

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار تليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
قسم الرياضيات  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Option** : Mathématiques appliquées

**Spécialisation** : Analyse fonctionnelle et applications

**présenté par** : Hafsa Nouaceur

**Thème**

**Contrôle optimal : Covid-19**

Membres du jury :

Mr. AbdelAziz RAHMOUNE	MCA	Président
Mr. Ibrahim BELGHARBI	MAB	Examineur
Mme. Nacima MOUSSOUNI	MCA	Encadreur

Année universitaire 2024/2025

# شكر و عرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبتوفيقه يتحقق النجاح والإنجاز.

أتقدم بخالص عبارات الشكر والتقدير إلى السادة أعضاء لجنة المناقشة الأفاضل، الذين شرفوني بقبولهم مناقشة هذه المذكرة، وعلى ما قدموه من دعم علمي ونقد بناء، ساهم في إثراء هذا العمل وتطويره. لقد كانت ملاحظاتهم وتوجيهاتهم رافداً مهماً في تحسين مستوى البحث وتدقيقه.

فكل الامتنان والعرفان أرفعه إلى:

الأستاذة الدكتورة **موسوي نسيمه**، مشرفة وموجهة، التي لم تدخر جهداً في تقديم النصح والمتابعة الدقيقة، وكانت نعم السند والعون خلال مختلف مراحل هذا العمل.

الأستاذ الدكتور **رحمون عبد العزيز**، رئيساً للجنة، على سعة صدره وتوجيهاته السديدة التي كان لها بالغ الأثر في توجيه هذا البحث في مساره الصحيح.

الأستاذ الدكتور **بلغربي إبراهيم**، عضواً مناقشاً، الذي شرفني بحضوره ومشاركته الفعالة وملاحظاته القيمة التي أثرت النقاش وأضافت بعداً أكاديمياً هاماً.

فلكم مني جميعاً جزيل الشكر والتقدير، وأسأل الله أن يجزيكم خير الجزاء، وأن يبارك في جهودكم العلمية والتعليمية.

## إهداء

إلى من كان لهم الفضل بعد الله في كل ما أنجزته، إلى من غرسوا في نفسي حب الطموح وقوة الإرادة...

إلى والدي الغالي عطاء الله، الذي علمني أن الحياة لا تعترف باليأس، وأن العلم سبيل إلى الرقي، فكنت دوماً القدوة والمعلم.

إلى والدتي الحنونة فاطيمة، منبع الحنان والدعاء، وسندي في كل الأوقات، التي زرعت في الصبر وقوة التحمل، وكانت دعواتها النور الذي أنار دربي.

إلى أخي العزيز حسين وأخواتي الأعزاء: صفيّة، بشرى، فطنة، اسيا أنتم السند والروح، أنتم الرفقة الطيبة والقلوب الداعمة.

إلى صديقتي الغالية فاطمة الزهراء و كاميليا، إلى كل فرد من عائلتي الكريمة، على ما قدموه من دعم ومؤازرة ومحبة صادقة، أقول لكم جميعاً : هذه المذكرة ثمرة تعبكم كما هي ثمرة جهدي، وأقل ما يمكن أن أقدمه عرفاناً بجميلكم.

أهديكم هذا العمل المتواضع، عربون وفاء وامتنان، سائلة المولى أن أكون دائماً عند حسن ظنكم، وأن يجعل هذا النجاح بداية لمستقبل مشرق بإذن الله.

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة بعض الخصائص النوعية لحلول فئات مختلفة من المعادلات والانشاءات في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مسألة التحكم الأمثل وتطبيقها على جائحة كوفيد-19.

بعد مقدمة عامة، عرضنا المفاهيم الأساسية اللازمة لفهم هذه المسائل. في البداية، تم النظر في نموذج مكون من خمسة أقسام، ودرسنا وجود الحل، وحدانيته، وإيجابيته، وكذلك محدوديته.

تعتمد استقرارية النظام حول نقاط التوازن على عدد التكاثر الأساسي  $R_0$ . وفي دراسة مسائل التحكم الأمثل، أظهرنا أهمية اللقاح، وكذلك فائدة الحجر الصحي.

# Abstract

In this memoir, we studied the problem of optimal control applied to COVID-19.

After a general introduction, we presented the basic concepts necessary for understanding the problems. Firstly, a five-compartment model was considered, and we studied the existence, uniqueness, positivity, and boundedness of the solution.

The stability of the system around the equilibrium points depends on the basic reproduction number  $R_0$ . In the study of optimal control problems, we demonstrated the importance of vaccination as well as the benefit of quarantine. The manuscript concludes with a general conclusion and future perspectives.

# Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié le problème de contrôle optimal appliqué au Covid- 19. Après une introduction générale, on a donné des notions de base nécessaires pour la compréhension des problèmes. En premier lieu, un problème à cinq compartiments a été considéré, on a étudié l'existence, l'unicité, la positivité ainsi que la bornitude de la solution.

La stabilité du système autour des points d'équilibre dépend du nombre de reproduction de base  $R_0$ . Dans l'étude des problèmes de contrôle optimal, on a montré l'intérêt du vaccin, ainsi que l'avantage de la mise en quarantaine. Le manuscrit est achevé par une conclusion générale et des perspectives.

# Notations

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$  n fois.

$\mathbb{R}^+$  : Ensembles des nombres réels positifs.

$||$  : Valeur absolue.

$M_{n,m}(\mathbb{R})$  : Ensemble des matrices à  $n$  lignes et à  $m$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

$M_n(\mathbb{R})$  : Ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

det : Déterminant.

rg(A) : Rang de la matrices A.

$e^A$ , ou  $\exp(A)$  : Exponentielle de la matrices A.

$A'$  : Transposée de la matrice A.

$df(x).h$  : Différentielle de Fréchet de  $f$  au point  $x$ , appliquée au vecteur  $h$  ( $f$  est une application de  $E \times F$  dans  $H$ ,  $E$ ,  $F$  et  $H$  étant deux espaces de Banach).

$Acc(x_0, T)$  : Ensemble accessible depuis  $x_0$ , en temps  $T$ .

$E_T$  : Application entrée sortie au temps  $T$ .

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  : Dérivée de  $x$  par rapport à  $t$ .

SIR : Le modèle SIR est composé de trois compartiments (S (Susceptible), I (Infectious), R (Recovered)).

SIRS : Le modèle SIRS est une extension du modèle SIR. Il suppose que l'immunité n'est pas permanente.

SEIRS : Le modèle SEIRS est plus détaillé. Il prend en compte la période d'incubation de la maladie.

# Contents

<b>Intcoduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Notions de base</b>	<b>13</b>
1.1 Rappel des systèmes d'équations différentiels ordinaires . . . . .	13
1.1.1 Existence et unicité des solutions : . . . . .	13
1.1.2 Stabilité et bornitude des solutions : . . . . .	14
1.2 Étude du système de Lotka-Volterra . . . . .	15
1.2.1 Présentation du modèle . . . . .	15
1.2.2 Etude du système . . . . .	16
1.2.3 Globalité des solutions . . . . .	17
1.2.4 Étude des points d'équilibre . . . . .	17
1.3 <b>Généralités sur les modèles épidémiologiques</b> . . . . .	18
1.3.1 C'est quoi modèles épidémiologiques et leurs buts? . . . . .	18
1.3.2 Bref historique . . . . .	18
1.3.3 Les modèles compartimentaux . . . . .	21
1.3.4 Modèle SIR à population fermée . . . . .	21
1.4 Quelques enrichissements du modules SIR . . . . .	25
1.4.1 Modèle SIRS à population fermée . . . . .	25
1.4.2 Modèle SEIRS à population fermée . . . . .	26
1.4.3 Effets épidémiologiques des traitements . . . . .	26
1.4.4 Le rôle d'un vaccin . . . . .	26
1.4.5 <b>Modèle SIR</b> : avec naissance et avec mort . . . . .	27
<b>2 Théorie du contrôle optimal</b>	<b>32</b>
2.1 Introduction . . . . .	32
2.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal . . . . .	32
2.3 Contrôlabilité . . . . .	35
2.3.1 Ensemble accessible . . . . .	35

2.3.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires . . . . .	35
2.3.3	Contrôlabilité des systèmes non linéaires . . . . .	36
2.4	Méthodes de résolution . . . . .	38
2.4.1	Méthodes directes . . . . .	38
2.4.2	Méthodes indirectes . . . . .	38
2.5	Comparaison des méthodes . . . . .	41
2.5.1	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Contrôle optimal: Covid-19</b>	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	46
3.2	Énoncé du Problème . . . . .	46
3.3	Analyse du modèle . . . . .	48
3.3.1	Bornage des solutions . . . . .	48
3.3.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	49
3.3.3	Stabilité . . . . .	49
3.3.4	Nombre de reproduction de base . . . . .	51
3.4	Problème de contrôle optimal . . . . .	53
3.4.1	Position du problème . . . . .	53
3.4.2	Résolution théorique . . . . .	54
3.5	Implémentation numérique et méthodes . . . . .	55
3.5.1	Résolution par la méthode de tir . . . . .	56
3.5.2	Résolution par la méthode de discrétisation d'Euler . . . . .	60
3.6	Avantage de la quarantaine . . . . .	61
3.6.1	Résolution théorique . . . . .	63
3.7	Implémentation numérique . . . . .	64
3.8	Comparaison numérique avec discussion des résultats . . . . .	65
3.9	Conclusion . . . . .	66
	<b>Conclusion générale</b>	<b>68</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>69</b>

# Table des figures

1.1	Evolution des états modèle SI . . . . .	20
1.2	Evolution des états modèle SIR . . . . .	20
1.3	Evolution des états modèle SI . . . . .	23
1.4	Evolution des états modèle SI . . . . .	23
1.5	Evolution des états modèle SIR . . . . .	27
1.6	Evolution des états modèle SIR . . . . .	28
2.1	Evolution des états méthode indirecte . . . . .	44
2.2	Evolution des états méthode directe . . . . .	44
2.3	Trajectoires optimales . . . . .	45
3.1	Evolution des états . . . . .	48
3.2	Evolution des états après 70 jours avec vaccin. . . . .	59
3.3	Evolution des états après 150 jours sans vaccin. . . . .	59
3.4	Evolution des états avec vaccin, après 70 jours . . . . .	60
3.5	Modèle SEIR . . . . .	61
3.6	Evolution des états sans vaccin, après 150 jours . . . . .	65
3.7	Evolution des états après 70 jours avec vaccin . . . . .	65
3.8	Comparaison numérique . . . . .	66

# Introduction générale

Depuis quelques décennies, l'utilisation de modèles mathématiques est indispensable pour analyser la propagation des maladies infectieuses. Les mathématiques ont trouvé leur place pour modéliser le comportement des épidémies, prédire leur évolution et proposer des mesures préventives associées au vaccin et/ou à la quarantaine.

Dans ce contexte, ce mémoire constitue une contribution dans l'étude des modèles dynamiques liés à l'épidémiologie et où il est question de concepts mathématiques scientifiques comme le contrôle optimal [8], les équations différentielles et l'analyse numérique [2].

Le manuscrit a débuté par le premier chapitre qui a été consacré à un rappel des équations différentielles ordinaires et système de Cauchy [2], la problématisation des conditions d'existence et d'unicité de la solution, la stabilité des solutions, ... L'étude a été prolongée jusqu'à l'étude d'un vrai modèle biologique (problème de Lotka-Volterra) [9, 1] qui représente à l'interaction de deux espèces biologiques, et les modèles SIR, des modèles de propagation épidémique connus pour la modélisation de la dynamique des épidémies de maladies infectieuses [5, 3].

Nous avons ensuite donné une vue d'ensemble sur les modèles épidémiologiques : leur définition, leur objet et leur histoire, à partir des modèles compartimentalisés, dont le modèle **SIR**, le modèle par excellence de l'analyse de la transmission des infections par les modèles mathématiques appliqués à la médecine. Nous avons donc développé plus tard, le modèle **SIR** en incluant des variables plus complexes comme par exemple la durée d'immunité (**SIRS**) [3], la durée d'incubation (**SEIRS**) [3], le rôle des traitements, et l'effet de la vaccination. Dans le chapitre 2, on a donné des notions de base du contrôle optimal [4, 8], nécessaires pour la compréhension de la suite du travail. A la fin du chapitre, on a illustré les dites notions par un exemple.

Dans le troisième chapitre, deux modèles épidémiologiques complexes ont été traduits en des problèmes de contrôle optimal où le contrôle ou la commande est le taux de vaccination. Dans le premier modèle comportant cinq compartiments. Avant l'étude de contrôle optimal, on a montré l'existence de la solution du premier modèle, ceci en se

basant sur le théorème de Cauchy Lipschitz [2], on a par la suite étudié la stabilité locale qui est en rapport avec le nombre de reproduction de base et la matrice Jacobienne du système. Par la suite, on a étudié la stabilité globale en utilisant la fonction de Lyapunov [7]. On a par la suite calculé théoriquement et en utilisant le principe de maximum de Pontryagin, le contrôle optimal, puis on a résolu le problème numériquement en utilisant deux méthodes, la méthode de discrétisation d'Euler, puis une méthode indirecte qui est la méthode de Tir (Shooting method) [8]. Dans la suite du travail, on a pu montrer mathématiquement, l'importance de la mise en quarantaine pendant l'épidémie du Covid-19. La question posée était de diminuer la montée en puissance des infectés et d'augmenter le nombre de guéris d'où la fonction objectif des problèmes considérés.

L'étude a porté sur ces points :

Analyse mathématique du modèle : existence et unicité de solutions, stabilité de l'équilibre, et valeurs propres, ainsi que du nombre de reproduction de base.

Définition mathématique du problème de contrôle par le moyen du principe Pontryaguin [6] ;

Approximation numérique du problème des deux manières : méthode de tir connue pour sa rapidité d'exécution et discrétisation d'Euler.

Étude du risque de la quarantaine grâce à la variation du modèle, et comparaison des résultats en cas de quarantaine, ou pas et avec ou sans vaccination.

Cette étude vise à montrer la puissance analytique des modèles mathématiques dans différentes épidémies, et leurs rôles pour bien gérer les problèmes.

# Chapitre 1

## Notions de base

### 1.1 Rappel des systèmes d'équations différentiels ordinaires

Dans cette partie, on rappelle quelques notions de base de la théorie d'existence, d'unicité et de stabilité locale des solutions, et globale au sens de Lyapunov pour les systèmes d'équations différentiels ordinaires. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Définition 1**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Considérons le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

La fonction  $x$  est dite solution du système (1.1) sur l'intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ , si elle est définie et continument dérivable sur  $I$  et  $(t, x(t)) \in U$  pour tout  $t \in I$ , et  $x$  satisfait la relation (1.1).

- On appelle solution locale le couple  $(I_0, x)$  où  $I_0 \subset I$  est un intervalle et  $x$  est une solution de (1.1) pour tout  $t \in I_0$ .
- On dit que la solution  $(I_0, x)$  est une solution globale de (1.1), si  $(I_0, x)$  est une solution locale de (1.1) et  $I_0 = I$ .

#### 1.1.1 Existence et unicité des solutions :

**Théorème 1 (existence)** [2]  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, pour tout  $(t_0, x_0) \in U$ , le système (1.1) admet au moins une solution.

**Définition 2**  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, on dit que  $f = f(t, x)$  est  $k$ -lipschitzienne en  $x$  si

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^n}$$

$k$  ne dépend pas de  $t$  ( $k \geq 0$ ).

- $f$  est dite localement lipschitzienne en  $x$ , si  $\forall (t_0, x_0) \in U, \exists v(t_0, x_0)$  un voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans laquelle  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.

**Théorème 2 (unicité)** [2]  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est une fonction continue, et localement lipschitzienne en  $x$ , Pour tout  $(t_0, x_0) \in U$ , le problème (1.1) admet une solution unique.

### 1.1.2 Stabilité et bornitude des solutions :

**Définition 3** On considère le système non autonome (1.1), tel que  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue en  $t$  et localement lipschitzienne en  $x$ .

On dit que " $e$ " est un point d'équilibre de système (1.1) si  $f(t, e) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Remarque 1** On peut ramener l'équilibre " $e$ " à l'origine en posant  $g(t, y) = f(t, y + e)$ . Si " $e$ " est un point d'équilibre de  $x' = f(t, x)$  alors 0 est un point d'équilibre de  $y' = g(t, y)$ .

**Définition 4 (bornitude des solutions)** Les solutions de système (1.1) sont :

0. Uniformément bornées si  $\exists c \geq 0$  indépendant de  $t_0$  tel que pour tout  $a \in ]0, c[$ ,  $\exists \beta = \beta(a) > 0$  indépendante de  $t_0$ , satisfait  $\|x_0(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a \Rightarrow \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \dots (*)$
0. Globalement uniformément bornées si (\*) est vérifiés pour  $e$  assez grand, on dit que la solution est stable au sens de Lagrange.

**Définition 5 (Stabilité des solutions)**

- Le point d'équilibre  $e$  de (1.1) est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|x(t_0) - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|x(t) - e\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Si de plus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ , le point  $e$  est dit asymptotiquement stable.

- On dit que le point d'équilibre  $e$  est uniformément stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Si de plus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ , le point  $e$  est dit uniformément asymptotiquement stable.

**Définition 6 ( matrice Jacobienne)** *La matrice jacobienne est une matrice contenant des premières dérivées partielles d'une fonction vectorielle multi dimensionnelle. Elle est utilisée pour étudier le comportement de cette fonction en un point donné , et cela mais pas seulement dans des domaines tels que l'analyse de stabilité, d' optimisation, et encore, des équations différentielles.*

## 1.2 Étude du système de Lotka-Volterra

### 1.2.1 Présentation du modèle

**Définition 7 (Système de Lotka-Volterra)** [9, 1] *Le système de Lotka-Volterra est un modèle proie-prédateur, qui décrit l'évolution de deux populations,  $x$ , et  $y$ , selon le système suivant :*

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(-c + dx) \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes strictement positives, et  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+$  des données initiales.

- **a** : Taux de croissance de la proie (généralement représentée par  $x$ ) en l'absence du prédateur.

Autrement dit, si aucun prédateur n'est présent ( $y = 0$ ), la population de proies croît de manière exponentielle au taux  $a$ .

- **b** : Taux de prédation, c'est-à-dire l'effet des prédateurs sur la diminution de la population des proies.

Plus  $b$  est grand, plus la population de proies diminue rapidement en raison de la prédation.

- **c** : Taux de mortalité naturelle du prédateur en absence de proies.

Si  $x = 0$ , donc sans proies, la population de prédateurs décroît naturellement au taux  $c$ , faute de nourriture.

- **d** : Taux d'augmentation de la population de prédateurs grâce à la consommation des proies.

Cela traduit la reproduction ou la croissance des prédateurs quand ils trouvent suffisamment de proies. Plus  $d$  est élevé, plus les prédateurs croissent vite en présence de proies.

### Explication du modèle :

Le modèle de Lotka-Volterra est un système d'équations différentielles qui décrit la relation dynamique entre deux espèces :

$\mathbf{x}(t)$  : représente la population (ou densité) des proies au temps  $t$ .

$\mathbf{y}(t)$  : représente la population (ou densité) des prédateurs au temps  $t$ .

- La première équation dans le système (1.2) décrit l'évolution de la population des proies : elle augmente naturellement au taux  $a$ , mais diminue en présence des prédateurs (au taux  $b$ ).
- La deuxième équation dans le système (1.2) décrit l'évolution de la population des prédateurs : elle diminue naturellement au taux  $c$ , mais augmente quand il y a des proies à consommer (au taux  $d$ ).

Ce modèle montre un comportement cyclique typique en écologie :

- Quand la population des proies augmente, celle des prédateurs augmente aussi grâce à la nourriture disponible.
- Mais avec plus de prédateurs, les proies diminuent à cause de la prédation.
- Ensuite, les prédateurs diminuent à leur tour, faute de proies.
- Et le cycle recommence.

### 1.2.2 Etude du système

Le problème de Cauchy (1.2) admet une unique solution, définie sur un intervalle ouvert  $I$ , contenant 0.

**Preuve 1** *L'équation est autonome. Il suffit de remarquer que*

$$f : \left[ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x(a - by), y(-c + dx)) \end{array} \right]$$

*est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et donne le résultat. En effet :*

La fonction  $f$  est composée de polynômes (de degré 2), donc elle est continûment différentiable, c'est-à-dire  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ .

Comme  $f \in \mathcal{C}^1$ , elle est automatiquement localement lipschitzienne et continue, donc les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites.

Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz [2] le système (1.2) admet une solution maximale unique, définie sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  contenant 0, passant par le point initial  $(x_0, y_0)$ .

**Remarque 2** Si  $x_0 = 0$ , alors, l'unique solution de (1.2) est globale et est donnée par :  $(x, y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (0, e^{-ct}y_0)$ . Si  $y_0 = 0$ , alors, l'unique solution de (1.2) est globale et est donnée par :  $(x, y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (e^{at}x_0, 0)$ .

### 1.2.3 Globalité des solutions

**Théorème 3 (Positivité des solutions)** Supposons  $x_0 > 0$ . Alors,

$$\forall t \in I, x(t) > 0.$$

**Preuve 2** On raisonne par l'absurde, et on suppose donné  $t \in I$  tel que  $x(t) \leq 0$ . Alors, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t^* \in I$  tel que  $x(t^*) = 0$ . Ainsi, par unicité des solutions dans le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $x \equiv 0$ . En particulier,  $x(0) = x_0 = 0$ . contradiction.

On a de même : supposons  $y_0 > 0$ . Alors,  $\forall t \in I, y(t) > 0$ .

### 1.2.4 Étude des points d'équilibre

#### Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système d'équation différentiel (1.2) sont  $(0, 0)$  et  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

Un point d'équilibre  $(x, y)$  vérifie  $x(a - by) = 0$  et  $y(-c + dx) = 0$ . On en déduit les deux solutions :

$$(i) \quad x = 0, y = 0 \quad \text{et} \quad (ii) \quad x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b}$$

#### Nature des points d'équilibre

Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est instable.

En effet :

On s'intéresse au problème linéarisé.

$$Jac(f)(0,0) = \left( \begin{array}{cc} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{array} \right)_{|(x,y)=(0,0)} = \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & -c \end{array} \right).$$

Ainsi,  $a > 0$  est valeur propre, donc le théorème de linéarisation de Lyapounov [7] conclut à l'instabilité du point d'équilibre  $(0,0)$ . De plus

$$Jac(f) \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right) = \left( \begin{array}{cc} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{array} \right).$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $x^2 + ac$ . Ainsi, ses valeurs propres sont  $\pm\sqrt{ac}$ . Le théorème de linéarisation ne permet donc pas de conclure.

## 1.3 Généralités sur les modèles épidémiologiques

### 1.3.1 C'est quoi modèles épidémiologiques et leurs buts ?

**Les modèles mathématiques :** sont des représentations simplifiées (représentation d'un objet, d'un système ou d'un phénomène), du processus du monde réel exprimé en langage mathématique [3].

**En épidémiologie** les modèles sont utilisés pour comprendre la dynamique régissant la propagation de maladies infectieuses afin d'établir des stratégies de prévention et d'intervention, et qui permettent de diminuer l'impact sur la santé publique.

L'étude d'une épidémie est cruciale pour l'analyser et la contrôler, le but de la modélisation en épidémiologie consiste à prédire l'évolution de la maladie étudiée, ce qui permet ensuite d'agir en proposant des thérapies adéquates. On subdivise une population en compartiments dans chacun il y a des catégories des individus différents.

### 1.3.2 Bref historique

L'histoire des épidémies était toujours fascinante, la peste noire du 14 i éme siècle n'est que l'épidémie la plus célèbre de l'histoire, en Europe qui comptait environ 85 millions à l'époque.

L'étude des épidémies avec sa longue histoire a mis au point un nombre et une variété étonnants de modèles et explications pour la propagation et la cause des flambées épidémiques.

Un premier modèle intéressant impliquant une équation différentielle non linéaire par Bernoulli en 1760, a examiné l'effet de l'insulation de la variole de la vache sur la propagation de la variole. L'article contient des données intéressantes sur la mortalité infantile

à l'époque. C'est probablement la première fois qu'un modèle mathématique est utilisé pour évaluer les avantages pratiques d'un programme de contrôle de la vaccination.

### **Le premier modèle mathématique en épidémiologie (Daniel Bernoulli) :**

Le premier modèle utilisé en épidémiologie a été celui décrivant l'infection par la petite variole par Daniel Bernoulli en 1766, il était la première fois que l'ensemble des observations épidémiologiques sur la variole étaient rassemblées, conjuguées aux données démographiques et insérées dans un modèle mathématique en vue de vérifier les hypothèses et évaluer le rapport coût-bénéfice de la vaccination.

Bernoulli fut le pionnier de l'utilisation de la modélisation en épidémiologie, depuis de très nombreux modèles ont été développés et en général il y a les objectifs suivantes :

- Décrire la dynamique épidémique de pathogène d'intérêt d'une manière théorique.
- Comprendre les phénomènes épidémiologiques comme par exemple l'émergence d'une immunité grégaire ou d'une résistance aux antibiotiques.
- Estimer et étudier les paramètres cachés à l'observation directe, dans un but prédictif.
- Planifier, optimiser et tester les plans d'expérience, en complément de l'expérimentation par exemple [4].

Et d'autres travaux majeurs en épidémiologie mathématique sont dus à **P.D.En'ko** entre 1873 et 1894, c'est-à-dire que les fondations épidémiologiques mathématiques basées sur les modèles compartimentaux sont l'oeuvre de **Sir Ronald Ross** en 1911, il donne le premier modèle mathématique de la transmission du paludisme. Ce modèle avec les variables  $x_1$ ,  $x_2$  tels que :

$x_1$  : représente la proportion des humains infectieux.

$x_2$  : représente la proportion des moustiques infectieux.

qui s'écrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = mab_1x_2(1 - x_1) - \gamma x_1, \\ \dot{x}_2 = b_2a(1 - x_2)x_2 - \mu x_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

La modélisation mathématique est devenue un outil essentiel dans l'étude de l'analyse de la dynamique des maladies infectieuses, alors **Ross** utilise le modèle ci-dessus pour retarder le paludisme, il suffit à ramener la quantité de moustique infectieux en dessous d'un certain seuil.

En 1927 **W.Kermack** et **A.G.Mckendrick** ont appliqué les idées de Ronald Ross pour l'étude de la dynamique de transmission des maladies infectieuses humaines. **Kermack et**

**Mckendrick** ont appliqué les idées de **Ross** pour la dynamique de transmission dépend de la fréquence et de l'intensité des interactions entre individus susceptibles (sains) et individus infectés et infectieux. Leur résultat fondamental est publié en 1927, il joue un rôle important dans la théorie mathématiques des maladies infectieuses.

Le modèle de **Kermack et Mckendrick** de base s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta S \frac{I}{N}, \\ \dot{I} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I. \end{cases} \quad (1.5)$$

tel que :

$S$  : représente la population des susceptibles.

$I$  : population des infectées.

$R$  : population des guéris.

$N = S + I + R$  : représente la population totale et  $S(0) = S_0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = 0$

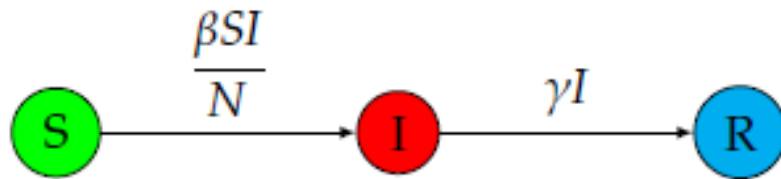


FIGURE 1.1 : Evolution des états modèle SI

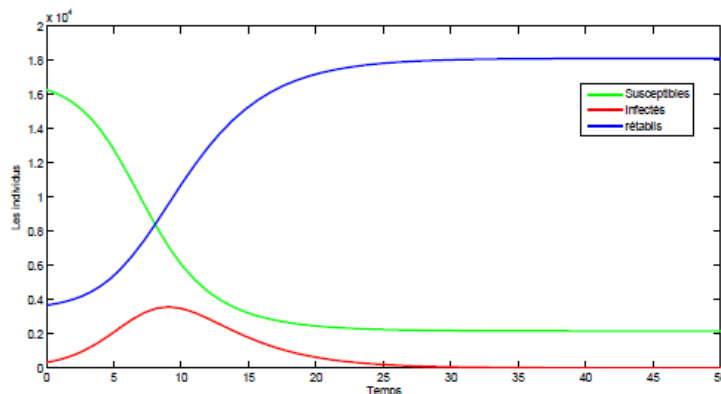


FIGURE 1.2 : Evolution des états modèle SIR

bien que le concept de seuil expression mathématique qui caractérise une condition nécessaire pour passer d'un état épidémiologie à un autre, soit l'oeuvre de Ross c'est Kermack

et Mckendrick qui sont souvent cités pour l'introduction explicite de la notion de seuil, puisque  $N$  est constante, pour  $N$  assez grandes on a l'approximation  $S(0) \approx N$  et donc au début de l'infection on a :  $\dot{I} \approx (\beta - \gamma)I$ , ou encore  $I(t) \approx (\exp(\beta - \gamma)t)I_0$ . Ainsi pour  $\frac{\beta}{\gamma} > 1$  la maladie va persister et devenir épidémique alors que si  $\frac{\beta}{\gamma} < 1$  la maladie va disparaître.

**Définition 8** La quantité  $\frac{\beta}{\gamma}$  appelé seuil ou aussi nombre de reproduction de base noté  $\mathcal{R}_0$ . Le nombre de reproduction de base peut être défini comme le nombre moyen attendu de cas directement généré par un cas dans une population. (Voir chapitre 3 pour plus de détails.)

### 1.3.3 Les modèles compartimentaux

Cette contribution ne couvre qu'une classe, importante, de modèles épidémiologiques : les modèles compartimentaux. Dans ce type de modèles, la population étudiée est divisée en un certain nombre de compartiments qui forment une partition de l'ensemble de la population : à un instant donné, un individu donné appartient nécessairement à un et un seul des compartiments. La dynamique de l'épidémie fait passer les individus d'un compartiment à l'autre.

Il existe une grande variété de modèles à compartiments. Passant du plus simple au plus complexe nous allons d'abord présenter les modèles appelés SIR, SIRS et SEIRS avant d'inclure les effets démographiques (naissances, décès, migrations). Les autres classes de modèles, par exemple statistiques ou mécanistes, ne seront pas présentés ici.

### 1.3.4 Modèle SIR à population fermée

Le premier modèle, le plus simple, envisage une population fixe d'effectif  $N$  divisée en trois sous-population (compartiments ou classes) dont l'effectif évolue au fur et à mesure de l'épidémie <sup>1</sup>

- Une partie de la population est saine et *susceptible* d'être infectée ; son effectif varie dans le temps et est désigné par la fonction  $S(t)$ . Par facilité on parlera des « susceptibles » ou de la « classe S » voire même « des S ».
- Une autre partie de la population est infectée <sup>2</sup>. C'est la classe I des « infectés » dont l'effectif est  $I(t)$ .

<sup>1</sup>Ce modèle est ancien ; on le doit aux britanniques Anderson Gray Mckendrick (1876-1943) et William Ogilvy Kermack (1898-1970) : **Kermack W.O., Mckendrick A.G.**, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. R. Soc. Lond., 115-772 (1927).

<sup>2</sup>Dans ce modèle SIR on ne fait pas la différence entre *infecté* et *infectieux*. Voir le modèle SEIR plus loin.

- Le dernier compartiment est constitué des patients immunisés contre la réinfection. On les appelle les « résistants » (classe R d'effectif  $R(t)$ ). Notons que, dans ce modèle simple, de manière sans doute un peu cynique, les patients décédés sont intégrés aux résistants : ils ne sont plus infectieux.
- On désignera par les minuscules  $s(t)$ ,  $i(t)$  et  $r(t)$  la part de la population qui est susceptible, infectée ou résistante.
- Par définition, dans ce modèle, la population totale ( $N$ ) est constante et on a  $S(t)+I(t)+R(t)=N$  soit, de manière équivalente,  $s(t)+i(t)+r(t)=1$ .

Le modèle ignore donc les dynamiques démographiques (naissances, migrations, décès) ainsi que la période d'incubation (pas de différence entre infecté et infectieux). Il considère simplement qu'à chaque instant, des individus passent d'un compartiment à l'autre : de susceptible à infecté puis d'infecté à résistant. La transition entre les compartiments est régulée par deux coefficients :  $\beta$  et  $\gamma$ ; nous les présentons successivement aux deux paragraphes suivants.

### Transitions $S \rightarrow I$

Le nombre d'individus qui passent, pendant un temps  $^3dt$ , du compartiment S au compartiment I est le produit de quatre termes :

- le nombre de personnes susceptibles  $S(t)$  ;
- la part de la population qui est infectée  $i(t)$  ;
- la durée considérée  $dt$  ;
- un coefficient de proportionnalité  $\beta$ .

Voir les figures ci dessous

---

<sup>3</sup>Il s'agit d'un temps infinitésimal mais le lecteur peu familier du calcul différentiel peut simplement considérer un temps suffisamment court pour que les différentes grandeurs considérées ne varient pas pendant ce laps de temps. Notez que l'unité choisie pour le temps est, en épidémiologie, la journée.

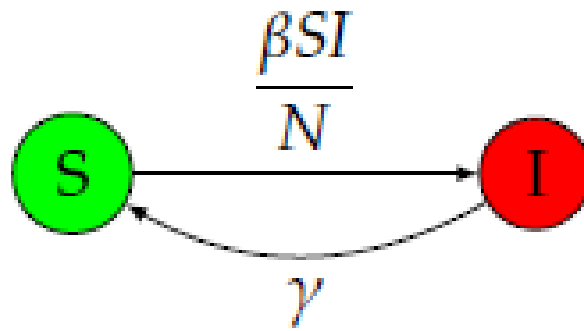


FIGURE 1.3 : Evolution des états modèle SI

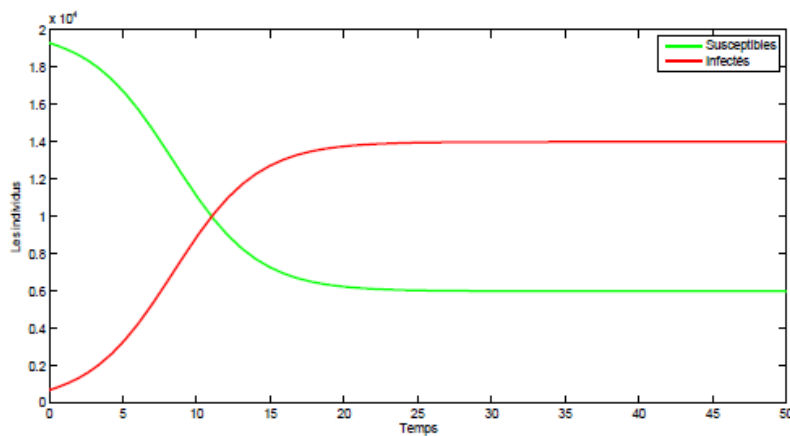


FIGURE 1.4 : Evolution des états modèle SI

Ce coefficient  $\beta$  dépend :

- de propriétés intrinsèques au pathogène concerné, essentiellement :
  - son mode de propagation : aérienne, aqueuse, par contact, par le sang et d'autres fluides corporels, par la nourriture, par les rapports sexuels non protégés etc. ;
  - sa durée de vie hors de l'organisme porteur sur et dans différents milieux ;
- de facteurs liés aux contacts entre individus et principalement :
  - la fréquence des échanges au sein de toute la population (le fait que seuls comptent les contacts avec les personnes infectieuses est pris en compte par le pourcentage  $i(t)$  d'infectieux dans la population, pas par le coefficient  $\beta$  ;
  - la dangerosité du mode du contact : si on ne considère que les seules salutations, le  $\beta$  au sein d'une population sera évidemment différent suivant que la norme

sociale impose un hochement de tête discret, une franche poignée de main, un hug à l'américaine, une embrassade simple, double ou triple ou encore, comme dans l'ancienne Union Soviétique, un baiser fraternel sur la bouche ;

- les mesures prises, dans le cadre de l'épidémie, pour réduire le taux de transmission, par exemple l'usage systématique de masques.

Si on ne peut pas agir sur les facteurs propres au pathogène, on peut par contre agir sur les facteurs liés aux comportements sociaux. Les mesures de distanciation sociale et de confinement de la population, auront un impact direct sur le coefficient  $\beta$  et donc sur l'effectif infectieux maximum rencontré au cours de l'épidémie (la hauteur du pic épidémique).

### Transitions I $\rightarrow$ R

La transition I  $\rightarrow$  R est régulée par le paramètre  $\gamma$  qui mesure la fraction des infectieux qui devient résistants par unité de temps. Ce paramètre  $\gamma$  est lié au temps  $\tau$  pendant lequel les individus restent, en moyenne, infectieux ( $\gamma = \frac{1}{\tau}$ ).

### Un peu de mathématiques : les équations de Kermack-Mckendrick

Pendant un intervalle de temps  $dt$ , le nombre  $dS$  d'individus passant du compartiment S au compartiment I est donné par :

$$dS(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot \frac{I(t)}{N} \cdot dt \rightarrow \frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}$$

L'effectif des résistants augmente par ailleurs à chaque instant au fur et à mesure que des individus infectés sont devenus résistants :

$$dR(t) = \gamma \cdot I(t) \cdot dt \rightarrow \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

Comme la population est constante, par hypothèse, nous avons :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \rightarrow \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

Dont on déduit la troisième équation :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{dS(t)}{dt} - \frac{dR(t)}{dt} \rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t)$$

Le modèle SIR consiste donc en trois équations qui s'écrivent plus simplement si on considère les trois population en terme de fraction de la population totale. On définit :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N} \quad i(t) = \frac{I(t)}{N} \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\beta s(t)i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = \gamma i(t) \end{cases}$$

Il faut ajouter à ce système de trois équations différentielles non-linéaires <sup>4</sup> un jeu de trois conditions initiales qui pourraient par exemple consister à affecter un petit effectif initial aux compartiments I et/ou R :

$$s(0) = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad i(0) = \epsilon_1, \quad r(0) = \epsilon_2 \quad (\epsilon \ll 1, \quad \epsilon_2 \ll 1)$$

.

### Quelques exemples de résultats du modèle SIR

La résolution des équations de Kermack-Mckendrick donne la fraction de la population appartenant, à un moment donné, à un compartiment donné. La fonction  $i(t)$  a une forme en cloche très caractéristique : croissance lente, point d'inflexion marquant le début du ralentissement de la croissance, passage par un pic d'infection ,début de la décroissance qui d'abord rapide puis plus lent .on voit aussi que l'épidémie se termine lorsque -dans ce cas particulier -80% de la population est devenue résistante .C'est le principe de l'immunité de groupe .

## 1.4 Quelques enrichissements du modules SIR

### 1.4.1 Modèle SIRS à population fermée

le modèle **SIRS** est une extension du modèle **SIR** considérant que l'immunité par un individu peut n'être que temporaire :chaque jour, une fonction  $\xi$  des individus résistants redevient susceptible . La durée moyenne de l'immunité dans la population qui résiste est l'inverse de  $\xi$ . Il s'agit évidemment d'une moyenne sur la population qui recouvre des immunités individuelles très différentes. Certains individus auront développé une immunité forte ,peut-être permanente, d'autres une immunité queas- inexistant qui les conduira à être rapidement réinfectés s'ils sont ou restent en contact avec des individus infectieux.

On voit bien, en avril 2020, que la qualité ou la durée de l'immunité développée après une première infection au Covid-19 est une des principales questions ouvertes. Un coefficient

---

<sup>4</sup>Les deux premières équations sont *non-linéaires* car apparaissent le *produit* de deux inconnues (nombre ou proportion d'infecté multiplié par le nombre ou proportion de susceptibles). La troisième équation est linéaire car les inconnues y apparaissent sous forme de monomes du premier degré.

$\xi$  élevé (une immunité brève) peut conduire à une succession de pics épidémiques voire à une situation endémique.

### 1.4.2 Modèle SEIRS à population fermée

Un défaut majeur des modèles **SIR** ou **SIRS** est d'ignorer l'important phénomène de l'*incubation* ; dans la plupart des maladies, il s'écoule en effet un délai plus ou moins long entre le moment où l'individu est *infecté* et celui où il devient *infectieux*. Les modèles **SEIRS** considèrent quatre compartiments de la population contenant respectivement les individus : susceptibles (S), exposés c'est à dire infectés mais non encore infectieux (E), infectieux (I) et résistants (R).

Le coefficient  $\beta$  régule désormais la transition  $S \rightarrow E$  et un nouveau coefficient,  $\sigma$ , régule la transition infecté-infectieux ( $E \rightarrow I$ ).

Notons que  $\frac{1}{\sigma}$  désigne la *durée moyenne de la période d'incubation*. La période d'incubation crée un *effet retard* ; le délai qui survient entre les mesures prises et leur incidence sur l'épidémie peut conduire à les abandonner trop tôt, à les maintenir trop longtemps ou à engendrer une résistance de la population qui ne voit pas de lien direct entre les mesures imposées et une amélioration ou détérioration de la situation (argument du type « on nous confine mais le nombre de morts augmente quand même ! »).

### 1.4.3 Effets épidémiologiques des traitements

Il faut séparer ici l'effet individuel des traitements sur les patients de ceux, globaux, que leur disponibilité a sur la dynamique de l'épidémie. Il faut en particulier séparer les traitements symptomatiques des traitements de fond, de type antibiotiques ou antiviraux.

Si les traitements symptomatiques peuvent améliorer considérablement la qualité et l'espérance de vie du patient, ils n'ont par contre guère d'effets sur la dynamique de l'épidémie puisqu'ils n'affectent pas directement le caractère infectieux (contagieux) du patient.

Les traitements de fond, qui réduisent la charge virale ou bactériologique, diminuent par contre le taux de reproduction de base  $R_0$  en diminuant  $\beta$  (infectiosité réduite) et en augmentant  $\gamma$  (diminution de la durée pendant laquelle le patient est infectieux) et donc le taux de croissance du compartiment  $R$ . Si le traitement peut être administré aux *exposés*, une part de ceux-ci peut directement rejoindre les résistants sans passer par le compartiment  $I$ .

### 1.4.4 Le rôle d'un vaccin

La vaccination peut avoir deux effets :

- permettre à une partie du compartiment  $S$  de court-circuiter les compartiments  $E$  et  $I$  pour se retrouver immédiatement dans le compartiment  $R$  (vaccination des individus sains en cours d'épidémie);
- permettre à une partie du compartiment  $E$  d'éviter la phase infectieuse (vaccination des individus exposés avant l'entrée dans la phase infectieuse).

Ces effets se modélisent aisément par des termes supplémentaires proportionnels au taux de vaccination effectif et aux populations concernées. Les coefficients ( $V_S$  et  $V_E$ ) qui régulent les transitions  $S \rightarrow R$  et  $E \rightarrow R$  intègrent deux éléments bien distincts : le taux de vaccination et l'efficacité moyenne de celle-ci pour chacun des deux compartiments  $S$  et  $E$ . Ces deux coefficients sont différents parce que l'efficacité du vaccin sur la population exposée est plus faible que sur la population saine. Ceci s'explique notamment par le fait que l'efficacité de la vaccination sur une personne déjà infectée dépend du moment où survient cette vaccination au cours du processus d'incubation.

#### 1.4.5 Modèle SIR : avec naissance et avec mort

Considérons une population  $N$  divisée en classes d'individus susceptibles, infectieux et guéris (ou rétablis), avec  $S(t)$ ,  $R(t)$  et  $I(t)$  représentant respectivement leurs nombres au temps  $t$ . Ainsi,  $N = S(t) + R(t) + I(t)$ .

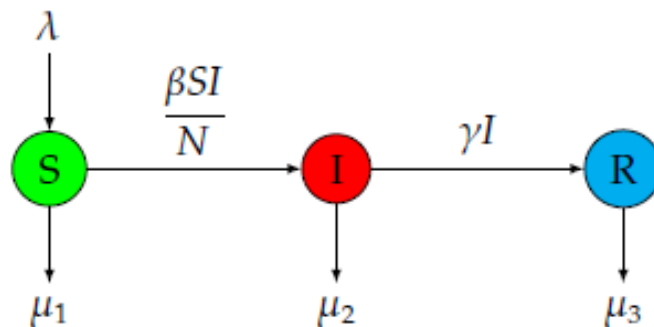


FIGURE 1.5 : Evolution des états modèle SIR

Nous supposons qu'il n'y a pas de transmission verticale, ce qui signifie que tous les nouveaux nés sont susceptibles d'être infectés. Nous supposons également que le taux de natalité compense les mortalités. Donc  $\lambda = \mu_1 S + \mu_2 I + \mu_3 R$ . Il est important de noter que, dans ce modèle, la maladie confère une immunité permanente. Le contact entre les individus est modélisé par la loi d'action de masse. Voici le schéma graphique correspondant [8] :

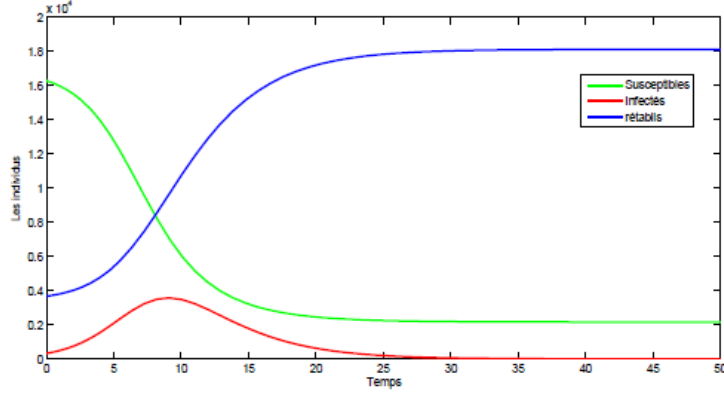


FIGURE 1.6 : Evolution des états modèle SIR

La dynamique de ce modèle est donnée par le système suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \lambda - \frac{\beta SI}{N} - \mu_1 S, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R. \end{cases} \quad (1.6)$$

Qui se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3 R, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu_2 I - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu_3 R. \end{cases} \quad (1.7)$$

La taille de la population est constante, i.e :  $S+I+R = N$ , on peut donc mettre l'équation des guéris. On obtient donc le système plan :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \mu_2 I + \mu_3(N - I - S), \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu_2 + \gamma)I. \end{cases} \quad (1.8)$$

Par raison des simplicités on considère les prévalences, i.e. les proportions.

Si on note  $\frac{S}{N}, \frac{I}{N}$ , les proportions de susceptibles et d'infectieux, encore par  $S$  et  $I$ .

Alors système (1.8) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 S - \beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I. \end{cases} \quad (1.9)$$

Pour ce système, nous avons les conditions suivantes :  $0 \leq S, 0 \leq I$  et  $S + I \leq 1$ . Le domaine biologique de ce système est le simplexe standard. L'ensemble  $\Omega = \{(S, I) : S \geq 0; I \geq 0; S + I \leq 1\}$  est un compact positivement invariant pour (1.9). Par conséquent le système est bien posé. Le nombre de reproduction de base peut être exprimé comme :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu_2 + \gamma}.$$

### Stabilité du DFE (point d'équilibre sans maladie)

Le système (1.9) a un équilibre sans maladie, donné par :

$$(S^*, 0) = (1, 0).$$

**Théorème 4** *Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  alors le DFE est globalement asymptotiquement stable sur  $\Omega$ .*

**Preuve 3** *On considère la fonction de Lyapunov  $V(S, I) = I$ . Nous avons :*

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dI}{dt}, \\ &= \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I, \\ &= I(\mathcal{R}_0 S - 1)(\mu_2 + \gamma), \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

*De plus  $\frac{dV}{dt} = 0$  si  $I = 0$  ou  $S = S^*$  et  $\mathcal{R}_0 = 1$ . Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans cette ensemble est :  $\Gamma = \{(S, I) \in \Omega / \frac{dV}{dt}(S, I) = 0\}$ . qui est réduit au **DFE**. Puisque nous somme dans un compact positivement invariant, Par le principe d'invariance de LaSalle, le **DFE** est globalement asymptotiquement stable dans  $\Omega$ .*

### Stabilité globale de l'équilibre "EE" ( point d'équilibre avec maladie)

Un équilibre pour le système (1.9) différent du DFE, est donné par :  $(S^*, I^*)$ , où :

$$S^* = \frac{\mu_2 + \gamma}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}, I^* = \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right).$$

Cette équilibre est dans le simplexe, i.e.  $0 \leq S^*, 0 \leq I^*$  et  $S^* + I^* \leq 1$  si et seulement si  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Clairement  $0 \leq I^*$  est équivalent à  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Maintenant on peut écrire :

$$S^* + I^* = \frac{\frac{\gamma}{\mathcal{R}_0} + \mu_3}{\gamma + \mu_3}.$$

Quand  $\mathcal{R}_0 = 1$  cette équilibre coïncide avec le **DFE**. Alors il existe un unique équilibre endémique dans l'intérieur du simplexe si et seulement si  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

**Théorème 5** [7] *Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le **DFE** est instable et il existe un unique équilibre endémique  $(S^*, I^*)$  qui est globalement asymptotiquement stable sur le domaine :  $\Omega \setminus [0, 1] \times \{0\}$ . En d'autres termes sur le simplexe de la variété stable du **DFE**.*

**Preuve 4** *Soit  $\Omega_1$  l'ensemble défini par : Supposons que  $\mathcal{R}_0 > 1$ .*

$$\Omega_1 = \{(S, I) / S \geq \frac{\mu_2 - \mu_3}{\beta}, I \geq 0, S + I \leq 1\}.$$

*L'ensemble  $\Omega_1$  est un compact positivement invariant. On considère sur  $\Omega_1^\circ$  la fonction de Lyapunov définie par :*

$$V(S, I) = (S - S^*) - \frac{\mu_3 + \gamma}{\beta} \log \frac{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S^*} + (I - I^*) - I^* \log \frac{I}{I^*}.$$

*Il est facile de vérifier que  $V$  est définie positive, c'est-à-dire  $V(S, I) \geq 0$  et  $V(S^*, I^*) = 0$ . Sa dérivée le long des trajectoires de (1.9) est donnée par :*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{S} - (\mu_3 + \gamma) \frac{\mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 S - \beta SI}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} + \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I - I^*(\beta S \\ &\quad - (\mu_2 + \gamma)), \\ &= \dot{S} - (\mu_3 + \gamma) \frac{(\mu_3 - \mu_3 S)}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} + (\mu_3 - \gamma)I + \beta SI - (\mu_2 + \gamma)I - I^*(\beta S \\ &\quad - (\mu_2 + \gamma)), \\ &= \mu_3(1 - S) - (\mu_3 + \gamma) \frac{(\mu_3 - \mu_3 S)}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} - I^*(\beta S - (\mu_2 + \gamma)), \\ &= \mu_3(1 - S) \left[ 1 - \frac{\mu_3 + \gamma}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} \right] - I^*(\beta S - (\mu_2 + \gamma)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_3(1-S) \left( \frac{-\beta S^* + \beta S}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} \right) - \frac{\mu_3}{\mu_3 + \gamma} (1-S^*)(\beta S - \beta S^*), \\
&= -\mu_3 \beta (S^* - S) \left[ \frac{1-S}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} - \frac{1-S^*}{\mu_3 + \gamma} \right], \\
&= -\mu_3 \beta (S^* - S) \left[ \frac{1-S}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} - \frac{1-S^*}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} \right], \\
&= -\frac{\beta \mu_3}{\mu_3 + \gamma} \left[ \frac{-\mu_2 + \mu_3 + \beta}{-\mu_2 + \mu_3 + \beta S} \right] (S - S^*)^2.
\end{aligned}$$

$$\leq 0.$$

Ainsi, nous concluons que  $\dot{V}$  est semi-définie négative. Par conséquent, l'équilibre endémique "**EE**" est stable selon les théorèmes de Lyapunov. Nous prouvons l'attractivité de l'équilibre endémique en utilisant le principe de LaSalle.

L'ensemble sur lequel  $\dot{V} = 0$  est donné par  $E = \{(S, I) \in \Omega_1^\circ / S = S^*\}$ . Sur cet ensemble, On a  $\dot{S} = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 S^* - \beta S^* I = 0$ , d'où

$$I = \frac{\mu_3 - \mu_3 S^*}{\beta S^* - \mu_2 + \mu_3} = I^*.$$

De plus, le plus grand ensemble invariant contenu dans  $\{(S, I) \in \Omega_1^\circ / V(S, I) = 0\}$  est réduit à l'équilibre endémique. Donc  $(S^*, I^*)$  est attractif. Donc l'**EE** est GAS sur  $\Omega_1$ .

Si  $S \leq \frac{\mu_2 - \mu_3}{\beta}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)I - \mu_3 - \beta SI, \\
&= \mu_3(1-S) + (\mu_2 - \mu_3 - \beta S)I, \\
&> 0.
\end{aligned}$$

De plus, toutes les trajectoires dans  $\Omega^\circ \setminus \Omega_1^\circ$  entrent dans  $\Omega_1^\circ$ , i.e l'ensemble  $\Omega_1^\circ$  est absorbant. Ainsi, l'équilibre endémique est GAS sur  $\Omega^\circ$ .

Sur la frontière  $S = 0$  et  $S + I = 1 \Rightarrow I = 1$ , le champ de vecteur point strictement vers l'intérieur  $\Omega^\circ$  de Seule l'axe  $S$  est invariant. L'équilibre endémique est **GAS** sur :

$$\Omega \setminus \{(S, I) : I = 0; 0 \leq S \leq 1\}.$$

# Chapitre 2

## Théorie du contrôle optimal

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons les concepts de base de la théorie du contrôle optimal [8]. Il s'organise comme suit : nous donnons un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Nous présentons les différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes, et nous donnons le principe du maximum de Pontryagin.

### 2.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, un critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état, seront notées  $x_i, i = 1, \dots, n$ . Si le système évolue dans le temps, alors les variables  $x_i$  sont des fonctions de  $t : x_i(t), i = 1, \dots, n$  où  $t$  désigne le temps, avec  $t \in [0, T]$ . Les  $n$  variables  $x_i(t)$  seront gouvernées par  $n$  équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)),$$

où  $f$  est un vecteur de  $n$  composantes  $f_i, i = 1, \dots, n$ ,  $f$  peut être linéaire ou non linéaire. Les variables de contrôle seront notées  $u_j(t), j = 1, \dots, m$ , elles doivent être intégrables par rapport à  $t$ . On définit aussi l'ensemble des commandes admissibles  $U$  qui peut être borné ou non borné.

## Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les  $u_j(t)$ ,  $j = 1 \dots m$ , par des constantes. Par la suite, nous considérons ce type de problème avec  $a_j \leq u_j \leq b_j$ . Notons que l'on peut remplacer  $u_j$  par  $v_j$  en posant  $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) - \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$  et ainsi  $v_j$  est aussi intégrable et l'on a  $-1 \leq v_j \leq 1$ , donc lorsque  $U$  est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

## Commande Bang-Bang

On suppose que  $U$  est un polyèdre ((cube) $[-1, 1]^m$  dans  $\mathbb{R}^m$ ). Un contrôle  $u \in U$  est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant  $t$  et chaque indice  $j = 1, 2, \dots, m$ , on a  $|u_j(t)| = 1$ . En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

Un problème de contrôle optimal est dit de Bolza s'il se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_{t_0}^T L(t, x(t), u(t)) dt, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & (2.1.1) \\ x(t_0) = x_0 \in M_0, & (2.1.2) \\ x(T) = x_f \in M_f, & (2.1.3) \\ u(t) \in U, t \in I = [t_0, T], & (2.1.4) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $f$  est une application de classe  $C^1$  de  $I \times V \times U$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $L$  est une application de classe  $C^1$  de  $I \times V \times U$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $g$  une fonction de  $I \times V$  dans  $\mathbb{R}$  continue sur  $V$ , elle dépend de  $T$  qui est le temps final (fixé ou libre) et de l'état final  $x(T)$ .

Pour tout contrôle  $u \in U$ , on définit le coût de la trajectoire associée  $x_u(\cdot)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , avec  $I$  un intervalle de temps dans  $\mathbb{R}$ , cette fonction dépend de  $x(\cdot)$  appelée équation d'état. En pratique, l'état du système peut représenter à la fois la vitesse, la position, la température et d'autres paramètres mesurables, et  $u(\cdot)$  est la commande du système, telles que  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U$  est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur  $I$  à valeurs dans l'ensemble non vide  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Par commodité d'écriture, on suppose dans tout la suite que  $t_0 = 0$ . Alors  $x(0)$  est la position initiale du système,  $x(T)$  est la position finale du système, où  $M_0$  et  $M_f$  sont deux sous-ensembles des variétés de  $V$ . Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires  $x_u(\cdot)$  solution de  $\dot{x}_u(t) = f(t, x(t), u(t))$ , telles que  $x_u(0) \in M_0$  et  $x_u(T) \in M_f$  toute en minimisant le coût  $J(T, u)$ .

Le nom du problème est donné suivant la forme du coût. Ainsi, on distingue trois autres types de problèmes de contrôle optimal :

- **Problème de Lagrange**

C'est le problème dont critère à minimiser est égal à

$$J(T, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.2)$$

c'est à dire :  $g(T, x(T)) = 0$ .

- **Problème de Mayer**

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à

$$J(T, u) = g(T, x(T)), \quad (2.3)$$

c'est à dire :  $L(t, x(t), u(t)) = 0$ .

- **Problème du temps minimal**

Si  $g(T, x(T)) = 0$  et  $L(t, x(t), u(t)) = 1$ , ou bien  $g(T, x(T)) = T$  et  $L(t, x(t), u(t)) = 0$ , alors le problème correspond au problème du temps minimal.

**Remarque 3** *On remarque que le problème de Bolza est un problème qui regroupe la forme de lagrange et la forme Mayer, par conséquent, ce problème s'appelle aussi problème de Mayer-Lagrange.*

L'unicité de la solution du système est assurée par la théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles [2]. Soit  $x(\cdot)$  la solution de l'équation du système (2.1),  $x(\cdot)$  varie en fonction du contrôle  $u$ . Le problème du contrôle optimal consiste à déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_f$  de sorte à minimiser le coût. Pour résoudre un problème de ce type, la première question à se poser est :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle  $u(t) \in U$  telle que la trajectoire  $x(t)$  associée relie un point de l'ensemble de départ  $x_0 \in M_0$  à une cible terminale  $x_f \in M_f$  en un temps fini ?

La notion qui nous permet de répondre à cette question est l'étude de la contrôlabilité du système qui est le problème de contrôlabilité, appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle  $u \in U$  telle que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial  $x_0 \in M_0$  à un état terminal  $x_f \in M_f$ , et qui de plus minimise la fonctionnelle  $J(T, u)$  ?

## 2.3 Contrôlabilité

### 2.3.1 Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, \forall t \in I. \quad (2.4)$$

**Définition 9** L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) | u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}, \quad (2.5)$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (2.4) associée au contrôle  $u$ .

Autrement dit  $Acc(x_0, T)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.4) au temps  $T$  lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ . Pour la cohérence, on pose  $Acc(x_0, 0) = \{x_0\}$ .

**Définition 10** Le système (2.4) est dit contrôlable si pour tout points  $x_0 \in M_0$  et  $x_f \in M_f$ , il existe un contrôle  $u(\cdot)$  telle que la trajectoire associée à  $u$  relie  $x_0$  à  $x_f$  en un temps fini.

**Définition 11** Le système est dit contrôlable en temps  $T$  si

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque  $t$  depuis  $x_0$  si

$$\mathbb{R}^n = \cup_{T \geq 0} Acc(x_0, T).$$

### 2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

#### Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

**Théorème 6** [8] Soit le système linéaire autonome de  $\mathbb{R}^n$  suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad (2.6)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices de dimension  $(n \times n)$  et  $(n \times m)$  respectivement qui ne dépendent pas du temps  $t$ ,  $x(t), r(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Le système (2.6) est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B). \quad (2.7)$$

est de rang  $n$ .

La matrice  $K$  est appelée matrice de Kalman, et la condition  $\text{rang } K = n$ , est appelée condition de Kalman.

**Remarque 4** *La condition de Kalman ne dépend ni de  $T$  ni de  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

### Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes

**Théorème 7** [8] *Un système linéaire non-autonome de  $\mathbb{R}^n$  donné par*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad (2.8)$$

*est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice*

$$C = \int_0^T (F(t))^{-1} B(t) B'(t) (F'(t))^{-1} dt, \quad (2.9)$$

*est inversible.*

**Remarque 5** *La matrice  $C$  est appelée matrice de contrôlabilité, elle ne dépend pas de la condition initiale  $x_0$  mais elle dépend du temps final  $T$ . Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en temps  $T$  depuis tout point.*

### 2.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce cas, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \\ x(0) = x_0, u \in U, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , fonction non linéaire du contrôle  $u(\cdot)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est l'état initial du système (2.10).

**Définition 12** *Soit  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ . On dit que le système (2.10) est localement contrôlable au voisinage de  $x_1$  en temps  $T$  depuis  $x_0$ , si  $x_1 \in \text{Acc}(x_0, T)^\circ$ , où  $\text{Acc}(x_0, T)^\circ$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $\text{Acc}(x_0, T)$ .*

Autrement dit, il existe un voisinage  $V$  dans  $V(x_1)$  tel que  $V \subset \text{Acc}(x_0, T)$ .

## Application entrée-sortie

Considérons pour le système (2.10) le problème de contrôle suivant : Étant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , trouver un temps  $T$  et un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  telle que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$ , solution de (2.10), vérifie

$$x_u(0) = x_0, x_u(T) = x_1. \quad (2.11)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition 13** *L'application entrée-sortie en temps  $T$  du système (2.10) initialisée à  $x_0$  est l'application*

$$\begin{aligned} E_T : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto x_u(T), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $U$  est l'ensemble des contrôles  $u$  telle que la trajectoire associée est bien définie sur  $[0, T]$ .

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps  $T$  associe à un contrôle  $u$  le point final de la trajectoire associée à  $u$ .

**Définition 14** *Soit  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , on dit que le système (2.10) est localement contrôlable au voisinage de  $x_1$  en temps  $T$  depuis  $x_0$  si  $\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V, \exists u \in U$  tel que  $y = E_T(u)$ .*

**Remarque 6** *L'application entrée-sortie  $E_T$  est différentiable au sens de Fréchet.*

Calculons sa différentielle à l'ordre un, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, u \in U, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Définition 15** *Le système (2.13) est appelé système linéarisé du système (2.10) le long de  $u(\cdot)$ .*

*La solution du système linéarisé (2.13) en temps  $T$  est donnée par :*

$$\begin{aligned} \delta x(T) &= \int_0^T e^{t-s} dB(u(s))\delta u(s)ds, \\ dE_T(u)\delta u &= x_{u+\delta u}(T) - x_u(T), \end{aligned}$$

où  $dE_T(u)$  est l'application entrée-sortie du système (2.13).

**Proposition 1** [8]  *$dE_T(u)$  est surjective si et seulement si le système linéarisé contrôlable.*

**Remarque 7** *Si le système linéarisé (2.10) est contrôlable alors  $dE_T(u)$  est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que  $E_T$  est localement surjective, de la proposition (1), on déduit que le système de départ(2.10) est localement contrôlable au voisinage de  $x_1$ .*

## 2.4 Méthodes de résolution

Dans cette partie, on présente deux types de méthodes numériques pour résoudre un problème de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes [8]. Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle optimal original et le transformer en un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire sous contraintes. Parmi les méthodes indirectes, on cite la méthode de tir. Cette méthode consiste à appliquer le principe du maximum de Pontryagin pour obtenir un problème aux limites. De plus, la méthode de tir nécessite l'utilisation de la méthode de Newton. Les méthodes indirectes ont une bonne précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix des conditions initiales.

### 2.4.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation linéaire, quadratique ou non-linéaire en dimension finie. On cite par exemple la méthode de discrétisation totale.

#### Discrétisation totale

La méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  de l'intervalle  $[0, T]$ . Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant  $h_i = t_{i+1} - t_i$ ,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Cette discrétisation conduit donc au problème de programmation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min F(Z) \\ x_{i+1} &= x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N-1, \\ u_i &\in \Omega, i = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$  et  $Z = (x_1, x_2, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ , avec  $x_0$  donné.

### 2.4.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

## Principe du Maximum de Pontryagin

**Théorème 8** [4, 8, 6] *Considérons le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.14)$$

où  $f(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle  $[0, t_e(u)]$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

Soient  $M_0$  et  $M_f$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final  $M_f$  en  $t(u) < t_e(u)$ .

Par ailleurs, on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[0, T]$  :

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt,$$

où  $L(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g(T, x(T)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $C^1$ , et  $x(\cdot)$  est la trajectoire solution de (2.14) associée au contrôle  $u$ .

Le but est de déterminer une trajectoire joignant  $M_0$  à  $M_f$  et minimisant le coût.

Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel  $p^\circ \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^\circ)$  est non trivial, et tels que, pour presque tout  $t \in [0, T]$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^\circ, u(t))}{\partial p(t)}, \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^\circ, u(t))}{\partial x(t)}, \\ \frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^\circ, u(t))}{\partial u(t)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où le Hamiltonien du système (2.14) est la fonction

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p, p^\circ, u) &\mapsto H(t, x, p, p^\circ, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^\circ L(t, x, u), \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ , et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$  :

$$H(t, x(t), p(t), p^\circ, u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^\circ, u(t)). \quad (2.17)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible  $M_f$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $T$  :

$$\max_{u \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \quad (2.18)$$

**Remarque 8** Si le système est autonome, alors le Hamiltonien  $H(t, x, p, p^0, t)$ ,  $t \in [0, T]$  est constant le long de la trajectoire, i.e.,  $f$  et  $L$  ne dépendent pas de  $t$ , alors  $H$  ne dépend pas de  $t$ ,  $H = \text{cste}$ .

**Remarque 9** La convention  $p^0 \leq 0$  conduit au principe du maximum, tandis que  $p^0 \geq 0$  conduit au principe du minimum, i.e., la condition (2.17) serait une condition de maximum.

**Définition 16** Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution des équations (2.15) et (2.17). Si  $p^0 = 0$ , on dit que l'extrémale est anormale, et si  $p^0 \neq 0$  l'extrémale est dite normale.

### Condition de transversalité

La condition de transversalité indique le comportement que doit avoir le contrôle quand on arrive à l'horizon fini (ou infini) : La manière dont le contrôle doit traverser la ligne d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir la trajectoire optimale parmi toutes les trajectoires possibles. Cette condition est donnée par les équations provenant des conditions dites aux deux bords, en  $t_0$  (temps initial) d'une part et en  $T$  d'autre part sont appelées équations de transversalité.

Si de plus  $M_0$  et  $M_f$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x_0 \in M_0$  et  $x_f \in M_f$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux),

$$p(0) \perp T_{x_0} M_0, \quad (2.19)$$

et

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x_f} M_1. \quad (2.20)$$

**Remarque 10** Si le contrôle  $u$  est continue au temps  $T$ , la condition peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \quad (2.21)$$

## Méthode de tir simple

Le principe de la méthode de tir est le suivant : Considérons le problème de contrôle optimal (2.10), et supposons dans un premier temps que le temps final  $T$  est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de  $(x(t), p(t))$ , alors le système extrémal est un système différentiel de la forme  $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ , où  $z(t) = (x(t), p(t))$ , et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme  $R(z(0), z(T)) = 0$ . Finalement, on obtient le problème aux limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Notons  $z(t, z_0)$  la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(0) = z_0, \quad (2.23)$$

et posons  $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$ . Le problème aux limites (2.22) est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0, \quad (2.24)$$

i.e., il s'agit de déterminer un zéro de la fonction  $G$ . L'équation précédente peut donc être résolue par une méthode de Newton, pour plus d'informations consulter [8].

## 2.5 Comparaison des méthodes

Les méthodes directes présentent les avantages suivants par rapport aux méthodes indirectes :

- Leur mise en oeuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes. En particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations.
- Elles sont plus robustes.
- Elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (contrairement aux méthodes indirectes).
- Il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état.
- Elles permettent de calculer les contrôles optimaux sous forme de feedback.

En revanche :

- Les méthodes directes sont moins précises que les méthodes indirectes. Par exemple, pour le problème de contrôle optimal issu de l'aéronautique étudié au chapitre suivant, la précision des méthodes directes s'avère en général insuffisante, malgré l'augmentation du nombre de pas de la discrétisation.
- La discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal comporte souvent plusieurs minima (locaux), et les méthodes directes peuvent converger vers ces minima, pourtant la solution ainsi déterminée peut s'avérer être très éloignée de la vraie solution optimale.
- Les méthodes directes sont gourmandes en mémoire, et de ce fait peuvent devenir inefficaces si la dimension du problème d'optimisation obtenu après discrétisation est trop grande.

Les avantages des méthodes indirectes sont :

- L'extrême précision numérique.
- La méthode de tir multiple est, par construction, parallélisable, et son implémentation peut donc être envisagée sur un réseau d'ordinateurs montés en parallèle.

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivants :

- Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.
- Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier a posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.
- Rigidité de la méthode : la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, d'autre part la présence de contraintes sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale.

## Exemple

Considérons le problème du temps minimal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Le contrôle  $u(t)$ ,  $t \in I = [0, T]$  vérifie  $|u(t)| \leq 1$ . Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final  $(-2, 2)$ , en allant de l'origine.

Cherchons la solution théoriquement et comparons les résultats des deux méthodes directe et indirecte.

L'Hamiltonien du système (2.25) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u) = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0$$

où  $p_x$  et  $p_y$  sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = -p_y(t) \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} .$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_y(t) = c^{ste} = \gamma \\ p_x(t) = -\gamma t + \mu \end{cases} .$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_x(t)u + p_y(t)x(t) + p^0,$$

alors quelque soit la valeur de  $p^0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(p_x(t)u + p_y(t)x(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \Leftrightarrow u = \text{sign}(p_x(t)). \end{aligned}$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_x(t) < 0 \\ +1 & \text{si } p_x(t) > 0, \quad t \in I \end{cases}$$

Nous avons mis en œuvre une méthode indirecte, les résultats sont tracés dans la Figure 2.1

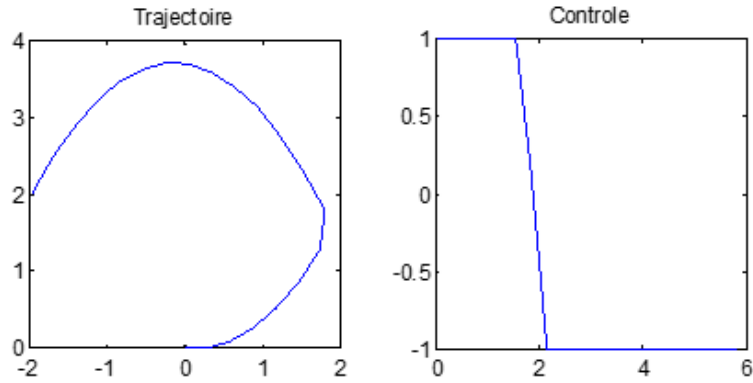


FIGURE 2.1 : Evolution des états méthode indirecte

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande  $u(\cdot)$  et l'état  $x(\cdot)$  en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$$

Le problème (2.14) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow \min$$

sous les contraintes :

$$x[i + 1] = x[i] + \frac{T}{N}u[i]$$

$$y[i + 1] = y[i] + \frac{T}{N}x[i].$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure 2.2

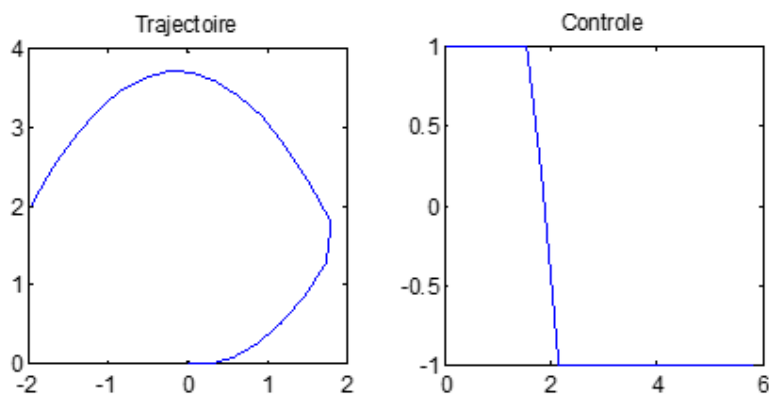


FIGURE 2.2 : Evolution des états méthode directe

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit  $t_c$ , ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour  $u(t) = 1$  sur  $[0, t_c]$  et pour  $u(t) = -1$  sur  $[t_c, T]$  est :

Si  $t \in [0, t_c]$ , on obtient  $x(t) = t$  et  $y(t) = \frac{1}{2}t^2$

Si  $t \in [t_c, T]$ , on obtient  $x(t) = -t + t_c$  et  $y(t) = \frac{-1}{2}t^2 + t_c t - \frac{1}{2}t_c^2$

Les trajectoires obtenues en prenant  $u = +1$  puis  $u = -1$  sont illustrées dans la figure

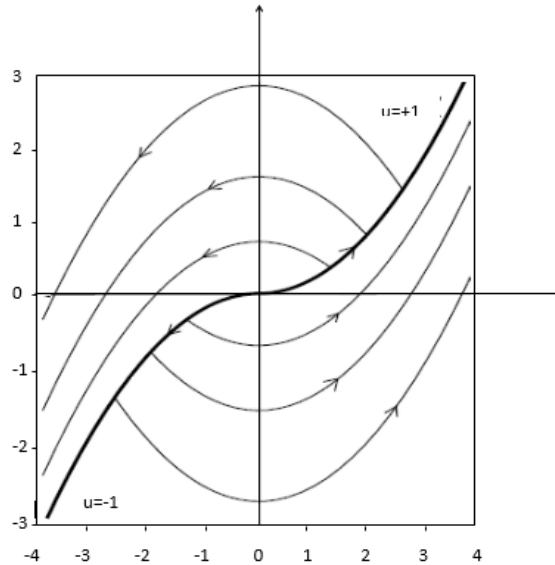


FIGURE 2.3 : Trajectoires optimales

### 2.5.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Puis nous avons présenté le principe général des méthodes numériques existantes pour la résolution du problème, à savoir les méthodes directes (méthode de discrétisation totale) et les méthodes indirectes (méthode de tir). Finalement, nous avons rappelé le principe du maximum de Pontryagin qui constitue l'outil de base de la théorie du contrôle optimal en général et la méthode de tir en particulier.

# Chapitre 3

## Contrôle optimal : Covid-19

### 3.1 Introduction

La maladie **COVID-19**, apparue en Chine à la fin de l'année 2019, est causée par le **SARS-CoV-2**, un virus appartenant à la grande famille des coronavirus. Dans notre travail, nous avons utilisé un modèle compartimental en épidémiologie basé sur les travaux de **Kermack et McKendrick** [3]. En utilisant des équations différentielles ordinaires [2], nous avons modélisé cette épidémie comme un problème de contrôle optimal. Notre objectif (et bien sûr celui de toute l'humanité) est de maximiser le nombre de guéris et de minimiser le nombre d'infectés, tout en attirant l'attention du peuple algérien sur la gravité de la situation.

Dans la première partie de ce travail, nous considérons le modèle **SIR** [3] en y ajoutant d'autres compartiments, à savoir la proportion d'individus les plus exposés à la maladie (personnes atteintes de maladies chroniques et personnes âgées), les personnes guéries ainsi que celles décédées. Dans notre travail, le contrôle  $u(\cdot)$  représente le taux de vaccination.

### 3.2 Énoncé du Problème

En partant du modèle de base (**SIR**), nous avons essayé d'améliorer les équations afin qu'elles correspondent mieux à la réalité. En effet, de nombreux paramètres interviennent lors de la propagation d'un virus et ne sont pas pris en compte dans le modèle de base. La lettre utilisée pour représenter un compartiment est également utilisée pour représenter le nombre d'individus dans ce compartiment. Lors de toute épidémie, certaines personnes susceptibles deviennent infectées. L'étude est réalisée sur une période de  $T = 70$  jours et  $T = 150$  jours. Pour  $t \in [0, T]$ , désignons par  $\alpha$  le taux d'infection,  $S(\cdot)$  vérifie la relation

suivante :

$$\dot{S}(t) = -\alpha S(t)I(t), S(0) = S_0 > 0. \quad (3.1)$$

Comme dans toute épidémie, les personnes infectées sont vaccinées, notons  $u(t), t \in [0, T]$  le taux de vaccination,  $0 \leq u(\cdot) \leq u_{max}$ , dans ce cas, nous aurons :

$$\dot{S}(t) = \Lambda - (\alpha I(t) + u(t))S(t) - \mu s5T, S(0) = S_0 > 0. \quad (3.2)$$

$I(\cdot)$  est tel que :

$$\dot{I}(t) = \beta E(t) - (\delta + \gamma)I(t), I(0) = I_0 > 0, \quad (3.3)$$

où  $E(\cdot), t \in [0, T]$  désigne les personnes exposées à l'épidémie, il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t), E(0) = E_0 > 0. \quad (3.4)$$

Comme dans toute épidémie, les personnes infectées sont soit guéries (compartiment  $R$ ) après avoir été vaccinées, soit décédées (compartiment  $D$ ), cela est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t), R(0) = 0, \quad (3.5)$$

et

$$\dot{D}(t) = \delta I(t), D(0) = 0, t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Les coefficients positifs sont tels que :

$\Lambda$  sont les naissances,  $\mu$  taux de mort naturelle [5]  $\alpha > 0$  est le taux d'infection, le taux d'incubation  $\beta$  est le taux auquel les individus en latence deviennent infectieux. Étant donnée la durée moyenne d'incubation  $Y$ , on a  $\beta = \frac{1}{Y}$ ,  $\gamma = \frac{1}{K}$ , qui est déterminé par la durée moyenne de récupération  $K$  de l'infection.  $\delta$  est le taux de mortalité.

L'évolution des états considérés est montrée dans la figure suivante (voir Figure 3.1) :

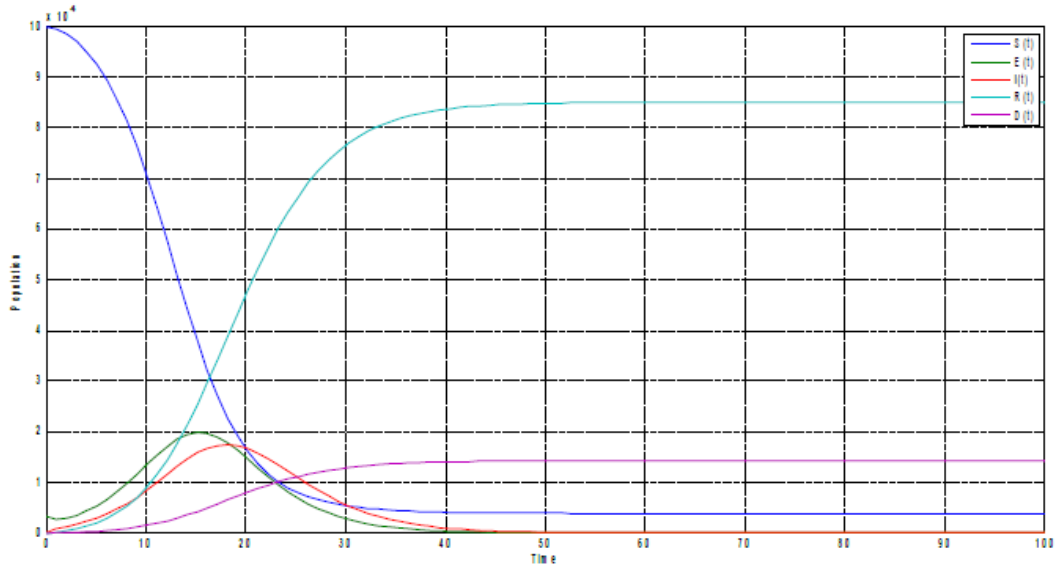


FIGURE 3.1 : Evolution des états

Nous allons, étudier, l'existence, l'unicité de la solution, la positivité [2] des états ainsi la stabilité locale du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \Lambda + (-\alpha I(t) - \Delta - \mu)S(t), & S(0) = S_0 > 0, \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t) - \mu E(t), & E(0) = E_0 > 0, \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - (\sigma + \gamma + \mu)I(t), & I(0) = I_0 > 0, \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + \Delta S(t) - \mu R(t), & R(0) = R_0 > 0, \\ \dot{D}(t) = \sigma I(t), & D(0) = D_0 > 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.3 Analyse du modèle

#### 3.3.1 Bornage des solutions

**Proposition 2** *Les états du système sont bornées (ils sont dissipatifs).*

**Preuve 5** *Soit*

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t)$$

pour  $t \in [0, T]$

$$\dot{N}(t) = \Lambda - \mu N(t).$$

En résolvant cette équation différentielle, on aura :

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu t} \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad t \in [0, T].$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Donc chaque état du système est borné.

### 3.3.2 Existence et unicité de la solution

**Proposition 3** *Les solutions du système (3.7) existent et sont uniques.*

**Preuve 6** *En effet : Soient*

$$X_i = (S_i, E_i, I_i, R_i, D_i), i = 1, 2, \dots$$

$$F(X_i) = (\Lambda - (\alpha I_i + \Delta + \mu)S_i, \alpha I_i S_i - \beta E_i - \mu E_i, \beta E_i \\ - (\sigma + \gamma + \mu)I_i, \gamma I_i + \Delta S_i - \mu R_i, \sigma I_i)$$

$$\begin{aligned} \|F(X_1) - F(X_2)\| &\leq \|(\alpha I_1 + \Delta + \mu)S_1 - (\alpha I_2 + \Delta + \mu)S_2 \\ &\quad + \alpha I_1 S_1 - (\beta + \mu)E_1 - (\alpha I_2 S_2 - (\beta \\ &\quad + \mu)E_2) - \beta E_1 - (\sigma + \gamma + \mu)I_1 - \beta E_2 \\ &\quad + (\sigma + \gamma + \mu)I_2 + \gamma I_1 + \Delta S_1 - \mu R_1 \\ &\quad - \gamma I_2 - \Delta S_2 + \mu R_2 + \sigma I_1 - \sigma I_2\| \\ &\leq (\Delta + \mu)|S_1 - S_2| + 2\alpha \frac{\Lambda}{\mu} |I_1 - I_2| \\ &\quad + 2(\beta - \mu)|E_1 - E_2| + (\gamma + \sigma + \mu) \\ &\quad |I_1 - I_2| + (\gamma + \sigma)|I_1 - I_2| + \Delta|S_1 - S_2| \\ &\quad + \mu|R_1 - R_2| + \sigma|D_1 - D_2| \\ &\leq K|X_1 - X_2| \end{aligned}$$

$$K = \max\{2\Delta + \mu, 2\alpha \frac{\Lambda}{\mu} + 2\gamma + 2\sigma + \mu, \mu, \sigma\}.$$

*D'après le théorème de Cauchy Lipschitz, le système (3.7) admet une solution unique.*

### 3.3.3 Stabilité

Dans ce travail, on considérera deux points d'équilibre, le point d'équilibre sans maladie (Equilibrium free disease : **EFD**) et le point d'équilibre endémique (Endemic equilibrium : **EE**).

**Point d'équilibre (EFD) :**

On détermine en premier lieu, le point d'équilibre sans maladie (**EFD**).

On pose :  $E = 0, I = 0$ . Pour déterminer ce point, on résoudra le système :

$$\dot{S}(t) = 0, \dot{E}(t) = 0, \dot{I}(t) = 0, \dot{R}(t) = 0, \dot{D}(t) = 0.$$

On obtient :

$$\dot{S}(t) = 0 \Rightarrow \Lambda - (\Delta + \mu)S = 0 \Rightarrow S_0 = \frac{\Lambda}{\Delta + \mu}.$$

De la même manière, on aura :

$$R_0 = \frac{\Delta}{\mu} \left( \frac{\Lambda}{\Delta + \mu} \right)$$

$$Y_0 = \left( \frac{\Lambda}{\Delta + \mu}; 0; 0; \frac{\Lambda\Delta}{\mu(\Delta + \mu)}; 0 \right).$$

### Points d'équilibre (EE) :

Ce point d'équilibre est un point d'équilibre endémique, il est calculé de la même manière que dans le cas du point (EFD), pour les états  $E$  et  $I$  quelconques. Le point d'équilibre (EE) est tel que :  $Y^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$  avec

$$\begin{cases} S^* = \frac{\Lambda}{\alpha I^* + (\Delta + \mu)} & (1) \\ E^* = \left( \frac{\sigma + \gamma + \mu}{\beta} \right) I^* & (2) \\ R^* = \gamma I^* + \frac{\Delta\Lambda}{\alpha I^* + (\Delta + \mu)} & (3) \end{cases} \quad (3.8)$$

**Remarque 11** *A noter que l'état  $D$  n'a aucune influence sur la stabilité du système autour des points d'équilibre.*

En substituant (1), (2) et (3) dans la seconde équation du système, on aura :

$$-(\beta + \mu)(\gamma + \sigma + \mu)\alpha I^* + \alpha\Lambda\beta - (\beta + \mu)(\gamma + \sigma + \mu)(\Delta + \mu) = 0.$$

Ce qui donne :

$$-\alpha(\beta + \mu)(\gamma + \sigma + \mu)I^* + (\beta + \mu)(\gamma + \sigma + \mu)(\Delta + \mu)(R_0 - 1) = 0.$$

On aura ainsi :

$$I^* = \frac{(\Delta + \mu)}{\alpha}(R_0 - 1).$$

$I^*$  existe si  $R_0 > 1$ .

On a donc le résultat suivant :

**Proposition 4** *Le point d'équilibre  $Y^*$  existe si  $R_0 > 1$ .*

### 3.3.4 Nombre de reproduction de base

**Définition 17** *En épidémiologie, le nombre de reproduction de base peut être défini comme le nombre moyen attendu de cas directement généré par un cas dans une population où tous les individus sont sensibles à l'infection.*

Le nombre de reproduction de base noté  $R_0$ , est donc le nombre moyen d'individus engendré par un seul individu infecté dans une population totalement saine. Ce nombre est calculé de la manière suivante :

Soit :

$$Y' = (\dot{E}, \dot{I}) = (\alpha IS - (\beta + \mu)E, \beta E - (\sigma + \gamma + \mu)I)$$

$$F(Y) = (\alpha S, 0)$$

$$V(Y) = ((\beta + \mu)E - \beta E + (\sigma + \gamma + \mu)I)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} \beta + \mu & 0 \\ -\beta & (\alpha + \gamma + \mu) \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta + \mu} & 0 \\ \frac{\beta}{(\beta + \mu)(\alpha + \gamma + \mu)} & \frac{1}{\alpha + \gamma + \mu} \end{pmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \beta S}{(\beta + \mu)(\alpha + \gamma + \mu)} & \frac{\alpha S}{\alpha + \gamma + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\alpha \beta \Lambda}{(\beta + \mu)(\alpha + \gamma + \mu)(\Delta + \mu)}$$

$R_0$  est égal au rayon spectral de la matrice appelée matrice de première génération  $FV^{-1}$ .

La stabilité locale du système (3.7) au tours des points d'équilibre, dépend des valeurs propres de la matrice Jacobienne.

#### Matrice Jacobienne :

La matrice Jacobienne au point  $Y_0$  est donnée comme suit :

$$J_{Y_0} = \begin{pmatrix} -(\Delta + \mu) & 0 & -\alpha S_0 & 0 \\ 0 & -(\beta + \mu) & \alpha S_0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\sigma + \gamma + \mu) & 0 \\ \Delta & 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Le polynôme caractéristique de cette dernière matrice est donné par :

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= (\lambda + \mu)(\lambda + (\delta + \mu))((\beta + \mu)(\sigma + \delta + \mu) + (\beta + \mu)\lambda \\
&\quad + \beta\alpha S_0 + (\sigma + \delta + \mu)\lambda) \\
&= (\lambda + \mu)(\lambda + (\delta + \mu))[(\lambda^2 + (-(\beta + \mu)(\sigma + \delta + \mu))\lambda \\
&\quad + (\beta + \mu)(\sigma + \delta + \mu) - \beta S_0\alpha) \\
&= (\lambda + \mu)(\lambda + (\delta + \mu))[a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0].
\end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1, \\
a_1 &= (-(\beta + \mu)(\sigma + \delta + \mu)), \\
a_0 &= (\beta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu) - \beta S_0\alpha \\
&= (\beta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu) - \frac{\alpha\beta\Lambda}{(\Delta + \mu)} \\
&= (\beta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)[1 - R_0].
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont donnée par la résolution de l'équation  $P(\lambda) = 0$ . Elles sont telles que :

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \lambda_2 = -\delta + \mu.$$

Il faut remarquer que dans le reste du polynôme,  $a_0$  dépend de  $R_0$ . Si  $R_0 < 1$ , alors  $a_0 > 0$ , d'après le théorème de Routh Herwitz, le système considéré est asymptotiquement stable. D'où la proposition suivante :

**Proposition 5** *Le point d'équilibre (**EFD**) du système (3.7) est asymptotiquement stable, si  $R_0 < 1$ . Il est instable, si  $R_0 \geq 1$ .*

**Proposition 6** *Le point d'équilibre (**EE**) du système (3.7) est asymptotiquement stable, si  $R_0 > 1$ . Il est instable, si  $R_0 \leq 1$ .*

**En effet :**

Soit le point d'équilibre  $Y^* = (S^*, E^*, I^*, R^*)$ , les coordonnées de ce point sont données dans (8). La matrice Jacobienne du système (3.7) au point d'équilibre (**EE**) est donné par :

$$J_{Y^*} = \begin{pmatrix} -\alpha I^* - (\Delta + \mu) & 0 & -\alpha S^* & 0 \\ \alpha I^* & -(\beta + \mu) & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta E^* & -(\sigma + \gamma + \mu) & 0 \\ \Delta & 0 & \gamma I^* & -\mu \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donné par :

$$P(\lambda) = -(\mu + \lambda)(-\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3).$$

Où :

$$A_1 = (\alpha I^* + \Delta + \mu),$$

$$A_2 = ((\beta + \mu)(\alpha I^* + \Delta + \mu) - ((\alpha I^* + \Delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu) + (\beta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu) + \beta E^* \alpha S^*)),$$

et

$$A_3 = (\alpha I^* + \Delta + \mu)\mu(\beta + \mu) + (\alpha I^* + \Delta + \mu)\beta E^* \alpha S^* + \alpha S^* \alpha I^*(\beta + \mu).$$

On peut remarquer que lorsque  $R_0 > 1$ , tous les coefficients du dernier polynôme caractéristique sont positifs, en plus

$$A_1 A_2 - A_3 > 0.$$

D'après le critère de Routh Hurwitz,  $Y^*$  est asymptotiquement stable, si  $R_0 > 1$ .

L'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable si et seulement si  $R_0 > 1$ , conformément à l'interprétation biologique classique : l'infection persiste durablement dans la population uniquement lorsque le seuil épidémique est franchi.

## 3.4 Problème de contrôle optimal

### 3.4.1 Position du problème

Dans cette section, On va étudier un problème de contrôle optimal où le contrôle  $u(\cdot)$  est le taux de vaccination, et l'objectif est de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = I(T) - R(T),$$

nous avons donc considéré le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = -I(T) + R(T) \rightarrow \max_u, \\ \dot{S}(t) = \Lambda + (-\alpha I(t) - u(t) - \mu)S(t), \quad S(0) = S_0 > 0, \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t) - \mu E(t), \quad E(0) = E_0 > 0, \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - (\sigma + \gamma + \mu)I(t), \quad I(0) = I_0 > 0, \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t) - \mu R(t), \quad R(0) = R_0 > 0, \\ \dot{D}(t) = \sigma I(t), \quad D(0) = D_0 > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Le problème considéré est résolu théoriquement, puis numériquement en utilisant deux méthodes, à savoir, la méthode directe (de discrétisation) et une méthode indirecte (méthode de tir) connue aussi sous le nom de (Shooting method)

### 3.4.2 Résolution théorique

Prenant le cas de l'Algérie, sur 10 000 personnes en bonne santé, 3000 sont exposées au virus (parmi elles, des médecins, des infirmiers et des personnes à risque). Au 02 avril 2020, 986 personnes sont infectées dans le pays, 83 sont décédées et 108 ont été guéries (résultats de l'Institut Pasteur).

Chaque personne exposée ( $E$ ) se transforme en personne infectée ( $I$ ) avec un taux  $\beta$ , la période d'incubation faisant référence au temps écoulé entre l'infection et l'apparition des symptômes cliniques de la maladie. Nous supposons que la période d'incubation est d'un maximum de 7 jours, donc  $\beta = \frac{1}{7}$ . Une personne infectée guérit après 6 jours, donc  $\gamma = \frac{1}{6}$  [3].

Ce problème obtenu est résolu théoriquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin (**PMP**), puis numériquement. Nous avons implémenté deux méthodes sur **MATLAB**, à savoir la méthode indirecte (méthode de tir) et une méthode directe.

Le Hamiltonien du problème (3.10) est donné pour  $t \in [0, T]$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t)) = & -p_S(t)S(t)(\alpha I(t) + u(t)) + p_E(t)(\alpha I(t)S(t) - \beta E(t)) \\ & + p_I(t)(\beta E(t) - (\delta + \gamma)I(t)) + p_R(t)(\gamma I(t) + u(t)S(t)) \\ & + p_D(t)(\delta I(t)), \end{aligned}$$

où,  $x(t) = (S(t), I(t), E(t), R(t), D(t))$  et  $p(t) = (p_S(t), p_I(t), p_E(t), p_R(t), p_D(t))$  est le vecteur adjoint, il est la solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_S(t) = \alpha I(t)(p_S(t) - p_E(t)) - (-p_S(t) + p_R(t))u(t), \\ \dot{p}_E(t) = \beta(p_I(t) - p_E(t)), \\ \dot{p}_I(t) = \alpha S(t)(p_S(t) - p_E(t)) + (\delta + \gamma)p_I(t) - \gamma p_R(t) - \delta p_D(t), \\ \dot{p}_R(t) = 0, \\ \dot{p}_D(t) = 0, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Les conditions de transversalité sont telles que :

$$\begin{aligned}
p_S(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T))}{\partial S(T)}, \\
p_E(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T))}{\partial E(T)}, \\
p_I(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T))}{\partial I(T)}, \\
p_R(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T))}{\partial R(T)}, \\
p_D(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T))}{\partial D(T)}.
\end{aligned}$$

où

$$g(S(T), E(T), I(T), R(T), D(T)) = -I(T) + R(T).$$

Ce qui donne :

$$p_S(T) = 0, p_E(T) = 0, p_I(T) = -1, p_R(T) = 1, p_D(T) = 0.$$

Calculons le contrôle optimal  $u(\cdot)$  :

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned}
H^* &= \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} H(t, x(t), p(t), u(t)) \\
&= -\alpha S(t) I(t) (p_S(t) - p_E(t)) - \beta p_E(t) E(t) + p_I(t) (\beta E(t) - (\delta + \gamma) I(t)) \\
&\quad + \gamma p_R(t) I(t) + \delta p_D(t) I(t) + S(t) \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} [(-p_S(t) + p_R(t)) u(t)]
\end{aligned}$$

où  $H^* = H(x^*(t), p^*(t), u^*(t))$ .

Le contrôle qui maximise le Hamiltonien est

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } p_S(t) \leq 1, \\ 0 & \text{si } p_S(t) > 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Alors :

$$u^*(t) = -u_{\max} \min(0, \text{sign}(p_S(t) - 1)).$$

### 3.5 Implémentation numérique et méthodes

Pour calculer la solution du système d'optimalité et maximiser la fonctionnelle objectif  $J(u)$ , deux implémentations sont considérées : les méthodes indirecte et directe. Ces implémentations ont été comparées en termes de dynamique du modèle pour les 70 premiers

jours ( $t \in [0, 70]$ ) en utilisant à la fois les valeurs des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\sigma$  dans la section 3, ainsi que les conditions initiales.

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = 10^6, \\ E(0) = 3000, \\ I(0) = 986, \\ R(0) = 103, \\ D(0) = 86. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La méthode indirecte pour résoudre les problèmes de contrôle optimal est basée sur le principe du maximum de Pontryagin pour calculer la solution optimale. Par conséquent, ces méthodes nécessitent le système d'état avec les conditions initiales [4], ainsi que les conditions nécessaires [4,5,7], afin de trouver la solution d'un problème de contrôle optimal donné, en le transformant en un problème de valeur aux bords.

D'autre part, les méthodes directes utilisent la discrétisation par rapport au temps pour résoudre les problèmes de contrôle optimal, dans lesquels la fonction de coût est directement optimisée, en traitant le problème de contrôle optimal comme un problème d'optimisation non linéaire (**NLP**).

Certains avantages et inconvénients peuvent être soulignés pour les méthodes indirectes et directes. Selon Trélat [4], les méthodes directes sont plus robustes et moins sensibles au choix des conditions initiales que les méthodes indirectes, étant également plus faciles à mettre en œuvre. Cependant, en comparaison avec les méthodes indirectes, atteindre une précision souhaitée n'est pas aussi facile lorsque les méthodes directes sont utilisées. De plus, l'auteur souligne non seulement la possibilité d'obtenir des minima locaux lorsque la discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal est employée, mais aussi la nécessité d'une grande quantité de mémoire, ce qui peut entraîner des inefficacités lorsqu'un problème de grande dimension est considéré, par exemple. D'autre part, les méthodes indirectes offrent un haut niveau de précision numérique, mais leur mise en œuvre peut être assez difficile en raison de la nécessité de calculer les dérivées et les conditions nécessaires liées au **PMP**.

### 3.5.1 Résolution par la méthode de tir

La méthode de tir est basée sur le principe du maximum de Pontryagin [9]. Elle consiste à trouver un zéro de la fonction de tir associée au problème original. C'est une méthode rapide et de haute précision qui ne nécessite aucune hypothèse sur la structure du contrôle. La méthode de tir se compose de trois étapes principales [7,8] :

- Étape 1 : Formuler un problème à valeurs aux bords en utilisant les équations du modèle, les équations des vecteurs adjoints ainsi que les conditions de transversalité.
- Étape 2 : Déterminer la fonction de tir.
- Étape 3 : Résoudre un système d'équations non linéaires.

Le principe du maximum de Pontryagin nous conduit au problème à valeurs aux bords suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_1(t) = -\alpha x_3(t)x_1(t) + F(p_1(t))x_1(t), \\
 \dot{x}_2(t) = \alpha x_3(t)x_1(t) - \beta x_2(t), \\
 \dot{x}_3(t) = \beta x_2(t) - (\sigma + \gamma)x_3(t), \\
 \dot{x}_4(t) = \gamma x_3(t) - F(p_1(t))x_1(t), \\
 \dot{x}_5(t) = \sigma x_3(t), \\
 \dot{p}_1(t) = \alpha x_3(t)(p_1(t) - p_2(t)) - (p_1(t) - p_4(t))F(p_1(t)), \\
 \dot{p}_2(t) = \beta(p_2(t) - p_3(t)), \\
 \dot{p}_3(t) = \alpha x_1(t)(p_1(t) - p_2(t)) + (\sigma + \gamma)p_3(t) - \gamma p_4(t) - \sigma p_5(t), \\
 \dot{p}_4(t) = 0, \\
 \dot{p}_5(t) = 0 \\
 x_1(0) = S_0, x_2(0) = E_0, x_3(0) = I_0, x_4(0) = R_0, x_5(0) = D(0), \\
 p_1(T) = p_2(T) = 0, p_3(T) = -1, p_4(T) = 1, p_5(T) = 0, t \in [0, T].
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned}
 x(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)) \\
 &= (S(t), E(t), I(t), R(t), D(t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (p_j(t), j = 1..5) \\
 &= (p_S(t), p_E(t), p_I(t), p_R(t), p_D(t)).
 \end{aligned}$$

et

$$F(p_1(t)) = u_{max} \min(0, \text{sign}(p_1(t) - 1)).$$

Nous construisons la fonction de tir suivante :

$$\begin{aligned}
 G : R^{10} &\longrightarrow R^{10} \\
 (p(0), p(T)) &\longmapsto G(p(0), p(T)),
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$$G(p(0), p(T)) = \begin{pmatrix} p_1(0) - \lambda_1 \\ p_2(0) - \lambda_2 \\ p_3(0) - \lambda_3 \\ p_4(0) - 1 \\ p_5(0) \\ p_1(T) \\ p_2(T) \\ p_3(T) + 1 \\ p_4(T) - 1 \\ p_5(T) \end{pmatrix},$$

où  $\lambda_i \in R, ; i = 1 \dots 3$ .

Ainsi, le problème (3.14) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = -\alpha z_3(t)z_1(t) + F(z_0(t))z_1(t), \\ \dot{z}_2(t) = \alpha z_3(t)x_1(t) - \beta z_2(t), \\ \dot{z}_3(t) = \beta z_2(t) - (\sigma + \gamma)z_3(t), \\ \dot{z}_4(t) = -F(z_6(t))z_1(t) + \gamma z_3(t), \\ \dot{z}_5(t) = \sigma z_3(t), \\ \dot{z}_6(t) = \alpha z_3(t)(z_6(t) - z_7(t)) - (z_6(t) - z_9(t)) + F(z_6(t)), \\ \dot{z}_7(t) = \beta(z_7(t) - z_8(t)), \\ \dot{z}_8(t) = \alpha z_1(t)(z_6(t) - z_7(t)) + (\sigma + \gamma)z_8(t) - \gamma z_9(t) - \sigma z_{10}(t), \\ \dot{z}_9(t) = 0, \\ \dot{z}_{10}(t) = 0, \\ z_1(0) = S_0, z_2(0) = E_0, z_3(0) = I_0, z_4(0) = R_0, z_5(0) = D_0, \\ G(p(0), p(T)) = 0, t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3.16)$$

où

$$z(t) = (z_j(t), j = 1, \dots, 10) = (x(t), p(t)),$$

et

$$F(z_6(t)) = u_{\max} \min(0, \text{sign}(z_6(t) - 1)).$$

En utilisant la méthode de tir, en présence d'un vaccin efficace, après 70 jours, les résultats trouvés sont illustrés dans la figure suivante (voir Figure 3.2) :

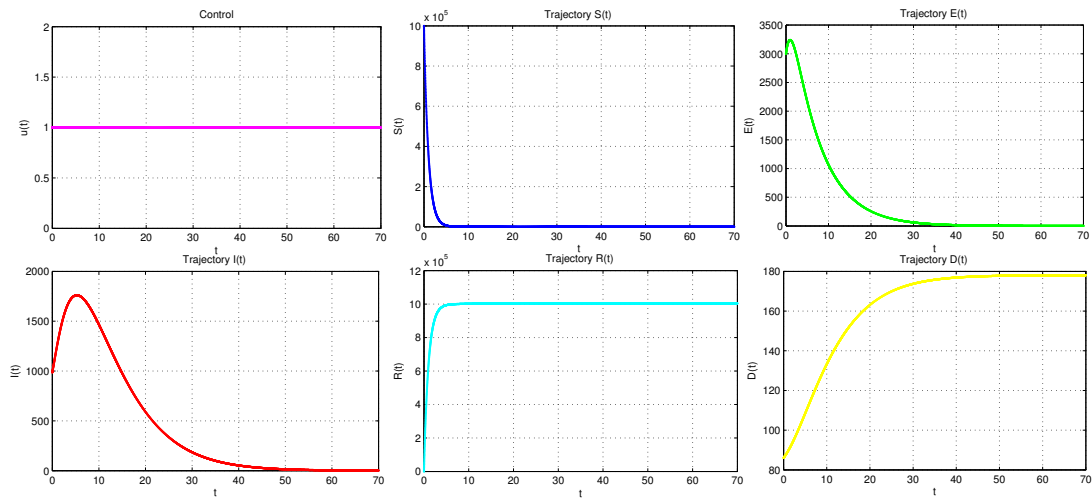


FIGURE 3.2 : Evolution des états après 70 jours avec vaccin.

Après 70 jours, en présence d'un traitement efficace, le nombre de personnes guéries est très élevé et le nombre de personnes infectées diminue considérablement.

En l'absence d'un vaccin efficace, nous utiliserons la méthode de tir, après  $T = 150$  jours, les résultats sont illustrés dans la figure suivante (voir Figure 3.3) :

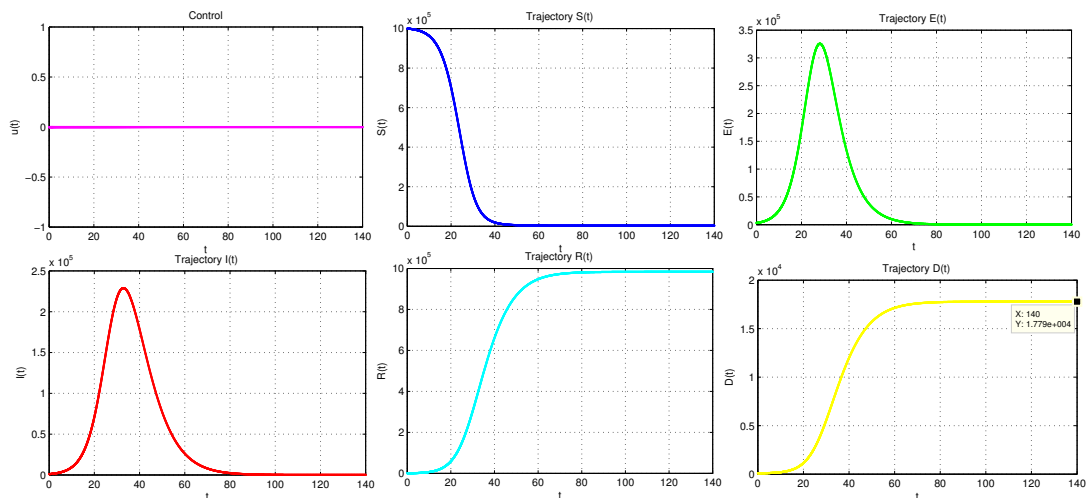


FIGURE 3.3 : Evolution des états après 150 jours sans vaccin.

Après 150 jours, en l'absence d'un vaccin efficace, le nombre d'individus susceptibles ne diminue presque pas, tandis que le nombre de décès augmente. Le nombre d'individus susceptibles ainsi que le nombre d'exposés au virus augmente considérablement (voir Figure 3.3). Le temps d'exécution de la méthode de tir est un temps CPU de 3.18s.

### 3.5.2 Résolution par la méthode de discrétisation d'Euler

Pour un nombre de sous-intervalles  $N$  choisi à l'avance, nous aurons le pas de discrétisation  $h = \frac{T}{N}$  et les temps suivants :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

L'application du schéma de discrétisation d'Euler pour résoudre les problèmes aux limites nous donne le problème de programmation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J(u) &= I(T) - R(T), \\ S(t_{k+1}) &= S(t_k) - h(\alpha I(t_k) + u(t_k))S(t_k), \\ E(t_{k+1}) &= E(t_k) + h(\alpha I(t_k)S(t_k) - \beta E(t_k)), \\ I(t_{k+1}) &= I(t_k) + h(\beta E(t_k) - (\sigma + \gamma)I(t_k)), \\ R(t_{k+1}) &= R(t_k) + h(\gamma I(t_k) + u(t_k)S(t_k)), \\ D(t_{k+1}) &= D(t_k) + h\sigma I(t_k), k = 0, 1, \dots, N - 1, \\ S(0) &= S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = 0, D(0) = D_0, \\ 0 &\leq u(t_k) \leq u_{max}, k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nous avons également résolu le programme non linéaire (3.17) avec la méthode du point intérieur implémentée en MATLAB pour  $N = 1500$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la figure (voir Figure 3.4) :

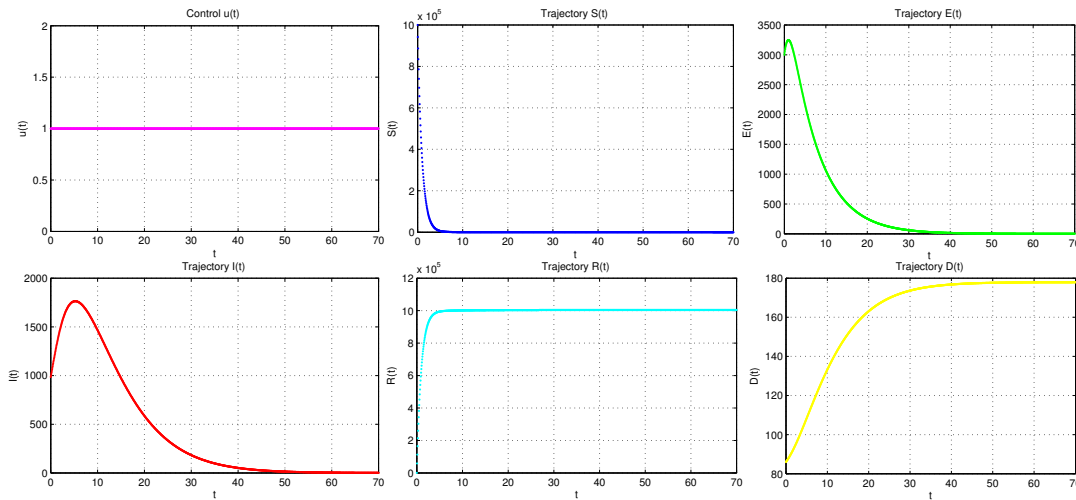


FIGURE 3.4 : Evolution des états avec vaccin, après 70 jours

Après 70 jours, en présence d'un vaccin efficace, le nombre d'individus infectés diminue,

et le nombre de décès se stabilise autour de 180 morts après 40 jours. Le nombre de personnes guéries est considérable (voir Figure 3.4).

Il a été noté dans les sections précédentes qu'en l'absence de traitement, le nombre de personnes infectées augmente considérablement, la meilleure solution est donc l'isolement. Le temps d'exécution de la méthode de tir est de *CPU* égal à 26.85s.

### 3.6 Avantage de la quarantaine

D'après l'expérience de la Chine, la grande majorité des personnes ayant contracté la **COVID-19** l'ont contractée par contact avec des proches infectés, d'où l'importance de l'isolement pour contrôler l'épidémie. Prenant l'exemple de l'épidémie d'Ebola et du cas de la Chine avec ce nouveau virus, les populations ont été privées de leur liberté de circulation, ce qui a porté ses fruits, le nombre d'individus infectés a considérablement diminué.

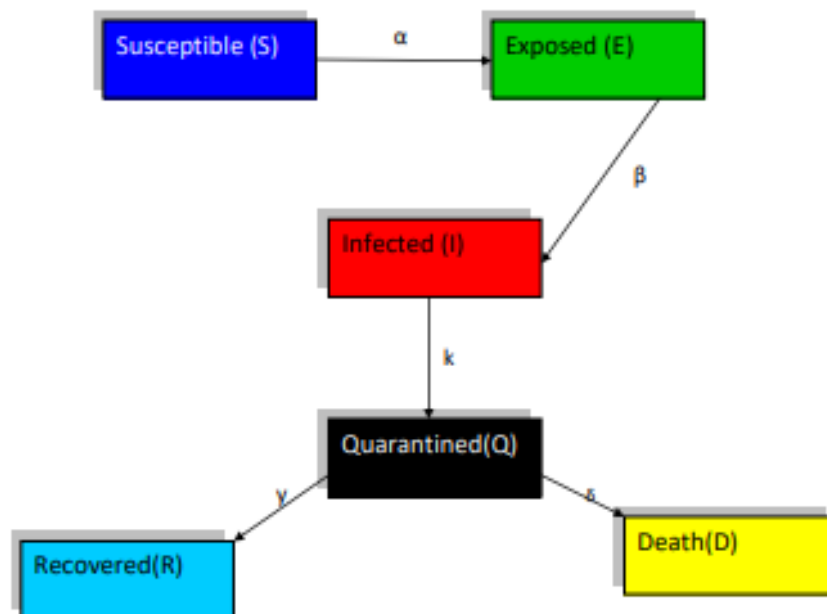


FIGURE 3.5 : Modèle SEIR

Sur la base de cette stratégie de protection, nous avons modélisé un autre problème inspiré du modèle **SEIRD**, en ajoutant le compartiment des personnes en quarantaine

(voir Figure 3.5), le problème de contrôle optimal suivant a été obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = -I(T) + R(T) \rightarrow \max_u, \\ \dot{S}(t) = -(\alpha I(t) + u(t))S(t), S(0) = S_0 > 0, \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t), E(0) = E_0 > 0, \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - kI(t), I(0) = I_0 > 0, \\ \dot{Q}(t) = kI(t) - (\gamma + \sigma)Q(t), Q(0) = Q_0 > 0 \\ \dot{R}(t) = \gamma Q(t) + u(t)S(t), R(0) = R_0, \\ \dot{D}(t) = \sigma Q(t), D(0) = D_0, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, t \in [0, T], T : Fix \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Où :  $\alpha$  est le taux d'infection,  $\beta^{-1}$  est le temps latent moyen,  $k^{-1}$  est le temps moyen d'isolement,  $\gamma$  est le temps de guérison et  $\sigma$  est le taux de mortalité.

Nous remarquons

$$\dot{S}(t) + \dot{E}(t) + \dot{I}(t) + \dot{Q}(t) + \dot{R}(t) + \dot{D}(t) = 0,$$

Par conséquent

$$S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) + D(t) = N_p, N_p \in \mathbb{R},$$

et comme

$$S(0) + E(0) + I(0) + R(0) + D(0) = N_p,$$

déduire que

$$N_p = 1005075,$$

Par conséquent

$$D(t) = -S(t) - E(t) - I(t) - Q(t) - R(t) + N_p$$

Nous pouvons simplifier le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = -I(T) + R(T) \rightarrow \max_u \\ \dot{S}(t) = -(\alpha I(t) + u(t))S(t), \quad S(0) = S_0 > 0, \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t), \quad E(0) = E_0 > 0, \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - kI(t), \quad I(0) = I_0 > 0, \\ \dot{Q}(t) = kI(t) - (\gamma + \sigma)Q(t), \quad Q(0) = Q_0 > 0, \\ \dot{R}(t) = \gamma Q(t) + u(t)S(t), \quad R(0) = R_0, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}, t \in [0, T], T : Fix. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

### 3.6.1 Résolution théorique

Le Hamiltonien du problème (3.19) est donné pour  $t \in [0, T]$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t)) = & p_S(t)(-\alpha I(t) - u(t))S(t) + p_E(t)(\alpha I(t)S(t) - \beta E(t)) \\ & + p_I(t)(\beta E(t) - kI(t)) + p_Q(t)(kI(t) - (\gamma + \sigma)Q(t)) \\ & + p_R(t)(\gamma Q(t) + u(t)S(t)), \end{aligned}$$

où,  $x(t) = (S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t))$  et  $p(t) = (p_S(t), p_E(t), p_I(t), p_Q(t), p_R(t))$  est le vecteur adjoint, qui est la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{p}_S(t) = \alpha I(t)(p_S(t) - p_E(t)) + (p_S(t) - p_R(t))u(t), \\ \dot{p}_E(t) = \beta(p_E(t) - p_I(t)), \\ \dot{p}_I(t) = \alpha S(t)(p_S(t) - p_E(t)) + k(p_I(t) - p_Q(t)), \\ \dot{p}_Q(t) = (\gamma + \sigma)p_Q(t) - \gamma p_R(t), \\ \dot{p}_R(t) = 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Les conditions de transversalité sont telles que :

$$\begin{aligned} p_S(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), I(T), Q(T), R(T))}{\partial S(T)}, \\ p_E(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), Q(T), I(T), R(T))}{\partial E(T)}, \\ p_I(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), Q(T), I(T), R(T))}{\partial I(T)}, \\ p_Q(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), Q(T), I(T), R(T))}{\partial Q(T)}, \\ p_R(T) &= -\frac{\partial g(S(T), E(T), Q(T), I(T), R(T))}{\partial R(T)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$p_S(T) = 0, p_E(T) = 0, p_I(T) = -1, p_Q(T) = 0, p_R(T) = 1.$$

$$\dot{p}_R(t) = 0, p_R(t) = 1, \forall t \in [0, T],$$

implique

$$p_R(t) = 1, \forall t \in [0, T].$$

$$\dot{p}_Q(t) = (\gamma + \sigma)p_Q(t) - \gamma p_R(t), \forall t \in [0, T],$$

$$p_Q(T) = 0,$$

implique

$$p_Q(t) = e^{(\gamma + \sigma)(t - T)} + \frac{\gamma}{\gamma + \sigma}, t \in [0, T].$$

Calculons le contrôle optimal  $u(\cdot)$  :

Le maximum du Hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned}
H^* &= \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} H(x(t), p(t), u(t)) \\
&= -\alpha p_S(t)S(t)I(t) + p_E(t)(\alpha I(t)S(t) - \beta E(t)) + p_I(t)(\beta E(t) - kI(t)) \\
&\quad + p_Q(t)(kI(t) - (\gamma + \sigma)Q(t)) + \gamma p_R(t)Q(t) \\
&\quad + S(t) \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} [(-p_S(t)) + p_R(t)]u(t)
\end{aligned}$$

où  $H^* = H(x^*(t), p^*(t), u^*(t))$ .

Le contrôle qui maximise le Hamiltonien est

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } p_S(t) \leq 1, \\ 0 & \text{si } p_S(t) > 1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Alors :

$$u^*(t) = -u_{\max} \min(0, \text{sign}(p_S(t) - 1)).$$

### 3.7 Implémentation numérique

Pour calculer la solution du système d'optimalité et maximiser la fonctionnelle objective  $J(u)$ , deux implémentations sont considérées : les méthodes indirecte et directe. Ces implémentations ont été comparées en termes de dynamique du modèle pour les 70 premiers jours ( $t \in [0, 70]$ ) en utilisant les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , et  $\sigma$  de la section 3, ainsi que les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = 10^6, \\ E(0) = 3000, \\ I(0) = 986, \\ Q(0) = 900, \\ R(0) = 103, \\ D(0) = 86. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Les résultats obtenus pour  $T = 150$  jours en l'absence du vaccin, en utilisant la méthode de tir, sont illustrés dans la figure suivante (voir Figure 3.6) :

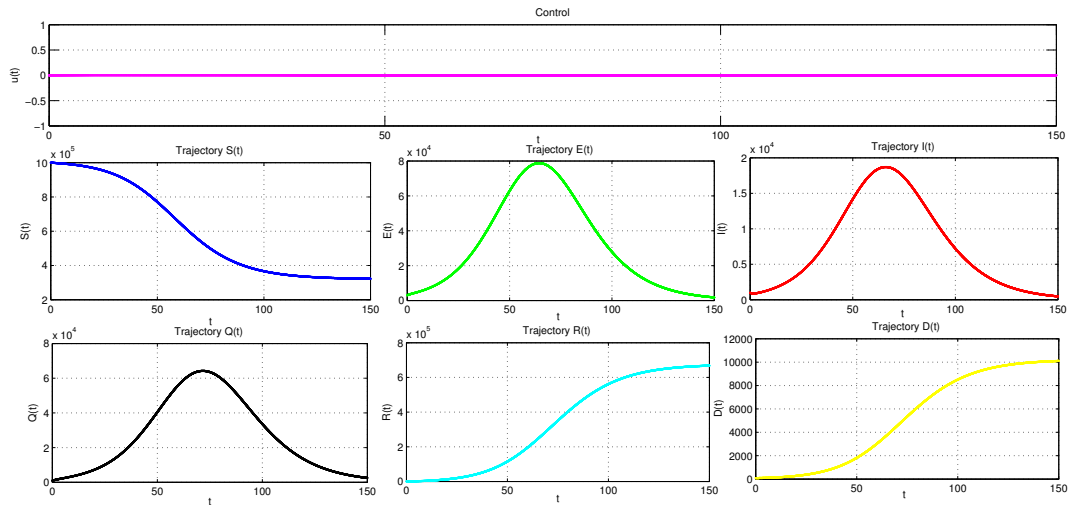


FIGURE 3.6 : Evolution des états sans vaccin, après 150 jours

Les résultats obtenus pour  $T = 70$  jours en l'absence du vaccin, en utilisant la méthode de discrétisation d'Euler, sont illustrés dans la figure suivante (voir Figure 3.7) :

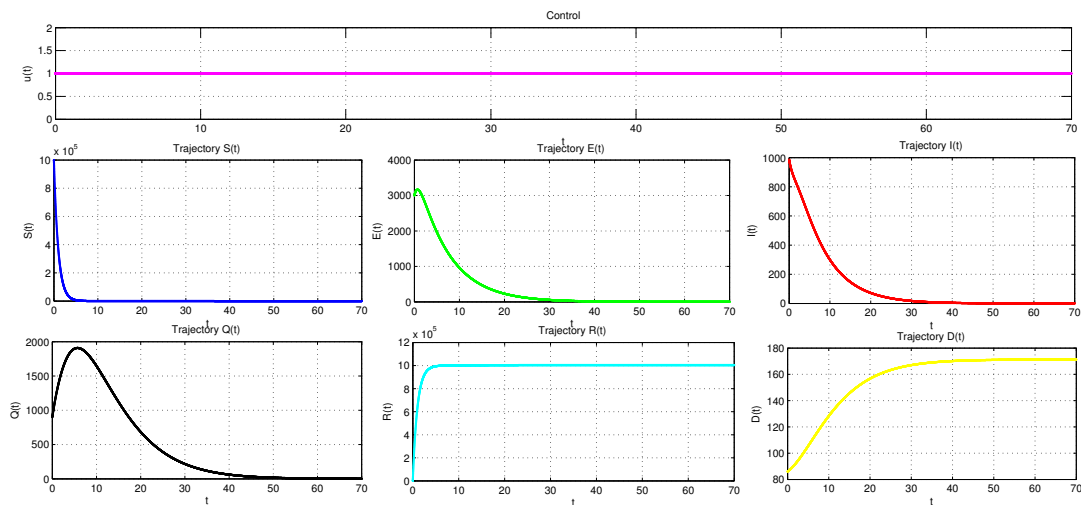


FIGURE 3.7 : Evolution des états après 70 jours avec vaccin

### 3.8 Comparaison numérique avec discussion des résultats

La méthode directe se caractérise par la simplicité de son implémentation, sans connaissance a priori de la solution. Cette méthode n'est pas très sensible au choix de la condition initiale, mais elle présente une faible précision numérique. La méthode indirecte, quant à

elle, offre une précision numérique très élevée, mais elle est très sensible au choix de la condition initiale.

Dans ce travail, nous avons essayé, avec les deux méthodes, d'évaluer les états considérés (en particulier les infectés et les guéris) avec et sans vaccin efficace contre le Coronavirus. Les résultats obtenus par ces méthodes sont similaires, mais au final, les résultats obtenus par la méthode de tir sont plus précis et le temps d'exécution de la méthode de tir est beaucoup plus court.

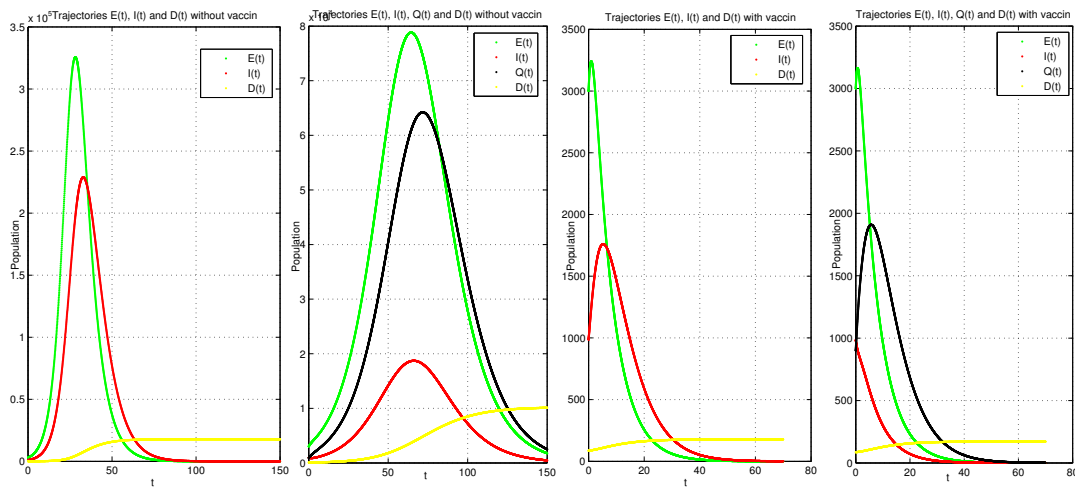


FIGURE 3.8 : Comparaison numérique

### 3.9 Conclusion

Dans ce travail, nous avons modélisé un problème d'actualité (le problème de la **COVID-19**) comme un problème de contrôle optimal non linéaire. Nous avons considéré le modèle **SEIR** en y ajoutant un compartiment  $D$  pour les personnes décédées. Dans la première partie du travail, nous avons ajouté le compartiment  $D$ , puis nous avons discuté et comparé les résultats. Dans la deuxième partie du travail, nous avons inclus dans le modèle considéré un compartiment  $Q$  pour les personnes en quarantaine.

Tout d'abord, le principe du maximum de Pontryagin a été utilisé, ce qui donne une condition nécessaire d'optimalité. En implémentant deux méthodes numériques (la méthode de tir et la méthode de discrétisation d'Euler) sur le logiciel **MATLAB**, nous avons tracé les évolutions des états considérés dans le problème, sur une durée de 70 jours et 150 jours, avec et sans vaccin.

Les résultats obtenus montrent que la méthode de tir est rapide et donne des résultats

précis. Nous en déduisons que la mise au point d'un vaccin efficace est plus qu'essentielle pour lutter contre ce virus. Dans le cas contraire, la solution reste la mise en quarantaine des personnes infectées (voir Figure 3.8).

# Conclusion générale

L'objectif de ce manuscrit est l'étude des problèmes dynamiques épidémiologiques, pour ceci, on a donné des notions de base nécessaires à la compréhension des chapitres qui ont suivi. Dans ce travail, on a considéré deux systèmes dynamiques l'un comportant six compartiments sans le compartiment de la mise en quarantaine, puis un autre avec mise en quarantaine. Dans le premier modèle, après avoir étudié l'existence et l'unicité de la solution, on a étudié la stabilité locale au point d'équilibre. A noter que cette stabilité dépend du nombre de reproduction de base. Deux problèmes de contrôle optimal sont par la suite étudiés théoriquement en utilisant le principe de maximum de Pontryaguin, numériquement, on a mis en oeuvre deux méthodes, la méthode directe (discrétisation) et une méthode indirecte (méthode de Tir). Le contrôle dans les deux problèmes est le taux de vaccination, l'objectif est de minimiser le nombre d'infectés et maximiser le nombre de rétablis. Il sera intéressant de considérer le même problème, en utilisant des équations différentielles stochastiques ou des dérivées fractionnaires. Il est aussi intéressant d'ajouter d'autres compartiments, comme les personnes hospitalisées et les personnes vaccinées,...

# Bibliographie

- [1] Apreutesei.N.C, Necessary optimality conditions for a Lotka-Volterra three species system, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena. Population dynamics*, vol.1, No.1, 2006, 123-135.
- [2] Avez. A, *Calcul différentiel*, Masson ; Paris,1983.
- [3] Kermack, W. O., & McKendrick. (1927). Contributions to the mathematical theory of epidemics, A. G. part i'. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics*, 115, 700-721.
- [4] Moussouni, M. and Aidene, M. (2016) 'Optimization of cereal output in presence of locusts', *An International Journal of Optimization and Control : Theories & Applications*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-10.
- [5] Murray, J. D. (2002) 'Mathematical biology', *Springer Verlag*, Berlin, 3d edition.
- [6] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F.(1962) 'The mathematical theory of optimal processes', *New York : Intersciences Publisher*.
- [7] Qi, H. ; Zhao,W.C. (2022). Stability and bifurcation control analysis of a delayed fractional-order eco-epidemiological system. *Eur. Phys. J. Plus. 137, 934..*
- [8] Trélat, E. (2005) 'Optimal control : theory and applications', *Paris : Vuibert, Concrete mathematics collection*, (in french).
- [9] Verhulst, P. F.(1838)'Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement'. *Correspondance Mathematique et Physique*, Vol. 10, pp. 113 – 121.