconstruction d'interface. Cet algorithme utilise un second ordre de l'approche VOF (Volume Of fluid) sur une grille cartésienne. Les deux schémas à pas fractionnaire explicite et centré sont utilisés pour estimer la fraction volumique. Cette nouvelle approche est basée sur la génération d'une interface linéaire dans le but de minimiser l'erreur de l'estimation de la fraction volumique dans les cellules avoisinantes est annuler cette erreur complètement dans le centre de la cellule .cet algorithme est validé par la simulation d'une onde de gravité linéaire simple et une vague déferlantes à grande amplitude.

Lin Mu, Xiu Ye [18] ont utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation de Navier stokes sur un maillage triangulaire régulier. Le but est de prouver que la seule solution dans la méthode des volumes finis converge vert la solution correcte avec un ordre optimale pour la vitesse et la pression.

K.M.T. Kleefsman a, G. Fekken , A.E.P. Veldman [16].Ont étudiés quelques aspects de l'impacte des houles. La méthode numérique est basée sur la résolution les équations de Navier Stokes qui décrivent un écoulement incompressible d'un fluide visqueux. Ces équations sont discrétisé sur une grille cartésienne par la méthode des volumes finis. L'approche VOF est utilisée pour suivre Le déplacement de La surface libre.il est à noter que le choix des conditions aux limites a la surface libre est crucial pour la robustesse et l'efficacité de la méthode. Des testes de validation sont ensuite présentés.

Pour notre cas Le choix de la méthode des volumes finis, développée par **Patankar** [30], est avantageux pour les points suivant :

- La méthode est bien adaptée pour une formulation vitesse, pression ;
- La disponibilité de code de calcul qu'il suffit d'adopter pour notre problème ;
- Conservation de toutes les variables transportables et aptitude à résoudre les écoulements complexes ;
- La qualité de la méthode est de réduire les instabilités pour les sollicitations élevées ;

ASPECT PHYSIQUE DES ONDES DE GRAVITE DE SURFACE

Beaucoup de phénomènes physiques se transmettent sous la forme d'ondes. Les ondes mécaniques : vibrations mécaniques, ondes sonores, vagues à la surface de l'eau, ondes sismiques etc., où se propagent un état de tension, de vitesse et de pression. Les ondes électromagnétique : lumière, ondes radio, infrarouge, ultraviolet, rayon X, rayon gamma, où se propage un état de champs électrique et magnétique.....Les ondes de spin où se propage un état d'orientation d'atomes etc.

Lors de la propagation d'une onde d'un point vers un autre, il n'y a pas de transport de matière (les vagues ne font pas avancer le bateau). L'onde ne transporte que de l'énergie; un point atteint par une onde reproduit l'état de la source avec une amplitude moindre, et un retard dû à la durée nécessaire à l'onde pour parcourir la distance qui le sépare de la source.

Pour qu'une onde se propage il faut que:

- le milieu environnant à la source permet la propagation de l'onde. Par exemple, les ondes sonores ne se propagent pas dans le vide, les ondes lumineuses ne se propagent pas dans les substances opaques, les rayons X se propagent dans les tissus biologiques mous mais pas dans les os.
- la source soit dans un état vibratoire: corde vibrante d'un instrument de musique, vibration des électrons dans une antenne, etc.

La surface de l'eau (comme de nombreux systèmes) réagit, lorsqu'elle est soumise à une contrainte extérieure, en créant une perturbation à caractère ondulatoire. Ce sont en effet des ondes périodiques caractérisées par un mouvement de la surface d'eau, de nature oscillatoire et propagatrice. Ces ondes qui apparaissent sont caractérisées par les contraintes qui les font naître et par les processus physiques qui les entretiennent. Parmi les contraintes à l'origine des ondes observées en milieu océanique, on peut citer les chocs (sonore par exemple), le vent, les séismes, l'attraction des planètes (lune et soleil en particulier). Parmi les processus physiques mis en jeu, on note en particulier les forces d'inertie, de pression, de pesanteur et de tension superficielle. En considérant les différents processus physiques et les

contraintes possibles, on aboutit à toute une gamme de phénomènes la dispersion, le choc, la diffraction...

2.1 Paramètres caractéristiques des ondes de gravité :

Dans le cas général une onde ou une vague est caractérisée par :

- La **surface libre** de l'océan est le niveau théorique au repos sans aucune ondulation.
- La **hauteur** H de la vague est la différence de niveau entre un creux et une crête successifs.
- L'**amplitude** a est égale à $H/2$.
- La **période** T est le temps qui sépare le passage de deux crêtes successives.
- La **longueur d'onde** L est la distance qui sépare le passage de deux crêtes successives.
- La **fréquence** f de la vague est le nombre de périodes par seconde, égale à $1/T$. Elle est exprimée en hertz.
- On appellera k le **nombre d'onde** de la vague égal à $2\pi/L$.
- On notera g la **gravité terrestre**.
- La **profondeur** h est la distance entre la surface libre de l'eau et le sol.
- La **pulsation** ω de la vague est le nombre de radians effectués par seconde, égale à $2\pi/T$. En l'absence de courant, cette grandeur est invariante : nous l'appelons pulsation absolue. En présence de courant, cette grandeur est encore invariante pour un observateur se déplaçant à la vitesse du courant. Par contre, elle ne l'est plus pour un observateur fixe. La variation qu'il constate est dite effet Doppler ou pulsation relative.
- La **célérité** c de la vague qui est la vitesse moyenne de propagation des crêtes, elle est égale à L/T . On peut alors considérer la vitesse de propagation des ondes $c = \frac{L}{T} = Lf$. Si la vitesse de propagation dépend de la fréquence, donc de la longueur d'onde, on parle d'onde *dispersive*. La relation de dispersion est la relation qui relie $\omega = 2\pi f$ et $k = \frac{2\pi}{L}$. Pour les ondes non dispersives $\omega = ck$, c étant une constante.

Le mouvement des ondes pour les petites amplitudes s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \eta \quad (2.1)$$

Tel que :

η : Déplacement de l'amplitude

c : La vitesse de propagation de l'onde

Notre étude se limitera à la propagation de l'onde suivant la direction (x), celle-ci s'exprime à partir de l'équation (2.1) :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

Qui a pour solution générale :

$$\eta = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2.3)$$

Appelée *solution de d'Alembert*, telles que f et g sont des fonctions arbitraires.

- Les paramètres d'ondes ; selon le principe de Fourier, n'importe quelle perturbation arbitraire peut être décomposée en ondes sinusoïdales ; de différentes longueurs dont l'amplitude est de la forme :

$$\eta = a \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \quad (2.4)$$

2.2 Classification des ondes de gravité de surface :

Il en existe plusieurs classifications selon le ou les critère(s) considéré(s).

Si on prend l'origine des ondes, on distingue :

- vague causée par le vent (forçage météorologique) : houle ;
- vague causée par les mouvements de la lune (forçage astronomique) : marées ;
- vague causée par les tremblements de terre : tsunamis.

Selon le mécanisme physique qui est impliqué dans la propagation des ondes, on distingue :

- force motrice due à la gravité : onde gravitaire ;
- vague due aux forces de tension à la surface de l'eau : onde capillaire.

Si on prend le rapport L/h (avec L la longueur d'onde et h la hauteur d'eau), on a :

- $L/h \leq 2$, les ondes en eau profonde ou bien des ondes courtes ;
- $2 < L/h \leq 20$, les ondes intermédiaires (ou ondes de transition) ;
- $L/h > 20$, les ondes en eau peu profonde ou bien des ondes longues ;

La notion d'eau profonde se fait toujours à travers le rapport L/h ; elle n'est pas liée à la profondeur totale d'eau.

Une dernière classification propose en fait des théories et des équations utilisées pour décrire le mouvement des ondes. Pour cela on introduit le nombre d'Ursell défini comme le rapport entre le paramètre de non linéarité et le carré du paramètre de dispersion :

$$D = \frac{\varepsilon}{\mu^2} \quad (2.5)$$

ε Rapport entre l'amplitude de la vague et la profondeur, indicateur des effets non linéaires

μ Rapport entre la profondeur et la longueur d'onde de la vague, indicateur des effets dispersifs.

Cette classification consiste à distinguer les ondes linéaires des ondes non linéaires.

- **Ondes linéaires**

On appelle ondes linéaires des ondes de faible amplitude telles que le nombre d'Ursell $D \ll 100$. Ces ondes sont décrites dans le cadre de la théorie d'Airy; on les appelle donc également ondes d'Airy où l'équation du mouvement est une équation différentielle linéaire. Rappelons que les vagues sont alors des combinaisons d'harmoniques, c'est-à-dire des fonctions périodiques sinusoïdales.

- **Ondes non linéaires**

La théorie des ondes non linéaires s'applique dès lors que le cadre d'approximation des ondes linéaires n'est plus valable. Parmi les ondes non linéaires, on distingue **Les ondes cnoïdales**.

- **Les ondes courtes** (ondes de Stokes) :

Ce sont des ondes périodiques, dont le profil de hauteur comporte une harmonique (partie linéaire) et une contribution non linéaire représentant les effets d'ordre supérieur. Ces ondes sont étudiées à l'aide de la théorie de Stokes, qui consiste à rechercher des solutions sous la forme de série tronquée. Plus l'ordre du développement est important, meilleure est en principe la précision, mais il faut que la longueur d'onde soit relativement courte pour qu'une convergence rapide soit assurée

- **Les ondes solitaires ou solitons :**

Ce sont des cas particuliers d'ondes cnoïdales (forme asymptotique). Elles ont des propriétés remarquables qui les distinguent des autres ondes:

- la forme est stable (pas de dispersion) et ne présente qu'une seule crête ;
- l'onde peut se propager sur de très grandes distances sans atténuation apparente (pas de dispersion, pas de déferlement) ;
- la vitesse dépend de la taille de la vague et sa largeur dépend de la profondeur d'eau
- deux solitons qui se croisent ou se dépassent ne coalescent pas
- si la profondeur d'eau vient à diminuer, le soliton peut se scinder en deux solitons de taille différente.

Les ondes solitaires ont été décrites pour la première fois par John Scott Russell en 1834.

Une onde de gravité de surface n'est jamais parfaitement monochromatique, unidirectionnelle et d'amplitude constante elle est non uniforme, La non uniformité engendre plusieurs phénomènes: la réfraction, la diffraction, la réflexion.

Lorsque la houle se propage dans un milieu à profondeur variable sa célérité varie. La vitesse n'est pas la même tout le long du front d'onde ; les crêtes se déforment en plan : la houle **réfracte**. En effet, la hauteur de la vague s'ajuste pour compenser les variations de vitesse de propagation causées par les changements de profondeur.

Lorsqu'un ouvrage n'arrête qu'une partie du front d'onde, des oscillations se manifestent derrière l'ouvrage ; la houle contourne l'obstacle : elle **diffracte**. Ce phénomène de diffraction apparaît aussi lorsque les rayons d'onde se rapprochent beaucoup voire se coupent. L'énergie entre rayons apparaît alors comme infinie, ce qui est impossible. Elle doit donc diffuser.

Lorsque la houle aborde une paroi imperméable, elle se réfléchit partiellement. La houle **réfléchie**, en se combinant avec la houle incidente, donne naissance à des oscillations stationnaires appelées clapotis.

L'étude des ondes de gravite dans l'eau a toujours intéressé par son aspect physique et mathématique, « Les vagues naissent, grandissent (s'amplifie), Puis s'atténue ou déferle On parle même de l'âge d'une vague ».

2.3 Génération des ondes de gravité de surface :

Les ondes de gravité de surface obtiennent de l'énergie par le vent à cause des différences de pression dues à l'abri offert par les crêtes. Bien qu'elle ne puisse pas expliquer la formation des très petites houles, cette théorie marche si la vitesse du vent est supérieure à celle de la vague (et, de toute façon, pas inférieur à 1 m/s) ; en outre, il faut logiquement que la vague aie une raideur suffisante pour que la crête puisse fournir un abri (cet effet d'abri parvient à son maximum lorsque la vitesse du vent est égale à trois fois celle de la houle). Lorsque la vitesse des vagues arrive à un troisième de la vitesse du vent, la houle continue à grandir (et sa vitesse aussi) jusqu'à arriver très proche à la vitesse du vent, vitesse qu'elle n'atteint pas, puisqu'une partie de l'énergie du vent est transférée à l'océan sous forme de courant de surface, une

partie est dissipé par frottement, et une partie s'en va dans l'enlèvement de la crête de la vague.

Pour simplifier la théorie des ondes de gravité de surface, on assume que la forme de la houle soit sinusoïdale, de tel façon qu'on puisse considérer le déplacement comme un mouvement harmonique. Les particules d'eau dans une houle de mer profonde tracent, avec leur mouvement, un cercle: sur la crête, les particules d'eau bougent dans la même direction que la vague, le diamètre de tel cercle est égale à la hauteur de la vague, mais il décroît de façon exponentielle avec la profondeur, jusqu'à quand la profondeur arrive à la moitié de la longueur de la vague, où il n'y a pas pratiquement plus de déplacement.

Les milieux dispersifs et la notion de paquets d'ondes planes décrivent mieux la réalité. Ils permettent d'introduire de nouvelles notions telles que vitesse de phase qui décrit l'évolution d'un plan d'onde à l'intérieur du paquet d'ondes et la vitesse de groupe qui permet de définir la vitesse de propagation du paquet d'ondes et donc de l'énergie.

Cette énergie qui s'exprime sous deux formes:

- Energie cinétique
- Energie potentielle (des particules déplacées de leur position initiale)

La transmission d'énergie est maximale là où les vagues parviennent dans le groupe à la hauteur maximale; la puissance de la vague (la vitesse à la quelle l'énergie se propage par unité de longueur) est donc le produit de la vitesse de groupe pour l'énergie par unité de surface. C'est toutefois difficile d'utiliser l'énergie des houles, car ça poserait des problèmes à la circulation maritime, aussi que des problèmes environnementaux, puisque pour utiliser cette énergie il faudrait bâtir des convertisseurs d'énergie de plusieurs kilomètres de longueur, ce qui signifierait créé des endroits où la circulation de l'eau sera limitée.

En fin la diminution d'énergie d'une houle (Atténuation) est provoquée par quatre phénomènes principaux :

- transformation de l'énergie de la houle en énergie cinétique.
- Viscosité (transformation de l'énergie de la houle en chaleur par frottement)
- Résistance de l'air
- Interaction non linéaire, plus compliquée que la combinaison de fréquence

Le dernier point ne constitue pas vraiment une perte d'énergie, quant plutôt la répartition de l'énergie dans plusieurs fréquences, ce qui provoque parfois des changements de hauteur de l'onde, et donc la possibilité de atténuation par les autres causes.

2.4 Caractéristiques énergétiques de la houle :

Les vagues sont créées et entretenues localement par le vent et prennent la même direction que lui. La houle se propage en dehors de la zone où le vent lui a donné naissance, avec des oscillations relativement lentes, typiquement de 10 secondes, avec une grande longueur d'onde (la longueur d'onde mesure la distance entre les crêtes de deux vagues successives) (150 m) et une vitesse de propagation d'environ 14 m/s. La houle est composée de trains de vagues, régulières et puissantes, pouvant se propager dans l'océan depuis leur lieu de formation. De plus la vitesse de propagation d'un train de vagues est d'autant plus élevée que sa longueur d'onde est grande et l'énergie transportée par la vague est elle aussi croissante avec la longueur d'onde.

La profondeur des fonds marins joue un rôle important dans le sens où de faibles profondeurs favorisent la dissipation énergétique. Ainsi sur les côtes, la houle a généralement perdu une grande partie de son potentiel énergétique par rapport au large. La houle étant un phénomène complexe, nous simplifions sa caractérisation en limitant sa description à deux paramètres [24] :

- sa hauteur significative H_s (hauteur crête à creux). Historiquement elle correspond à la hauteur de la moyenne du tiers supérieur des amplitudes observées (Fig. 1.4 gauche)
- et sa période pic T_p , période possédant le plus d'énergie dans le spectre. (Fig. 2.1).

La figure (2.1) montre les caractéristiques temporelle et spectrale du mouvement vertical d'une houle Particulière (ici $H_s = 2.6$ m et $T_p = 9$ s)

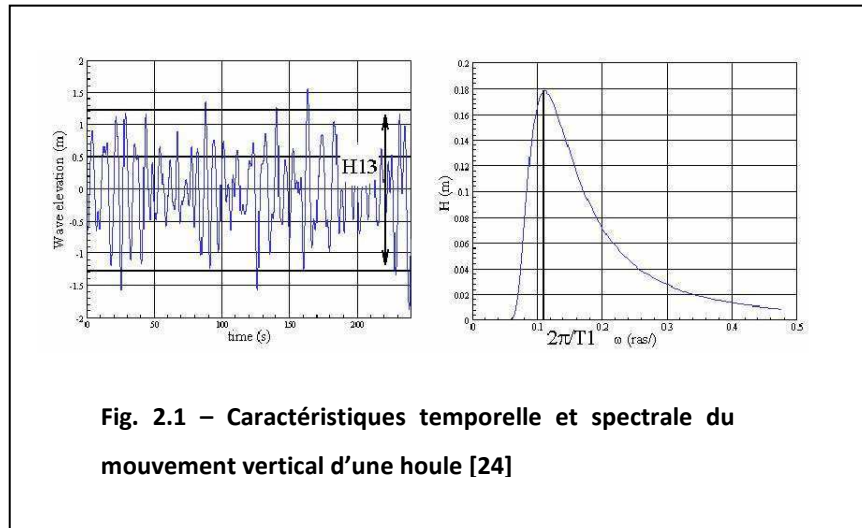


Fig. 2.1 – Caractéristiques temporelle et spectrale du mouvement vertical d'une houle [24]

Des mesures permettent de caractériser les sites et d'établir des diagrammes de distribution. De la même façon, on peut présenter la puissance productible des houlo-générateurs .En effet la puissance d'une onde progressive pure de houle (parfaitement sinusoïdale et unidirectionnelle) peut se calculer dans l'hypothèse d'une profondeur infinie du milieu. La puissance moyenne peut s'exprimer selon la formule suivante [24] :

$$P_w = \frac{\rho g^2}{32\pi} H_s^2 T_p \quad (W / m) \quad (2.6)$$

Avec :

- ρ La masse volumique de l'eau
- g L'accélération de la pesanteur
- H La hauteur crête à creux de la houle
- T La période

2.5 Les systèmes existants de récupération de l'énergie des vagues :

Sachant maintenant que les vagues sont une grande réserve d'énergie. La problématique est donc de connaître les moyens et les technologies permettant de convertir cette énergie mécanique en énergie électrique.

Trois caractéristiques des vagues sont utilisées pour la conversion de l'énergie :

- La courbure des vagues
- L'oscillation sinusoïdale de la surface
- Le déferlement des vagues

Certaines technologies se basent sur deux de ces caractéristiques pour convertir un maximum d'énergie.

L'ensemble des technologies et processus de conversion de l'énergie des vagues peut être classé à partir d'un nombre fini de critères. Ces critères énumérés ci-après portent sur les caractéristiques des vagues utilisées, le type d'absorbeur, le type de point de réaction et sur le type du fluide travaillant.

L'absorbeur et le point de réaction sont deux points de l'usine houlomotrice entre lesquels il existe un mouvement. C'est ce mouvement relatif qui est utilisé pour mettre en mouvement un fluide, le fluide travaillant.

Utiliser la courbure des vagues revient à utiliser la forme des vagues pour créer un couple mécanique autour d'un axe. Le mouvement créé par l'oscillation de la surface est un mouvement vertical contrairement au mouvement créé par le phénomène de déferlement qui est horizontal.

Absorbeurs :

- Surface libre de la mer
- Structure fabriquée rigide ou flexible

Points de réaction :

- Structure fixe (structure béton avec fondation ou sol terrestre)
- Structure ancrée au sol (ancrage gravitaire ou avec pieux)

- Structure à inertie

Fluide travaillant :

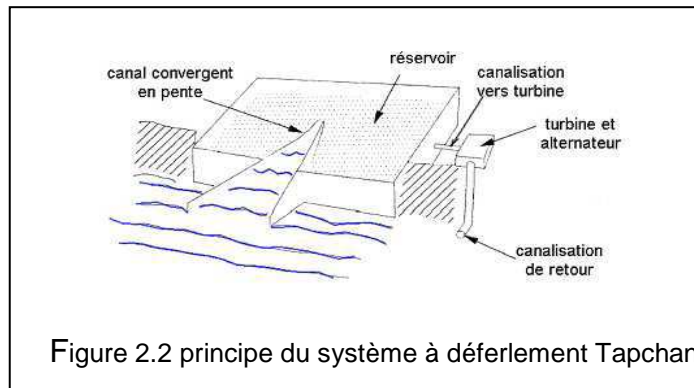
- Air
- Eau de mer
- Fluide hydraulique

Les premiers systèmes de récupération de l'énergie des vagues ont été imaginés il y'a déjà 200 ans. Girard en 1799 et Barruet en 1885 ont essayé de développer des systèmes exploitants les mouvements de cavement. Depuis les années 1970, suite au premier choc pétrolier, de nombreux dispositifs ont été imaginés, brevetés et/ou testés [24]. Nous présentons ici une classification des différents types de systèmes:

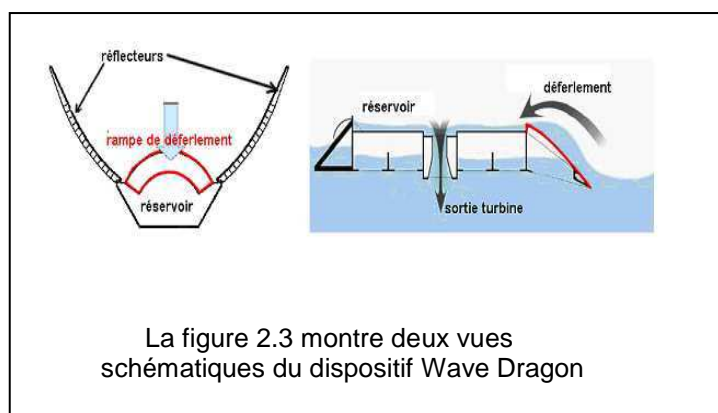
- les systèmes à déferlement : l'eau de mer déferle sur une rampe puis remplit un réservoir, elle est ensuite turbinée. Les premiers systèmes se situaient sur la côte. Aujourd'hui il existe des systèmes flottants.
- Les systèmes à colonne d'eau oscillante : les vagues s'engouffrent dans une cavité contenant de l'air. L'air piégé au-dessus de la colonne d'eau est comprimé et s'échappe par la partie supérieure de la cavité en actionnant une turbine. Quand la vague se retire, le phénomène inverse se produit, actionnant une deuxième fois la turbine.
- les systèmes à corps mus par la houle : de très nombreux systèmes à flotteur en surface ou immergé ont été imaginés.

2.5.1 Systèmes à déferlement :

Nous citerons deux systèmes : le Tapchan (**Tapered channel**) construit en 1985 sur Le site de Toftestallen en Norvège d'une puissance de 350 kW et arrêté à la suite d'une Tempête en 1991 et la **Wave Dragon**, système flottant dont un prototype a été mis en service en 2003 au Danemark. Le système Tapchan comporte un canal rétréci graduellement avec des tailles de mur de 3 à 5 m au dessus du niveau d'eau moyen. Les vagues s'engouffrent dans l'extrémité large du canal et se propagent en bas du canal de rétrécissement. L'amplitude d'onde est alors amplifiée jusqu'à ce que les crêtes de vagues se renversent au dessus des murs et arrivent dans un réservoir qui fournit un approvisionnement constant en eau à une basse turbine principale. (Fig. 2.2)



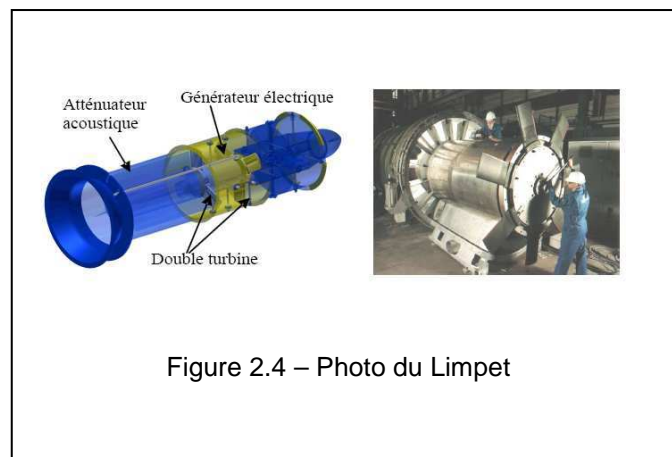
Le houlogénérateur **Wave Dragon** est flottant et amarré, sa hauteur de flottaison est ajustable en fonction des caractéristiques de la houle. Les dimensions de la version échelle 1 sont 300 m (distance entre extrémités des bras), 170 m (longueur) et 17 m de hauteur dont 3 à 6 m au-dessus du niveau de la mer. L'eau est turbinée dans des turbines de basse chute (a priori Kaplan). Il est intéressant d'exploiter plusieurs turbines de petite puissance (ici 16 à 20), plutôt qu'une seule, ce qui permet d'améliorer le rendement en fonction du débit disponible. La courbe de rendement résultante est ainsi grandement améliorée. Des génératrices à aimants à vitesse variable permettent encore d'accroître le rendement global. Sur le système à échelle réduite, avec la même puissance maximale installée, passer d'un système à 2 turbines Kaplan à vitesse fixe à un système à 16 turbines Kaplan à vitesse variable, permet d'augmenter l'énergie annuelle de 1,79 à 2,04 GWh et de réduire le rapport P_{max}/P_{moy} , indicateur des fluctuations de production qui passe ainsi de 12,4 à 10,1



2.5.2 Systèmes à colonne d'eau oscillante :

C'est peut-être l'un des types de systèmes les plus utilisés, car historiquement les premiers systèmes développés. Nous distinguons les systèmes côtiers des systèmes offshore. Parmi les systèmes à colonnes d'eau oscillante offshore flottants et ancrés, nous pouvons citer le Sperboy ou encore le Mighty Whale. Pour les systèmes côtiers nous pouvons citer le projet européen pilote Pico, du nom de l'île des Açores au Portugal

Le système LIMPET actuellement installé capte les variations de pression de 3 colonnes d'eau offrant une surface totale de captation de 169 m². Le turbogénérateur est constitué de deux turbines Wells à pas fixe de 2,6 m de diamètre en contre rotation, chacune entraînant directement un générateur asynchrone de 250 kW à double alimentation fonctionnant à vitesse variable (700 à 1400 tr/mn). La turbine Wells possède l'avantage d'un couple moteur qui ne change pas de signe avec le sens de circulation du flux d'air. Le système de l'île de Pico exploite, quant à lui, une turbine Wells à pas variable.



2.5.3 Systèmes à corps mus par la houle

Nous présentons ici quelques dispositifs dits « à corps mus par la houle ». Power Buoy, Archimède Wave swing, Searev ou encore Pelamis sont les derniers systèmes prometteurs de récupération de l'énergie des vagues dans cette catégorie. Nous allons donner quelques points de détails sur ces différents systèmes.

- **PowerBuoy**

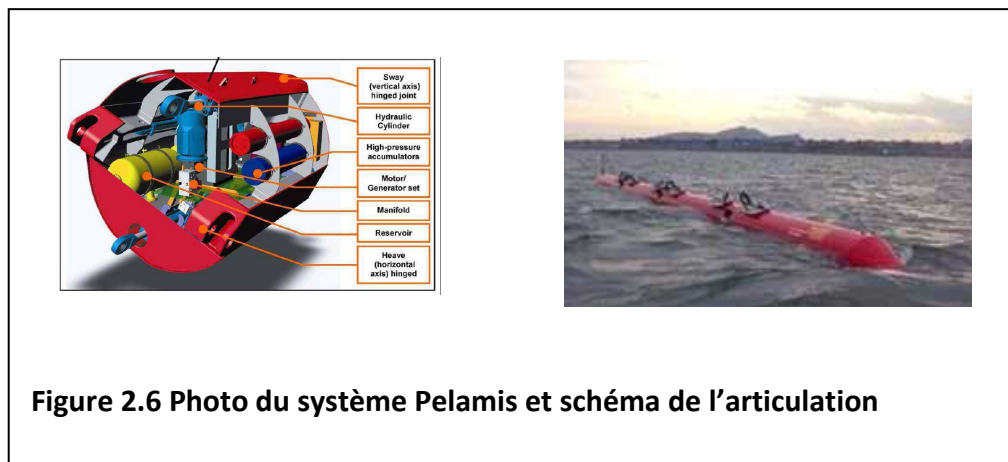
Le système Power Buoy (Ocean Power Technologies, Inc., USA) est une bouée immergée, avec une partie fixe, un ancrage tendu et une partie oscillante au rythme de la houle, le mouvement relatif est amorti pour être converti en électricité. Seule une balise indique la présence du système sous l'eau pour la navigation. Ce système, dont la fréquence propre rend ses performances très sensibles à la période de houle, nécessite un contrôle spécifique pour maximiser l'extraction de l'énergie, incluant notamment un comportement prédictif. Le dispositif de conversion comprend une pompe, un accumulateur et un moteur hydrauliques, ce dernier entraînant une génératrice électrique. Des versions à générateur électromagnétique linéaire direct sont également étudiées. Un modèle de 40 kW a été testé entre 1997 et 2002 : il fait 9 m de haut et a un diamètre de 1,5 m au niveau du flotteur, pour une masse de 2140 kg. Des modèles de 150 et 250 kW sont envisagés. Sur 20 000 m², 40 bouées de 250 kW permettraient d'installer une capacité de production de 10 MW.



Figure 2.5 Photo du Power Buoy

- **Pelamis :**

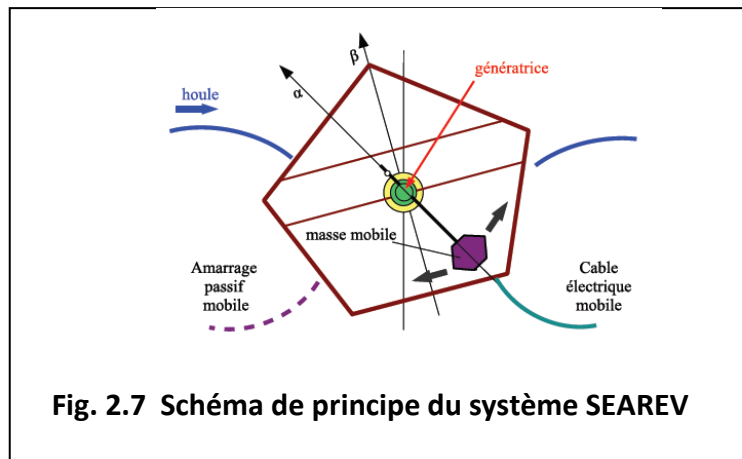
Le Pelamis (**Ocean Power Delivery**) système le plus mature à ce jour, est constitué de quatre cylindres métalliques flottants reliés entre eux par trois articulations à deux degrés de liberté, et ressemblant à un serpent de 4,6 m de diamètre et d'une longueur totale de 123 m (700 tonnes, dont 380 tonnes d'acier).



Sa forme générale lui permet de supporter des houles très variées et de bien exploiter leur énergie. Dans chaque articulation (Fig. 2.6), se trouvent quatre vérins hydrauliques dont deux exploitent et amortissent les mouvements de pilonnement (verticaux) et deux autres, ceux d'embarquée (transversaux). Ces pompes accumulent l'énergie sous forme d'huile sous pression dans un réservoir (100 à 350 bars). Deux moteurs hydrauliques, qui tournent régulièrement, entraînent chacun une génératrice asynchrone de 125 kW à 1500 tr/min (vitesse fixe). Ainsi, ce dispositif présente l'avantage de lisser une énergie naturellement fluctuante. Sa durée de vie envisagée est de 15 ans. La puissance électrique maximale est de 750 kW (3 articulations comprenant chacune deux générateurs de 125 kW).

- **SEAREV**

Le système SEAREV (**Système Électrique Autonome de Récupération de l'Énergie des Vagues**) appartient à la dernière catégorie des systèmes présentés, à savoir les corps mus par la houle.



Il est composé d'un corps flottant, complètement clos, dans lequel est suspendu un volant rotatif à masse excentrée. Sous l'action de la houle, le flotteur, comme la masse interne, développent des mouvements qui leur sont propres. Le mouvement relatif entre le flotteur et la masse mobile est alors mis à profit pour actionner le générateur électromécanique (Fig. 2.7). Le volant s'apparente à un pendule. Les équations du mouvement du flotteur sont également (en négligeant les mouvements de translation) celles du pendule simple. La dynamique du système complet est donc celle d'un double pendule, c'est à dire un système de deux oscillateurs mécaniques couplés, pourvu de deux pulsations de résonance. Nous récupérons l'énergie en freinant plus ou moins le mouvement du volant.

L'absorption d'énergie est maximale en houle régulière aux résonances du système, et faible lorsque les pulsations de la houle et du système ne sont plus accordés. Il constitue en quelque sorte un amortisseur actif et récupératif. La conception d'un générateur adapté à la houle doit avant tout tenir compte de la nature des sollicitations, notamment de leur complexité. Le dimensionnement et l'optimisation d'un tel système nécessite la prise en compte du couplage relativement fort existant entre les phénomènes physiques.

MODELES MATHÉMATIQUES DE L'HYDRODYNAMIQUE A SURFACE LIBRE

INTRODUCTION

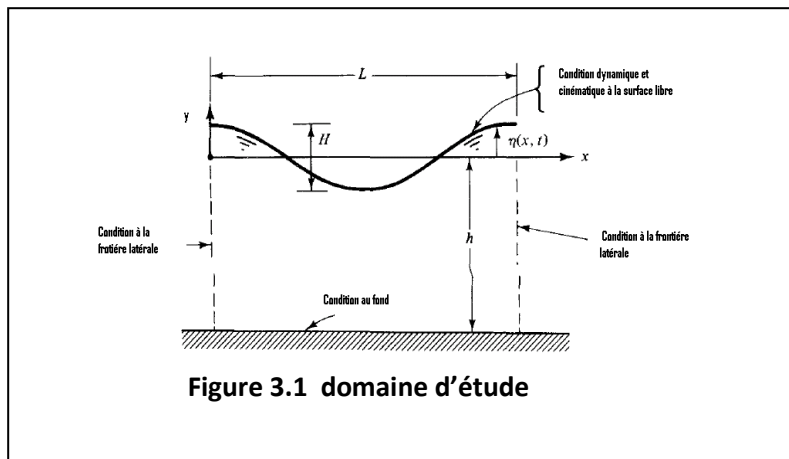
Dans cette partie nous présentons les équations qui décrivent les écoulements à surface libre, le domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites. Ensuite nous procédons à la linéarisation des termes non linéaires afin d'aboutir à un modèle approché qui peut être résolu analytiquement ou numériquement. Ces approximations dépendent des échelles temporelles et spatiales rencontrées.

3.1 PRÉSENTATION DU DOMAINE D'ÉTUDE :

L'étude porte sur le mouvement ondulatoire régulier d'un écoulement à surface libre se propageant à partir d'une zone où le fluide a été soumis à une certaine perturbation. Le mouvement du fluide est décrit dans un repère cartésien $R(O, x, y, z)$ avec par les trois composantes de la vitesse (u, v, w) fonction du temps et de l'espace. Et par deux variables thermodynamiques ; la masse volumique ρ et la pression P liées par une équation d'état. La description du mouvement d'un fluide revient à définir les cinq variables inconnues.

Si l'on suppose que le fluide est incompressible, le nombre des inconnues est réduit à quatre : la pression et les trois composantes de la vitesse.

On verra, dans ce qui suit, que pour les écoulements à surface libre qu'une variable s'ajoute aux précédentes inconnues : la cote de la surface libre $\eta(x, y = cst, z, t)$ qui représente l'une des principales difficultés de résolution des équations des écoulements à surface libre.



- Avec
- H : amplitude de la houle
 - L : Longueur d'onde de la houle
 - h : profondeur d'eau locale

Le domaine d'étude Ω (voir figure 3.1) est délimité par :

Le fond décrit par une équation $y = h_f(x, y, t)$;

La surface libre décrite par l'équation $y = h_s(x, y, t) = \eta(x, y, t)$; que l'on peut aussi écrire sous la forme $F(x, y, z, t) = y - \eta(x, z, t) = 0$.

Les cotés latérales par des surfaces ouvertes ou solides Γ_l ;

3.2 FORMULATION DU PROBLEME A RESOUDRE :

Pour décrire l'évolution d'une houle, on considère généralement le fluide comme non visqueux, incompressible et l'écoulement irrotationnel. En adoptant le point de vue Eulérien, on obtient un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires ou les équations de NAVIER-STOKES se réduisent aux équations d'EULER. Ces équations expriment la conservation de masse et de quantité de mouvement.

3.2.1 CONSERVATION DE MASSE OU EQUATION DE CONTINUITE :

La première équation est fonction du champ de vitesse seulement .elle est obtenue en écrivant que la masse contenu dans un volume fixe quelconque se conserve au cours du temps

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho U) = 0 \quad (3.1)$$

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \text{ Est le vecteur vitesse ;}$$

La projection de cette équation dans un repère cartésien (o, x, y, z)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Pour un fluide incompressible (l'eau dans notre cas) l'équation s'écrit :

$$\text{div}(U) = 0 \quad (3.3)$$

Pour un écoulement irrotationnel, La vitesse du fluide est un gradient car son rotationnel est nul, c'est-à-dire qu'elle dérive d'un potentiel scalaire ϕ :

$$U = \nabla \phi \quad (3.4)$$

En introduisant ce potentiel dans l'équation (3.3), on constate que celui-ci est régi par l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.5)$$

3.2.2 CONSERVATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT :

La conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = -\nabla p + \rho f + \nabla \cdot \bar{\tau} \quad (3.6)$$

Avec :

- $U = (u, v, w)$ Désigne la vitesse d'une particule fluide ;
- $\bar{\tau}$ Désigne le tenseur de contraintes visqueuse;
- p Désigne la pression ;
- ρ Est la masse volumique du fluide ;
- t Représente le temps ;
- f Désigne la résultante des forces s'exerçant sur le fluide ;

L'accélération de Coriolis étant négligée pour la plus part des écoulements à surface libre, la résultante f se résume à la seule force d'accélération de la pesanteur

$$\vec{g} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g + \nu \Delta U \quad (3.7)$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Est la viscosité cinématique.

Pour un fluide non visqueux (approximation très raisonnable dans le domaine de l'hydrodynamique à surface libre), nous obtenons les équations d'EULER :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla(U \otimes U) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \quad (3.8)$$

La projection de cette équation sur le système d'axe (o, x, y, z) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \right) \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sous les mêmes hypothèses, les équations du mouvement se réécrivent

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) + (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \quad (3.10)$$

Après intégration, on obtient :

$$-\frac{P}{\rho} = gy + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + C(t) \quad (3.11)$$

Avec $C(t)$ une fonction arbitraire de t cette équation est dite de BERNOULI, le premier terme gy est la contribution hydrostatique, alors que les termes restant sont la contribution hydrodynamique due à la pression totale P .

Nous obtenons ainsi les équations de la mécanique des fluides en théorie potentielle. Mais le système d'équations différentielles aux dérivées partielles ainsi formé est mathématiquement ouvert, composé de quatre équations avec cinq inconnues.

La cinquième inconnu concerne $h(x, z, t)$ la cote de la surface libre qui est une frontière du domaine est une variable du problème.

Pour fermer le système et pouvoir le résoudre dans le domaine d'étude Il nous faut donc ajouter une cinquième équation des variables dépendantes citées ci-dessus

3.3 CONDITIONS AUX LIMITES :

Deux types de conditions aux limites nous intéressent. La première à l'interface air/eau ou condition à la surface libre, la seconde est la condition occasionné par la forme du fond.

3.3.1 FORME GENERALE DES CONDITIONS D'IMPERMEABILITE :

Supposons que tout au long de ces deux frontières le mouvement du fluide est supposé tangentiel. Une frontière est représentée par l'équation :

$$F(x, y, z, t) = y - h(x, z, t) = 0 \quad (3.12)$$

Ou h est la hauteur mesurer à partir de $y = 0$;

Après un court moment dt la surface libre est décrite par :

$$F(x + qdt, t + dt) = 0 = F(x, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + q \cdot \nabla F \right) dt + O(dt)^2 \quad (3.13)$$

Avec q la vitesse d'un point matériel à la surface.

En partant de l'équation (3.12) on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + q \cdot \nabla F = 0 \quad (3.14)$$

Pour de petites variations dt l'hypothèse de mouvement tangentiel nécessite que $U \cdot \nabla F = q \cdot \nabla F$ ce qui implique que :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \cdot \nabla F = 0 \quad (3.15)$$

3.3.2 Conditions cinématique à la surface libre :

La surface libre est définie par ça cote $y = h_s = \eta(x, z, t)$ (3.16)

En remplaçant la vitesse U par sa valeur à la surface libre $U_s = (u_s, w_s, v_s)$, et En substituant dans l'équation (3.15) la fonction F par son expression $y - \eta(x, z, t)$

On obtient

$$v|_{y=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - U_s \cdot n_s = 0 \quad (3.17)$$

Avec : n_s le vecteur normale à la surface libre, orienté vers l'extérieur,

$$n_s \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1, -\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)$$

Le premier terme représente l'évolution de la surface libre.

Le second terme est la vitesse du fluide.

Ou en fonction du potentiel de vitesse :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } y = \eta(x, z, t) \quad (3.18)$$

Cette condition traduit le fait qu'une particule se trouvant sur la surface en un moment donné y reste à chaque instant : il n'y a pas d'enfoncement ou d'arrachement de la couche superficielle.

3.3.3 Condition au fond :

Le fond étant imperméable, la composante verticale de la vitesse doit être nulle sur le fond ou la vitesse d'une particule est $U = U_f = (u_f, w_f, v_f)$ à la profondeur $h_f(x, z) = -h(x, z)$, l'équation (3.12) devient $y + h_f(x, z) = 0$ l'équation (3.15) s'écrit :

$$v|_{y=h_f} = -u \frac{\partial h_f}{\partial x} - w \frac{\partial h_f}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

$$-U_f \cdot n_f = 0 \quad y = h_f \quad (3.20)$$

Avec : n_f Le vecteur normal à la surface du fond est exprimé par $n_f \left(\frac{\partial h_f}{\partial x}, -1, \frac{\partial h_f}{\partial z} \right)$

Ou encore sous la forme :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial h_f}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

La forme de la surface libre étant inconnue, il est nécessaire de disposer d'une équation supplémentaire

La condition de surface libre **dynamique** suppose que les tensions superficielles sont négligeables. La surface libre est considérée comme une isobare : la pression à chaque point de la surface libre est égale à la pression atmosphérique P_a .

Appliquons l'équation (3.12) sur la surface libre

$$-\frac{p_a}{\rho} = g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \quad \text{pour } y = \eta(x, t) \quad (3.22)$$

Notons qu'en présence de tension de surface, cette condition dynamique se réécrit

$$-\frac{p_a}{\rho} = g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - \frac{\sigma}{R} \quad \text{sur } y = \eta(x, t)$$

Avec σ le coefficient de tension de surface et R le rayon de courbure de la surface libre.

Les deux conditions (3.18) et (3.22) peuvent être combiné dans une équation en fonction de ϕ en considérant la dérivé totale de l'équation de quantité de mouvement

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla\right) \frac{p_a}{\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + g\eta\right) = 0 \quad ; \quad y = \eta \quad (3.23)$$

En utilisant l'équation (3.18)

$$U \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} U^2 \quad (3.24)$$

De l'équation (3.24) on obtient

$$\frac{D}{Dt} \frac{p_a}{\rho} + \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{1}{2} U \cdot \nabla U^2 \right] = 0 \quad ; \quad y = \eta \quad (3.25)$$

De plus si $p_a = cst$ la condition ci-dessus devient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{1}{2} U \cdot \nabla U^2 = 0 \quad ; \quad y = \eta \quad (3.26)$$

L'équation (3.26) est dite équation de la surface libre ;

3.3.4 Condition sur une paroi rigide :

Le choix de la condition latérale dépend également du problème physique considéré. Nous considérons ici une géométrie fermée où les surfaces latérales sont traitées comme des parois solides et imperméables. La condition d'imperméabilité s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

L'équation (3.18) se réduit
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V.n \quad (3.19)$$

Ou V représente la vitesse du mur. Cette vitesse de mur peut être prise égale à 0 dans le cas de parois immobiles, ou peut obéir à une loi temporelle pour simuler un batteur à onde.

Remarque :

Arrivé à cette équation, une première difficulté apparaît. Cette difficulté ne vient pas seulement du fait que cette équation est non linéaire, mais aussi et surtout qu'elle s'applique sur une surface inconnue. Le domaine d'étude est donc variable est inconnu.

3.4 La théorie linéaire :

3.4.1 Approximation pour la linéarisation des ondes de petite amplitude :

Supposons que :

$$\begin{pmatrix} L/2\pi \\ \omega^{-1} \\ H \\ H\omega L/2\pi \end{pmatrix} \text{ Caractérise } \begin{pmatrix} x, y, z, h \\ t \\ \eta \\ \phi \end{pmatrix}$$

Ou :

L, ω et H désignent respectivement la longueur d'onde, la fréquence et l'amplitude de la surface libre. On parlera donc de :

- Profondeur relative pour qualifier le rapport $\frac{h}{L}$ de la profondeur à la longueur d'onde.
- Le combure $\frac{H}{L}$ est le rapport de la hauteur de l'onde à la longueur d'onde.

Les hypothèses de linéarisation concernent l'ordre de ces deux paramètres, elle suppose que la hauteur de la houle H est faible devant la longueur d'onde et devant la profondeur du domaine h .

Introduisons maintenant les variables adimensionnelles $x', y', z', h', t', \eta'$ et ϕ' :

On peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} x, y, z, h \\ t \\ \eta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x', y', z', h')/2\pi \\ t'/\omega \\ H\eta' \\ H\omega\lambda\phi'/2\pi \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Substituant ces variables dans les équations (3.5) , (3.18), (3.21), (3.22)

On obtient :

$$\nabla'^2 \phi' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \phi' = 0 \quad -h' < y' < \varepsilon \eta' \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n'} = 0 \quad y = -h' \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial y'}{\partial z'} \right) = \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \quad y' = \varepsilon \eta' \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \left(\frac{2\pi g}{\omega^2 L} \right) \eta' + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla' \phi')^2 = -p'_a = -\frac{2\pi p_a}{\rho H \omega^2 L} \quad y' = \varepsilon \eta' \quad (3.31)$$

Avec :

$$\varepsilon = H/L = \text{combure}$$

Pour les ondes de gravité de petites amplitudes donc $\varepsilon \ll 0$ les conditions à la surface libre peuvent être simplifiées on note que la surface libre inconnue diffère d'une quantité $O(\varepsilon)$ pour le plan horizontal $y' = 0$. ainsi on peut développer ϕ' et ces dérivatives en séries de Taylor.

$$f'(x', z', \varepsilon \eta', t') = f'|_0 + \varepsilon \eta' \left. \frac{\partial f'}{\partial y'} \right|_0 + \frac{(\varepsilon \eta')^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f'}{\partial y'^2} \right|_0 + O(\varepsilon^3) \quad (3.32)$$

Ou $f'|_0$ signifie $f(x, 0, z, t)$ et ainsi de suite

Pour l'ordre $O(1)$, l'approximation des conditions à la surface libre deviennent :

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} = \phi'_{y'} \quad (3.33)$$

$$y' = 0$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{2\pi g}{\omega^2 L} \eta' = -p'_a \quad (3.34)$$

Nous remarquons que seuls les termes linéaires restent dans ces équations qui sont appliquées au plan connu $y' = 0$. En ajoutant les équations (3.28) et (3.29), Le problème approximative est complètement linearisé. Revenant aux variables physiques

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad -h < y < 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad y = -h \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.37)$$

$$y = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{p_a}{\rho} \quad (3.38)$$

En plus les deux équations (3.37) et (3.38) peuvent être combinés pour donner :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad y = 0 \quad (3.39)$$

Cette équation peut être aussi obtenue en linearisant l'équation (3.25).

La pression totale dans le fluide peut être liée au potentiel ϕ en linearisant l'équation de BERNOULLI

$$P = -\rho g y + p \quad \text{ou} \quad p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{la pression dynamique} \quad (3.40)$$

3.4.2 Houle de Stokes du premier ordre (houle d'Airy) :

Airy (1845) proposa une solution approchée au système dans le paragraphe ci-dessus, en linéarisant l'équation de quantité de mouvement. Cette solution est valide dans l'hypothèse de linéarité, c'est à dire quand le terme $(u^2 + w^2)$ est négligeable devant les autres termes. Ceci est vrai pour:

$$\begin{aligned} H &\ll L \\ H &\ll h \end{aligned}$$

C'est à dire que la solution d'Airy est valable pour les **ondes de petite amplitude**.

Reprenons le système écrit précédemment :

$$(S1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \phi = 0 & -h < y < 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & y = -h \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{p_a}{\rho} & y = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial t} & y = 0 \end{array} \right.$$

a- Expression du potentiel :

La solution est obtenue grâce à la méthode de séparation des variables. Plus précisément, étant données les oscillations attendues en x et t, la solution est supposée être de la forme:

$$\phi(x, y, t) = \phi(y) \cos(kx - \omega t) \quad (3.41)$$

Pour des raisons de commodité de calcul, ϕ est recherchée sous forme complexe, seule la partie réelle étant considérée par la suite. Soit:

$$\phi(x, y, t) = \phi(y) e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

En insérant cette expression de ϕ dans les équations du système (S1) à résoudre on obtient:

$$-k^2 \phi(y) + \phi''(y) = 0 \quad (3.42)$$

$$\phi'(y = -h) = 0 \quad (3.43)$$

$$-\omega \phi(y = 0) = -g \frac{\partial \phi}{\partial y}(y = 0) \quad (3.44)$$

Les solutions possibles de l'équation de continuité sont de la forme:

$$\phi(y) = \alpha e^{ky} + \beta e^{-ky} \quad \text{ou} \quad \phi(y) = \alpha \cosh(ky) + \beta \sinh(ky) \quad (3.45)$$

En choisissant la deuxième forme (elles sont équivalentes), on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} -ksh(kh)\alpha + kch(kh)\beta = 0 \\ -\omega^2 \alpha + gk\beta = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Pour que ce système admette une solution, il faut que son déterminant soit nul. La relation qui en découle est appelée relation de dispersion ; elle relie la longueur d'onde de la houle à la période et à la profondeur.

$$\begin{vmatrix} -ksh(kh) & kch(kh) \\ -\omega^2 & gk \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2 = gkth(kh)$$

D'où l'expression de ϕ :

$$\phi(y) = \frac{ag}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \Rightarrow \phi(x,y,t) = \frac{ag}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (3.47)$$

b- Profil de l'onde :

Pour obtenir l'expression de η on se sert de la condition dynamique à la surface libre:

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=0} \Rightarrow \eta = -a \sin(kx - \omega t) \quad (3.48)$$

En général le profil de l'onde est noté comme suit:

$$\eta = -\frac{H}{2} \sin(kx - \omega t) \quad (3.49)$$

Ce qui donne pour la fonction potentiel:

$$\phi(x,y,t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (3.50)$$

c- Célérité de l'onde :

La célérité de l'onde (ou vitesse de phase) se calcule en considérant le déplacement d'une crête (ou d'un creux). En un temps dt , la crête se déplace de dx , mais la valeur de η reste la même (maximale puisque l'on considère une crête). En réalité on peut faire le calcul en considérant n'importe quel point:

On a donc:

$$kx - \omega t = k(x + dx) - \omega(t + dt) \Rightarrow C_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \quad (3.51)$$

Compte tenu de la relation de dispersion :

$$C_\phi = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} th(kh) \quad (3.52)$$

- **En eaux profondes :**

On considère que l'on se trouve dans ce cas quand la relation suivante est vérifiée:

$$\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$$

On a alors: $th(kh) \cong 1 \Rightarrow C_\phi = C_0 = \frac{gT}{2\pi}$ (3.53)

La vitesse de phase ne dépend plus de la profondeur h .

- **En eaux intermédiaires :**

$$\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2}$$

On a la relation générale:

$$C_\phi = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} th(kh) \quad (3.54)$$

Remarque: $C_\phi = C_0 \operatorname{th}(kh) \Rightarrow C_\phi \leq C_0$

Au fur et à mesure que l'effet du fond se fait sentir, la vitesse de phase diminue.

- **En eaux peu profondes :**

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$$

La simplification est la suivante: $\operatorname{th}(kh) \cong kh \Rightarrow C_\phi = \sqrt{gh}$ (3.55)

d- Expression de la vitesse :

On a $U = \nabla\phi$ donc
$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.56) \\ (3.57) \end{array}$$

Soit, avec l'expression de ϕ obtenue ci-dessus:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \sin(kx - \omega t) \end{array} \right. \quad (3.58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{sh[k(y+h)]}{ch(kh)} \cos(kx - \omega t) \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Remarque:

- u et v sont en opposition de phase,
- u est en phase avec le profil de l'onde η .

f- Trajectoire des particules :

En coordonnées lagrangiennes, la relation vitesse/trajectoire est la suivante:

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \frac{dX}{dt} \\ v(x,y,t) = \frac{dY}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x,y,t) = \int_0^t u(x,y,t) dt \\ Y(x,y,t) = \int_0^t v(x,y,t) dt \end{cases} \quad (3.60)$$

En introduisant les expressions de u et v trouvées ci-dessus, on obtient:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{ch^2[k(y+h)]}{sh^2(kh)}} + \frac{Y^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{sh^2[k(y+h)]}{sh^2(kh)}} = 1 \quad (3.62)$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (3.63)$$

Avec :

$$A = \left(\frac{H}{2}\right) \frac{ch[k(y+h)]}{sh(kh)} \quad B = \left(\frac{H}{2}\right) \frac{sh[k(y+h)]}{sh(kh)}$$

Remarque:

les trajectoires sont des ellipses de demi-axes A et B .

il n'y a pas de transport de masse. Les particules ne font qu'osciller (ceci n'est valide que pour des ondes de petite amplitude).

- **En eaux profondes :** $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$

On peut alors faire les simplifications suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} sh(kh) \cong ch(kh) \cong e^{\frac{kh}{2}} \\ sh[k(y+h)] \cong ch[k(y+h)] \cong e^{\frac{k(y+h)}{2}} \end{array} \right. \quad (3.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} sh(kh) \cong ch(kh) \cong e^{\frac{kh}{2}} \\ sh[k(y+h)] \cong ch[k(y+h)] \cong e^{\frac{k(y+h)}{2}} \end{array} \right. \quad (3.65)$$

On a alors : $A = B = \left(\frac{H}{2}\right) e^{\frac{ky}{2}} \Rightarrow \frac{A}{B} = 1$ (3.66)

Les trajectoires sont donc des cercles de rayon $R = A = B$, R décroît exponentiellement avec y .

- **En eaux intermédiaires :**

$$\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2}$$

L'expression est :

$$\frac{X^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{ch^2[k(y+h)]}{sh^2(kh)}} + \frac{Y^2}{\left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{sh^2[k(y+h)]}{sh^2(kh)}} = 1 \quad (3.67)$$

$$\Rightarrow \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (3.68)$$

Avec $A = \left(\frac{H}{2}\right) \frac{ch[k(y+h)]}{sh(kh)}$ et $B = \left(\frac{H}{2}\right) \frac{sh[k(y+h)]}{sh(kh)}$

Les trajectoires sont des ellipses dont la taille diminue avec y . Cependant cette diminution est plus faible que celle, exponentielle, constatée en eaux profondes.

- En eaux peu profondes :

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$$

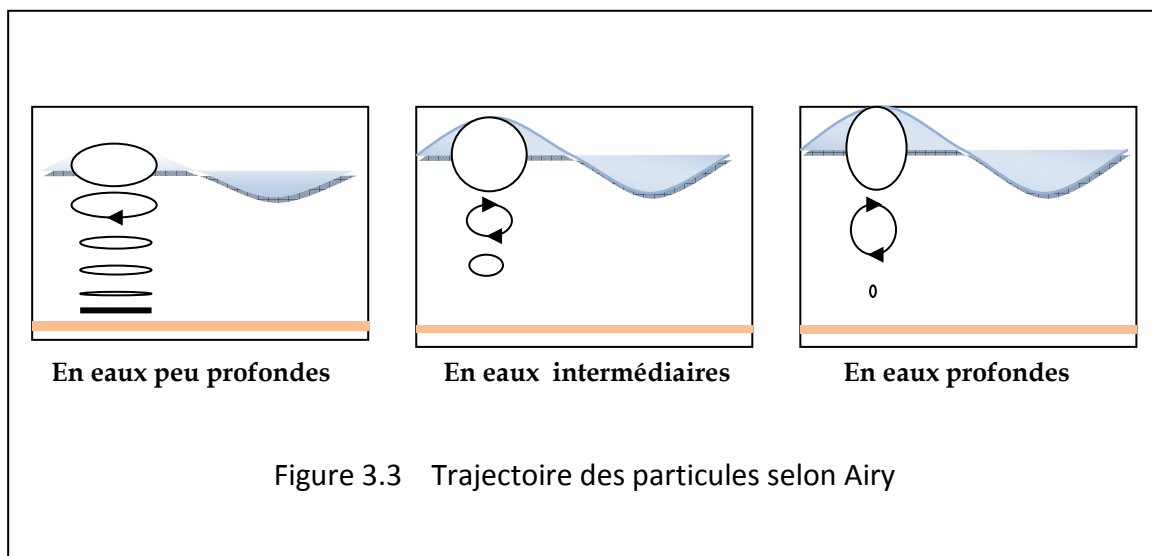
Les simplifications sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} ch[k(y+h)] \cong ch(kh) \cong 1 \\ sh[k(y+h)] \cong sh(kh) \cong kh \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{H}{2} \frac{1}{kh} \\ B = \frac{H}{2} \frac{k(y+h)}{kh} \end{array} \right. \quad (3.69)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = k(y+h) \quad (3.71)$$

Les trajectoires sont des ellipses dont le demi-axe horizontal A est constant et le demi-axe vertical B diminue linéairement avec y . Sur le fond ($y = -h$) B s'annule, la trajectoire devient donc un segment de droite.

Schéma récapitulatif :



- **Le champ de pression :**

Le champ de pression dans le fluide, pour une houle d'Airy, est donné par l'équation (3.40) :

$$\frac{p}{\rho} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{y=0}$$

Soit

$$p = \rho g a \frac{\cosh[k(y+h)]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx)$$

La solution "houle infiniment petite", qui provient de la linéarisation du problème, présente l'inconvénient de ne s'appliquer en toute rigueur qu'à des houles de très faible amplitude, ce qui n'est pas très physique, et ne permet pas des calculs suffisamment précis des efforts de houle sur les structures, dont la connaissance est primordiale en génie océanique et côtier.

3.5 La théorie non linéaire :

3.5.1 Limite de la théorie linéaire :

Lorsqu'une onde n'est plus d'amplitude très faibles, la déformée n'est pas sinusoidale mais décrit une courbe de forme trochoïdale en profondeur infinies, dont une approximation correcte peut être obtenue par un développement en perturbation.

3.5.2 Approche utilisée :

La méthode utilisée, appelée méthode des perturbations, consiste à développer les différentes variables en série de puissance dépendant du paramètre ε .

$$\begin{aligned}\phi &= \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 + \dots + \varepsilon^n\phi_n + \dots \\ \eta &= \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + \dots + \varepsilon^n\eta_n + \dots\end{aligned}$$

Un des éléments importants de cette méthode est le choix de ε qui doit être plus petit que 1 (nécessaire pour que la série converge). Stokes propose la cambrure de l'onde:

$$ka$$

En introduisant les expressions de ϕ et η , développés en fonction de ε , dans les équations on obtient la solution globale, somme de toutes les solutions, chacune correspondant à une perturbation d'ordre donné. Il est alors possible de séparer les contributions de chaque perturbation.

En effet, si l'on considère l'équation générale suivante:

$$\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon^3 A_3 + \dots = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \varepsilon^3 B_3 + \dots$$

La contribution à une perturbation du premier ordre vérifie l'équation:

$$A_1 = B_1$$

La contribution à une perturbation du deuxième ordre vérifie l'équation:

$$A_2 = B_2$$

Et ainsi de suite, cette procédure va servir par la suite à résoudre les équations à différents ordres de perturbations.

3.5.3 Houle de Stokes du deuxième ordre :

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 \tag{3.72}$$

La fonction ϕ doit vérifier les équations d'Euler dans le cas d'un fluide incompressible et mouvement irrotationnel, ainsi que les conditions aux limites. On a donc les relations suivantes obtenues grâce à la méthode des perturbations.

	Terme du premier ordre: ϕ_1	Terme du deuxième ordre: ϕ_2
Equation de continuité	$\nabla^2\phi_1 = 0$	$\nabla^2\phi_2 = 0$
Condition de non-pénétration au fond	$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)_{y=-h} = 0$	$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)_{y=-h} = 0$
Condition dynamique en $y = 0$: surface libre ($p = p_{atm}$)	$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + g\eta_1\right)_{y=0} = 0$	$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + g\eta_2\right)_{y=0} = C_2$
Relation en $y = 0$	$\left(\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$	$\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = C_2^*$

Ou ϕ_1 est la solution des équations d'Airy. Cela signifie qu'en s'arrêtant au premier ordre d'approximation, on se ramène au cas linéaire. Pour la détermination de ϕ_2 , la méthode de perturbation donne:

$$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + g\eta_2\right)_{y=0} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2\right]_{y=0} \tag{3.73}$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2\right] + g\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right]_{y=0}$$

(3.74)

(3.74)

En ce qui concerne le calcul proprement dit, la façon de procéder est la même que pour la détermination de ϕ_1 .

a- Expression du potentiel :

$$\phi(x,y,t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2}\right)^2 \frac{gk}{\omega} \frac{3ch[k(y+h)]}{8sh^3(kd)ch(kh)} \cos(2(kx - \omega t)) \quad (3.75)$$

La fonction du potentiel est constituée de deux composantes harmoniques:

- la première coïncide avec celle trouvée dans le cas linéaire,
- la seconde présente une fréquence double par rapport à la première. Le coefficient de cette dernière augmente lorsque le rapport h/L diminue, ce qui revient à dire que ϕ_2 se fait de plus en plus importante au fur et à mesure que la profondeur h diminue (vers la plage par exemple).

b- Profil de l'onde :

$$\eta = -\frac{H}{2} \sin(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2}\right)^2 k \frac{ch[kh(2 + ch(2kh))]}{4sh^3(kh)} \sin 2((kx - \omega t)) \quad (3.76)$$

$$L = \frac{\eta_{crete} - \eta_{creux}}{2} = \left(\frac{H}{2}\right)^2 k \frac{ch[kh(2 + ch(2kh))]}{4sh^3(kh)} \quad (3.77)$$

Remarque:

- la relation de dispersion demeure inchangée, la vitesse de phase également,
- les considérations faites pour la fonction potentiel valent également pour le profil de l'onde: plus la profondeur h diminue plus l'influence de la deuxième composante augmente.

c- Expression de la vitesse :

$$\begin{aligned}
 u &= - \left[\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{ch[k(y+h)]}{ch(kh)} \sin(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{gk^2}{\omega} \frac{3ch[k(y+h)]}{4sh^3(kd)ch(kh)} \sin(2(kx - \omega t)) \right] \\
 v &= \left[\frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{sh[k(y+h)]}{ch(kh)} \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{gk^2}{\omega} \frac{3ch[2k(y+h)]}{4sh^3(kh)ch(kh)} \cos(2(kx - \omega t)) \right]
 \end{aligned} \quad (3.78)$$

L'effet des composantes u_2 et v_2 augmente rapidement quand d/L diminue.

d-Trajectoire des particules :

$$\begin{cases} u(x,y,t) = \frac{dX}{dt} \\ v(x,y,t) = \frac{dY}{dt} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} X(x,y,t) = \int_0^t u(x,y,\tau) d\tau \\ Y(x,y,t) = \int_0^t v(x,y,\tau) d\tau \end{cases}$$

Expression globale:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{H}{2} \frac{ch[k(y+h)]}{sh(kh)} \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2} \right)^2 k \left[\frac{1}{4sh^3(2kh)} - \frac{3ch[k(y+h)]}{8sh^4(kh)} \right] \\
 &\cos(2(kx - \omega t)) + \left(\frac{H}{2} \right)^2 k \frac{ch[2k(y+h)]}{8sh^4(kh)} \frac{gT^2}{2\pi} th \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)
 \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$Y = \left[\frac{H}{2} \frac{sh[k(y+h)]}{sh(kh)} \sin(kx - \omega t) + \left(\frac{H}{2} \right)^2 k \frac{3ch[k(y+h)]}{8sh^3(kh)} \sin(2(kx - \omega t)) \right] \quad (3.80)$$

$$\text{soit:} \quad \begin{aligned}
 X(x,y,t) &= M(Y) \cos(kx - \omega t) + N(Y) \cos(2(kx - \omega t)) + C(Y) \\
 Y(x,y,t) &= D(Y) \sin(kx - \omega t) + E(Y) \sin(2(kx - \omega t))
 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Remarque:

- la composante horizontale $X(x,y,t)$ présente un terme non harmonique $C(y)$. Les trajectoires ne sont donc plus fermées, il y a transport de masse dû au mouvement ondulatoire,
- la composante non harmonique $C(y)$ induit un déplacement horizontal à chaque période T :

$$\Delta X = \left(\frac{Y}{2}\right)^2 K^2 \frac{ch[2k(y+h)]}{2sh^2(kh)} C_\phi T \quad (3.82)$$

où C_ϕ est la vitesse de phase.

ce déplacement horizontal correspondant à une vitesse de transport de masse dont la valeur moyenne, sur une période T, est égale à:

$$\bar{U} = \frac{\Delta X}{T} = \left(\frac{Y}{2}\right)^2 k^2 \frac{ch[2k(y+h)]}{2sh^2(kh)} C_\phi \quad (3.83)$$

- la linéarisation proposée par Airy occultait le transport de masse: les trajectoires obtenues étaient fermées, ce qui n'est plus le cas ici.

3.5.4 Houle de Stokes du troisième ordre :

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 \quad (3.84)$$

Les termes ϕ_1 et ϕ_2 sont ceux calculés dans les paragraphes précédents (premier et deuxième ordre). En ce qui concerne ϕ_3 :

Equation de continuité	$\nabla^2 \phi_3 = 0$
Condition de non pénétration au fond	$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right)_{y=-d} = 0$
Condition dynamique en $y = 0$	$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial t} + g\eta_3\right)_{y=0} = C_3$
Relation en $y = 0$	$\left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right)_{y=0} = C_3^*$

Les variables C_3 et C_3^* sont connues puisqu'elles ne dépendent que des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 déjà calculées:

$$\left(\frac{\partial \phi_3}{\partial t} + g \eta_3 \right)_{y=0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.85)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_3}{\partial y} \right)_{y=0} = \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) + g \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right) \right]_{y=0} \quad (3.86)$$

a- Expression du potentiel :

$$\phi(x,y,t) = \phi_2 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \frac{gk^2}{\omega} \frac{[11 - 2ch(2kh)ch[k(y+h)]]}{6dh(kh)sh^6(kh)} \cos(3(kx - \omega t)) \quad (3.87)$$

Avec ϕ_2 est la solution complète obtenue dans l'approximation au deuxième ordre.

Il apparaît un terme harmonique de fréquence triple.

b- Profil de l'onde :

$$\eta(x,y,t) = \eta_2 - \left(\frac{H}{2} \right)^3 k^2 \frac{24ch^6(kh) + 3}{64sh^6(kh)} \sin(3(kx - \omega t)) \quad (3.88)$$

Avec η_2 est le profil d'onde obtenu à l'approximation du deuxième ordre.

Remarque:

- le profil de l'onde s'écarte encore un peu plus d'une sinusoïde (terme de fréquence triple),

- la relation de dispersion devient:

$$\omega^2 = gkth(kh) \left[1 + \left(k \frac{H}{2} \right)^2 \frac{8 + ch(4kh)}{8sh^4(kh)} \right] \quad (3.89)$$

d'où la vitesse de phase:

$$C_\phi = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} th(kh) \left[1 + \left(k \frac{H}{2} \right)^2 \frac{8 + ch(4kh)}{8sh^4(kh)} \right] \quad (3.90)$$

c- Expression de la vitesse :

$$\begin{aligned} u &= u_2 - \left(\frac{H}{2} \right)^3 \frac{gk^3}{\omega} \frac{33 - 6ch(2kh)ch[3k(y+h)]}{64ch(kh)sh^6(kh)} \sin(3(kx - \omega t)) \\ v &= v_2 + \left(\frac{H}{2} \right)^3 \frac{gk^3}{\omega} \frac{33 - 6ch(2kh)sh[3k(y+h)]}{64ch(kh)sh^6(kh)} \cos(3(kx - \omega t)) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Avec u_2 et v_2 les vitesses complètes obtenues au deuxième ordre d'approximation.

d- Trajectoires des particules :

$$\Delta X = \left(\frac{H}{2} \right)^2 K^2 \frac{ch[2k(y+h)]}{2sh^2(kh)} C_\phi T \quad (3.92)$$

$$\bar{U} = \frac{\Delta X}{T} = \left(\frac{H}{2} \right)^2 k^2 \frac{ch[2k(y+h)]}{2sh^2(kh)} C_\phi \quad (3.93)$$

Les expressions sont apparemment les mêmes qu'au deuxième ordre d'approximation. Mais, en réalité, la célérité ayant changé, ainsi que la longueur d'onde L (en revanche la période T est constante), le déplacement horizontal et la vitesse de transport de masse changent également.

3.5.5 Houle de Stokes du quatrième ordre :

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 + \varepsilon^4\phi_4 \quad (3.94)$$

Equation de continuité	$\nabla^2\phi_4 = 0$
Condition de non pénétration au fond	$\left(\frac{\partial\phi_4}{\partial y}\right)_{y=-d} = 0$
Condition dynamique en $y = 0$	$\left(\frac{\partial\phi_4}{\partial t} + g\eta_4\right)_{y=0} = C_4$
Relation en $y = 0$	$\left(\frac{\partial^2\phi_4}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi_4}{\partial y}\right)_{y=0} = C_4^*$

La méthode des perturbations au quatrième ordre d'approximation donne:

$$\left(\frac{\partial\phi_4}{\partial t} + g\eta_4\right)_{y=0} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\right]_{y=0} \quad (3.95)$$

$$C_4^* = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_3}{\partial y}\right] + g\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right) \right]_{y=0} \quad (3.96)$$

Au fur et à mesure que l'on se rapproche de la rive, on passe du domaine de validité de la solution de Airy à celui de la solution de Stokes 2, Stokes 3, ... A très petite profondeur, commencent à se manifester d'autres types d'ondes (ondes cnoidales...) qui ne sont pas décrites par la théorie de Stokes au quatrième ou cinquième ordre. En effet, au delà du quatrième ordre d'approximation, la théorie de Stokes perd son sens physique: intervient le déferlement.

FORMULATION DU MODELE AUX VOLUMES FINIS POUR UNE HOULE NON LINEAIRE AVEC FOND VARIABLE

INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de développer les différentes étapes pour la formulation d'un modèle bidimensionnelle aux volumes finis pour une houle non linéaire avec fond variable. L'écoulement à surface libre est considéré comme un écoulement diphasique (air /eau) ou Les équations peuvent être reformulées sous une forme « 1-fluide », dans laquelle intervient un fluide équivalent, aux caractéristiques variables. Le suivi d'interface entre les deux phases l'air et l'eau est assuré par une méthode de type **Volume Of Fluide (VOF)**. Nous présentons ensuite l'algorithme général du calcul numérique.

4.1 LE PROBLEME A RESOUDRE :

L'étude porte sur le mouvement plan d'une houle se propageant à partir d'une zone où le fluide a été soumis à une certaine perturbation. Sous l'hypothèse d'un écoulement non visqueux d'un fluide newtonien incompressible, les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement de Navier Stokes se réduisent à un problème d'Euler où le terme diffusif disparaît. Et le système se réduit à des équations de convection pure présentées comme suit :

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho U}{\partial t}}_I + \underbrace{\nabla \cdot (\rho U \otimes U)}_{II} = \underbrace{-\nabla p - \rho g}_{III} \quad (4.2)$$

I représente le terme de la variation temporelle au sein du volume de contrôle.

II représente le terme de convection à travers les faces du volume de contrôle.

III représente le terme de génération ou destruction au sein du volume de contrôle.

4.2 PRINCIPE DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS :

L'étude du comportement des écoulements à surface libre à fait l'objet de plusieurs travaux. Différentes méthodes numériques ont été utilisées pour la résolution des équations différentielles partielles qui régissent ce type d'écoulement. (La méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis...etc). Ces méthodes tendent tous à linéariser les systèmes d'équations.

La méthode des volumes finis est l'approche par excellence utilisée en mécanique des fluides numérique. Elle repose sur le principe qu'en face d'un problème complexe impossible ou très difficile à résoudre, la méthode la plus efficace est de le subdiviser en plusieurs petits problèmes beaucoup plus facile à résoudre.

L'approche consiste donc à intégrer, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Ensuite vient le principe de base de la méthode qui n'est autre que le théorème de la divergence qui consiste à changer une intégrale de volume en intégrale de surface. L'application de ce théorème tout en utilisant des schémas de différences finies pour les dérivées partielles, donne naissance à des équations algébriques qu'on pourra ensuite résoudre via des méthodes directes ou indirecte.

Le problème ainsi posé revient à trouver les solutions de n équations sur des éléments V_n du domaine. La solution générale U sur le domaine global est liée à la résolution des U_n locaux. Les U_n admettent une solution unique permettant la convergence du calcul vers la solution U . Cette convergence dépend directement de la manière de construire les sous-espaces V_n de résolution.

La résolution du système d'équation différentiel par volume finis passe par les étapes suivantes :

- Maillage du domaine physique de calcul (distribution des volumes de contrôle).
- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré.
- Choix d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations obtenues après discrétisation.

4.3 Maillage :

Le maillage est la pièce maitresse en terme de gain de temps de calcul. Il consiste à discrétiser le domaine d'étude en un ensemble de mailles (ou cellules) dans lesquelles les équations du problème seront résolues. Le pas d'espace est ici défini comme la taille caractéristique d'une maille. Aussi, faut-il veiller à ce que deux mailles adjacentes n'aient pas de dimensions trop différentes sans qu'il y ait recouvrement d'une maille sur l'autre. Le maillage doit être réalisé de sorte à minimiser la diffusion de l'erreur numérique. Différents type de cellules existent : tétraèdre, hexaèdre, pentaèdre,...la façon dont les cellules sont assemblées donne lieu à des maillages conformes ou non conforme, structurés ou non, orthogonaux ou non.

L'étape de création du maillage est cruciale pour assurer la cohérence des résultats et prendre en compte les considérations physiques du cas à étudier, numériques du code utilisé (convergence) et pratiques du contexte de l'étude effectuée (délais, puissance des ordinateurs, volume de données à traiter). En plus la notion de raffinement de maillage est liée a la taille du pas d'espace aux endroits a fort gradients : il faut mailler petit dans une zone de fort gradient.

Pour la méthode de volume finis, le volume de contrôle est montré par la figure (4.1). Pour un nœud principal P, les points E et W (E = Est, W = Ouest) sont des voisins dans la direction X, tandis que N et S (N = Nord, S = Sud) sont ceux dans la direction Y. Le volume de contrôle entourant P est montré par la ligne discontinue. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points e et w dans la direction X, n et s dans la direction Y.

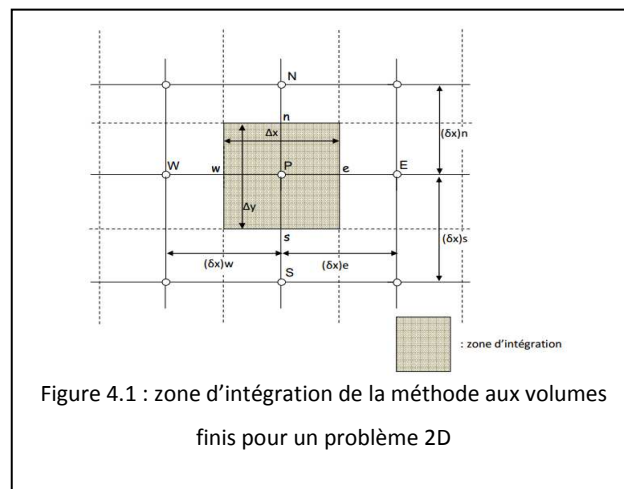
Les frontières du domaine coïncident avec les faces des volumes de contrôles, ce qui facilite d'incorporer les conditions aux limites. Chaque nœud du maillage est repéré par deux indices I et J , donnant sa position suivant les directions x et z . Le nombre total des nœuds est NI et NJ , tel que :

Figure

NI Nombre total suivant x .

NJ Nombre total suivant y .

Il faut bien distinguer les indices en majuscules qui désignent les gradeurs attachées aux points situés au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes. Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés : East (E), West (W), North (N) et South (S) pour les écoulements bidimensionnels.



Les faces du volume de contrôle seront dénommées de la même façon. Dans le but d'assurer une expression correcte du bilan de conservation d'une entité physique quelconque. Cette méthode utilise un maillage décalé (staggered grid) (figure 4.3) en fonction de la nature même de l'entité considérée. La pression et la température sont calculées en considérant un volume de contrôle centré autour du point P, donc entre les faces e,w,s et n (en bidimensionnel). Les vitesses seront estimées dans un volume centré sur la face et entre deux plans passant par les nœuds P et E et limité par les faces sud et nord.

Les équations précédentes sont réécrites dans le repère (O,x,y) rapporté au maillage. Le système d'équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Suivant x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

Suivant y :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \quad (4.5)$$

4.4 Discrétisation des équations différentielles

La méthode des volumes finis est équivalente à un bilan de flux entre instant t et $t + \delta t$ sur le volume de contrôle V . On assure alors la conservation sur chaque volume élémentaire et donc sur le domaine tout entier.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left(\frac{\partial \rho U}{\partial t} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \nabla \rho(uu) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \nabla \rho(uv) dV dt = \\ - \int_t^{t+\Delta t} \int_V \nabla p dV dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_V \rho g dV dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'écriture de cette équation sous forme divergente permet l'utilisation du théorème de Gauss, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left(\frac{\partial \rho U}{\partial t} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} \rho(uu).n_x dS dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} \rho(uv).n_y dS dt = \\ - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} p.n_i dS dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_V \rho g dV dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ou :

n Correspond au temps (t)

$n + 1$ Correspond au temps ($t + 1$)

On évaluant chaque terme séparément, nous obtenons :

4.4.1 Approximation du terme de la variation temporelle :

L'approximation la plus répandue consiste à considérer sur un volume de contrôle et pour un temps donné, une propriété comme étant constante. Cette propriété est imaginée au centre de gravité qui est couramment noté par l'indice P.

L'intégration de la vitesse par rapport au temps peut être représentée à travers une procédure numérique qui permet l'obtention du champ de vitesse à la fin de chaque pas de temps. Quoique l'intégrale de la dérivée temporelle est directe, on introduit une approximation numérique qui mène au même résultat. Ceci en vue de mieux voir l'intégration des termes spatiales selon une approximation **d'Euler implicite**. Alors on a :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \left(\frac{\partial \rho U}{\partial t} \right) dV dt = [(\rho U)_P^{n+1} - (\rho U)_P^n] \Delta X \Delta Y \quad (4.8)$$

4.4.2 Approximation du flux convectif :

- Approximation du terme convectif suivant X :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} \rho (uu)_x n_x dS dt = \rho (u_e u_e - u_w u_w) \Delta Y \Delta t = (F_e u_e - F_w u_w) \Delta t = (J_e - J_w) \Delta t \quad (4.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} F_e = \rho u_e \Delta Y \\ F_w = \rho u_w \Delta Y \end{cases} \quad (4.10)$$

- Approximation du terme convectif suivant Y :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial V} \rho (uv)_y n_y dS dt = \rho (u_n v_n - u_s v_s) \Delta X \Delta t = (F_n v_n - F_s v_s) \Delta t = (J_n - J_s) \Delta t \quad (4.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} F_n = \rho u_n \Delta X \\ F_s = \rho u_s \Delta X \end{cases} \quad (4.12)$$

Ou :

F_i Avec $i = e, w, n, s$ est le débit massique à travers les faces du volume de contrôle.

4.4.3 Approximation du terme source :

a- L'approximation de La pression :

- L'approximation de La pression suivant x :

$$\int_i^{i+\Delta t} \int_{\partial V} p.n_x dS dt = (p_e - p_w) \Delta Y \Delta t \quad (4.13)$$

- L'approximation de La pression suivant y :

$$\int_i^{i+\Delta t} \int_{\partial V} p.n_y dS dt = (p_n - p_s) \Delta X \Delta t . \quad (4.14)$$

L'approximation des pressions aux interfaces est réécrite par une interpolation linéaire des valeurs de pression aux centres des volumes de contrôle :

$$p_e = \gamma_{e1} p_E + \gamma_{e2} p_P$$

Avec γ_{e1}, γ_{e2} les facteurs d'interpolation.

Pour un volume de contrôle uniforme :

- L'approximation de La pression suivant X :

$$(p_e - p_w) \Delta Y \Delta t = (p_E - p_W) \frac{\Delta Y}{2} \Delta t \quad (4.15)$$

- L'approximation de La pression suivant Y :

$$(p_n - p_s) \Delta X \Delta t = (p_N - p_S) \frac{\Delta X}{2} \Delta t \quad (4.16)$$

b-L'approximation du terme ρg

Ce terme est évalué par un schéma centré

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w \rho g dx dy dt = (\rho g)_p \Delta X \Delta Y = b_g \quad (4.17)$$

4.4.4 Discrétisation de l'équation de continuité :

$$\int_V \nabla U dV = \oint_{\partial V} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS = F_e + F_n - F_w - F_s = 0 \quad (4.18)$$

Et par interpolation linéaire on obtient :

$$(u_E - u_W) \Delta y + (v_N - v_S) \Delta x = 0 \quad (4.19)$$

4.4.5 Discrétisation des conditions aux limites :

Les équations de discrétisation des conditions aux limites seront exprimées comme suit:

Dans le cas général
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Sa discrétisation est
$$\frac{U(NI, J) - U(NI - 1, J)}{\delta x(NI - 1)} = 0 \quad (4.20)$$

Selon Y : la condition du type Newman, d'une manière générale :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

La discrétisation de cette condition à la frontière supérieure est :

$$\frac{U(I, NJ) - U(I, NJ - 1)}{\delta y(NJ - 1)} = 0 \quad (4.21)$$

En réduisant les termes semblables, l'équation (4.6) s'écrit :

$$\begin{aligned} & [(\rho U)_p^{n+1} - (\rho U)_p^n] \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = \\ & - (p_e - p_w) \Delta Y + (p_n - p_s) \Delta X - (\rho g)_p \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ou autrement on écrit :

$$\begin{aligned} & [(\rho U)_p^{n+1} - (\rho U)_p^n] \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} + \sum_{m=1}^{N_c} J_m^{n+k} = \\ & - (p_e - p_w) \Delta Y + (p_n - p_s) \Delta X - (\rho g)_p \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ou l'indice k est employé pour indiquer le type de discrétisation temporelle.

4.5. Schémas de Discrétisation :

Les schémas de discrétisation sont des méthodes de calcul adoptées pour évaluer les grandeurs à calculer aux différents points du domaine d'étude. Ils sont choisis, d'après les problèmes traités, suivant la concordance des résultats qu'ils donnent avec les résultats physiques et la stabilité numérique.

4.5.1 Schémas de discrétisation temporelle :

Parmi les schémas de discrétisation les plus courants on retrouve :

- **Schéma explicite pour $k = 0$:**

Pour un schéma explicite, les variables à un nouveau pas de temps sont évaluées à chaque point du maillage par des calculs directs à partir des valeurs déjà connues. L'inconvénient principal des schémas explicites, se situe dans la restriction du pas de temps qui est imposée par la condition de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), équation (4.24) qui assure la stabilité de ces schémas.

L'avantage de la méthode explicite est la simplicité de sa mise en œuvre. Pour tous les schémas numériques de nature explicite, se pose le problème du choix du pas de temps à utiliser pour la résolution. De ce choix dépend la stabilité du schéma numérique considéré. Pour les problèmes non linéaires, à chaque pas de temps, on a plusieurs vitesses de propagation. Pour qu'un schéma explicite soit stable, il faut que l'onde la plus rapide ne parcoure pas plus que la longueur d'une cellule Δx pendant le temps Δt . En appelant U_{\max}^n la vitesse de l'onde la plus rapide dans le domaine de calcul au pas de temps n , on définit le nombre de Courant maximum :

$$C_{cfl} = \frac{\Delta t U_{\max}^n}{\Delta x} \quad (4.24)$$

Où où Δt est tel que $0 < C_{cfl} \leq 1$. On appelle souvent C_{cfl} le coefficient CFL (Courant-Friedrich-Lévy) ou nombre de Courant.

- **Schéma implicite pour $k = 1$:**

Pour les méthodes implicites, les variables sont calculées simultanément à un nouveau pas de temps, par la résolution d'un système avec autant d'inconnues que de nœuds du maillage. La stabilité de ces schémas n'est pas conditionnée par la condition CFL, mais par la nature de la solution.

Le caractère implicite d'un schéma numérique est lié au fait que l'on ne puisse pas exprimer explicitement chaque valeur inconnue en fonction uniquement de valeurs connues. Chaque équation à résoudre contient au moins deux valeurs inconnues d'une fonction au pas de temps de calcul $(n+1)\Delta t$.

4.5.2 Schéma de Discrétisation Spatiale :

Plusieurs schémas ont été proposés par **Patankar[1]**. leurs différences reposent essentiellement dans la manière choisie pour estimer le flux de convection qui joue un rôle crucial en ce qui concerne la stabilité d'un schéma numérique.

Patankar[1] a proposé la fonction

$$A(P_e) = 1 - 0,5|P_e| \quad (4.25)$$

Avec :

P_e Le nombre de Peclet, qui est le rapport entre le flux diffusif et le flux convectif.

- **Schéma des Différences Centrées:**

Le schéma des différences centrées (**Centrale Difference Scheme**) **CDS** est basé sur une interpolation linéaire servant à déterminer la valeur de la variable dépendante U aux interfaces du volume de contrôle.

La fonction $A(|P|)$ est donnée par

$$A(|P|) = 1 - 0,5|P| \quad (4.26)$$

Les coefficients de l'équation discrétisée seront:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e(1 - 0,5|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w(1 - 0,5|P_w|) + \max(-F_w, 0) \\ a_N &= D_n(1 - 0,5|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s(1 - 0,5|P_s|) + \max(-F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Ce schéma est stable pour $|P_e| \leq 2$ et donne des coefficients de discrétisation (a_E, a_W, a_N, a_S) positifs.

- **Schéma Upwind (Upwind Differencing Scheme) (UDS) :**

La fonction $A(|P|)$ est donnée par

$$A(|P|) = 1 \quad (4.28)$$

Où les expressions suivantes des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Ce schéma est conditionnellement stable. Il est souvent utilisé lorsque la convection est dominante suivant le sens de l'écoulement.

- **Schéma Hybride :**

La fonction $A(|P|)$ est donnée par

$$A(|P|) = \max(0, 1 - 0,5|P|) \quad (4.30)$$

D'où les expressions suivantes des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \\ a_W &= \max\left(F_w, D_w - \frac{F_w}{2}, 0\right) \\ a_N &= \max\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right) \\ a_S &= \max\left(F_s, D_s - \frac{F_s}{2}, 0\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Ce schéma est la combinaison des deux schémas précédents rassemblant ainsi leurs caractéristiques. En appliquant ce schéma on aura un compromis entre stabilité et précision de la méthode numérique.

- **Schéma Exponentiel :**

La fonction $A(|P|)$ est donnée par

$$A(|P|) = \frac{|P|}{e^{|P|} - 1} \quad (4.32)$$

Les coefficients de l'équation générale de transport sont exprimés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} & a_W &= \frac{F_w}{\exp\left(\frac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ a_N &= \frac{F_n}{\exp\left(\frac{F_n}{D_n}\right) - 1} & a_S &= \frac{F_s}{\exp\left(\frac{F_s}{D_s}\right) - 1} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Ce schéma est plus précis et moins utilisé en pratique car le calcul des exponentielles est coûteux en temps de machine.

- **Schéma de la Loi de Puissance "Power Low":**

La fonction $A(|P|)$ est donnée par

$$A(|P|) = \max\left[0, (1 - 0,1|P|)^5\right] \quad (4.34)$$

Les coefficients de l'équation générale discrétisée s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e \max\left[0, (1 - 0,1|P_e|^5)\right] + \max(-F_e, 0) \\ a_W &= D_w \max\left[0, (1 - 0,1|P_w|^5)\right] + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n \max\left[0, (1 - 0,1|P_n|^5)\right] + \max(-F_n, 0) \\ a_S &= D_s \max\left[0, (1 - 0,1|P_s|^5)\right] + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

4.5.3 Discrétisation Spatiale du flux convectif :

La discrétisation spatiale du flux convectif est faite par un schéma Upwind

$$F_c u_c \approx F_c u_c^{UDS} \quad (4.36)$$

Avec :

$$F_e u_e^{UDS} = \max([F_e, 0]u_p - [-F_e, 0]u_E) = \begin{cases} F_e u_P & \text{pour } F_e > 0 \\ F_e u_E & \text{pour } F_e < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

$$F_w u_w^{UDS} = \max([F_w, 0]u_p - [-F_w, 0]u_W) = \begin{cases} F_w u_P & \text{pour } F_w > 0 \\ F_w u_W & \text{pour } F_w < 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

$$F_n u_n^{UDS} = \max([F_n, 0]u_p - [-F_n, 0]u_N) = \begin{cases} F_n u_P & \text{pour } F_n > 0 \\ F_n u_N & \text{pour } F_n < 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

$$F_s u_s^{UDS} = \max([F_s, 0]u_p - [-F_s, 0]u_S) = \begin{cases} F_s u_P & \text{pour } F_s > 0 \\ F_s u_S & \text{pour } F_s < 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

4.6 Equation algébrique :

La discrétisation de L'équation de quantité de mouvement dans chaque volume de contrôle est donnée par :

$$a_p^u u_p = \sum_C a_C^u u_C + b^u - (p_E - p_W) \frac{\Delta Y}{2} \quad (4.41)$$

$$a_p^v v_p = \sum_C a_C^v v_C + b^v - (p_N - p_S) \frac{\Delta X}{2} \quad (4.42)$$

Avec :

$$C = E, W, N, S$$

Les coefficients s'écrivent comme suit:

$$\left. \begin{aligned} a_E &= \max(-F_e, 0) \\ a_W &= \max(F_w, 0) \\ a_N &= \max(-F_n, 0) \\ a_S &= \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\}$$

$$a_p^u = a_E^u + a_W^u + a_N^u + a_S^u + a_t^u + F_e - F_w + F_n - F_s \quad \text{et} \quad b^u = b_g + b_t^u$$

$$a_p^v = a_E^v + a_W^v + a_N^v + a_S^v + a_t^v + F_e - F_w + F_n - F_s \quad \text{et} \quad b^v = b_t^v$$

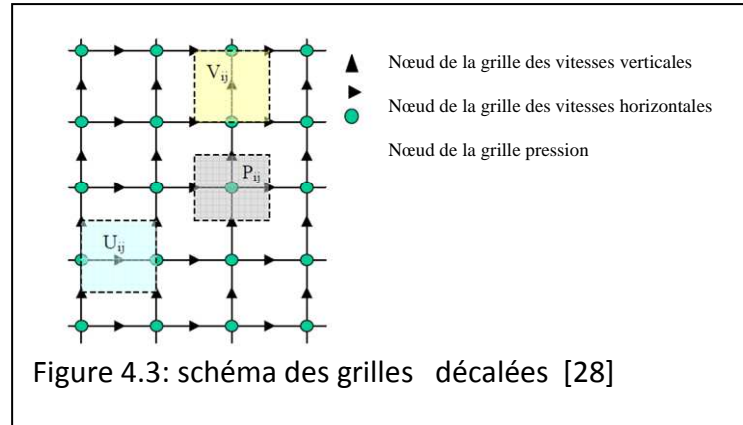
4.7 Résolution des équations algébriques :

4.7.1 COUPLAGE VITESSE PRESSION :

La présence de la pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement sous forme de gradient rend la résolution de celles-ci plus compliquée, pour la principale raison que cette pression est inconnue et constitue l'une des variables du problème. Pour la déterminer, il faut tout d'abord trouver une équation pour la décrire. Cette équation sera constituée à partir de l'équation de la conservation de la masse. Mais, avant de passer à ce point, faisons les deux remarques suivantes:

- La discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître un problème lié à la pression. En effet, lors de cette discrétisation en un nœud P, par exemple, seules les pressions aux nœuds voisins apparaîtront dans l'équation finale. En passant à un nœud voisin (E par exemple) nous verrons apparaître la pression au nœud initial P et au nœud situé à l'est du nœud E. Nous constatons ainsi que les équations discrétisées utilisent deux champs de pression complètement indépendants. Ce qui est inadmissible et conduit, si nous n'y remédions pas, à des résultats complètement fantaisistes.
- Le même problème apparaît aussi lors de la discrétisation de l'équation de Continuité. Nous voyons apparaître deux champs de vitesses sans relation l'un avec l'autre et sans aucun fondement physique.

Pour éviter ces deux inconvénients, Nous décalons le maillage de la pression par rapport à celui des vitesses. Nous allons alors localiser la pression au centre de l'élément de volume et les vitesses sur les faces de celui-ci comme indiqué sur la figure ci dessus.



Revenons maintenant à la constitution d'une équation pour la pression ou plus exactement pour une correction de la pression P' définie par:

$$P = P^* + P' \quad (4.43)$$

Où P est la pression exacte et P^* une estimation de départ qu'il faut corriger en déterminant P' . Le problème est ramené à la détermination de P' au lieu de P . L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée s'écrit pour les deux composantes de vitesses :

$$a_p^u u_p = \sum_c a_c^u u_c + b^u - (p_E - p_W) \frac{\Delta Y}{2} \quad (4.44)$$

$$a_p^v v_p = \sum_c a_c^v v_c + b^v - (p_N - p_S) \frac{\Delta X}{2} \quad (4.45)$$

$$(u_E - u_W) \Delta y + (v_N - v_S) \Delta x = 0 \quad (4.46)$$

Nous allons donc travailler par itérations successives. Nous supposons pour démarrer que la pression est connue (estimation P^*) et nous calculons le champ des vitesses. Or, les vitesses calculées avec une estimation de la pression ne satisfont pas, en général,

L'équation de continuité qui doit être respectée à tout moment. Nous allons alors les corriger en utilisant, comme pour la pression ci-dessus, une correction telle que :

$$u = u^* + u' \quad (4.47)$$

$$v = v^* + v' \quad (4.48)$$

Où v^* et u^* sont les vitesses calculées avec P^* . u' et v' étant les corrections de ces vitesses à déterminer pour retrouver les vitesses exactes u et v de l'itération en cours. L'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée s'écrit pour les deux composantes de vitesses v^* et u^* s'écrivent :

$$a_p^u u_p^* - \sum_c a_c^u u_c^* = b^u + \frac{\Delta y}{2} (p_E^* - p_W^*) \quad (4.49)$$

$$a_p^v v_p^* - \sum_c a_c^v v_c^* = b^v - \frac{\Delta x}{2} (p_N^* - p_S^*) \quad (4.50)$$

A cette étape les deux composantes de vitesses v^* et u^* ne vérifient pas l'équation de continuité qui s'écrit :

$$(u_E^* - u_W^*) \Delta y + (v_N^* - v_S^*) \Delta x = -b_m \quad (4.51)$$

Si on soustrait l'équation (4.49), (4.50) et (4.51) de (4.44), (4.45) et (4.46) on obtient :

$$a_p^u u_p' - \sum_c a_c^u u_c' = -\frac{\Delta y}{2} (p_E' - p_W') \quad (4.52)$$

$$a_p^v v_p' - \sum_c a_c^v v_c' = -\frac{\Delta x}{2} (p_N' - p_S') \quad (4.53)$$

$$(u_E' - u_W') \Delta y + (v_N' - v_S') \Delta x = b_m \quad (4.54)$$

Le terme $\sum_c a_c^u u_c'$ et $\sum_c a_c^v v_c'$ sont négligés pour des raisons numériques.

Ces équations s'écrivent

$$u'_p = -\frac{\Delta y}{2a_c^u}(p'_E - p'_W) \quad (4.55)$$

$$v'_p = -\frac{\Delta x}{2a_c^v}(p'_N - p'_S) \quad (4.56)$$

Pour déterminer la correction de pression P' nécessaire pour le calcul des corrections des vitesses, nous utilisons l'équation de continuité discrétisée suivante (élément de volume scalaire). En insérant (4.55) et (4.56) dans l'équation de continuité :

$$\left(-\frac{\Delta y}{2a_{P,E}^u}(p'_E - p'_p) + -\frac{\Delta y}{2a_{P,W}^u}(p'_P - p'_W) \right) \Delta y + \left(-\frac{\Delta x}{2a_{P,N}^v}(p'_N - p'_p) + -\frac{\Delta x}{2a_{P,S}^v}(p'_P - p'_S) \right) \Delta x = b_m \quad (4.57)$$

Où $a_{P,E}^{u,k}$ indique le coefficient central dans les grilles des vitesses horizontales pour un volume de contrôle autour du point E. avec un arrangement convenable l'équation pour la correction de pression p' résulte de l'équation (4.57)

$$a_P^p p'_P = a_E^p p'_E + a_W^p p'_W + a_N^p p'_N + a_S^p p'_S + b_m \quad (4.58)$$

Avec ;

$$a_E^p = \frac{\Delta y^2}{2a_{P,E}^u}, \quad a_W^p = \frac{\Delta y^2}{2a_{P,W}^u}, \quad a_N^p = \frac{\Delta x^2}{2a_{P,N}^v}, \quad a_S^p = \frac{\Delta x^2}{2a_{P,S}^v}$$

Et

$$a_P^p = a_E^p + a_W^p + a_N^p + a_S^p$$

Cette équation permet de déterminer le champ de la correction P'. La correction des pressions et des vitesses et maintenant possible et les valeurs déduites sont considérées comme des nouvelles estimations et la procédure est recommencée jusqu'à la convergence. Cette procédure est connue dans la littérature sous le nom de SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressur Linked Equation) et est très largement utilisée.

4.7.2 La sous relaxation :

La sous- relaxation est généralement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements des valeurs d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α .

Comme nous l'avons vu précédemment, toutes les équations de transport, après avoir été discrétisées, peuvent être mises sous la forme générale suivante:

$$a_p U_p = \sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + S \quad (4.59)$$

Si nous notons U_p^* la valeur de U_p à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$U_p = U_p^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + S}{a_p} - U_p^* \right] \quad (4.60)$$

Le terme entre parenthèse dans cette relation représente le changement survenu à U_p pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α de la manière suivante :

$$U_p = U_p^* + \alpha \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} U_{nb} + S}{a_p} - U_p^* \right] \quad (4.61)$$

Il est bien évident que cette procédure de relaxation n'est valable que si la résolution finale de l'équation (à la fin des itérations) satisfait bien l'équation. C'est ici le cas dans la mesure où lorsque le processus a convergé, U_p est censée ne plus varier d'une

itération à l'autre. La relation $U_p = U_p^*$ est alors obtenue et associée à l'équation donne finalement l'équation recherchée.

Concernant la pression, la sous relaxation s'effectue d'une manière un peu différente compte tenu de l'existence de l'algorithme de couplage vitesse- pression. Elle est simplement introduite dans la correction de pression P' sous la forme suivante:

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (4.62)$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, ils sont forts, plus la sous relaxation est faible et plus il y a de chance de faire introduire des instabilités dans le processus itératif.

Il n'existe pas de règle générale pour choisir les coefficients de sous relaxation. Cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des cellules du maillage, de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative. Enfin, nous rappelons que la valeur de ces coefficients peut être différente d'une variable à une autre.

4.8 Techniques de suivi d'interface :

Les écoulements considérés dans cette étude mettent en présence deux fluides non miscibles. Il existe donc une interface de discontinuité qui sépare ces deux fluides newtoniens incompressibles. Le transport de l'interface peut être classifié en deux familles, qui sont fonction du type de maillage utilisé, méthode lagrangienne pour un maillage mobile (interface tracking), et méthode eulérienne pour un maillage fixe (interface capturing). Les méthodes sur maillages mobiles permettent de traiter l'interface comme une réelle discontinuité. Cependant l'utilisation de ces méthodes est limitée aux écoulements pour lesquels la surface libre ne se déforme pas beaucoup, ce qui est incompatible avec le cas que nous étudions. Les méthodes eulériennes, quant à elles, sont utilisées sur des maillages fixes. Une fonction de présence (autrement appelée fraction volumique) permet de localiser les fluides. L'interface est reconstruite à partir du changement des propriétés physiques. Un des inconvénients de la méthode vient du non connaissance explicite de la position de l'interface. On retrouve pour ces méthodes eulériennes deux grandes familles, les méthodes de suivi de front et les méthodes de suivi en volume, plus communément appelées méthodes VOF, qui nous intéresse ici.

4.8.1 PRINCIPE DE LA METHODE VOF :

La méthode VOF est une méthode qui a été introduite par Hirt & Coll. en 1981 qui s'utilise pour la simulation d'écoulements entre plusieurs phases non miscibles. Elle est particulièrement adaptée dans le cas d'écoulements à interfaces fortement déformées, puisqu'elle permet de suivre la position de l'interface dans un maillage fixe.

4.8.2 Cas de l'écoulement de fluide non miscibles :

On considère dans ce travail un fluide diphasique constitué de deux fluides (air/eau) non miscibles sans transfert de masse entre les deux phases. La méthode VOF employée nécessite la connaissance d'une variable "fraction de volume" d'un des fluides dans chaque volume de contrôle. Cette fonction (taux de présence), notée C , varie donc entre 0 et 1 pour la phase considérée. Si elle vaut 0 ou 1, le volume ne contient qu'un seul des deux fluides. Si sa valeur est comprise entre ces deux bornes, le volume contient un mélange diphasique, et donc l'interface y est présente. Le fait que la fraction volumique est homogène dans chaque maille fait que le fluide est représenté par un fluide équivalent.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \cdot \nabla C = 0 \quad (4.63)$$

Il découle de cette équation que la fonction C est conservée dans le mouvement.

La notion d'interface étant parfaitement définie (une ligne pour le problème 2D), l'hypothèse de non glissement entre les deux fluides à l'interface permet d'écrire la condition cinématique à l'interface :

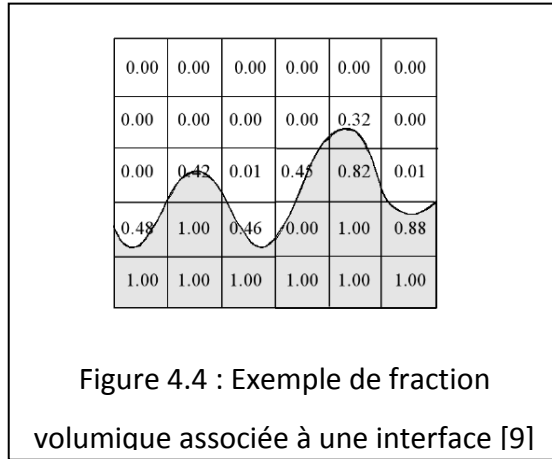
$$U_{\text{fluide1}} \cdot n = U_{\text{fluide2}} \cdot n = U_{\text{interface}} \cdot n \quad (4.64)$$

En conclusion les équations d'Euler diphasiques peuvent être reformulées sous une forme « 1-fluide », dans laquelle intervient un fluide équivalent, aux caractéristiques variables.

4.8.3 La représentation diphasique dans un modèle VOF :

Dans un modèle VOF, la fraction volumique $C(x, y, t)$ est supposée homogène dans chaque maille. Elle représente la fraction volumique de fluide 1 dans la maille. Dès lors qu'une interface traverse une maille et que cette maille contient les deux fluides, la

valeur de la fonction couleur $C(x, y, t)$ dans la maille considérée sera strictement comprise entre 0 et 1.



4.8.4 Les caractéristiques du fluide diphasique dans chaque maille :

Les caractéristiques du fluide diphasique dans chaque maille :

Connaissant la valeur de la fonction couleur C dans chaque maille, la densité du fluide équivalent est directement déduite de l'équation (4.6) pour chaque maille, à partir des masses volumiques de l'air et de l'eau, ρ_1 et ρ_2 respectivement

$$\rho(x, y, t) = \rho_1 C(x, y, t) + \rho_2 (1 - C(x, y, t)) \quad (4.65)$$

4.9 Discrétisation de la fraction volumique :

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV + \int_V U \cdot \nabla C dV = \int_V \frac{\partial C}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} U \cdot C \cdot n dS = 0 \quad (4.66)$$

En procédant de la même manière on obtient:

$$C^{n+1} = C^n + \sum_{f=1}^n F_f \quad (4.67)$$

$$\text{Selon X : } F_e = u_e + \frac{\Delta t}{\Delta x} C_e \quad F_w = u_w + \frac{\Delta t}{\Delta x} C_w \quad (4.68)$$

$$\text{Selon Y : } F_n = u_n + \frac{\Delta t}{\Delta y} C_n \quad F_s = u_s + \frac{\Delta t}{\Delta y} C_s \quad (4.69)$$

Donc :

$$C^{n+1} = C^n + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (4.70)$$

4 .10 L'ALGORITHME DE RESOLUTION DU MODELE 1- FLUIDE :

Avant de présenter les spécificités de ce modèle, rappelons comment est structuré :

- (i) au début d'un nouveau pas de temps, une première estimation des nouvelles vitesses est obtenue à partir d'une discrétisation explicite de la seconde équation d'EULER, en gardant pour la pression et les termes adjectifs les valeurs du pas de temps précédent.
- (ii) Un processus itératif ajuste les pressions et vitesses jusqu'à ce que l'équation de continuité (4.3) soit vérifiée. Celle-ci s'écrit pour un fluide incompressible.
- (iii) Finalement, on doit faire évoluer la fraction volumique C occupée par le fluide dans chaque cellule. Cette fraction volumique est calculée en utilisant les flux à travers les parois de la cellule relation (4.69)..

4.10.1 Déplacement de la surface libre :

Après avoir calculé la nouvelle vitesse, la nouvelle forme de la surface libre suit le changement de la fraction volumique dans chaque cellule.

Hirt et Nichols [19] ont introduit la notion de cellules donneuses et accepteuses (Donor–Acceptor Scheme). Si on considère deux cellules adjacentes, la cellule accepteuse est celle vers laquelle pointe la composante de vitesse u normale à la face

qui sépare les deux cellules. L'autre cellule sera dite donneuse. Ainsi, le transfert de matière aura toujours lieu de la cellule donneuse vers la cellule accepteuse. On distingue ensuite deux définitions des flux de matières, parmi toutes celles qui sont possibles.

- **Le schéma amont :**

Dans la figure 4.5-a, la section **e** à travers laquelle le fluide est échangé est déterminée à partir de la quantité de fluide C_D contenue dans la cellule donneuse. Le flux d'une cellule à l'autre vaut alors $C_D u \delta t$. Le schéma est dit **amont**.

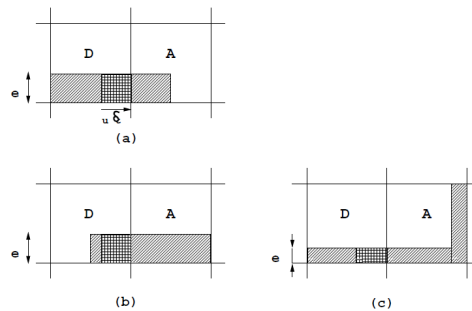


Figure 4.5 : Définitions amont (cas a) et aval (cas b et c) des flux entre une cellule donneuse D et une cellule accepteuse A. le fluide est représenté par une surface hachurée en biais. La quantité de fluide transmise de la cellule D vers la cellule A correspond à la partie quadrillée. On a supposé ici que la composante de vitesse du fluide normale à la face qui sépare les deux cellules va de la gauche vers la droite.

- **Le schéma aval :**

Dans le cas (b), c'est la fraction de fluide C contenu dans la cellule accepteuse qui sert de référence. Il s'agit d'un schéma **aval**.

Bien sûr, une cellule ne peut pas donner à sa voisine plus de fluide qu'elle ne contient, ni en accepter au-delà de la place vide dont elle dispose. Les expressions complètes des flux sont en fait plus compliquées que celle donnée en exemple pour le

Cas (a) et font intervenir des fonctions **MIN** et **MAX** pour assurer que C reste toujours entre 0 et 1. La figure (4.3-c) illustre comment ces limitations peuvent être mises en jeu.

Le schéma aval tend à raidir les interfaces (diffusion négative) tandis que le schéma amont les étale par diffusion. Puisqu'on veut garder des interfaces bien définies, le schéma aval semble plus indiqué. Cependant, si l'interface est déformée par une ondulation sinusoïdale, le schéma aval va renforcer la fluctuation jusqu'à obtention de dents de scie. L'idée finale -toujours due à **Hirt** et **Nichols** est donc d'employer le schéma aval lorsque la propagation est normale à l'interface et le schéma amont si elle lui est parallèle. L'orientation de l'interface est évaluée en examinant les fractions d'occupation dans les cellules voisines.

Donc le point crucial de la méthode est de définir les flux à travers les parois des cellules de telle manière que les interfaces restent bien définies :

On appliquant ce schéma pour une propagation dans le sens de u positif à $(i + 1/2)$ et $C_{i,j} > C_{i+1,j}$,

Le flux passant travers $(i + 1/2, jk)$ est donnée par :

$$F_{i+1/2,j} = \delta y \{ \text{MIN} [C_{i,j} \delta x, u_{i+1/2,j} C_{i+1,j} \delta t + \text{MAX} (0, u_{i+1/2,j} (1.0 - C_{i+1,j}) \delta t - (1.0 - C_{i,j}) \delta x)] \}$$

Avec :

- $C_{i,j} \delta x$ La quantité maximum de fluide disponible pouvant être évacué de la cellule (i, j)
- $u_{i+1/2,j} C_{i+1,j} \delta t$ Le flux de fluide estimé par un schéma amont.
- $u_{i+1/2,j} (1.0 - C_{i+1,j}) \delta t$ Le flux d'air estimé par un schéma amont.

- $(1.0 - C_{i,j})\delta x$ quantité maximum d'air disponible pouvant être évacué de la cellule (i, j)

Si on utilise la méthode telle que nous l'avons décrite jusqu'ici, les interfaces laissent tout de même quelques débris derrière elles. Pour limiter cela, toutes les cellules de fraction volumique C proche de 0 ou 1 à ε près (par exemple 10^{-6}) sont ramenées exactement à zéro ou à 1.

4.10.2 Détermination des interfaces dans les cellules :

Précisons que pour écrire les conditions aux limites sur la surface libre, l'interface dans chaque cellule est assimilée à un segment de droite perpendiculaire à la normale évaluée d'après l'occupation des cellules voisines. L'interface résultante est donc discontinue.

Pour déterminer la pente de ces segments de droites

$$Y_i = Y(x_i) = C(i, j-1)\delta y_{j-1} + C(i, j)\delta y_j + C(i, j+1)\delta y_{j+1} \quad (4.71)$$

Où $y=0$ est considéré au fond de la cellule $j-1$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{2(Y_{i+1} - Y_{i-1})}{(\delta x_{i+1} + 2\delta x_i + \delta x_{i-1})} \quad (4.72)$$

De la même façon on calcule $\frac{dX}{dy}$

$$X_j = X(y_j) = C(i-1, j)\delta x_{i-1} + C(i, j)\delta x_i + C(i+1, j)\delta x_{i+1} \quad (4.73)$$

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)_i = \frac{2(X_{j+1} - X_{j-1})}{(\delta y_{j+1} + 2\delta y_j + \delta y_{j-1})} \quad (4.74)$$

Si $\left|\frac{dY}{dx}\right|$ est inférieure à $\left|\frac{dX}{dy}\right|$, la surface libre est presque horizontale que verticale, si non la surface est presque verticale.

4.10.3 Evaluation de la pression à la surface libre :

L'approche VOF utilise des interpolations linéaires pour évaluer les pressions sur la surface libre. Les erreurs ainsi introduites peuvent provoquer l'apparition de fractions volumiques négatives ou supérieures à 1. Dans ce cas, on ramène simplement la valeur de F respectivement à 1 et à 0.

Dans les cellules qui contiennent la surface libre. La pression à la surface libre P_{fs} est obtenue par interpolation linéaire entre la pression P_s , et la pression P_F dans le fluide.

$$P_{fs} = (1 - \eta)P_F + \eta P_S \quad (4.75)$$

Où $\eta = \frac{h}{d}$ est le rapport des distances entre les centres des mailles aux distances entre la surface libre et le centre de la maille adjacente.

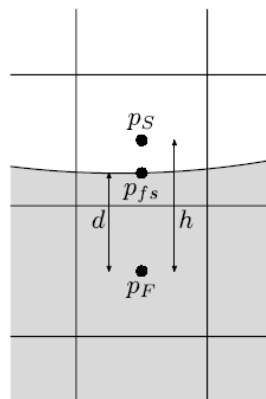


Figure 4.6 : Interpolation de la pression à la surface libre

APPLICATIONS, RESULTATS ET INTERPRETATIONS

INTRODUCTION

Dans le présent chapitre nous présenterons des applications sur des cas tests visant à valider le modèle **VOF** présenté dans le chapitre précédent.

Les applications concernent les quatre cas suivant :

- Problème de rupture d'un barrage (Dam break)
- Onde permanente dans un bassin (Standing wave)
- Propagation d'une onde solitaire (Solitary wave)
- Problème du générateur d'onde (Wave maker)

Les résultats obtenus sont commentés et comparés à des résultats publiés par certains auteurs. Tout d'abord, nous pensons qu'il est utile de présenter en grandes lignes le code de calcul ANSYS que nous avons utilisé pour résoudre le modèle en question.

5.1 PRESENTATION DU LOGICIEL ANSYS

ANSYS est un ensemble de modules destiné à résoudre une grande variété de problèmes mécaniques : analyse statique/dynamique des structures linéaires et non linéaires, transfert de chaleur, dynamique des fluides, moteurs à combustion internes, turbomachines ainsi que l'acoustique et l'électromagnétisme. Le logiciel permet aussi le couplage entre ces différents problèmes. Les différentes méthodes numériques, différences finies, volumes finis et éléments finis sont prises en charge par le logiciel.

Parmi les modules qui traitent la mécanique des fluides en volumes finis, on a le choix entre deux puissants codes de calcul qui sont : ANSYS-FLUENT et ANSYS-CFX. Nous avons choisi, involontairement, pour notre étude FLUENT ; notons que CFX fourni les mêmes capacités et performances dans les cas traités dans ce mémoire.

L'organigramme de résolution de tous les problèmes, cités précédemment, se présente comme suit :

- Conception de la géométrie représentant le domaine physique.
- Discrétisation de la géométrie en volumes élémentaires (maillage)
- Configuration du problème physique (propriétés du ou des fluide(s), modèles mathématiques, conditions initiales et aux limites, schémas numériques spatial et temporel, etc.)
- Résolution
- Affichage et traitement des résultats.

5.2 PROBLEME DE RUPTURE D'UN BARRAGE

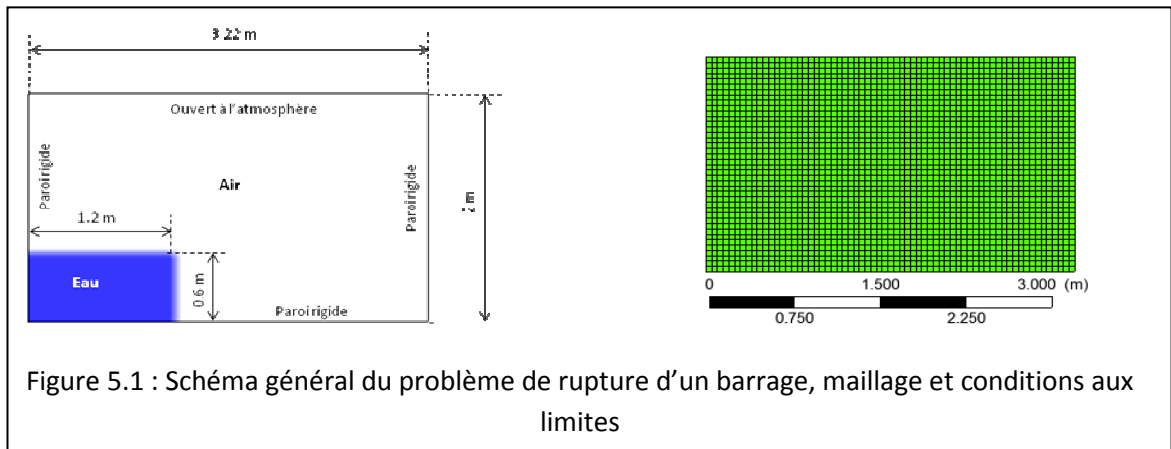
Le phénomène de rupture de barrage correspond à une destruction partielle ou totale d'un barrage. La rupture peut être :

- **progressive** dans le cas des barrages en remblais, par érosion régressive, suite à une submersion de l'ouvrage ou à une fuite à travers celui-ci (phénomène de " renard ")
- **brutale** dans le cas des barrages en béton, par renversement ou par glissement d'un ou plusieurs plots.

Une rupture de barrage entraîne la formation d'une **onde de submersion** se traduisant par une élévation brutale du niveau de l'eau à l'aval.

5.2.1 Données géométriques et maillage

Un schéma de rupture de barrage est représenté dans la figure 5.1. Dans ce modèle traité dans la référence [17], on considère un domaine géométrique sous forme d'un réservoir rectangulaire dont les dimensions sont indiquées sur la figure, et une colonne d'eau initialement stable située dans le côté gauche du réservoir. Pour mesurer l'impact de la pression sur le mur à droite, un point P (3.22m, 0.16m) est défini sur le mur.



Le domaine est discrétisé en mailles rectangulaires structurées ; ce choix est justifié par la simplicité de la géométrie. La taille d'une cellule est de 5cm×5cm.

5.2.2 Conditions aux limites

Le fond et les parois latérales du domaine sont considérés comme étant des murs imperméables (les vitesses normales aux parois sont nulles) alors que la frontière supérieure est considérée ouverte à la pression atmosphérique ($p=p_{atm}$).

5.2.3 Configuration de la résolution

- Le modèle VOF est conduit sur un écoulement diphasique (eau/air) considéré comme non visqueux (Les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations d'Euler). Il à été montré selon [17] que l'effet de la viscosité de l'eau dans ce problème est négligeable. L'effet de la compressibilité de l'air a été aussi vérifié en supposant que l'air est un gaz parfait et en assumant un processus adiabatique pour la compression de l'air.

- Le modèle est initialisé comme suit :

A $t=0$, l'eau occupe la région indiquée (en bleu) dans la figure V.1, ce qui se traduit par l'initialisation de la fraction volumique de l'eau dans cette région à 1 ; en dehors de cette région la fraction volumique de l'eau est de 0.

Toutes les autres variables sont initialisées à 0.

- Nous avons choisi un pas de temps $\Delta t = 0.001s$. Ce choix est dicté surtout par la condition de Courant-Friederichs-Lewy qui contrôle la convergence de la solution à travers un nombre adimensionnel, dit de Courant. Cette condition, en bidimensionnel, s'écrit:

$$C_{cfl} \leq u \frac{\Delta t}{\Delta x} + v \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (5.1)$$

C_{cfl} est le nombre de Courant.

u, v Représentent les vitesses horizontale et verticale successivement.

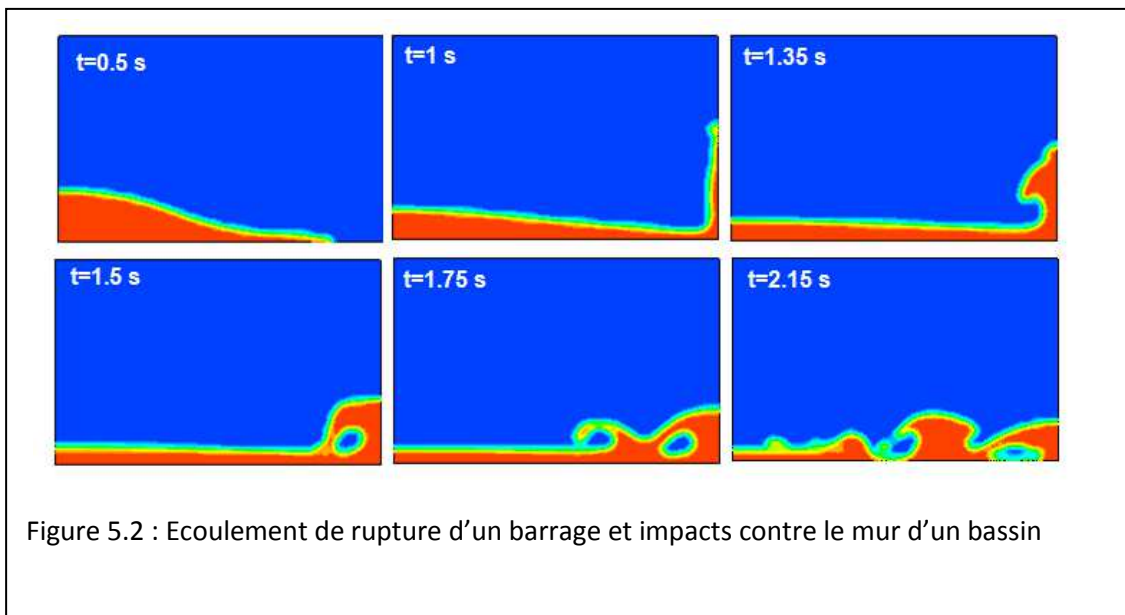
$\Delta x, \Delta y$ Représentent la taille de la cellule dans chaque direction.

5.2.4 Résultats

5.2.4.1 Profile de l'onde après rupture

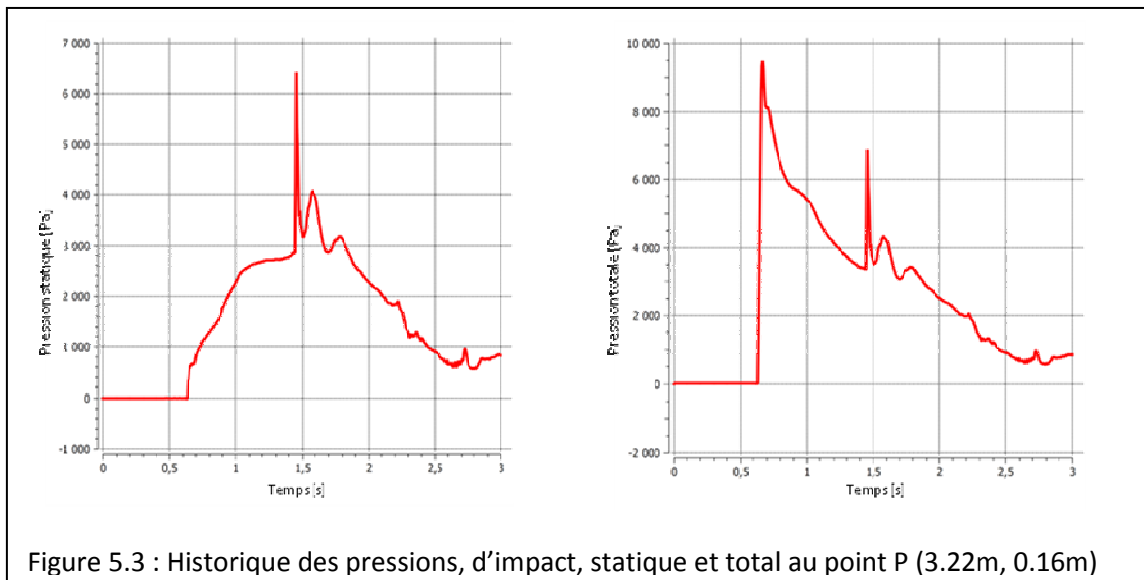
La figure 5.2 représente quelques profils instantanés de l'écoulement en différents instants. A l'instant $t=0$, le bloc d'eau est laissé s'écouler sous l'effet de la gravité seulement. Un écoulement à petite profondeur d'eau, dans la direction-x, se forme rapidement avec une vitesse relativement élevée (ex. $t=0.5s$). A mesure que le temps passe, le flux de la masse liquide frappe sur la paroi dans le côté opposée du réservoir. Un jet vers le haut est soudainement formé jusqu'à ce que la force de gravité surmonte la quantité de mouvement ascendante (autour de $t=1s$). A cet instant, le jet devient plus épais et le flux commence à s'inverser. En raison de la circulation inversée, un gradient dynamique défavorable est crée ; ce qui abouti à un renversement d'onde (autour de $t=1.35s$). Cette formation de vague continu jusqu'à ce

que le bout de l'onde se reconnecte avec l'eau, peu profonde, incidente qui a en ce moment moins d'élan vers l'avant (avant $t=1.5s$). Une hausse soudaine de la pression se produit au point de reconnexion et est de même amplitude que la pression d'impact au mur. Ceci est dû à l'existence d'une quantité de mouvement relative élevée entre le bout de l'onde et la surface libre juste avant la reconnexion. Une seconde vague renversée, mais d'amplitude plus faible, est formée en raison de cet impact et qui s'éclate de la même manière que la première vague (autour de $t=1.75s$ et $t=2.15s$). A ce stade, l'écoulement devient compliqué ; des petites et grandes poches d'air entraîné se forment en raison des impacts successifs sur la surface libre. Pour $t > 2.15s$, la dynamique globale de l'écoulement se réduit considérablement, et par conséquent l'analyse de l'écoulement au-delà de ce point n'est d'aucune importance pratique.



5.2.4.2 Pression d'impact

La figure 5.2 montre l'historique de la pression d'impact au point P. Rappelons que la mesure exacte de la pression en un point ne peut être déterminée car la sonde doit avoir une surface de mesure (dans [17] cette surface est un cercle de diamètre 90 mm autour du point P). Pour le calcul numérique dans ce cas, la pression au point (mathématique) est moyennée à travers les nœuds voisins au point P. Une bonne précision peut être donc obtenue en raffinant le maillage autour du point en question.



Notons que c'est la valeur des pics de la pression totale de l'impact qui intéresse les ingénieurs, car à la base de ces valeurs que les structures seront surdimensionnées.

Enfin, notons que les résultats obtenus dans le présent test sont en concordances très raisonnables avec ceux publiés dans la référence [17].

5.3 ONDE PERMANENTE DANS UN BASSIN (STANDING WAVE)

L'étude des ondes permanentes est requise dans plusieurs domaines. Par exemple, mais sans s'y limiter, il est important d'étudier le mouvement des liquides dans les navires lorsque ceux-ci oscillent en raison des vagues de l'océan. Si le liquide dans le navire commence à résonner, les oscillations du navire augmentent rapidement et dans le pire des cas l'appareil se renverse [14].

Une onde de faible amplitude uni-nodale dans un bassin stationnaire est un très bon exemple pour tester la conservation de masse et de l'énergie lors de la simulation numérique d'un écoulement transitoire. Comme condition initiale, nous considérerons une surface libre inclinée au repos (configuration d'énergie potentielle maximale). Un mouvement d'onde commence et au moment où la surface libre est horizontale, l'intégralité de l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. Lorsque le niveau le plus haut sur le mur opposé est atteint, le système revient de nouveau à l'état de maximum d'énergie potentielle et de minimum d'énergie cinétique. Quand il n'y a pas de pertes d'énergie et de masse (condition de glissement libre sur les vitesses à toutes les frontières, pas de cisaillement, pas de viscosité), une telle oscillation dans une expérience numérique devrait se poursuivre éternellement.

5.3.1 Données géométriques et physiques

Dans cette application, on considère un bassin carré de côté $D=10m$; le niveau d'eau à l'équilibre est de $H=10m$. La hauteur occupée par l'air en dessus du niveau d'eau est de $5m$ (figure 5.4). On considère une onde de faible amplitude $a=50\text{ cm}$, et de longueur d'onde L . La solution analytique de ce type d'ondes est donnée [14] par :

$$h = H + a \cos(kx) \cdot \cos(\omega t) \quad (5.2)$$

$$k = 2\pi/L, \quad \omega = 2\pi/T$$

La célérité de l'onde est calculée à partir de l'expression :

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(kH)} \approx 5.58 \text{ m/s}$$

Par conséquent la période T sera égale à : $T = \frac{L}{C} \approx 3.58 \text{ s}$

La pulsation ω est donc, de 1.755 s^{-1} .

A $t=0$, la côte de la surface libre est donnée par : $h = H + a \cos(kx)$

Enfin, pour le maillage, nous avons utilisé un maillage rectangulaire uniforme de taille $5\text{cm} \times 5\text{cm}$.

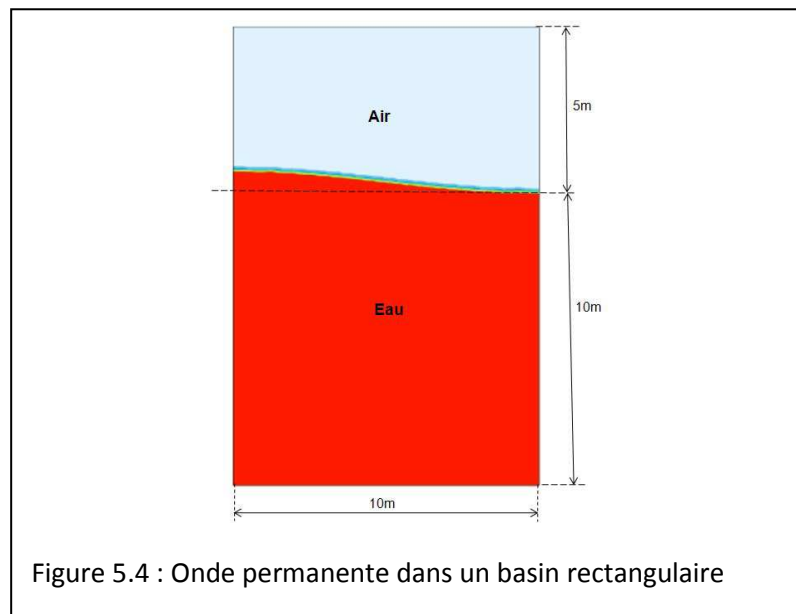


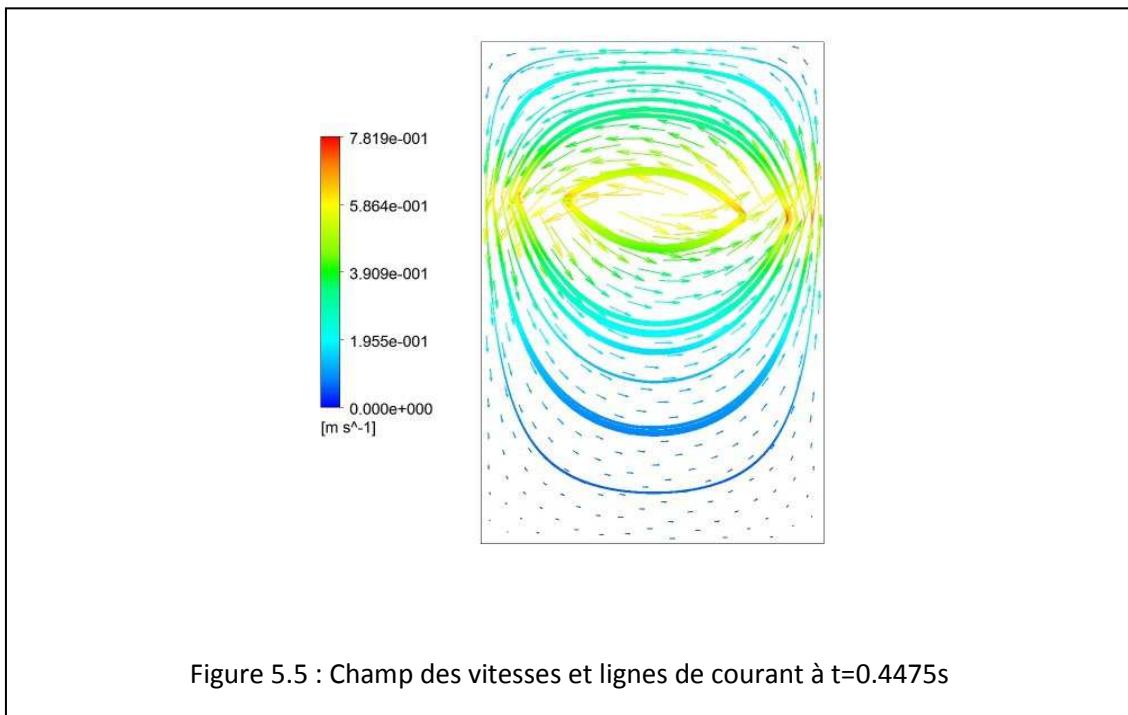
Figure 5.4 : Onde permanente dans un bassin rectangulaire

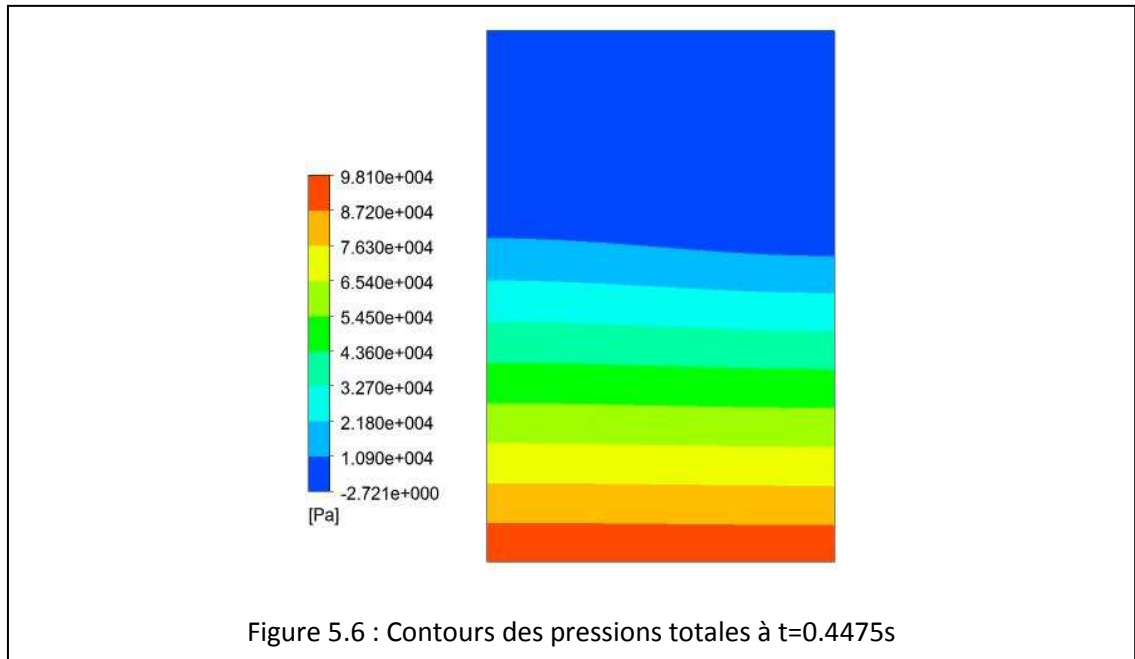
5.3.2 Résultats de simulation

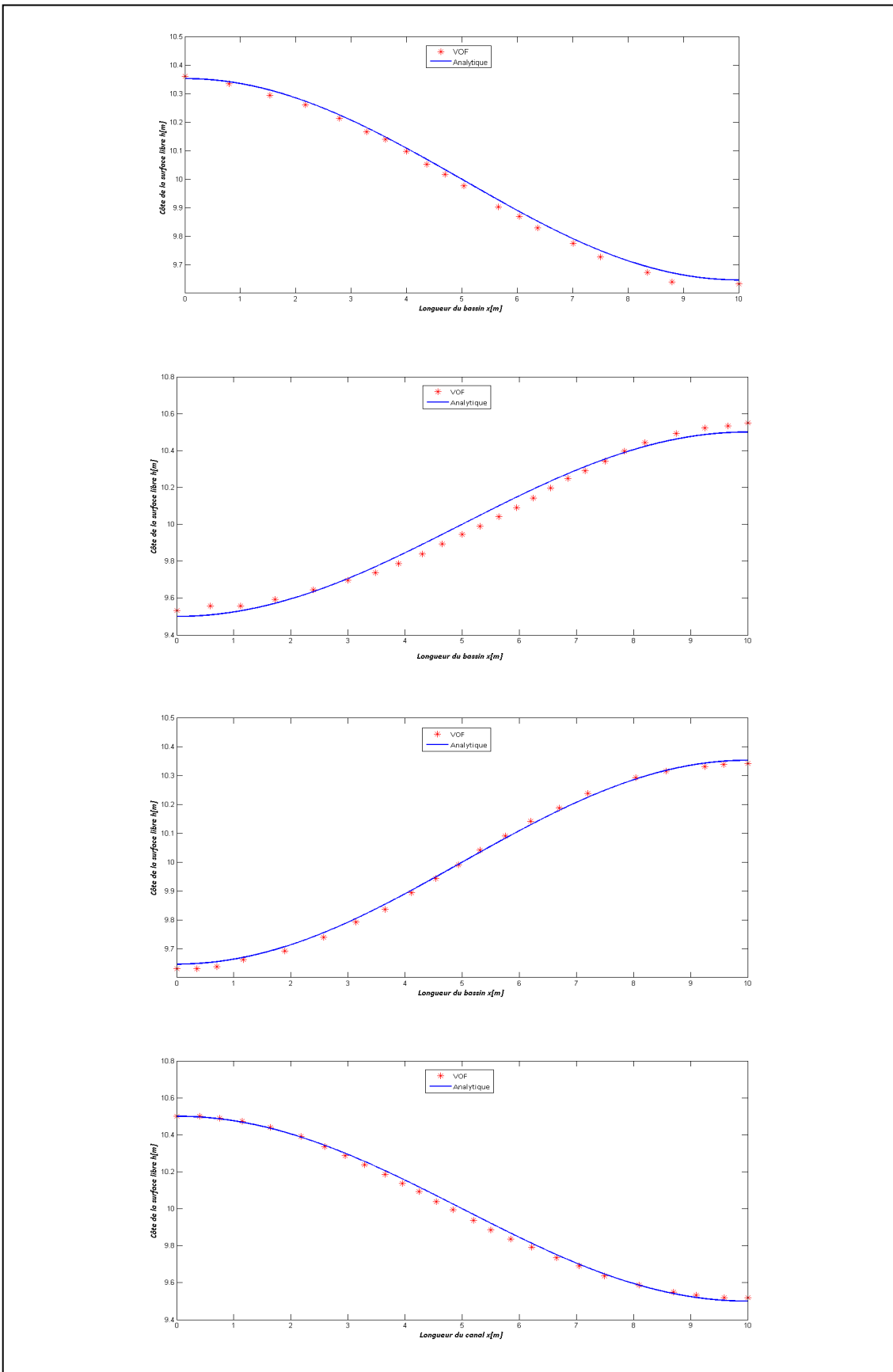
Pour répondre à la théorie des ondes à faible amplitude, nous avons considéré un fluide parfait (modèle non visqueux). Nous avons choisi pour cette simulation un pas de temps $\Delta t=T/1000$, pour pouvoir coïncider avec les résultats présentés dans la référence [25] à $T/8$, $T/2$, $5T/8$ et $2T$.

Les parois latérales sont considérées comme étant des murs non perméables (vitesse normale nulle), alors que sur la surface supérieure la pression est considérée constante et est égale à la pression atmosphérique.

Les figures de 5.5 à 5.8 représentent, respectivement, le champ des vitesses avec quelques lignes de courant, les contours de pression non-hydrostatique et la côte de la surface libre en différent temps.







La comparaison des résultats de simulation avec la solution analytique montre une très bonne concordance. Certaines déviations, d'amplitudes très faibles, sont dues essentiellement au maillage qui doit être raffiné pour s'approcher de plus en plus de la solution exacte. Notons, cependant, que le choix du maillage dépend de la condition de Courant-Friederichs-Lewy et qu'un raffinement exagéré augmente considérablement le temps de calcul.

5.4 PROPAGATION D'UNE ONDE SOLITAIRE (SOLITON)

Une onde solitaire est une élévation unique de la surface de l'eau, dans un milieu non perturbé, qui n'est ni précédé ni suivi d'une perturbation de la surface libre. En négligeant la dissipation ainsi que le cisaillement au fond et aux frontières latérales, une onde solitaire se propage sur un fond horizontal sans changer de forme ni de vitesse. Par conséquent, elle représente un bon cas test pour les algorithmes de surface libre qui décrivent la propagation des vagues non-linéaires à faible amplitude. Nous proposons de comparer les résultats obtenus par le modèle VOF à la solution analytique.

Pour plus de détails sur la théorie des ondes solitaire voir [14]. La solution analytique de ce type d'écoulement est donnée par :

$$h = H + a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4H^3}} (x - Ct) \right] \quad (5.3)$$

$$u = \sqrt{g(H+a)} \frac{a}{H} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4H^3}} (x - Ct) \right] \quad (5.4)$$

$$v = \sqrt{3gH} \left(\frac{a}{H} \right)^{3/2} \left(\frac{y}{H} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4H^3}} (x - Ct) \right] \tanh \left[\sqrt{\frac{3a}{4H^3}} (x - Ct) \right] \quad (5.5)$$

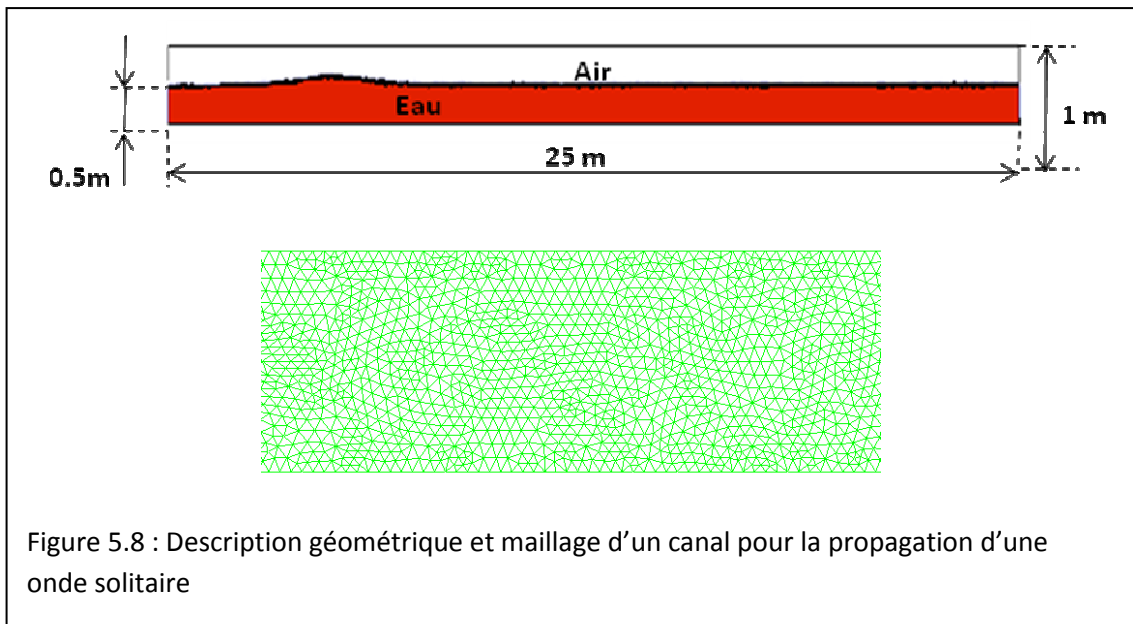
$$C = \sqrt{g(a+H)} \quad (5.6)$$

5.4.1 Description du cas test :

On considère un canal rectangulaire ouvert de longueur $D=25\text{m}$. La profondeur de l'eau à l'état de repos est de $H=0.5\text{m}$. L'amplitude de l'onde est de $a=10\text{ cm}$ ($0.2H$). Comme conditions initiale, les approximations de (5.3) à (5.6) sont appliquées à $t_0=1\text{s}$.

Pour réduire le temps de calcul nous avons choisi un maillage triangulaire (Figure 5.8), qui donne le même ordre de précision qu'un maillage rectangulaire dans ce cas.

Les parois latérales sont considérées des murs imperméables, alors que la surface supérieure est ouverte à la pression atmosphérique.



5.4.2 Résultats

Dans la figure 5.9, nous avons illustré les résultats obtenus par simulation de l'onde décrite précédemment. Nous avons suivi la propagation de l'onde dans le temps.

Nous remarquons que la solution numérique obtenue est en concordance remarquable avec la solution analytique. La déviation maximale est de $4 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ par mètre qui correspond à une erreur relative de 0.67%, ce qui est raisonnablement acceptable.

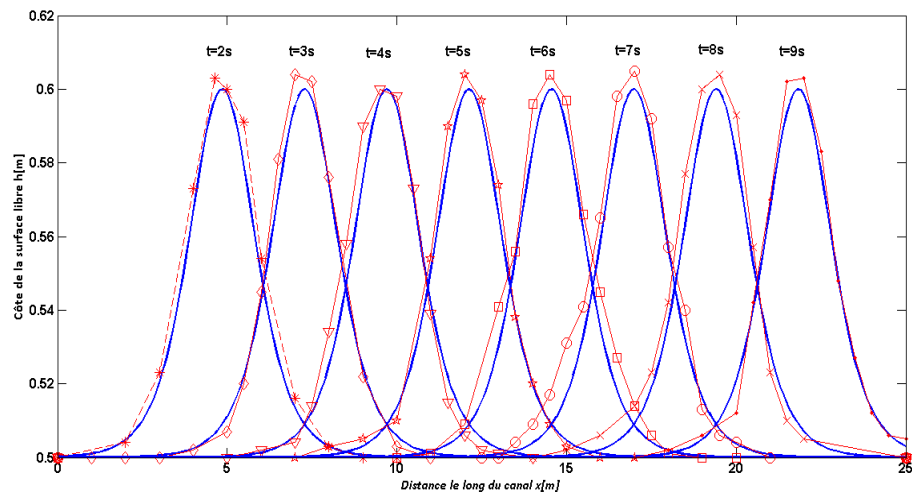


Figure 5.9 : propagation d'une onde solitaire dans un canal rectangulaire.

Evolution de la cote de la surface libre au cours du temps.

5.5 PROBLEME DU GENERATEUR D'ONDE (WAVE MAKER)

On considère, dans ce dernier cas test, un bassin rectangulaire rempli d'eau initialement au repos. La longueur du bassin est de $D = 15\text{m}$; la hauteur d'eau au repos est de $H = 0.5\text{m}$.

On considère un générateur d'onde placé sur la face gauche du bassin. On veut générer, en partant du repos, une onde présentée dans la référence [26], ayant les caractéristiques suivantes:

Longueur d'onde $L = 1.02\text{m}$

Amplitude $a = 0.07\text{m}$

Période $T = 0.8\text{s}$, la pulsation sera donc $\omega = 2\pi/T = 7.854\text{ s}^{-1}$

Profondeur d'eau $h = 0.5\text{m}$

On considère, en dessus du niveau d'eau, un espace de 0.5m rempli d'air à la pression atmosphérique.

5.5.1 Générateur d'onde :

Le générateur d'onde est considéré généralement comme corps solide (piston) animé d'un mouvement sinusoïdal. Selon la référence [26], l'onde ayant les caractéristiques précédentes ne peut être générée que si la condition suivante soit vérifiée:

$$\frac{H}{S} = \frac{2(\cos(2kh) - 1)}{\sinh(2kh) + 2kh} \quad (5.7)$$

$H = 2a$, distance entre le creux et la crête de l'onde

$k = 2\pi/L$, nombre d'onde

S : l'amplitude maximale du mouvement du générateur.

Sachant cette information, il est possible de déterminer l'équation qui contrôle le mouvement du générateur d'onde. Cette équation est définie, selon la référence [36], par:

$$x(t) = \frac{S}{2} \left(1 - e^{-\frac{5t}{T}} \right) \sin(\omega t) \quad (5.8)$$

On aura besoin dans le traitement des conditions aux limites à la vitesse du mobile qui est simplement la dérivée du déplacement :

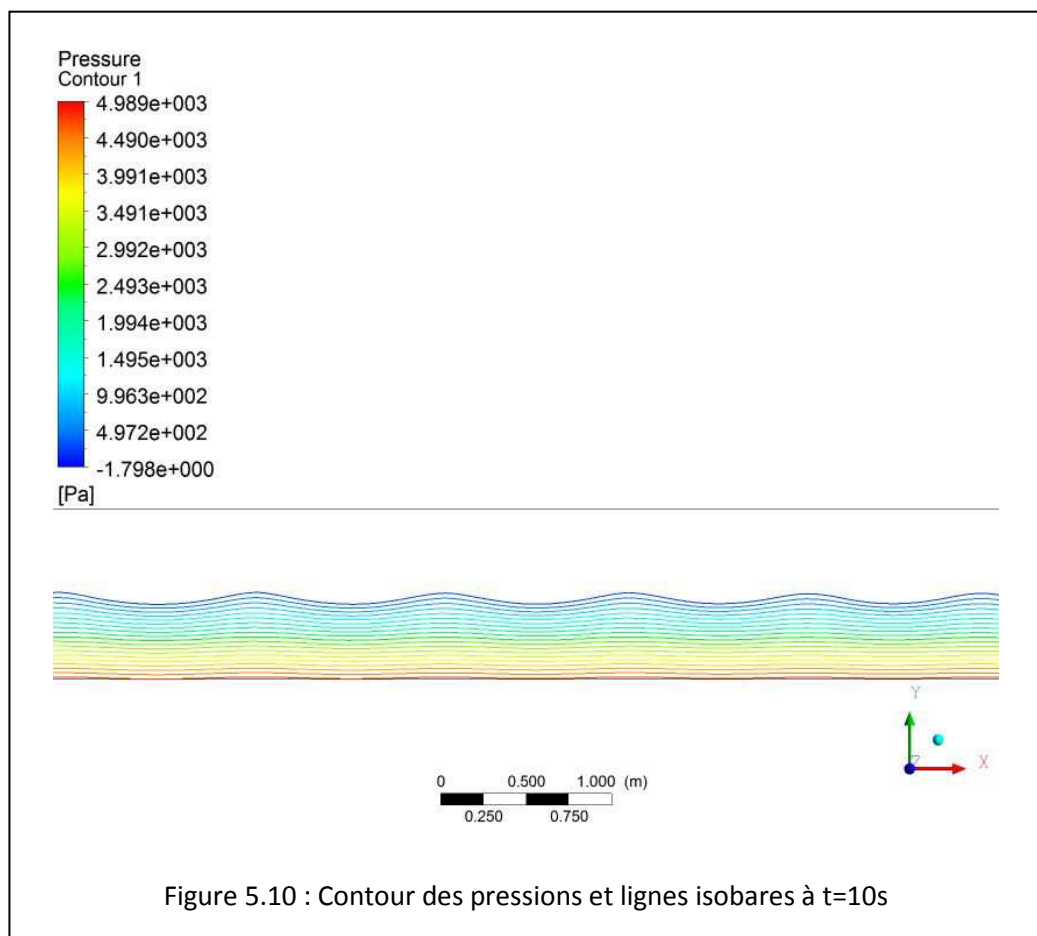
$$u(t) = \frac{S}{2} \left(1 - e^{-\frac{5t}{T}} \right) \omega \cos(\omega t) + \frac{5}{2T} e^{-\frac{5t}{T}} \sin(\omega t) \quad (5.9)$$

5.5.2 Résultats de simulation :

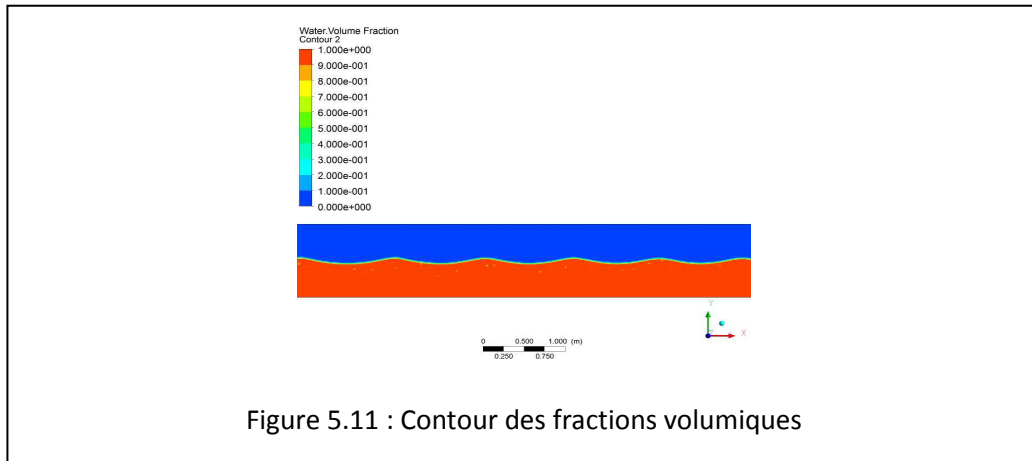
Nous avons choisi l'incrément de temps $\Delta t = 0.005s$; le nombre d'incrément est arrêté à 5000 (ie : le temps final est de 25s). Nous présenterons les résultats obtenus à $t=20s$.

- **Contour des pressions**

La figure (5.10) représente un zoom avant de la pression statique dans le domaine à l'instant $t=20s$. Nous remarquons bien les lignes isobares et le profil ondulatoire des pressions à l'interface eau-air. Remarquons aussi que la longueur d'onde et l'amplitude correspondent bien aux caractéristiques de l'onde qu'on désire générer.



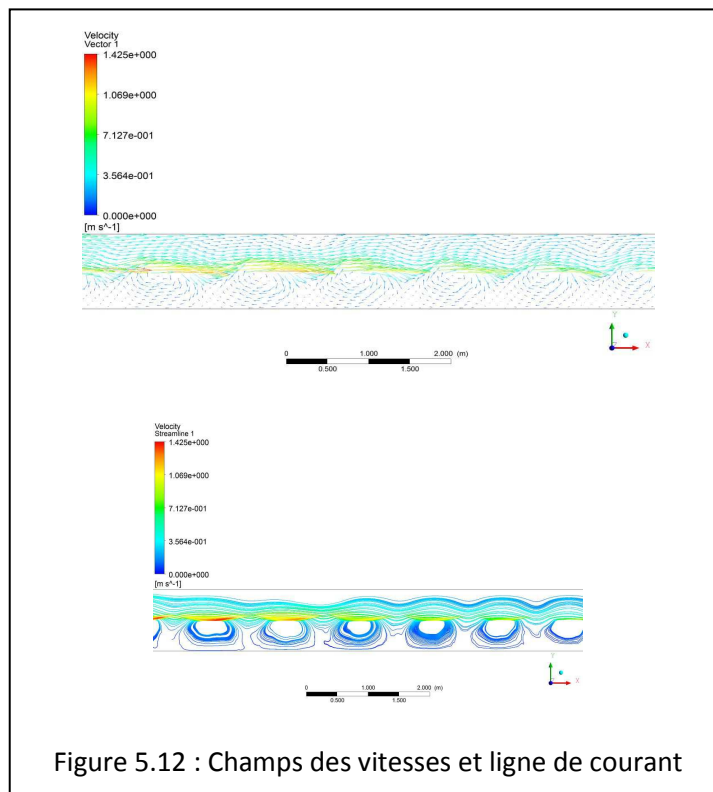
- **Contour des fractions volumiques**



La fraction volumique de l'eau est montrée dans la figure (5.11). En dessous de la surface libre (en rouge) la fraction de l'eau est de 1.00 ; l'eau occupe donc le volume variable généré par le mouvement de l'onde dont les caractéristiques géométriques sont évidentes d'après la figure.

- **Vitesses et ligne de courant**

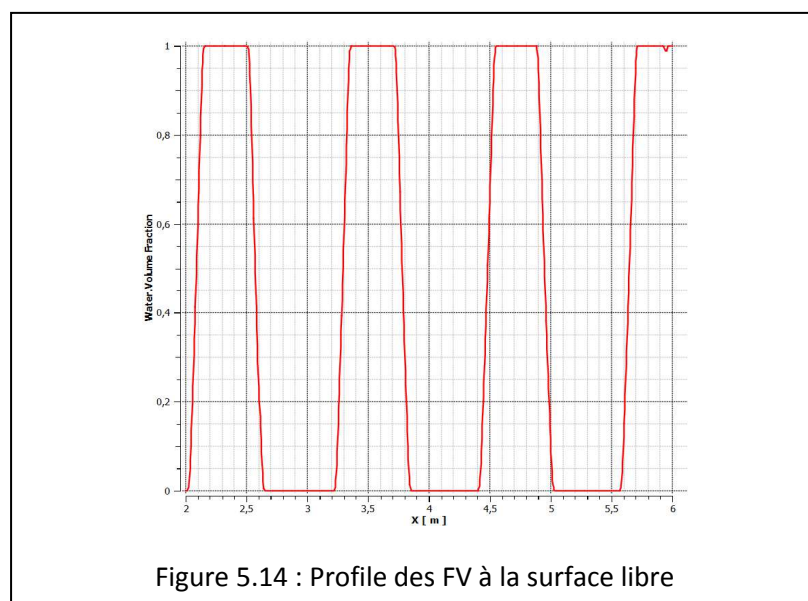
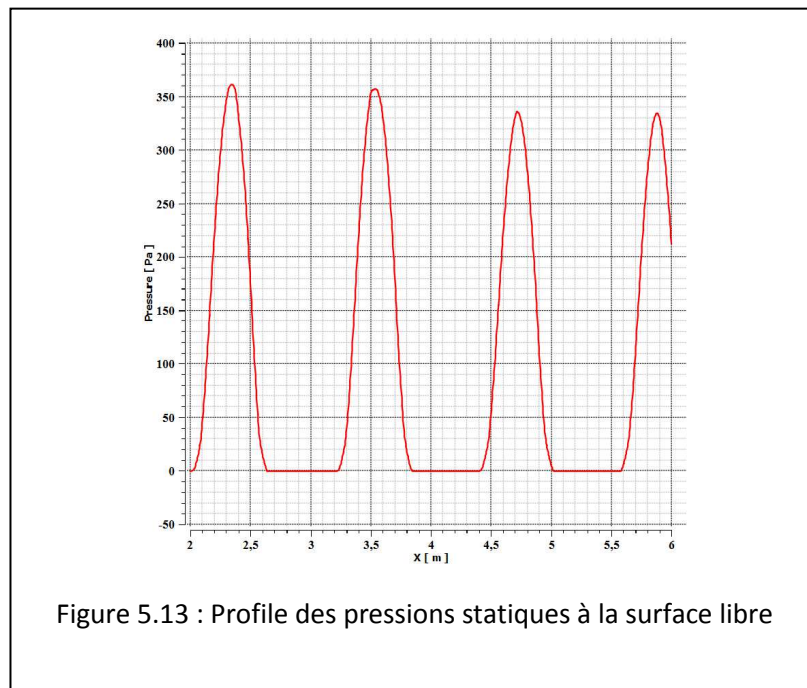
Dans la figure (5.12) sont illustrés le champ des vitesses et les lignes de courant.



Nous remarquons que les particules décrivent des trajectoires elliptiques légèrement déformées à cause des erreurs de calculs; ce qui est en concordance avec les équations analytiques pour les eaux non profondes.

- **Surface libre**

En vue de l'importance de la surface libre des écoulements d'ondes de gravité à surface, il est utile de présenter le profile des pressions et fraction volumique sur la ligne horizontale coïncidant avec le niveau initial de l'eau. Ce qui est illustré dans les figures (5.13) et (5.14).



5.6 Commentaires

- Le schéma VOF permet de déterminer le profile de la surface libre par capture de l'interface entre deux fluide qui sont dans notre cas l'eau et l'air. En choisissant cette technique nous avons évité le maillage dynamique (remaillage) qui est difficile à implémenter. Mais par contre une résolution supplémentaire des équations du mouvement pour la phase gazeuse est nécessaire.
- Dans ce chapitre nous avons mis en œuvre une technique de génération d'onde en imposant une vitesse au générateur d'onde tout en évitant d'imposer des conditions aux limites sur la frontière d'entrée car ces conditions sont très difficiles à réaliser pratiquement voir impossible.

CONCLUSION

Notre objectif initial, dans le cadre de ce mémoire de magister, été la mise en application de la technique VOF pour des écoulements d'ondes de gravité à surface. Pour ce faire, une recherche bibliographique approfondie, une mise en équations de ce type d'écoulements et une bonne maîtrise du code de calcul Ansys-Fluent ont été les tâches à accomplir avant d'arriver à la phase de simulation numérique.

Notre choix de la méthode VOF, couplée à la méthode des volumes finis, est justifié par le fait que cette méthode n'a pas besoin de refaire le maillage du domaine d'étude en chaque pas de temps. C'est l'avantage essentiel de cette technique dans les écoulements à frontières déformables. Mais par contre elle nécessite la résolution des équations de mouvement pour des écoulements multiphasique (dans notre cas air/eau) ; cette inconvénient est contourné pour la plus part des applications par l'adoption d'équations d'état pour les phases gazeuses (ex. loi des gaz parfait), ce qui facilite la résolution et réduit ainsi le temps de calcul.

Le modèle à été conduit sur plusieurs cas test. Les résultats obtenus sont en concordance très raisonnable avec la théorie et avec certains résultats publiés dans la littérature utilisée dans ce mémoire. Néanmoins, une comparaison de cette technique avec d'autres méthodes en termes de précision des résultats, maillage et temps de calcul, s'avère nécessaire pour déterminer les limitations du modèle.

Les principales perspectives de recherche qui découlent à l'issu de ce travail concernent la comparaison de cette technique avec d'autres méthodes (ex. méthode des éléments finis), l'étude des conditions aux limites pour différentes configurations (canal fermé, canal ouvert, canal infini, eau profonde, eau peu profonde,...). Il est très souhaitable aussi d'envisager la simulation des différents dispositifs destinés à récupérer l'énergie contenu dans les vagues.

REFERENCES

1. Andrew B. Kennedy, John D. Fenton/ 1997. A fully-nonlinear computational method for wave propagation over topography. *Coastal Engineering* 32 (1997) 137-161.
2. Carlos M.P. Silva Santos, Deborah M. Greaves/ 2007. A mixed Lagrangian–Eulerian method for non-linear free surface flows using multigrid on hierarchical Cartesian grids. *Elsevier/Computers & Fluids* 36 (2007) 914–923
3. C.Z. Wang, G.X. Wu/ 2006. An unstructured-mesh-based finite element simulation of wave interactions with non-wall-sided bodies. *Elsevier/Journal of Fluids and Structures* 22 (2006) 441–461.
4. C. W. HIRT, B. D. NICHOLS/1981. Volume of Fluid (VOF) method for the Dynamics of Free Boundaries. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 39, 201-225 (1981)
5. Chiang C. Mei/ 2005. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves. Advanced Series On Ocean Engineering – Volume 23. Part 1: Linear Aspect.*
6. David P. Nicholls/ 2007. Boundary Perturbation Methods for Water Waves. *GAMM-Mitt.* 30, No. 1, 44 – 74 (2007).
7. Deborah Greaves/2010. Application of the finite volume method to the simulation of nonlinear water waves. *Advances in coastal and ocean engineering* Volume 11.
8. Etienne Guyon/2001. *Hydrodynamique Physique/ Cnrs Editions.*
9. G.B. Witham/ 1974. *Linear and nonlinear waves. By John Wiley & Sons, Ltd.*
10. G.D. Weymouth, Dick K.-P. Yue/ 2010. Conservative Volume-Of- Fluid method for free surface simulation on Cartesian-grids. *Elsevier/ Journal of Computational Physics*

11. G.J. PERT & M.M.Woolfson / An Introduction to Computer Simulation/ Oxford University Press, 1999.
12. J. Billingham/2000. Wave Motion / Cambridge University press.
13. Jean-Paul Caltagirone. Physiques des écoulements continus. UNIVERSITE BORDEAUX 1.
14. Jacek A. Jankowski. A non-hydrostatic model for free surface flows. Ph.D. Thesis, Hannover University, Germany,1999.
15. K.J. Bai /2005. Numerical solutions for nonlinear free surface flows by finite element methods. Elsevier/ Applied Mathematics and Computation 163 (2005) 941–959.
16. K.M.T Kleefsman/ A Volume Of fluid based simulation method for wave impact problems. International Journal For Numerical Methods In Fluids.
17. K. Abdolmaleki, K. P. Thiagarajan and M. T. Morris-Thomas. Simulation of The Dam Break Problem and Impact Flows Using a Navier-Stokes Solver.15th Australasian Fluid Mechanics Conference.The University of Sydney, Sydney, Australia.13-17 December 2004.
18. Lin Mu, Xiu Ye/ 2011 . A finite volume method for solving Navier–Stokes problems. Elsevier/Nonlinear Analysis
19. M.S. Turnbulla /2003. Wave–structure interaction using coupled structured–unstructured finite element meshes .Elsevier/ Applied Ocean Research 25 (2003) 63–77.
20. Michael Schäfer /2006. Computational Engineering- Introduction to numerical Methods/ Springer.
21. M. Doring/ free surface flow using SPH and VOF methods. Laboratoire de Mécanique des fluides Ecole centrale de Nantes.
22. Min-Joon Kim/1998. A spectral method for free surface flows of inviscid fluids. International Journal for Numerical Methods In Fluids 28: 887–902 (1998).

23. Mitsuhiro Tanaka/2001. A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation .Elsevier/Fluid Dynamics Research 28 (2001) 41 60.
24. Marie Ruellan. Méthodologie de dimensionnement d'un système de recuperation de l'énergie des vagues. Thèse de doctorat
25. Musteyde. B/2002. Three-dimensional numerical modelling of free surface flows with non-hydrostatic pressure. International journal for numerical methods in fluids. 40:1145–1162 (DOI: 10.1002/flid.376).
26. M. N. Gomes, C. R. Olinto, L. A. O. Rocha, J. A. Souza, L.A. Isoldi. Computational modeling of a wave tank Engenharia Térmica (Thermal Engineering), Vol. 8 - N01, June 2009, p.44-50
27. Nan-Jing Wu /2006. Meshless numerical simulation for fully nonlinear water waves. International Journal For Numerical Methods In Fluids (2006) 50:219–234.
28. Pijush. K. Kundu et Ira M.Cohen. Fluid Mechanics/ ACADEMIC PRESS.
29. Patrick Lynett. NON LINEAR WAVE DYNAMICS/ World Scientific.
30. Rainald Lohner/ Simulation of flows with violent free surface motion and moving objects using unstructured grids. Journal of Computational Physics 206 (2005) 363-393 ELSEVIER
31. Robert G. Dean/ 2000. Water wave mechanics for engineers and scientists. Advanced Series on Ocean Engineering- Volume 2.
32. Thomas Bonometti/2007. Interface- capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics. Elsevier/ International Journal of Multiphase flow 33(2007) 109-133.

33. S/VINCENT /1999. Modélisation d'écoulements incompressible de fluides non-miscible.
Thèse de doctorat/ Université de BORDEAUX I
34. S.K/ Tomar /2007. A Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for linear Free surface gravity waves using high order velocity recovery. .Comput. Methods Appl Mech. Engrg. 196 (2007) 1984–1996.
35. Suhas V. Patankar. NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW/ Taylor & Francis
36. S/MAURIET/2009. Simulation d'un écoulement de jet de rive par une méthode VOF
Université de L'ADOUR
37. V/ Sriram/ 2007. Simulation of nonlinear free surface dispersive shallow water waves.
Journal of Hydro-Environment Research xx (2007) 1-7.
38. V.Sriram /2006. Simulation of 2-D nonlinear waves using finite element method with cubic spline approximation. Elsevier/ Journal of Fluids and Structures 22(2006) 663-681.