

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:
Sahi Sabrina.

THEME

Les vibrations non linéaires des plaques simplement supportées

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

<i>Mr. Mokhtari.A</i>	<i>Pr</i>	<i>Président</i>
<i>Mr. Ouchnane.D</i>	<i>M.C.B</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr. Boukehila.A</i>	<i>M.C.B</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr. Yazid.F</i>	<i>M.A.B</i>	<i>Encadreur</i>

Année Universitaire 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nos avoirs donnés les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur **Mr.yazid fares** qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs **les membres de jury** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance, tout particulièrement :

Nous vous remercions pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.

Et sans oublier **Mr. Rahmoune.A**

Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui nous ont toujours soutenues et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

Dédicaces

À mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi tout au long de mes études et qui m'a donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

À mes chers frères : **Nabil** et **Ali**.

À mes chers sœurs : **Fethia**, **Assala** et la petite **Soundous (louna)**.

À ma grande mère : **Friha**.

À tous mes oncles.

À tous mes tantes.

À tous la famille **Sahi** et **Bouzidi** de près et de loin.

Mes meilleurs amis pour leur aide, leur temps, leur encouragements, leur assistance .

À tous les étudiants de deuxième année master mathématique.

Résumé

Le but de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de quelques problèmes aux limites pour le bilaplacien. Pour cela, On considère un modèle mathématique en vibration non linéaire d'une plaque, pour ces problèmes on établit quelques résultats d'existence. La thèse comporte trois chapitres. Le premier chapitre est comporté destiné aux rappels et préliminaires. On rappelle également les outils mathématiques qui ont servi pour établir les résultats présentés ici. On considère au deuxième chapitre quelques problèmes pour le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière. Dans le troisième chapitre on considère deux problèmes de vibrations non linéaires d'une plaque.

Mots clés : Formulation Variationnelle, Plaque, Vibration non Linéaire, Existence de Solution, Unicité, Régularité, Compacité.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of some problems related to bilaplacien. For this aim, we consider a mathematical model in vibration in a non linear surface, for these problems, we use some existence results. This thesis is composed of three chapters. The first chapter deals with some reminders and preliminaries. We also mention the mathematical tools used for the given results. We deal in the second chapter some problems for the bilaplacien in an open frontier that is regular enough. In the third chapter we talk about two problems of nonlinear vibration of plate .

Keywords : Variational Formulation, Plate, Nonlinear Vibration, Existence of Solution, Uniqueness, Regularity, Compactness.

Table des matières

Notations géométriques	3
Introduction	5
1 Rappels et préliminaires	7
1.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions tests	7
1.2 L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	8
1.2.1 Dérivation des distributions	9
1.2.2 Support d'une distribution	10
1.3 Les espaces de Sobolev	10
1.3.1 Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ avec $s \in \mathbb{R}_+$	11
1.3.2 Inégalités de base	11
1.3.3 Injection de Sobolev	12
1.3.4 Traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$	12
1.4 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles	13
2 Quelques Problèmes Linéaires	19
2.1 Formulation des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 2	20
2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 2	20
2.1.2 Théorie de Lax-Milgram	20
2.2 Problème P_1	22
2.2.1 Formulation du problème P_1	22
2.2.2 Interprétation physique du problème (P_1)	22
2.2.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_1)	23
2.3 Problème P_2	24
2.3.1 Formulation du problème P_2	24
2.3.2 Interprétation physique du problème (P_2)	25

2.3.3	Existence et unicité de la solution du problème (P_2).	25
2.3.4	Formulation variationnelle du problème.	25
2.3.5	Interprétation de la solution du problème (P_2)	30
3	Problèmes de Vibrations non Linéaires	33
3.1	Problème P_4	33
3.1.1	Position du problème	33
3.1.2	Interprétation physique du problème	33
3.1.3	Étude de l'opérateur bilinéaire L	34
3.1.4	Théorème d'existence	35
3.1.5	Formulation variationnelle du problème	37
3.1.6	Estimations a priori.	38
3.1.7	Passage a la limite	39
3.2	Problème P_5	40
3.2.1	Position du problème	40
3.2.2	Interprétation physique du problème	40
3.2.3	Théorème d'existence	41
3.2.4	Formulation variationnelle du problème	41
3.2.5	Estimations a priori	42
3.2.6	passage a la limite	44
	Conclusion	46
	Bibliographie	48

Notations géométriques

Ω :	Ouvert borné de \mathbb{R}^n .
x =	$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, point générique .
t :	Le temps $t \in]0, T[$ T fini .
Γ :	Le frontière de Ω .
Q =	$\Omega \times]0, T[$.
Σ =	$\Gamma \times]0, T[$.
\mathbb{k} :	Le corps \mathbb{R} ou (\mathbb{C}) .
f :	La densité des forces volumiques.
ν :	Le coefficient de Poisson des plaques .
η :	Le vecteur unitaire normal sortant.
s :	Le vecteur unitaire tangente .
$\frac{\partial}{\partial \eta}$:	dérivée normal extérieure.
$\frac{\partial}{\partial s}$:	dérivée tangente .
∇u =	$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
Δu =	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
L :	Opérateur différentiel.
Δ^2 =	$\Delta \cdot \Delta$
G_2 :	L'opérateur de Green.
α :	$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
$ \alpha $ =	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.
(x, y) :	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$.
$\ x\ _2$ =	$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
$B(a, r)$ =	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a - x\ _2 \leq r\}$.
$\overline{B}(a, r)$ =	$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a - x\ _2 < r\}$.
$d\gamma$:	La mesure de surface sur Γ .

Les espaces fonctionnels

$L^p(\Omega) :$	$\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{k}; \int_{\Omega} f ^p dx < \infty \}, 1 \leq p < \infty .$
$\ f\ _{L^p(\Omega)} :$	$(\int_{\Omega} f ^p dx)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty .$
$L^\infty(\Omega) :$	$\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{k}; \sup_{x \in \Omega} f < \infty \} .$
$\ f\ _{L^\infty(\Omega)} =$	$\sup_{x \in \Omega} f .$
$(f, g) =$	$\int_{\Omega} f \cdot g dx , \text{ produit scalaire dans } L^2(\Omega) .$
$ f =$	$\sqrt{(f, f)}, \text{ norme dans } L^2(\Omega) .$
$D^\alpha =$	$\frac{\partial^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n .$
$H^m(\Omega) =$	$W^{m,2}(\Omega) .$
$\partial_i^k =$	$\frac{\partial^k}{\partial x_i}, k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i = 1, 2, \dots, n .$
$W^{m,p}(\Omega) =$	$\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \alpha \leq m \} .$
$(u, v)_{H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)} =$	$\left(\sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v) \right)^{\frac{1}{2}} .$
$W_0^{m,p}(\Omega) =$	$\{ u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u _{\Gamma} = 0, \alpha \leq m-1 \} .$
$\ u\ _{W^{m,p}(\Omega)} =$	$\left(\sum_{\alpha=0}^m \ D^\alpha u\ _{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$
$H_0^m(\Omega) =$	$\{ u \in H^m(\Omega); D^\alpha u _{\Gamma} = 0, \alpha \leq m-1 \} .$
$\ u\ _{H_0^m(\Omega)} =$	$\left(\sum_{\alpha=m} \ D^\alpha u\ _{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$
$W^{-m,q}(\Omega) :$	Le dual topologique de $W^{m,p}(\Omega), \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 .$
$V' :$	Le dual topologique de $V .$
$L^p(0, T; V) =$	$\{ f : [0, T] \mapsto V; \int_0^T \ f\ _V^p d\sigma < \infty \}, 1 \leq p < \infty .$
$\ f\ _{L^p(0, T; V)} =$	$\left(\int_0^T \ f\ _V^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty .$
$\ f\ _{L^\infty(0, T; V)} =$	$\sup_{t \in [0, T]} \ f\ _V .$
$\mathcal{L}(W, V) :$	L'espace des applications linéaires continus de W dans $V .$

Introduction

Problème de vibration non linéaire d'une plaque mince, dans un domaine régulier, est un problème aux limites gouvernées par un système d'équation non linéaire avec des conditions aux limites. Ce problème modélise le phénomène des vibrations non linéaire de la plaque.

Dans ce travail, on s'intéresse à la justification de ce modèle, c'est à dire à l'existence de la solution par la méthode de compacité. Pour cela, on utilise **l'opérateur de Green**, i.e. l'inverse de bilaplacien pour les conditions aux limites en question, et on ramène le système à une équation d'un seul inconnu.

Pour cette équation, il ya différents types de conditions aux bords peuvent être considérées :

Les conditions de Dirichlet :

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Et celle d'une plaque simplement supportée dont :

$$u = M(u) = 0$$

Où :

$$M(u)|_{\Gamma} = M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Ce travail, se décompose de trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré essentiellement aux rappels de résultats principaux sur les distributions et les espaces de Sobolev classiques pour mieux comprendre le contenu de ce travail. Puis, on rappelle quelques résultats théoriques généraux, à la fin de ce chapitre, on définit les espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles, que nous utiliserons, et on termine par **le théorème de Rellich** et **lemme de Gronwall** qui sont les principes de la méthode de compacité.

Au deuxième chapitre, nous avons traité quelques problèmes pour le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière avec les conditions d'une plaque encastrée et simplement supportée. Dans le but de définir **l'opérateur de Green** correspondant.

Dans le troisième chapitre, on se propose d'étudier deux problèmes de vibration non linéaire, pour le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière avec les conditions d'une plaque encastrée et simplement supportée. Dans le but de définir **l'opérateur de Green** correspondant.

On démontre un théorème d'existence par la méthode de compacité.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires

1.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions tests

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n

Définition 1.1.1. Soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On appelle support de φ ($\text{supp}(\varphi)$) l'adhérence en \mathbb{R}^n de l'ensemble :

$$\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}.$$

Notation 1.1. On note par $C_c^\infty(\Omega)$ ou en cors $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions φ de Ω dans \mathbb{R} vérifiant :

1. infiniment dérivable.
2. à support compact inclus dans Ω .

$$\text{i.e. } \mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(u) \text{ compact} \}$$

Exemple 1.1.1. On définit la fonction $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}} & \text{si } \|x\|_2 \leq 1. \\ 0 & \text{si } \|x\|_2 > 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Elle évide que $\rho(x)$ est un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ tell que $\text{supp}(\rho) = \overline{B}(0, 1)$.

Remarque 1.1. Par des translations et des homothéties sur le variable, on déduit l'existence des fonctions tests dont le support est une boule $\overline{B}(a, r)$ où $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, On peut alors

construire une infinité des fonctions test dont les supports sont deux à deux disjoints, d'où il résulte que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, dont l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ ne se réduit pas à zéro.

Proposition 1.1.1. Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $g \in C^\infty$ alors $f.g \in \mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.1.2. Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ on dit que φ_j converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Il existe un compact K de $\mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\text{supp}(\varphi_j) \in K, \forall j \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la suite $(D^\alpha \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers $D^\alpha \varphi$, c'est à dire :

$$\text{sup}|D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| \longrightarrow 0, \text{ lorsque } j \longrightarrow \infty.$$

Remarque 1.2. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, comme $\text{supp}(D^\alpha \varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$, on aura aussi $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.2 L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.2.1. On appelle distribution sur Ω toute application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} , c'est à dire, une application T est une distribution sur Ω si et seulement si :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

satisfait :

1. T est une application linéaire, i.e.

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle T, \varphi \rangle + \beta\langle T, \psi \rangle, \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2. T est continue, i.e.

$$\text{Si } \varphi_j \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega), \text{ alors } \langle T, \varphi_j \rangle \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{R}$$

Notation 1.2. On note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω dit aussi que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 1.2.2. Soit p un réel, $p \geq 1$.

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \text{ on a } u \in L^p(K)\}.$$

Définition 1.2.3. Pour toute fonction $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ on définit la distribution T_u de la manière suivante :

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

la distribution T_u s'appelle distribution régulière associée à u .

Si $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors $u = 0$ p.p.t

Soit $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $T_j \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si :

$$\langle T_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ pour } j \rightarrow \infty, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2.1 Dérivation des distributions

On peut définir la dérivée d'une distribution, de telle manière que si en particulier cette distribution est une fonction de classe C^1 alors la dérivée au sens des distributions soit tout simplement la dérivée au sens habituel.

Plus précisément, on a : $\frac{\partial}{\partial x_i}(T_u) = T \frac{\partial u}{\partial x_i}$ si $u \in C^1(\Omega)$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on aurait :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(T_u), \varphi \right\rangle &= \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x) d\gamma - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx \\ &= \left\langle T_u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

On va prendre cette dernière relation comme définition de dérivée pour toute distribution T . Il y a un calcul analogue pour la dérivation à un ordre $k \in \mathbb{N}^*$ arbitraire. On fait plusieurs intégrations par parties successivement on avoir la définition suivante :

Définition 1.2.4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. On définit la dérivée à l'ordre α de T par la formule :

$$\langle D^\alpha T_u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 1.3. La dérivée à l'ordre α de T définit bien une distribution sur Ω .

1.2.2 Support d'une distribution

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T est nulle sur Ω , et on écrit :

$T = 0$ sur Ω si

$$\langle T_j, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.2.5. Le support d'une distribution T est le plus petit fermé tel que T nulle dans son complémentaire. On le note $supp(T)$.

1.3 Les espaces de Sobolev

Avant de parler sur les espaces de Sobolev on va définir les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Définition 1.3.1. Soit p un nombre réel positive tel que $1 \leq p \leq +\infty$

1. $1 \leq p < +\infty$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Est un espace de Banach muni de la norme $\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

2. $p = 2$

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$

3. $p = +\infty$.

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}, \|u(x)\|_\infty < +\infty \right\}$$

Est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_\infty = \inf \{ c \geq 0, |u(x)| \leq c, \text{p.p. } x \in \Omega \}.$$

Définition 1.3.2. Soit $m \geq 1$ un entier et p un réel tel que $1 \leq p < +\infty$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m. D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 2$ on note $H^m(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Définition 1.3.3. On définit $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ c'est-à-dire $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$.

Soit $1 \leq p < +\infty$, alors on peut identifier $W_0^{m,p}(\Omega)$ à l'ensemble des fonctions $u \in W^{m,p}(\Omega)$ qui sont nulles presque partout sur le bord de Ω :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega), \frac{\partial^k u}{\partial \eta^k} \Big|_{\Gamma} = 0, \forall k = 0 \dots (m-1) \right\}.$$

1.3.1 Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ avec $s \in \mathbb{R}_+$

Soit Ω un ouvert à frontière régulière.

Définition 1.3.4. On note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions u définies dans Ω telles que : $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et :

$$\iint_{\Omega \times \Omega} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p \frac{dx dy}{|x - y|^{n+\sigma p}} < \infty.$$

Pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positive, $0 < \sigma < 1$

1.3.2 Inégalités de base

Inégalité de Hölder

Proposition 1.3.1. soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$

Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski

Proposition 1.3.2. Soient $p, q \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toute fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Inégalité de Poincaré

Corollaire 1.3.1. On suppose que Ω est un ouvert borné, Alors il existe une constante c (dépendant de Ω et p) telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalent à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui est induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$, équivalent à la norme $\|u\|_{H^1}$.

1.3.3 Injection de Sobolev

Théorème 1.3.1. Soit $0 \leq s \leq \frac{n}{2}$

1. Si $s = \frac{n}{2}$ alors :

$$H^s(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \text{ pour tout } q \in [2, \infty[.$$

2. Si $0 \leq s < \frac{n}{2}$

$$H^s(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \text{ pour tout } q \in \left[2, \frac{2n}{n-2s}\right].$$

Théorème 1.3.2. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $s > \frac{n}{2} + k$. Alors :

$$H^s(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} C^k(\Omega).$$

1.3.4 Traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

La description des traces de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un sujet de polémique. Il serait intéressant de définir $W^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ comme espace des restrictions à Γ des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ par analogie avec le cas des ouverts à frontière régulière. On s'attendrait alors à ce que l'application :

$$u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

Applique $W^{2,p}(\Omega)$ sur $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. On verra plus loin que cela n'est pas possible, Pour expliquer cette difficulté nous allons utiliser l'analogie avec les espaces de fonctions continûment dérivables. On notera $C^m(\overline{\Omega})$ (resp $C^m(\overline{\Gamma})$) l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ (resp $\overline{\Gamma}$) des fonctions m fois continûment dérivables dans \mathbb{R}^2 (resp \mathbb{R}). Il est clair que l'application :

$$\gamma : u \longrightarrow u|_{\Gamma}$$

Applique $C^0(\overline{\Omega})$ sur $C^0(\Gamma)$. on n'obtient pas nécessairement un élément de $C^0(\Gamma)$. En d'autres termes la dérivée normale au bord d'une fonction u de $C^1(\overline{\Omega})$ n'appartient pas à l'espace des restrictions au bord des éléments de $C^0(\overline{\Gamma})$.

Théorème 1.3.3. L'application $u \longrightarrow (\gamma_j)_{j=0,\dots,m-}$ qui est définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par :

$$\gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} |_{\Gamma}, j = 0, \dots, m-1. \quad (1.2)$$

admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu surjectif de $W^{m,p}(\Omega)$ sur le sous-espace de $W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Omega)$.

Théorème 1.3.4. (formule de Green) Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\Omega)$ et $v \in C^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) d\gamma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx. \quad (1.3)$$

Corollaire 1.3.2. Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour toutes fonctions $u, v \in C^2(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) - \Delta v(x) u(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) - \frac{\partial v}{\partial \eta}(x) u(x) d\gamma \quad (1.4)$$

1.4 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles

Définition 1.4.1. Soit V un espace de Banach, p un élément de $[1, \infty[, T$ un élément de \mathbb{R}_+^* , $(0, T)$ un intervalle de \mathbb{R} . On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans V , et on note $L^p(0, T; V)$, l'espace des fonction

$$\begin{aligned} f :]0, T[&\longrightarrow V \\ t &\longmapsto f(t). \end{aligned}$$

Mesurable .i.e.

1. Si $1 \leq p < \infty$ $\left(\int_0^T \|f(t)\|_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p(0,T;V)} < \infty$
2. Si $p = \infty$, $\sup_{t \in [0,T]} \|f\|_V = \|f\|_{L^\infty(0,T;V)} < \infty$.
1. Pour tout p élément de $[1, \infty[$, $\|f\|^p$ est une norme sur $L^p(0, T; V)$.
2. L'espace $L^p(0, T; V)$ de Banach pour cette norme .
3. Si L'espace V est de plus réflexif, pour $1 \leq p < \infty$ si q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors dual de $L^p(0, T; V)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^q(0, T; V')$.
4. Si V et W désignent deux espaces de Banach, V inclus dans W , avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T; V)$ dans $L^p(0, T; W)$.
5. Si Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n , pour $1 \leq p < \infty$, on a l'équivalent algébrique et topologique entre les espaces $L^p(0, T; L^p(\Omega))$. et $L^p((0, T) \times \Omega)$.

Définition 1.4.2. Soit $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} , V un espace vectoriel normé, on appelle espace des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans V , et on note $\mathcal{D}'(0, T; V)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(0, T)$ dans V .

Propriété 1.4.1. pour tout f de $\mathcal{D}'(0, T; V)$, tout φ de $\mathcal{D}(0, T)$ la valeur de f en φ notée $\langle f, \varphi \rangle$ appartient à V .

1. **Dérivation :** Soit f un élément de $\mathcal{D}'(0, T; V)$, on définit la dérivée de f :

$$f : \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow V. \left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle$$

En effet : soit $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.i.e. $\varphi \in C^\infty(0, T)$ et $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$.

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = \int_0^T \frac{df}{dt} \varphi dt = f\varphi|_0^T - \int_0^T f \frac{d\varphi}{dt} dt = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle.$$

2. **Distribution régulière.** Si f appartient à $L^1_{loc}(0, T; V)$ on peut lui associer une distribution dite distribution régulière associée à f encore notée f définie par :

$$f : \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow V,$$

$$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t) dt.$$

3. **limite :** On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet f pour limite dans $\mathcal{D}'(0, T; V)$ si on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T), \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle.$$

Propriété 1.4.2. Soit p un réel , $1 \leq p \leq \infty$, pour tout $f \in L^p(0, T; V)$ et $f' \in L^p(0, T; V)$, f admet un représentant continu sur $[0, T]$.

Fonction de Green associée à l'opérateur biharmonique Δ^2 avec condition de Dirichlet, dans un ouvert Ω borné régulier, $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

considérons le cadre variationnel :

$$\begin{cases} V = H_0^2(\Omega), H = L^2(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dv; \forall v \in V \end{cases}$$

a est une forme bilinéaire et coercive, et définit un isomorphisme : $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$ de $H_0^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)$.

Soit G l'isomorphisme réciproque, et $G_{x,y}$ son noyau, qui est donc défini par :

$$\langle Gu, v \rangle = \langle G_{x,y}, u(x)v(y) \rangle, \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On peut montrer que

- $G_{x,y}$ est symétrique et très régulier,
- G se prolonge en un isomorphisme de $H^{-2}(\Omega) + \xi'(\Omega)$ sur $H_0^2(\Omega) + \xi'(\Omega)$ et enfin que pour tout $v \in \Omega$, $G_{x,y}$ noté aussi $G(x, y)$ est l'unique solution dans $H_0^2(\Omega) + \xi'(\Omega)$ de l'équation :

$$\Delta_x^2 G(x, y) = \delta_v, \text{ dans } \Omega$$

$G(x, y)$ apparait ainsi comme la fonction de Green du problème $P(\Omega, f, g, h)$:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = g & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma} = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec f, g, h données telles que $f \in H^{-2}(\Omega), g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Utilisons la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u\Delta^2 v - v\Delta^2 u) \, dx &= \int_{\Omega} [(u\Delta^2 v - \Delta u \Delta v) + (\Delta u \Delta v - v\Delta^2 u)] \, dx \\ &= \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \Delta v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \Delta v + \Delta u \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} v \right) d\Gamma \end{aligned}$$

(formellement) avec $u = G(x, y)$: la solution u du problème de Dirichlet $p(\Omega, f, g, h)$ s'écrit alors :

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy + \int_{\Gamma} g(y) \frac{\partial}{\partial \eta_y} \Delta_y G(x, y) \, d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} h(y) \Delta_y G(x, y) \, d\Gamma(y).$$

Dans le cas où Ω est le disque unité du plan \mathbb{R}^2 , on peut donner une expression explicite :

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{|\zeta - \eta|^2}{8\pi} \log \left| \frac{\bar{\eta} - \zeta}{\eta - \zeta} \right| - \frac{1}{16\pi} (|\eta|^2 - 1)(|\zeta|^2 - 1)$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega, y = (y_1, y_2) \in \Omega.$$

où l'on a posé $\zeta = x_1 + ix_2, \eta = y_1 + iy_2, \bar{\zeta} = x_1 - ix_2, \bar{\eta} = y_1 - iy_2$

Lemme 1. (Gronwall) Soit T un réel positif, C une constante positive, f et g deux fonctions vérifiant :

$$f \in L^\infty(0, T), f \geq 0, \text{ p.p.t.}$$

$$g \in L^1(0, T), g \geq 0, \text{ p.p.t.}$$

Et

$$f(t) \leq \int_0^t g(\sigma) f(\sigma) d\sigma + C, \text{ p.p.t.} \quad (1.5)$$

Alors f vérifie :

$$f(t) \leq C \exp \left(\int_0^t g(\sigma) d\sigma \right)$$

Démonstration. Comme $f \in L^\infty(0, T)$ et $g \in L^1(0, T)$ donc

$$F(t) = \int_0^t g(\sigma) f(\sigma) d\sigma + C$$

est absolument continue, d'où $F'(t) = f(t)g(t)$, p.p.t.

D'après (1.5) on a :

$$F'(t) \leq f(t)g(t) \text{ p.p.t.}$$

$$\int_0^t \frac{F'(\sigma)}{F(\sigma)} d\sigma \leq \int_0^t g(\sigma) d\sigma \text{ p.p.t.}$$

$$f(t) \leq F(t) \leq C \exp \left(\int_0^t g(\sigma) d\sigma \right)$$

□

Lemme 2. L'espace $H^2(\Omega)$ est séparable i.e. admet une base dénombrable dense.

Théorème 1.4.1. (Rellich) Soit Ω un borné de \mathbb{R}^n , alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compact.

Démonstration. Soit B un ensemble borné dans $H_0^{m+1}(\Omega)$, nous devons montrer que de toute suite B on peut extraire une sous-suite convergente dans $H_0^m(\Omega)$.

Soit $(u_k)_k \subset B$, alors $\|u_k\|_{H_0^{m+1}(\Omega)} \leq C$ où C est indépendant de k . Comme une boule dans un espace de Hilbert est faiblement compacte, on peut, de la suite (u_k) extraire une sous-suite, notée (w_j) , faiblement convergente dans $H_0^{m+1}(\Omega)$ vers w . Posons $v_j = w_j - w$.

Désignons par \tilde{v}_j le prolongement de v_j par zéro hors de Ω . Alors $v_j \rightarrow \tilde{v}_j$ étant continue, on a

$$\tilde{v}_j \in H_0^{m+1}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|v_j\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\tilde{v}_j\|_{H_0^{m+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\tilde{v}_j \rightarrow 0$ dans $H_0^m(\Omega)$.

En notant \mathcal{F} la transformation de Fourier, il vient

$$\begin{aligned} \|v_j\|_{H_0^m(\Omega)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

On pose

$$J_{1,j} = \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi$$

$$J_{2,j} = \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi$$

Estimons le terme $J_{2,j}$

$$\begin{aligned} J_{2,j} &= \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{(1 + R^2)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m+1} |\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)|^2 d\xi \\ J_{2,j} &\leq \frac{1}{(1 + R^2)} \|v_j\|_{H_0^{m+1}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ et puisque (v_j) est bornée dans $H_0^{m+1}(\Omega)$ on peut toujours choisir R assez grand pour que

$$J_{2,j} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.6}$$

Estimons le terme $J_{1,j}$.

L'ouvert Ω est borné, on a $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \tilde{v}_j(x) dx = \int_{\Omega} e^{-2\pi i(x,\xi)} \tilde{v}_j(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i(x,\xi)} \tilde{v}_j(x) dx \end{aligned}$$

Où φ est la fonction indicatrice de Ω . Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction :

$$x \rightarrow \varphi(x) e^{-2\pi i(x,\xi)} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi) = (\varphi(x) e^{-2\pi i(x,\xi)}, \tilde{v}_j(x))_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (1.7)$$

Lorsque j tend vers l'infini, \tilde{v}_j converge faiblement vers zéro dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

D'autre part, d'après (1.7) on a :

$$|\mathcal{F} \tilde{v}_j(\xi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\tilde{v}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après (1.7) et (1.8), on peut appliquer le théorème de la convergence domaine de Lebesgue, de sorte que l'on peut choisir j assez grand pour que

$$J_{1,j} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.9)$$

D'après (1.6) et (1.9), la suite (v_j) converge vers zéro dans $H_0^m(\Omega)$. \square

Chapitre 2

Quelques Problèmes Linéaires

Dans ce chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions faibles de quelque problèmes aux limites gouvernés par le bilaplacien dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière.

On mettra en évidence, dans chaque cas, un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible.

Notation 2.1. Ω désigne un corps homogène, occupant un domaine borné de (\mathbb{R}^2) , à frontière suffisamment régulière Γ .

Par suite, tous les résultats sur ce type de domaine sont valables. Il suffit, dans toute la suite de faire l'étude dans le secteur Ω ouvert borné, de frontière suffisamment régulière Γ .

$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, est la normale unitaire sortante dans le sens positif sur la frontière Γ .

$M(u)$ désigne l'opérateur différentiel frontière suivant :

$$M(u)|_{\Gamma} = M(u) = \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2}.$$

où $\nu \in]0; 1[$ est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.

La dérivée normale est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

2.1 Formulation des problèmes (P_k) , $k = 1 \text{ \AA } 2$

On considère ici une famille de 2 problèmes gouvernés par le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$ on cherche u , si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_k) \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega, \\ B_0^k u = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad k = 1 \text{ \AA } 2$$

où les opérateurs frontières sont :

$$\{B_0^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma. \quad (2.1)$$

$$\{B_0^2 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma. \quad (2.2)$$

2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k) , $k = 1 \text{ \AA } 2$.

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ces problèmes représentent différents modèles mathématiques d'une plaque, $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements),

f est la densité de force et les conditions aux au bord (2.1) à (2.2) signifient que la plaque est :

- Encastrée aux bord Γ , pour le premier problème.
- Simplement supportée aux bord Γ , pour le deuxième problème.

La méthode variationnelle usuelle, étant valable dans les domaines bornés à frontière suffisamment régulière ainsi que dans le cas des fissures. On est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^2(\Omega)$.

On s'intéresse à l'existence et à l'unicité de la solution variationnelle $u^{(k)} \in H^2(\Omega)$ de (P_k) ; $k = 1 \text{ \AA } 2$, et $\nu \in]0, 1[$ est le coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque.

2.1.2 Théorie de Lax-Milgram

Dans cette section, on considère un problème général pouvant se mettre sous la forme variationnelle

$$(pb) \text{ trouver } u \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Le théorème de **Lax-Milgram** apporte une réponse à l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution dans un cadre précis.

Théorème 2.1.1. on suppose que V est un espace de Hilbert et que les formes a et F vérifient les hypothèses suivante :

1. continuité de F :

$$|F(v)| \leq C_F \|v\|_V \text{ pour tout } v \in V.$$

2. continuité de a :

$$|a(u, v)| \leq C_a \|u\|_V \|v\|_V \text{ pour tout } u, v \in V.$$

3. coercivité de a :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \text{ pour tout } u \in V, \text{ avec } \alpha > 0.$$

Alors il existe une solution unique u au problème (pb) qui vérifie l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}.$$

avec $\|F\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V=1} |F(v)|$ la norme de F dans le dual V' de V .

Démonstration. L'estimation à priori s'établit en prenant $v = u$ dans (Pb) puis en appliquant la continuité de F et la coercivité de a ce qui donne :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq C_F \|u\|_V.$$

Il suffit alors de prendre $C_F = \|u\|_{V'}$. Cette estimation nous donne aussi l'unicité de la solution. Pour l'existence, considérons d'abord le cas simple où a est une forme symétrique. Dans ce cas la continuité et la coercivité de a montrent qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $V * V$ et que la norme

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}.$$

est équivalente à la norme $\|v\|_V$. puisque F est continue, elle est aussi par rapport à $\|v\|_a$ et le théorème de représentation de Riesz nous assure donc l'existence d'un unique $u \in V$ tel que

$$F(v) = a(u, v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Dans le cas non-symétrique, on remarque que puisque

$$v \longrightarrow a(u, v) \text{ et } v \longrightarrow F(v).$$

Sont continues, on peut écrire

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \text{ et } F(v) = \langle f, v \rangle.$$

où A est opérateur continu sur V , $f \in V'$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire dans V , Le problème (pb) s'écrit donc

$$Au = f \text{ dans } V$$

L'hypothèse de coercivité nous permet d'affirmer que

$$\alpha \|v\|_V \leq \|Av\|_{V'}.$$

Pour tout $v \in V$, ce qui entraîne que $Im(A)$ est un sous-espace fermé de V qui se décompose donc suivant :

$$V = Im(A) \oplus (Im(A))^\perp$$

Considérons à présent $\omega \in (Im(A))^\perp$. La coercivité nous montre que

$$\alpha \|\omega\|_X^2 \leq a(\omega, \omega) = \langle A\omega, \omega \rangle = 0.$$

Par conséquent $Im(A) = V$ ce qui prouve l'existence de la solution u . □

Nous allons considérer trois problèmes types, soient les cas $k = 1$ à 3.

2.2 Problème P_1

2.2.1 Formulation du problème P_1 .

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, On cherche u , si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_1) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega & (1) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \Gamma, & (3) \end{cases}$$

2.2.2 Interprétation physique du problème (P_1) .

Physiquement, ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions aux au bord sur Γ signifient que la plaque est encastrée sur Γ .

2.2.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_1).

Ω étant un domaine à frontière suffisamment régulière, la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H_0^2(\Omega)$,

tel que

$$a(u, v) = F(v) \text{ pour tout } v \in H_0^2(\Omega),$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \text{ et } F(v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

soit u une solution régulière de (P_1) pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$ on a

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (2.3)$$

par intégration par partie,

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \eta}(x) v(x) ds.$$

comme $v = 0$ sur Γ on en déduit que

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v(x) dx.$$

puis par une nouvelle intégration par partie que

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta v(x) dx - \int_{\Gamma} \Delta u(x) \frac{\partial v}{\partial \eta}(x) ds.$$

comme $\frac{\partial v}{\partial \eta}(x)$ sur Γ , le dernier terme de cette équation est nulle. Ainsi, on déduit de (2.3) que

$$\int_{\Omega} \Delta(\Delta u)(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

donc, pour tout $v \in H_0^2(\Omega)$, ainsi $\Delta(\Delta u) - f = 0$.

Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, la seule hypothèse non trivialement vérifiée est la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, Or pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$, on établit suite à deux intégrations par partie successives que

$$a(u, u) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|^2 dx = \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de Poincaré, on obtient qu'il existe des constantes C et C' positives telles que pour tout élément $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C' \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 = C' a(u, u).$$

Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq Ca(u, u).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ est donc établie et il existe une unique solution au problème variationnel.

Reste à établir que la solution du problème variationnel est solution du problème aux limites (P_1).

Soit ω un ouvert inclus dans un compact de Ω . Il existe $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur ω . Pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω .

$$\int_{\Omega} \theta(x) \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

D'après le résultat de régularité admit $\theta(x) \Delta u$, est un élément de $H^2(\Omega)$. Il est donc licite d'effectuer deux intégrations par partie successives sur le membre de gauche de l'équation précédente. On en déduit que

$$\int_{\Omega} \Delta(\theta(x) \Delta u(x) v(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Cette équation étant vérifiée pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω on en déduit que pour presque tout $x \in \Omega$.

$$\Delta(\Delta u)(x) = f(x).$$

Cette relation reste valable pour presque tout $x \in \Omega$: il suffit de considérer une suite ω_n de compacts tels que $\cup_n \omega_n = \Omega$. Enfin, comme $u \in H_0^2(\Omega)$, la solution de problème variationnel vérifie automatiquement les conditions au bord $u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

2.3 Problème P_2

2.3.1 Formulation du problème P_2 .

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$. On cherche u , si possible dans $H^4(\Omega)$, solution de :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (2) \\ M(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (3) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.3.2 Interprétation physique du problème (P_2).

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque, $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions aux au bord (2) et (3) signifient que la plaque est simplement supportée.

2.3.3 Existence et unicité de la solution du problème (P_2).

Ω étant un domaine à frontière régulier, la méthode variationnelle usuelle est applicable ici pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^2(\Omega)$.

2.3.4 Formulation variationnelle du problème.

Supposons qu'une solution u de (P_2) existe et qu'elle appartient à $H^4(\Omega)$. Alors en multipliant l'équation (1) de (2.4) par une "fonction test" $v \in H^2(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.5)$$

Lemme 3. Soit $u \in H^4(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) - \int_{\Gamma} \left[\gamma_0(Mu) \gamma_0 \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] d\gamma \quad (2.6)$$

$$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$$

Où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique définie sur $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \quad (2.7)$$

$$= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} (1 - \nu) L(u, v) dx \quad (2.8)$$

Où $L(u, v)$ définie par

$$L(u, v) = \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 v + \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 v - 2 \partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 \partial_2 v \quad (2.9)$$

Démonstration. On effectue la décomposition suivante du bilaplacien :

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left((1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta^2 u v &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left((1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \right] v dx\end{aligned}$$

On applique la formule de Green deux fois à chaque terme de l'intégrale séparément :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_1 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 \right] d\gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_1 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_2 \right] d\gamma \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) v \eta_2 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) v \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_1 \right] d\gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_1 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_1 \right] d\gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_2 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) v \eta_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 \right] d\gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v dx &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_2 d\gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v \eta_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 \right] d\gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u v &= \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}}_{\Delta u \Delta v} dx \\ &\quad - (1-v) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx + I_1 - I_2 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + (1-v) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \eta_1 + v \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_1 \right. \\ &\quad \left. + (1-v) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \eta_2 + v \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right] v d\gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 + (1-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_2 + (1-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_1 \right. \\ &\quad \left. + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \eta_1 + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \eta_2 \right] d\gamma. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale I_1 : On calculons d'abord $\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \eta_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \eta_2 \right] v d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u v d\gamma. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale I_2 on exprimer les dérivées partielles en fonction des dérivées normales et tangentes .

En effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \eta_2. \\ \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \eta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \eta_1. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_1 - \frac{\partial u}{\partial s} \eta_2. \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_2 + \frac{\partial u}{\partial s} \eta_1. \end{cases}$$

On applique ainsi ces formules pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v}{\partial n} \eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s} \eta_2 \right) \eta_1 + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s} \eta_1 \right) \eta_1 \right. \\
 &\quad + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s} \eta_2 \right) \eta_2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_1 - \frac{\partial v}{\partial s} \eta_2 \right) \eta_1 \\
 &\quad \left. + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s} \eta_1 \right) \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_2 + \frac{\partial v}{\partial s} \eta_1 \right) \eta_2 \right] d\gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1^2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_2^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_2^2 \right] d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (\eta_1^2 + \nu \eta_2^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} (\nu \eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma \\
 &\quad + (1 - \nu) \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[- \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (\eta_1^2 + \nu(1 - \eta_1^2)) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} (\nu(1 - \eta_2^2) + \eta_2^2) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma \\
 &\quad - (1 - \nu) \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma \\
 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_2^2 \right) + \nu \Delta u \right] d\gamma \\
 &\quad - (1 - \nu) \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma
 \end{aligned}$$

La seconde intégrale de I_2 peut être calculée par parties. Étant donné qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues en un point, on obtient tout simplement :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left[\nu \Delta u + (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_2^2 \right) \right] d\gamma \\
 &\quad + (1 - \nu) \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \eta_1 \eta_2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (\eta_1^2 - \eta_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \eta_1 \eta_2 \right] d\gamma
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\int_{\Gamma} \Delta^2 u \nu dx = a(u, \nu) - \left(\int_{\Gamma} \left[\gamma(Mu) \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] d\gamma \right)$$

□

On choisissant :

$$V = \{v \in H^2(\Omega), v = 0, \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.10)$$

On a V est bien un sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$ contenant

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

$$H_0^2(\Omega) \underset{\text{continue}}{\hookrightarrow} V.$$

i.e.

$$\|u\|_V \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Pour $u \in H^4(\Omega)$ solution du problème (P_2) et $v \in V$ on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) \quad (2.11)$$

Où $a(u, v)$ est définie en (2.8).

Une formulation variationnelle du problème P_2 :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad (2.12)$$

On pose :

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad (2.13)$$

Alors, on a le problème variationnel :

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \forall v \in V \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (P_v) a une solution unique $u \in H^2(\Omega)$. En effet, la linéarité des formes a et F sont facile à vérifier. Pour la continuité de la forme linéaire a sur V :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - (1-v) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx \\ &\quad - (1-v) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right. \\ &\quad \left. + 2(1-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \right] dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \right] \left[\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right| + 2 \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \right] dx \\
 &\leq \|u\|_V \|v\|_V.
 \end{aligned}$$

D'où la continuité de la forme a .

En établie la coercivité de a :

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right) \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 + 2(1-\nu) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right] dx \\
 &= (1-\nu) \int_{\Omega} \left[2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
 &\quad + \nu \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
 &= (1-\nu) \int_{\Omega} \left[2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx + \nu \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx. \\
 &\geq (1-\nu) \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right] dx \\
 &\geq (1-\nu) |u|_V^2.
 \end{aligned}$$

Où $|u|_V = \left(\sum_{|\alpha|=2}^m \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la semi-norme de V qui est équivalente à la norme de $H^2(\Omega)$

Donc la forme a est bien coercive.

En établie la continuité de F :

$$|F(v)| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|F(v)| \leq C \|v(x)\|_V.$$

2.3.5 Interprétation de la solution du problème (P_2)

En choisissant $v = \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ dans (2.13), on obtient immédiatement

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \mathfrak{D}'(\Omega) \tag{2.15}$$

Par ailleurs, d'après la définition de V , on sait que

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma \quad (2.16)$$

Il reste à interpréter la condition aux limite $M(u) = 0$, sur Γ .

Nous allons montrer que (P_v) implique que

$$M(u) = 0, \text{ sur } \Gamma \quad (2.17)$$

Soit

$$H(\Delta^2, \Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : \Delta^2 v \in L^2(\Omega)\}$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{H(\Delta^2, \Omega)} = \left(\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\Delta^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démontrons que l'application trace

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma) \\ u &\longmapsto Tu = M(u) \end{aligned}$$

Se prolonge en une application linéaire continue, encore notée T , de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

En effet, soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $\omega \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on pose

$$\ell(\omega) = \int_{\Gamma} \gamma M(u) \gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) d\gamma.$$

D'après le théorème de trace (cf : [1] lemme (2.1) et (2.2) il existe $v \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C' \|\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

On peut alors écrire par utilisation de la formule de Green

$$\ell(\omega) = \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx \quad (2.18)$$

On a donc (en utilisant l'inégalité de Schwarz)

$$\begin{aligned} \ell(\omega) &\leq \|u\|_{H(\Delta^2, \Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u\|_{H(\Delta^2, \Omega)} \|\omega\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\ell \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et de plus l'application

$$T : u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \ell \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

est bornée sur $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H(\Delta^2, \Omega)$ elle peut donc être prolongée par densité, vu que $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H(\Delta^2, \Omega)$ (cf.[1]) en une application linéaire continue de $H(\Delta^2, \Omega)$ dans $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Pour $u \in H(\Delta^2, \Omega)$ et $H^2(\Omega)$ on a la formule de Green généralisée

$$\langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx \quad (2.19)$$

Démontrons à présent que (2.17) a bien lieu si u est la solution du problème (P_ν) . D'après (2.15), on voit que $u \in H(\Delta^2, \Omega)$. La formule de Green généralisée (3.5) entraîne

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx + \langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad (2.20)$$

Pour tout $v \in H^2(\Omega)$. D'après (2.15) on a donc

$$\langle \gamma(Tu), \gamma v \rangle_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0, \forall v \in H^2(\Omega).$$

D'où

$$Tu = Mu = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

L'interprétation du problème variationnel P_ν en terme de problème aux limites est donc la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ M(u) = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Chapitre 3

Problèmes de Vibrations non Linéaires

3.1 Problème P_4

3.1.1 Position du problème

On considère un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 (Ω est la plaque vibrante).

On cherche une fonction $u = (u_1, u_2) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ dans \mathbb{R}^2 , qui vérifie :

$$(P_4) \left\{ \begin{array}{l} u''_1 + a_1 \Delta^2 u_1 - L(u_1, u_2) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (4.1) \\ a_2 \Delta^2 u_2 + L(u_1, u_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (4.2) \\ u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.3) \\ u_1(x, 0) = u_{01}(x), u'_1(x, 0) = u_{11}(x), \quad x \in \Omega \quad (4.4) \end{array} \right.$$

Où les fonctions u_{01} et u_{11} sont données, les a_i sont des constantes strictement positifs, f est une fonction donnée de Q dans \mathbb{R} :

3.1.2 Interprétation physique du problème

On considère une plaque mince élastique homogène occupons un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 à frontière suffisamment régulière. Les équations (4,1) et (4,2) est l'équation d'équilibre de la plaque, f désigne la densité des forces volumiques donnée, u_1 désigne le déplacement vertical d'un point matériaux x à l'instant t , et u_2 désigne le déplacement transversal d'un point matériaux x à l'instant t , et les conditions au bord, signifient que la plaque est encastree aux bords Σ .

Définition 3.1.1. (Système de Cauchy-Kowaleska) :Un système d'équations aux

dérivées partielles est appelé système de **Cauchy-Kowaleska** s'il est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots) \\ i, j = 1, 2, \dots, N; k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_i; k_0 < n_i \\ \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \Phi_{i,k}(x_1, \dots, x_n), k = 0, 1, \dots, n_i - 1 : t = t^0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où les fonctions F_i et $\Phi_{i,k}$ analytique dans un voisinage du point $(t^0, x_1^0, x_2^0, \dots, \Phi_{j,k_0,k_1,\dots,k_n}^0)$ dans lequel

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \Phi_{i,k_0}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_i=x_i^0} = \Phi_{i,k_0,k_1,\dots,k_n}^0; \quad (3.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, N:$$

$$k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_i.$$

Remarque 3.1. Dans (P_4) . Il n'y a pas de condition initiale sur u_2 , cela tient au faite que le système d'équations aux dérivées partielles ne contient pas de dérivée en t de u_2 . Donc, le système (P_4) il n'est pas du type de **Cauchy-Kowaleska**, on peut l'y ramener à condition que **l'opérateur de GREEN**, i.e. l'opérateur inverse de Δ^2 dans Ω pour les conditions aux limites correspondantes, existe. L'existence de ce dernier dépend des conditions aux limites et de la forme géométrique de la plaque Ω , Par exemple, lorsque Ω est à frontière polygonale, l'existence de **l'opérateur de GREEN** dépend de l'ouverture des angles de la plaque.

Dans ce travail, on ne considère que le problème (P_4) avec Ω borné et à frontière régulière. Si G_2 désigne **l'opérateur de GREEN** pour les conditions aux limites de Dirichlet, alors la deuxième équation de (P_4) équivaut à

$$u_2 = -\frac{1}{a_2} G_2 L(u_1, u_2) \quad (3.3)$$

et alors la première équation de (P_4) devient

$$u''_1 + a_1 \Delta^2 u_1 + [u_1 \frac{1}{a_2} G_2 L(u_1, u_2)] = f \quad (3.4)$$

3.1.3 Étude de l'opérateur bilinéaire L

On définit l'opérateur bilinéaire L de $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ par :
soit $u, v \in H_0^2(\Omega)$.

$$L(u, v) = \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \cdot \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 \partial_2 v.$$

Lemme 4. l'application $u, v \rightarrow L(u, v)$ est bilinéaire continue de

$$H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-2}(\Omega)$$

Démonstration. Soit $w \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} (L(u, v), w) &\leq \|w\|_\infty \int_{\Omega} |\partial_1^2 u| |\partial_2^2 v| + |\partial_2^2 u| |\partial_1^2 v| + 2|\partial_1 \partial_2 u| |\partial_1 \partial_2 v| dx \\ &\leq C \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

(car $H_0^2(\Omega) \subset H_0^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $n = 2$ et $\varepsilon > 0$). \square

Corollaire 3.1.1. la forme $u, v, w \longrightarrow (L(u, v), w)$ est trilinéaire continue sur $H_0^2(\Omega)$.

Lemme 5. la forme trilinéaire $u, v, w \longrightarrow (L(u, v), w)$ est symétrique sur $H_0^2(\Omega)$.

Démonstration. Puisque $L(u, v) = L(v, u)$, il suffit de montrer que

$$(L(v, u), w) = (L(w, u), v). \quad (3.5)$$

et d'après le Corollaire(3.1.1), il suffit de vérifier (3.5) pour $u, v, w \in \mathcal{D}(\Omega)$

On a

$$\begin{aligned} L(v, u) &= \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 v + \partial_2^2 u \cdot \partial_1^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 \partial_2 v. \\ &= \partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 v - 2\partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 \partial_2 v + \underbrace{\partial_1^2 \partial_2^2 u \cdot v + \partial_2^2 \partial_1^2 u \cdot v - 2\partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_2 u \cdot v}_0 \\ &\quad + 2 \underbrace{(\partial_1 \partial_2^2 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_1^2 u \partial_2 v - \partial_2 \partial_1 \partial_2 u \cdot \partial_1 v - \partial_1^2 \partial_2 u \cdot \partial_2 v)}_0 + \partial_2^2 u \cdot \partial_1^2 v \\ &= (\partial_2^2 \partial_1^2 u \cdot v + 2\partial_2 \partial_1^2 u \partial_2 v + \partial_1^2 u \partial_2^2 v) + (\partial_1^2 \partial_2^2 u \cdot v + 2\partial_1 \partial_2^2 u \partial_1 v + \partial_2^2 u \partial_1^2 v) \\ &\quad - 2(\partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_2 u \cdot v + \partial_2 \partial_1 \partial_2 u \partial_1 v + \partial_1^2 \partial_2 u \partial_2 v + \partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 v) \\ &= \partial_1^2 (\partial_2^2 u \cdot v) - 2\partial_1 \partial_2 (\partial_1 \partial_2 u \cdot v) + \partial_2^2 (\partial_1^2 u \cdot v). \end{aligned}$$

Alors, par intégrations par parties

$$\begin{aligned} (L(v, u), w) &= (\partial_2^2 u \cdot v, \partial_1^2 w) - 2(\partial_1 \partial_2 u \cdot v, \partial_1 \partial_2 w) \\ &= (\partial_1^2 w \cdot \partial_2^2 u - 2\partial_1 \partial_2 w \partial_1 \partial_2 u + \partial_2^2 w \cdot \partial_1^2 u, v) \\ &= (L(w, u), v). \end{aligned}$$

\square

3.1.4 Théorème d'existence

Théorème 3.1.1. On suppose f, u_{01}, u_{11} donnés avec

$$f \in L^2(Q). \quad (3.6)$$

$$u_{01} \in H_0^2(\Omega), u_{11} \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

Il existe alors u_1 et u_2 solutions de (P_4) avec

$$u_1 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (3.8)$$

$$u_1' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.9)$$

$$u_2 \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (3.10)$$

Remarque 3.2. Il résulte de (3.8) et (3.10) que

$$L(u_1, u_2) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \quad (3.11)$$

et donc la première équation de (4.3) entraîne que

$$u''_1 \in L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)) \quad (3.12)$$

et donc les conditions initiales dans (P_4) ont un sens.

Remarque 3.3. La fonction u_2 du Théorème (3.1.1) vérifie

$$u_2 \in L^\infty(0, T; H^{3-\epsilon}(\Omega)), \forall \epsilon > 0. \quad (3.13)$$

En effet, soit $\epsilon > 0$ fixé arbitrairement petit. Alors

$$L^1(\Omega) \subset H^{-1-\epsilon}(\Omega) \quad (3.14)$$

car si $f \in L^1(\Omega)$ on a :

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1+\epsilon}(\Omega)}$$

vu que $H_0^{1+\epsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $n = 2$ et $\epsilon > 0$. Alors

$$L(u_1, u_2) \in L^\infty(0, T; H^{-1-\epsilon}(\Omega))$$

et comme $a_2 u_2 = -L(u_1, u_2)$, on en déduit (3.13). (Notons que $(\Delta^2)^{-1}$ envoie $H^s(\Omega)$ dans $H^{s+4}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $s \geq 0$).

3.1.5 Formulation variationnelle du problème

En multipliant l'équation (4.1) et (4.2) par une "fonction test" $v \in V$, on obtient par la formule de Green :

$$(u''_1, v) + a_1 a(u_1, v) - (L(u_1, u_2), v) = (f, v). \quad (3.15)$$

$$\int a_2 a(u_2, v) - (L(u_1, u_2), v) dx = 0 \quad (3.16)$$

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - (1 - v) \int_{\Omega} L(u, v) dx.$$

Démonstration du théorème 3.1.1.

Définition des solution approchées

On introduit une suite w_1, \dots, w_m, \dots de fonctions ayant les propriétés suivantes :

- $w_i \in H_0^2(\Omega), \forall i$
- $\forall m, w_1, \dots, w_m$ sont linéaire indépendants
- les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^2(\Omega)$:

Soit $u_{1m}(t)$ vérifiant

$$u_{1m}(t) \in [w_1, \dots, w_m]. \text{ i.e. } u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i. \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} (u''_{1m}(t), w_j) + a_1 (\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j) \\ + \frac{1}{a_2} ([u_{1m}(t), G_2([u_{1m}(t), u_{1m}(t)])], w_j) = (f(t), w_j). \\ i \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.18)$$

où on utilise les notations de (4.3) (4.4), avec

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in [w_1, \dots, w_n], u_{01m} \longrightarrow u_{01} \text{ dans } H_0^2(\Omega) \quad (3.19)$$

$$u'_{1m}(0) = u_{11m} \in [w_1, \dots, w_n], u_{11m} \longrightarrow u_{11} \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (3.20)$$

Si l'on définit $u_{2m}(t)$ par

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a} G_2(L(u_{2m}(t), u_{2m}(t))). \quad (3.21)$$

ou encore

$$\begin{cases} a_2 \Delta^2 u_{2m}(t) + L(u_{1m}(t), u_{1m}(t)) = 0 \\ u_{2m}(t) \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.22)$$

alors (3.18) s'écrit

$$\begin{cases} (u''_{1m}(t), w_j) + a_1(\Delta u_{1m}(t), \Delta w_j) \\ -(L(u_{1m}(t), u_{2m}(t), w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (3.23)$$

Naturellement $u_{2m}(t)$ n'est pas (en général) à valeurs dans $[w_1, \dots, w_m]$.

On est assuré de l'existence de $u_{1m}(t)$ et donc de $u_{2m}(t)$, dans un intervalle $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

3.1.6 Estimations a priori.

On multiplie (3.23) par $g'_{jm}(t)$ et on somme en j . Il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 |\Delta u_{1m}(t)|^2) - (L(u_{1m}(t), u_{2m}(t), u'_{1m}(t))) = (f(t), u'_{1m}(t)) \quad (3.24)$$

Mais, d'après le **lemme (5)** :

$$\begin{aligned} -(L(u_{1m}(t), u_{2m}(t), u'_{1m}(t))) &= -(L(u_{1m}(t), u'_{1m}(t), u_{2m}(t))) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} L(u_{1m}(t), u_{1m}(t), u_{2m}(t)) \right) \end{aligned}$$

et d'après (3.22) cela est égal à

$$\frac{a_2}{2} (\Delta^2 u'_{2m}(t), u_{2m}(t)) = \frac{a^2}{4} \frac{d}{dt} |\Delta u_{2m}(t)|^2.$$

donc (3.24) s'écrit encore :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} |(\Delta u_{2m}(t))|^2) \quad (3.25)$$

$$= (f(t), u'_{1m}(t)) \quad (3.26)$$

et donc

$$\frac{1}{2} (|u_{1m}(t)|^2 + a_1 |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} |(\Delta u_{2m}(t))|^2) = \frac{1}{2} (|u_{11m}|^2 + a_1 |\Delta u_{01m}|^2 + \frac{a_2}{2} |(\Delta u_{2m}(0))|^2) + \int_0^t (f(\sigma)) \quad (3.27)$$

mais d'après (3.19)

$$|u_{11m}|^2 + a_1 |\Delta u_{01m}|^2 \leq \text{constante.}$$

d'après la définition (3.21) on a :

$$u_{2m}(0) = -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_{01m}, u_{01m})) \quad (3.28)$$

mais $(L(u_{01m}, u_{01m}))$ demeure dans un borné de $L^1(\Omega)$ donc de $H^{-2}(\Omega)$, donc $u_{2m}(0)$ demeure dans un borné de $H_0^2(\Omega)$ et donc dans (3.27).

$$|\Delta u_{2m}(0)| \leq \text{constante.}$$

donc(3.27) entraine que $t_m = T$ et que :

$$u_{1m}, u_{2m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (3.29)$$

$$u'_{1m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.30)$$

3.1.7 Passage a la limite

d'après (3.29) et (3.30) on peut extraire une suite u_1, u_2 telle que

$$\begin{cases} u_{i\mu} \longrightarrow u_i \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) & \text{faible } *, \quad i = 1, 2 \\ u'_{1\mu} \longrightarrow u'_1 \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) & \text{faible } * \\ u_{1\mu} \longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2(Q) & \text{fort} \end{cases} \quad (3.31)$$

soient $\varphi_j, 1 \leq j \leq j_0$ des fonction $\in C^1([0, T])$,

$$\varphi_j(T) = 0 \text{ et } \psi = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_j \otimes w_j$$

on déduit de (3.23) pour $m = \mu > j_0$ que

$$-\int_0^t (u'_{1\mu}, \psi') dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_{1\mu}, \Delta \psi) dt - \int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt = \int_0^T (f, \psi) dt + (u_{11\mu}(0), \psi(0)) \quad (3.32)$$

mais d'après **le lemme 5** :

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt = \int_0^T (L(\psi, u_{2\mu}), u_{1\mu}) dt \quad (3.33)$$

$L(\psi, u_{2\mu} \longrightarrow L(\psi, u_2)$ dans $L^2(Q)$ faible et donc puisque $u_{1\mu} \longrightarrow u_1$ dans $L^2(Q)$ fort ,on voit que

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt \longrightarrow \int_0^T (L(\psi, u_2), u_1) dt = \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi) dt$$

donc, (3.33) implique à la limite :

$$-\int_0^T (u'_1, \psi') dt + a_1 \int_0^T (\Delta u_1, \Delta \psi) dt - \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi) dt = \int_0^T (f, \psi) dt + (u_{11}, \psi(0)) \quad (3.34)$$

et cela $\forall \psi$ de la forme (3.32). Par passage à la limite on en déduit que (3.34) a encore lieu pour tout $\psi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ tel que $\psi' \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ et $\psi(T) = 0$.

Cela montre que u_1 et u_2 sont liés par la **première équation** de (P_4) et que $u_1'(0) = u_{11}$. Il reste donc seulement à montrer la **deuxième équation** de (P_4) . On peut passer directement à la limite sur (3.22) (pour $m = \mu$) en notant quand que $[u_{1\mu}, u_{1\mu}] \rightarrow [u_1, u_1]$ dans $D'(Q)$, en effet, on a

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{1\mu}], \varphi) dt = \int_0^T ([u_{1\mu}, \varphi], u_{1\mu}) dt, \forall \varphi \in D(Q)$$

et on passe à la limite comme plus haut.

3.2 Problème P_5

3.2.1 Position du problème

On considère un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 (Ω est la plaque vibrante).

On cherche une fonction $u = (u_1, u_2) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$ dans \mathbb{R}^2 , qui vérifie :

$$(P_5) \left\{ \begin{array}{l} u''_1 + a_1 \Delta^2 u_1 - L(u_1, u_2) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (5.1) \\ a_2 \Delta^2 u_2 + L(u_1, u_2) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (5.2) \\ M(u_1) = 0, M(u_2) = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.3) \\ u_1(x, 0) = u_{01}(x), u_1'(x, 0) = u_{11}(x), \quad x \in \Omega \quad (5.4) \end{array} \right.$$

Où les fonctions u_{01} et u_{11} sont données, les a_i sont des constantes strictement positifs, f est une fonction donnée de Q dans \mathbb{R} :

$$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

3.2.2 Interprétation physique du problème

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ces problèmes représentent différents modèles mathématiques d'une plaque non linéaire vibrante : $u(x, t)$ étant le déplacement au point x et à l'instant t , f est la densité de force et les conditions au

bord signifient que la plaque est libre au bord Σ .

Remarque 3.4. Il n'y a pas de condition initiale sur u_2 , cela tient au fait que le système (P_5) ne contient pas de dérivée en t de u_2 , c'est à dire que la vibration de

la plaque sont de la direction u_1 . Le système (P_5) n'est pas du type de Cauchy-Kowalski, on peut l'y ramener de la façon suivante, par élimination de u_2 .

$$u_2 = -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_1, u_2)) \quad (3.35)$$

Remarque 3.5. Soit G_2 désigne «l'opérateur de Green», i.e. l'opérateur inverse de Δ^2 dans pour les conditions aux limites d'une plaque simplement supportée.

Et alors (5.1) devient

$$u''_1 + a_1 \Delta^2 u_1 + \frac{1}{a_2} L(u_1, G_2(L(u_1, u_2))) = f \quad (3.36)$$

3.2.3 Théorème d'existence

3.2.4 Formulation variationnelle du problème

En multipliant l'équation (5.1) et (5.2) par une "fonction test" $v \in H^2(\Omega)$, on obtient par la formule de Green :

$$(u''_1, v) + a_1 a(u_1, v) - (L(u_1, u_2), v) = (f, v). \quad (3.37)$$

$$\int a_2 a(u_2, v) + (L(u_1, u_1), v) dx = 0 \quad (3.38)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - (1 - \nu) \int_{\Omega} L(u, v) dx.$$

Démonstration. du Théorème (3.1.1) **Définition des solutions approchées :** On introduit une suite w_1, \dots, w_m, \dots de fonctions ayant les propriétés suivantes :

- $w_i \in V, \forall i \in \mathbb{N}^*$,
- $\forall m \in \mathbb{N}^*, w_1, \dots, w_m$ sont linéairement indépendants,
- les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^2(\Omega)$.

Soit $u_m(t)$ vérifiant

$$u_{1m}(t) \in [w_1, \dots, w_m]. \text{ i.e. } u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \quad (3.39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u''_{1m}(t), w_j) + a_1 a(u_{1m}(t), w_j) - (L(u_{1m}(t), u_{2m}(t)), w_j) = (f(t), w_j), \\ 1 \leq j \leq m. \end{array} \right. \quad (3.40)$$

où on utilise les notations de (2.10) (3.7), avec

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in [w_1, \dots, w_m], u_{01m} \rightarrow u_{01}, \text{ dans } H_0^2(\Omega). \quad (3.41)$$

$$u'_{1m}(0) = u_{11m} \in [w_1, \dots, w_m], u_{11m} \rightarrow u_{11}, \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.42)$$

Si l'on définit $u_{2m}(t)$ par

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_{1m}(t), u_{1m}(t))) \quad (3.43)$$

ou encore

$$\begin{cases} a_2 \Delta^2 u_{2m}(t) + L(u_{1m}(t), u_{1m}(t)) = 0 \\ u_{2m}(t) \in V. \end{cases} \quad (3.44)$$

alors (3.40) s'écrit

$$\begin{cases} (u''_{1m}(t), w_j) + a_1 a(u_{1m}(t), w_j) + \frac{1}{a_2} (L(G_2(L(u_{1m}(t), u_{1m}(t))), u_{1m}(t)), w_j) = (f(t), w_j), \\ 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (3.45)$$

Naturellement (3.44) $u_{2m}(t)$ n'est pas (en général) à valeurs dans $[w_1, \dots, w_m]$. est assuré de l'existence de $u_{1m}(t)$, et donc de $u_{2m}(t)$. \square

3.2.5 Estimations a priori

Démonstration. On multiplie (3.39) par $g'_{jm(t)}$ et on somme en j . Il vient :

$$\begin{cases} (u''_{1m}(t), u'_{1m}(t)) + a_1 a(u_{1m}(t), u'_{1m}(t)) - (L(u_{1m}(t), u_{2m}(t)), u'_{1m}(t)) = (f(t), u'_{1m}(t)), \\ 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (3.46)$$

On fait les calculs pour simplifie (3.46)

$$\begin{aligned} (u''_{1m}(t), u'_{1m}(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_{1m}(t)|^2. \\ (\Delta u_{1m}(t), \Delta u'_{1m}(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_{1m}(t)|^2. \\ \int_{\Omega} L(u_{1m}, u'_{1m}) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_2^2} - \left| \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 dx \\ (L(u_{1m}(t), (u_{2m}(t)), u'_{1m}(t)) &= (L(u_{1m}(t), (u'_{1m}(t)), u_{2m}(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} L(u_{1m}(t), (u_{1m}(t)), u_{2m}(t)) \right) \\ &= -\frac{a_2}{2} (\Delta^2 u'_{2m}(t), u_{2m}(t)) \\ &= \frac{a_2}{4} \frac{d}{dt} \left(2 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u_{2m}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 dx - |\Delta u_{2m}(t)|^2 \right) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \left(|\Delta u_{1m}(t)|^2 - 2(1-v) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_2^2} - \left| \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right) dx \right) \right. \\ &\left. + \frac{a_2}{4} \left(|\Delta u_{1m}(t)|^2 - 2(1-v) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_2^2} - \left| \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 \right) dx \right) \right] = (f(t), u'_{1m}(t)). \end{aligned} \quad (3.47)$$

On à :

$$|\Delta u|^2 = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \geq 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Donc

$$|\Delta u(t)|^2 - (1 - \nu) \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx \geq \nu |\Delta u(t)|^2$$

Le première membre de (3.47) supérieur à :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 \right] \leq (f(t), u'_{1m}(t)) \quad (3.48)$$

on intègre (3.45) sur $[0; t]$ on obtient :

$$|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 \leq 2 \int_0^t (f(s), u'_{1m}(s)) ds + c_1 \quad (3.49)$$

où

$$C_1 = |u'_{11m}|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{11m}|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{2m}(0)|^2$$

D'après l'égalité (3.43) on a :

$$\Delta_{u_{2m}(0)}^2 = \frac{1}{a_2} L(u_{01m}, u_{01m})$$

mais $L(u_{01m}, u_{01m})$ demeure dans un borné de $L^1(\Omega)$ donc de $H^{-2}(\Omega)$ $u_{2m}(0)$ demeure dans un borné de $H_0^2(\Omega)$ donc

$$|\Delta_{u_{2m}(0)}| \leq C$$

On utilise l'inégalité suivante pour simplifier le second membre de (6.2è) :

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

donc :

$$|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 \leq C_1 + \int_0^t |f(s)|^2 + |u'_{1m}(s)| ds.$$

Comme $f \in L^2(Q)$ donc

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq C$$

$$\begin{aligned} |u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 &\leq C_2 + \int_0^T |u'_{1m}(s)| ds. \\ &\leq C_2 + \int_0^T |u'_{1m}(s)| ds + \int_0^T a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 ds \end{aligned}$$

On applique le lemme 1 avec

$$\begin{cases} f(t) = |u'_{1m}(t)|^2 + a_1 \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 + \frac{a_2}{2} \nu |\Delta u_{1m}(t)|^2 \\ g(t) = 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$|u'_{1m}(t)|^2 + |\Delta u_{1m}(t)|^2 + |\Delta u_{2m}(t)|^2 \leq C_2 c^T \leq C. \quad (3.50)$$

On déduit de (3.50)

$$u_{1m}, u_{2m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (3.51)$$

$$u'_{1m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.52)$$

□

3.2.6 passage a la limite

Démonstration. D'après (3.51) et (3.52) on peut extraire une suite $u_{1\mu}, u_{2\mu}$ telle que :

$$\begin{aligned} u_{i\mu} &\longrightarrow u_i \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile, } i = 1, 2 \\ u'_{1\mu} &\longrightarrow u_1 \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{i\mu} &\longrightarrow u_i \text{ dans } L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \\ u'_{1\mu} &\longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \end{aligned} \quad (3.54)$$

donc $u_{i\mu} \longrightarrow u_i$ dans $H_0^1(Q)$, d'après le théorème 5

$$u_{i\mu} \longrightarrow u_i \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort} \quad (3.55)$$

soient $\varphi, 1 \leq j \leq j_0$ des fonctions $C^1([0, T])$, $\varphi_j(T) = 0$, et

$$\psi = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_j w_j \quad (3.56)$$

on déduit de (3.40) pour $m = \mu \geq j_0$ que

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u'_{1\mu}, \psi') dt + a_1 \left(\int_0^T a(\Delta u_{1\mu}, \Delta \psi) dt - (1-v) \int_0^T (L(u_{1\mu}, \psi), 1) dt \right) \\ - \int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt = \int_0^T (f, \psi) dt + (u_{1\mu}(0), \psi(0)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

mais d'après le lemme 5 :

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt = \int_0^T (L(\psi, u_{2\mu}), u_{1\mu}) dt$$

$L(\psi, u_{2\mu}) \longrightarrow L(\psi, u_2)$ dans $L^2(Q)$ faible et $u_{1\mu} \longrightarrow u_1$ dans $L^2(Q)$ fort, on voit que si μ tend vers l'infinie

$$\begin{aligned} \int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{2\mu}), \psi) dt &= \int_0^T (L(u_{1\mu}, \psi), u_{2\mu}) dt \longrightarrow \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi) dt \\ &\int_0^T (L(u_{1\mu}, \psi), 1) dt \longrightarrow \int_0^T (L(u_1, \psi), 1) dt \end{aligned}$$

par passage à la limite (3.56) devient :

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u'_1, \psi') dt + a_1 \left(\int_0^T a(\Delta u_1, \Delta \psi) dt - (1-\nu) \int_0^T (L(u_1, \psi), 1) dt \right) \\ - \int_0^T (L(u_1, u_2), \psi) dt = \int_0^T (f, \psi) dt + (u_1(0), \psi(0)) \end{aligned} \quad (3.58)$$

et cela $\forall \psi$ de la forme (3.56).

Par passage à la limite on en déduit que (3.57) a encore lié pour tout $\psi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$ tel que $\psi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\psi(T) = 0$. Cela montre que u_1 et u_2 sont liés par (5.1), (5.2) et que $u'_1(0) = u_{11}$.

Il reste donc seulement à montrer (5.2).

On peut passer directement à la limite sur (3.43) (pour $m = \mu$) en notant quand que $u_{1\mu} \rightarrow u_1$ dans $L^2(Q)$ fort, on voit que si μ tend vers l'infinie

$$L(u_{1\mu}, u_{1\mu}) \longrightarrow L(u_1, u_1) \text{ dans } \mathfrak{D}'(Q).$$

en effet si $\varphi \in \mathfrak{D}(Q)$

$$\int_0^T (L(u_{1\mu}, u_{1\mu}), \varphi) dt = \int_0^T (L(u_{1\mu}, \varphi), u_{1\mu}) dt \longrightarrow \int_0^T (L(u_1, u_1), \varphi) dt$$

G_2 linéaire continue on passe à la limite directement :

$$u_{2\mu}(t) = -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_{1\mu}(t), u_{1\mu}(t))) \longrightarrow -\frac{1}{a_2} G_2(L(u_1(t), u_1(t))) = u_2(t)$$

Et comme l'injection de $H_0^2(\Omega)$ dans V continue donc :

$\forall v \in V$

$$\begin{aligned} (u''_1 + a_1 \Delta^2 u_1 - L(u_1, u_2), v) &= (f, v) \\ a_2 \Delta^2 u_2 - L(u_1, u_2), v &= 0 \end{aligned}$$

□

Conclusion

Nous avons traités dans ce mémoire le problème aux limites, modélisant les vibrations d'une plaque mince simplement supportée ou encadrée.

Dans une première étape, nous sommes intéressés à l'inversibilité de l'opérateur bilaplacien, avec les conditions aux limites correspondantes.

Dans la deuxième étape, on a ramené deux problèmes non linéaires et on a démontré un théorème d'existence par la méthode de compacité.

Bibliographie

- [1] R Adams. Sobolev spaces, acad. Press, New York, London, Toronto, 1975.
- [2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle theorie et applications. 2^e tirage*. Masson, Paris, 2 edition, 1987.
- [3] LUISA Consiglieri. Stationary solutions for a bingham flow with nonlocal friction. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, 1992.
- [4] Jérôme Droniou and Cyril Imbert. Solutions de viscosité et solutions variationnelle pour edp non-linéaires. *Cours de DEA, Département de Mathématiques, Montpellier II*, 2002.
- [5] BOUZEGHAYA FOUZIA. *Analyse de Quelques Problèmes aux limites en Mécanique des milieux continus*. PhD thesis, Université Ferhat Abbas de Sétif 1, 2013.
- [6] Jacques-Louis and Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, volume 31. Dunod Paris, 1969.
- [7] A Munnier. Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, 2007.
- [8] S Nicaise. Analyse numérique et équations aux dérivées partielles dunod, paris, 2000. *Numerical Algorithms*, 27(1) :117, 2001.
- [9] Pierre-Arnaud Raviart, Jean-Marie Thomas, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod Paris, 1998.
- [10] Gunther Schmidt, Boris N Khoromskij, et al. Boundary integral equations for the biharmonic dirichlet problem on nonsmooth domains. *J. Integral Equations Appl*, 11(2) :217–253, 1999.
- [11] Laurent Schwartz and Institut de mathématique (Strasbourg). *Théorie des distributions*, volume 2. Hermann Paris, 1959.
- [12] M Selmani. *Etude Mathématique de Quelques Problèmes aux Limites en Mécanique de Contact*. PhD thesis, Thèse de Doctorat Sciences, Université de Sétif, 2006.

- [13] Mohamed Selmani, Boubakeur Merouani, and Lynda Selmani. Analysis of a class of frictional contact problems for the bingham fluid. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2(1) :113–124, 2005.