الجمـــــهوريـــــة الجـــزائريـــة الديـــمقراطـيـــــــــة الشـــعبيـــــــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـــلـيـــم الـعـالـــي و الـبـحـث الـعـلـــمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـــة عـمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــة الـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par :
Halima Hamdi

THEME

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr.Amar Belacel	*M.C(B)*	*Président*
Mr.Chettih Ali	*M.A.(A)*	*Examinateur*
Mr. Yaagoub Ameur	*M .A(A)*	*Examinateur*
Mme. Bendaoud Zohra	*M.C.(A)*	*Encadreur*
Mlle. Korrichi Fatima	*M.A.(A)*	*Co-encadreur*

Année Universitaire 2015/2016

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـــليـــم الـعـالـــي و الـبـحـث الـعـلـــمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـــة عـمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلـيـــة العـــلـــوم

قـــــســـــــــم :

مـذكـــــــــــرة
للحصول على شهادة المـــاسـتر في :

مـيـدان
فرع
تخصص

الإسم و اللقب

المـوضـــــوع

العنوان هنا

نوقشـــــــــت علـــــنا أمام الجنة المكونة من

السيد	**أستاذ التعليم العالي**	**رئـــــــــسا**
	استاذ محاضر	**ممتحنا**
		ممتحنا
		مقررا

السّـــنـــــة الجـــــامعية 2014\2015

Remerciement

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de mathématique a l'université de Laghouat sous la direction de Madame Z.Bendaoued et F.Korrichi. Je tien a les remercier pour leurs disponibilité et leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Mes remerciement s'adresse a Madame Bendaoud directrice du laboratoire de mathématique, pure, et appliquée d'avoir disponibilité tous les moyens du laboratoire durant la période de la préparation de ce projet.

Je remercie les membres de jury Monsieur Belacel Amar président de jury, Monsieur Chettih Ali et Monsieur Yagoub Ameur examinateurs, pour avoir accepter d'examiner ce projet.

Je remercie Monsieur Bellabaci Youcef et Madame Boukhatem Yamna pour leurs aide et conseils, ainsi que tous les enseignants qui m'ont enseigner le long de mon cursus en MI.

Mes derniers et profonds remerciement vont a mes cher parents a qui je dédie ce travail ainsi qu'a toute ma famille et mes amis pour leurs grand soutien.

Aussi, je remercie tout mes collègue et ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin en vue de réaliser ce projet.

Dédicace

Je tiens d'abord a remercier dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travaille.

Je dédie ce travail a celle qui ma donné la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, a ma mère.

A mon père, école de mon enfance qui a été mon ombre durant toutes les années des études qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner de l'aide et a me protéger,

Que dieu les gardes et les protèges.

A mes adorables sœurs

A mon frère

A toute ma famille ma grand-mère, mon grand-père, mes oncles, mes tentes, mes cousins et mes cousines.

A mes amis

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

A tous mes professeurs qui m'ont enseigner le long de mon parcoure éducatif,

Je dédie ce travail .

Résumé/Abstract

Résumé

Le sujet de ce mémoire est l'étude d'opérateur de Toeplitz, définie sur l'espace de Bergman du disque unité. Deux questions soulevés dans ce travail sont les suivantes :

1. Sous quels conditions le produit de opérateurs de Toeplitz est-il un opérateur de Toeplitz ?
2. Sous quels conditions le produit de deux opérateurs de Toeplitz commutent ?

Pour chacune des questions précédentes, nous commençons par donner des résultats de travaux antérieurs, de plus donné des caractérisation sur les différents symboles de l'opérateur de Toeplitz ainsi que le rang dans le produit d'opérateur de Toeplitz.

Abstract

The subject of this memory is the study of the Toeplitz operator, defined on the bergman space on the unit disc. Two questions raised in this work are as follows :

1. Under which conditions the product of two Toeplitz operators is a Toeplitz operator ?
2. Under which conditions two toeplitz operator commute ?

For each of these two questions we start by discussing former work, and give some caracterizations about diffrent class of symbols, and so the rank of the product of Topeplitz operator.

Table des matières

Introduction **3**

1 Rappels **4**

1.1 Espace des fonctions holomorphes 4

1.2 Espace de Hilbert 7

1.3 Opérateur de décalage 12

1.4 Sous algèbre 13

2 Opérateur de Toeplitz dans l'espace de Bergman **14**

2.1 Espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ 16

2.2 Opérateur de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$ 19

2.3 Transformation de Berezin 23

3 Produits d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman **29**

3.1 Opérateurs de Toeplitz a symbole harmonique 29

3.2 Opérateur de Toeplitz quasihomogéne 35

3.3 Sur les zéro produit d'opérateur de Toeplitz 38

4 Commutativité des opérateurs de Toeplitz **41**

4.1 Commutativité d'opérateurs de Toeplitz avec symbole harmonique 41

4.2 Commutativité des opérateurs de Toeplitz analytique 43

4.3 Commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogéne 44

Bibliographie **48**

Introduction

Le sujet de ce mémoire est l'étude des opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ du disque $\mathbb{D}$, et ses propriétés multiplicatives. Soit ϕ une fonction bornée dans $\mathbb{D}$, on appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ, et on note T_ϕ, l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} T_\phi : L^2_a(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2_a(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto T_\phi f = P(\phi f) \end{aligned}$$

ou p est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ sur $L^2_a(\mathbb{D})$

- Dans **le premier chapitre** nous avons donné des rappels de ce qu'on a utilisé le long de ce mémoire.

L'étude de l'opérateur de Toeplitz dans l'espace de Bergman, a commencé a partir des années soixante-dix par **McDonald** et **C.Sunberg**. Il ont prouvé que l'opérateur T_ϕ sur l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$, ou ϕ est continue sur $\mathbb{D}$, est compact si et seulement si ϕ peut être prolongé par continuité sur le disque unité fermé.
Depuis cela, les mathématiciens se sont intéressés par trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour le symbole ϕ tel que l'opérateur de Toeplitz T_ϕ borné et compact.

- C'est ce que nous avons vu dans **le deuxième chapitre** après avoir défini l'espace de bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ et son noyau, on énoncé une proposition importante qui assure que T_ϕ est compact si son symbole est une fonction intégrable a support compact dans $\mathbb{D}$.

Plusieurs questions naturelles se posent. parmi elles, nous discuterons les deux questions suivantes

- Dans **troisième le chapitre** : sous quelles condition le produit de deux opérateurs de Toeplitz est il un opérateur de Toeplitz ?

On a donc étudié trois cas de produit d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman avec différents symboles : harmonique, quasihomogéne, le zero produit et le rang de l'opérateur.

- Finalement dans le **quatrième chapitre** : sous quelles conditions deux opérateurs de Toeplitz commutent-ils ?

  Il était question dans ce dernier chapitre de donner quelques théorèmes importants assurant la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz, on a donc vu la commutativité des opérateurs de Toeplitz avec symboles harmonique et quasihomogéne ainsi que commutativité des opérateurs de Toeplitz analytiques.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espace des fonctions holomorphes

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \quad \mid z \mid < 1\}$ le disque unité ouvert sur le plan complexe $\mathbb{C}$.
Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Fonctions analytiques et anti-analytiques

Fonctions analytiques

Soit f une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est analytique sur Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω, alors

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \forall z_0 \in \vartheta_{z_0}, \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

ou ϑ_{z_0} est le voisinage du point z_0.

Corollaire 1.1.1. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$*
f holomorphe dans $\Omega \Leftrightarrow$ f est développable en série entière convergente au voisinage de chaque point de Ω.

Fonctions anti-analytiques

Soit f une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est anti-analytique sur un ouvert de Ω, lorsque $\overline{f(z)}$ est holomorphe (analytique) sur l'ouvert conjugué $\bar{\Omega}$, elle est donc analytique en $\bar{z}$.

L'espace $\mathcal{A}(\mathbb{D})$

On note par $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions analytique sur $\mathbb{D}$.

Définition 1.1.1. *On dit que $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, pour toute suite (f_n) converge vers f.*
i.e : pour tout compact K de $\mathbb{D}$, et tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$,

$$| f_n(z) - f(z) | \leq \epsilon \qquad (z \in K).$$

Formule de la moyenne

Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\bar{D}(z_0, r)$, alors, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = r^{-n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En particulier,

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

ce qui signifie que $f(z_0)$ est égale a la valeur moyenne de la fonction f sur le cercle ∂D.

Fonctions harmoniques

Définition 1.1.2. *Soit f une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est harmonique sur Ω, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, ou Δf est le Laplacien de f défini par :*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Proposition 1.1.1. *Toute fonction analytique et anti-analytique sur Ω est harmonique sur Ω.*

Remarque 1.1.1. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, f est harmonique, si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que $\Re(\Delta f) = \Delta(\Re(f))$ et $\Im(\Delta f) = \Delta(\Im(f))$.

Théorème 1.1.1. *Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, si f est une fonction harmonique sur Ω, alors, il existe ϕ holomorphe sur Ω telle que :*

$$\Re(\phi) = f.$$

Corollaire 1.1.2. (Principe du maximum)

Soit Ω un ouvert connexe et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, si f admet un maximum relatif sur Ω alors f est constante.

Lemme de Schwarz

Lemme 1.1.1. *Soit f une fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \mid < 1\}$ vérifiant :*

$$f(0) = 0 \quad et \quad \mid f(z) \mid \leq 1 \quad dans \quad \mathbb{D},$$

- *on a $\mid f(z) \mid \leq \mid z \mid$ pour tout point $z \in \mathbb{D} \mid f'(0) \mid \leq 1$,*
- *si $\mid f(a) \mid = \mid a \mid$ pour une certaine $a \neq 0$ ou si $\mid f'(0) \mid = 1$ alors $f(z) \equiv \lambda z$ pour une certaine constante λ de module 1.*

Fonction Gamma

La fonction gamma est une fonction complexe qui prolonge la fonction factorielle a l'ensemble des nombres complexes (excepté en certains points).

Définition 1.1.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $\Re(z) > 0$, on définie Γ par :*

$$\Gamma : z \longrightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Cet intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive .

Cette fonction peut être prolongé analytiquement en une fonction méromorphe sur l'ensemble des nombres complexes, excepté pour $z = 0, -1, -2, -3...$ qui sont des pôles. C'est ce prolongement qu'on appelle "fonction Gamma", utilisant l'unicité du prolongement

analytique, on montre que la fonction prolongée vérifie encore l'équation fonctionnelle $\Gamma(n) = (n-1)!$*, ce qui donne une définition simple a partir de l'intégrale en calculant de proche en proche* $z-1$,$z-2$ *ect.*

Théorème de Montel

Théorème 1.1.2. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions dans* $\mathcal{H}(\Omega)$*. On suppose que la suite* (f_n) *est uniformément bornée sur les compacts de* Ω*, autrement dit que pour tout compact* $K \subset \Omega$*, il existe une constante* C_K *(indépendante de n) telle que :*

$$\mid f_n(z) \mid \leq C_K \text{sur } K \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors (f_n) *admet une sous suite qui converge uniformément sur les compacts de* Ω *vers une fonction* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*. Où* $\mathcal{H}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions holomorphe dans* Ω*.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*(* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), on appelle produit scalaire sur E toute forme symétrique, bilinéaire et définie positive. C'est a dire :*

$$\begin{aligned} <.,.>: E \times E &\to \mathbb{R} \\ x, y &\to < x, y > . \end{aligned}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall x, x', y \in E < \alpha x + \beta x', y > = \alpha < x, y > + \beta < x', y > \quad \textit{linéaire a gauche.}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\, \forall x, y, y' \in E < x, ay + by' > = a < x, y > + b < x, y' > \quad \textit{linéaire a droite.}$$

$$\forall x, y \in E < x, y > = < y, x > \quad \textit{symétrique.}$$

$$\forall x \in E < x, x > \geq 0 \quad \textit{definie positive} (< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0).$$

- On dit que le couple $(E, <.,.>)$ est un espace prés-hilbertien, si E est un espace vectoriel et $<.,.>$ est un produit scalaire.
- Si l'espace E est de dimension fini on appelle $(E, <.,.>)$ espace Euclidien, de même, si a la place du corps $\mathbb{R}$ on prend $\mathbb{C}$ on aboutit a des espaces pré-hilbertien complexes.

La proposition suivante fait le lien entre les espace pré-hilbertien et les espaces normés.

Proposition 1.2.1. *Soit* $(E, <.,.>)$ *est un espace pré-hilbertien alors l'expression*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >},$$

définie une norme sur E, on dira que $\|.\|$ *est la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.2.2. *On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.*

Exemple 1.2.1. *1.* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire Euclidien défini par :*

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

on a :

$$< x, y >= x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

2. Parmi les espaces $L_p(\mathbb{R})$ *seulement l'espace* $L_2(\mathbb{R})$ *est de Hilbert, et on a :*

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in L_2(\mathbb{R}),$$

on a :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

3. L'espace $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$*constitue par les fonctions carré intégrale muni du produit scalaire :*

$$\forall f, g \in L_2(\mu) < f, g >= \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x),$$

c'est l'un des important exemples d'espace de Hilbert, la norme associée est :

$$\| f \| = \sqrt{< f, f >} = (\int_{\Omega} \mid f(x) \mid^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème de représentation de Riesz

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. T est un opérateur linéaire et continue sur H (opérateur borné de H dans le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 1.2.1. *Si* T *est un opérateur linéaire continu sur l'espace de Hilbert* H*, alors il existe* $g \in H$*, pour tout* $f \in H$ *on a :*

$$T(f) =< f, g >,$$

de plus

$$\| T \| = \| g \| .$$

(ou $\| T \|$ est la norme de l'opérateur T et $\| g \|$ la norme de l'espace de Hilbert de g).

Démonstration. Supposons que H est séparable et démontrons ce théorème sur $\mathbb{R}$, comme H est séparable on peut choisir une base orthonormal $\{\phi_j\}_{j\geqslant 1}$ de H.
Soit T est un opérateur linéaire continue et posons $a_j = T(\phi_j)$, soit $c_j = \langle f, \phi_j \rangle$, et $f_n = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \phi_j$, comme ϕ_j forme une base, et T est linéaire alors :

$$T(f_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j, \tag{1.1}$$

et on sait que :

$$\| f - f_n \| \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

comme T est borné on a :

$$\| T(f) - T(f_n) \| \leqslant \| T \| \| f - f_n \| \tag{1.2}$$

car $\| f - f_n \| \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc de l'égalité (1.1) et l'inégalité (1.2)

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f_n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j c_j, \tag{1.3}$$

montrons que a_j sont carrés sommable $| T(f) | \leqslant \| T \| \| f \|$ on a :

$$| \sum_{j=1}^{n} c_j a_j | \leqslant \| T \| \left(\sum_{j=1}^{\infty} (c_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

l'équation (1.4) doit être vérifier pour toute c_j carré sommable, posons N un entier positif et posons :

$$c_j = \begin{cases} a_j & si \quad j \leq N \\ 0 & si \quad j > N. \end{cases}$$

Il est clair que comme la suite est carré sommable, donc l'équation (1.4) est obtenue.

$$| \sum_{j=1}^{N} (a_j)^2 | \leqslant \| T \| \left(\sum_{j=1}^{N} (a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{N}(a_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \| T \| \tag{1.5}$$

alors a_j est carré sommable car la suite des sommes partiels est borné,

comme a_j est carré sommable, la fonction $g = \sum\limits_j a_j\phi_j$ est bien définie comme élément de H et :

$$T(f) = \sum_j a_j c_j = < f, g > .$$

Finalement l'équation (1.5) nous donne $\| g \| \leq \| T \|$ mais d'après Cauchy -Schwarz on a aussi :

$$| T(f) | = | < f, g > | \leq \| f \| \| g \|,$$

où

$$\frac{| T(f) |}{\| f \|} \leq \| g \| \Rightarrow \| T \| \leq \| g \|,$$

donc

$$\| T \| = \| g \| .$$

□

Espace de Lebesgue

1. On note par $F = \{f : A \to \mathbb{R} \quad \text{integrable au sens de lebesgue } \}$, ou A est un ensemble mesurable.

   On sait que F est un espace vectoriel

   $$\begin{aligned} N : & A \to \mathbb{R}_+ \\ & f \longmapsto N(f) = \int_A | f(x) | \, d\mu. \end{aligned}$$

   N est une semi norme car :

   i. $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

   ii. $N(\lambda f) = | \lambda | N(f)$

   iii. $N(0) = 0.$

On définie sur F la relation d'équivalence suivante :

$$f, g \in F \; f \backsim g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{p.p},$$

$F/\backsim$ est un espace vectoriel quotient, tel que sa norme :

$$\begin{aligned} \|\| :& F/\backsim \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & f \longmapsto \|f\| = \int_A \mid f(x) \mid d\mu. \end{aligned}$$

Définition 1.2.3. $(F/\backsim, \| \, . \, \|)$ *est un espace normé, cet espace est appelé espace de Lebesgue.*

Notations

$F/\backsim = L_1(A)$.

$f \in L_1(A) \quad \| \, f \, \| = \int_A \mid f(x) \mid d\mu.$

2. Soit $\mathcal{F} = \left\{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \int_A f^2(x)d\mu \quad \text{existe} \right\}$

   $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel, il suffit montrer que $\int_A (f(x) + g(x))d\mu$ existe.

   Mais :

$$\begin{aligned} (|f(x)| - |g(x)|)^2 = f^2(x) + g^2(x) - 2|f(x)||g(x)| \geq 0 \\ \Rightarrow \mid f(x) \mid\mid g(x) \mid \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) + g^2(x)\right). \end{aligned}$$

   Si f, g sont dans $\mathcal{F}$ alors f, g sont intégrables.

$$(f(x) + g(x))^2 = f^2(x) + g^2(x) + 2f(x)g(x) \quad \Rightarrow \int_A (f(x) + g(x))^2 d\mu \quad existe,$$

   de plus si $f \in \mathcal{F}$ c'est-a-dire $\int_A f^2(x)d\mu$ existe

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad \lambda f \in \mathcal{F} \quad car \\ \int_A (\lambda f(x))^2 d\mu = \lambda^2 \int_A f^2(x)d\mu \quad existe. \end{aligned}$$

   On va munir $\mathcal{F}$ d'une semi norme :

$$\begin{aligned} F :& A \to \mathbb{R}_+ \\ & f \longmapsto (\int_A f^2(x)d\mu)^{\frac{1}{2}} = \| \, f \, \|, \end{aligned}$$

cette application n'est pas une norme car :

$$(\int_A f^2(x)d\mu)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \| f \| = 0 \not\Rightarrow f = 0.$$

Considérons l'espace vectoriel quotient suivant :

$$\mathcal{F}/\backsim = \left\{ f \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \int_A f^2(x)d\mu < +\propto \right\}.$$

L'espace $\mathcal{F}/\backsim$ est un espace vectoriel normé sa norme est :

$$\| f \| = (\int_A f^2(x)d\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Notations

1. L'espace de Lebesgue $(\mathcal{F} \| \, . \, \|)$ est noté $L_2(A)$, espace de Lebesgue il est important de noté que si $f \in L_2(A)$, alors $f \in L_1(A)$.
2. On peut de la même manière définir $L_p(A)$ ou $1 < P < +\infty$

$$L_p(A) = \left\{ f \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \int_A (| \, f(x) \, |)^p d\mu < +\propto \right\},$$

muni de la nome :

$$\| f \| = (\int_A (| \, f(x) \, |)^p d\mu)^{\frac{1}{p}}).$$

1.3 Opérateur de décalage

Pour tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie et isomorphe a l'espace $\ell^2(I)$ des suites carré sommable a valeur dans $\mathbb{K}$, indexées par un ensemble I infini dénombrable $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Définition 1.3.1. *Le décalage a droite ou shift est l'opérateur :*

$$S : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0, a_0, ...).$$

Le shift a droite S est une isométrie non surjective, son image est l'ensemble de suite de $\ell^2(\mathbb{N})$ de premier terme nul.
Son adjoint est :

$$\begin{aligned} S^* : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (a_1, a_2, ...)\,. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2. *Le décalage bilatéral est l'opérateur :*

$$\begin{aligned} W : \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\longmapsto (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}\,. \end{aligned}$$

Le shift a droite S est donc la restriction du shift bilatéral W a $\ell^2(\mathbb{N})$.

1.4 Sous algèbre

K désigne un corps commutatif.
Soit E un ensemble muni de deux lois internes $\oplus$, et $\otimes$, et d'une loi externe opérateurs dans $(K, .)$.

Définition 1.4.1. *$(E, \oplus, \otimes, .)$ est une algèbre sur le corps K lorsque :*

- *$(E, \oplus, \otimes,)$ est espace vectoriel sur K*
- *la loi $\otimes$ est associative et admet un élément neutre (qu'on note 1_E)*
- *la loi $\otimes$ est distributive sur la loi $\oplus$*
- *pour tous $u, v \in E$ et tout $\lambda \in K$*
  $(\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v)$.

Définition 1.4.2. *Une sous algèbre d'une algèbre sur K $(E, \oplus, \otimes, .)$ c'est une partie F de E qui contient 1_E et qui est stable pour chacune des trois lois, c'est-a-dire :*

- $1_E \in F$
- $\forall (u, v) \in F^2$ $u \oplus v \in F$ *et* $u \otimes v \in F$
- $u \in F$ $\forall \lambda \in K$ $\lambda u \in F$.

Chapitre 2

Opérateur de Toeplitz dans l'espace de Bergman

Dans ce chapitre nous commençons par définir l'espace de $L^2_a(\mathbb{D})$ et donner quelques propriétés sur ce dernier, puis voir l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman et énoncer quelques propositions sur son symbole .
La mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$, est notée par dA :

$$dA = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta, \qquad z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Noyaux reproduisant

Un espace Hilbertien des fonctions analytique sur $\mathbb{D}$ est un sous espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$$

est continue, i.e : pour tout compact $K \in \mathbb{D}$ il existe c une constante $c = c(K)$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad \forall z \in K \quad | f(z) | \leq \ c \parallel f \parallel .$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace Hilbertien des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. pour $z \in \mathbb{D}$, l'application

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto f(z)$$

est continue. Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in \mathcal{H}$ telle que :

$$f(z) =< f, K_z > \qquad (f \in \mathcal{H}).$$

Propriétés 2.0.1. *1. $K_z(w)$ est hermitien et de type positif*

2. $K_z(w) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$

3. $K_z(z) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

— K est dit hermitien si :

$$K_w(z) = \overline{K_z(w)}$$

$$K_z(w) =< K_z, K_w > = \overline{< K_w, K_z >} = \overline{K_w(z)}.$$

— K est dit de type positif si :

$$\forall z_1, ..., z_n \in \mathbb{D}, \quad \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j,k=1}^{n} K_{z_j}(z_k)\alpha_j\overline{\alpha_k} \geq 0$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} K_{z_j}(z_k)\alpha_j\overline{\alpha_k} = \sum_{j,k=1}^{n} < K_{z_j}, K_{z_k} > \alpha_j\bar{\alpha_k} =\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{z_j} \|^2 \geq 0.$$

— $K_z(z) =\| K_z \|^2 \geq 0$.

Proposition 2.0.1. *Pour toute base Hilbertienne e_n de H,*

$$K_z(w) = \sum_{n\geq 0} e_n(w)\overline{e_n(z)},$$

la convergence étant absolue et uniforme sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

En particulier le noyau est indépendant du choix de la base Hilbertienne.

Démonstration. $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable ce qui assure l'existence de la base orthonormée $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tel que :

$$< e_n, e_m >= \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m. \end{cases}$$

Toute fonction $f \in \mathcal{H}$ a un unique développement $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ converge en norme donc, converge uniformément sur $\mathbb{D}$.

$$\sup\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mid e_n(z) \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} = \sup_{z\in k}\left\{\mid \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n(z) \mid: \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mid a_n \mid^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1\right\}$$

$$= \sup\{\mid f(z) \mid \qquad \| f \| = 1\} \leq C_k.$$

Il vient que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n(w)\overline{e_n(z)}$ converge uniformément si $z, w \in \mathbb{D}$.

Si $f \in \mathcal{H}$ alors $f = \sum_{n=1}^{+\infty} < f, e_n > e_n$. La série converge dans $\mathcal{H}$, donc converge uniformément sur les compact de $\mathbb{D}$.

En particulier, si $z \in \mathbb{D}$, alors :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} < f, e_n > e_n(z) =< f, \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n > \\ =< f(.), \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(.) > .$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(.) \in \mathcal{H}$, alors l'unicité de Représentation de Riesz montre que :

$$K_z(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w).$$

De l'inégalité

$$\left(\sum_{n=p}^{q} \mid e_n(z) \mid\mid e_n(w) \mid \right)^2 \leq \sum_{n=p}^{q} \mid e_n(z) \mid^2 \sum_{n=p}^{q} \mid e_n(w) \mid^2$$

il résulte que la convergence est absolue et uniforme sur tout compact $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. □

2.1 Espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$

Soit $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ l'espace des fonctions f définies sur le disque $\mathbb{D}$ telles que :

$$\| f \| = \int_{\mathbb{D}} \mid f \mid^2 d\mathcal{A} < +\infty.$$

Ce qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel donné par :

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f \bar{g} d\mathcal{A}.$$

On définis l'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ comme étant l'ensemble des fonctions analytique sur $\mathbb{D}$ qui sont carré intégrable par rapport a la mesure d$\mathcal{A}$.

$$L^2_a(\mathbb{D}) = \mathcal{A}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A}).$$

Lemme 2.1.1. *Soit $C(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{D}$. Pour tout compact K de $\mathbb{D}$, l'application restriction définie par :*

$$\left(L^2_a(\mathbb{D}), \| \, . \, \|\right) \longrightarrow \left(C(\mathbb{D}), \sup_{z\in K} | \, . \, |\right)$$
$$f \longmapsto f_{/K}$$

est continue.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{D}$, $\epsilon = \frac{1}{2} dist\,(K, \partial\mathbb{D})$ et z_0 quelconque dans K. Il est clair que :

$$\overline{B\,(z_0, \epsilon)} = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid z - z_0 \mid \leq \epsilon\} \subset \mathbb{D}$$

soit $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. Comme la fonction f est analytique dans $\mathbb{D}$, alors elle est développable en série entière dans $\mathbb{D}$. Soit $R > \epsilon$ tel que : $D(z_0, R) \subset \mathbb{D}$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombre complexe telle que pour tout $z \in D(z_0, R)$,$f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$. La convergence de cette série vers $f(z)$ est uniforme sur$\overline{B\,(z_0, \epsilon)}$. D'où :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{D}} | \, f(z) \, |^2 \, d\mathcal{A}(z) &\geq \int\limits_{\overline{B(z_0,\epsilon)}} | \, f(z) \, |^2 \, d\mathcal{A}(z), \\ &= \int\limits_{\overline{B(z_0,\epsilon)}} | \, a_n \, |^2 | \, z - z_0 \, |^2 \, d\mathcal{A}(z).\end{aligned}$$

Grâce a la convergence uniforme de la série entière vers $f(z)$ on peut intervenir les signe $\sum \int$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{D}} | \, f(z) \, |^2 \, d\mathcal{A}(z) &\geq \sum_{n\geq 0} \left(\int\limits_{\overline{B(z_0,\epsilon)}} | \, a_n \, |^2 | \, z - z_0 \, |^2 \, d\mathcal{A}(z) \right), \\ &\geq | \, a_0 \, |^2 \, mes \left(\overline{B\,(z_0, \epsilon)}\right), \\ &= | \, f(z_0) \, |^2 \, mes \left(\overline{B\,(z_0, \epsilon)}\right),\end{aligned}$$

où $mes\left(\overline{B\,(z_0, \epsilon)}\right)$ est la mesure de la boule fermé $\left(\overline{B\,(z_0, \epsilon)}\right)$. Puisque le z_0 est choisi arbitrairement dans K, on obtient :

$$\sup | \, f(z) \, | \sup_{z\in k} [mes(B(z, \epsilon))]^{\frac{1}{2}} \leq \| \, f \, \|_2 \, .$$

□

Remarque 2.1.1. *Le lemme 2.1.1 peut être démontrer par la méthode suivante :*
$\forall z \in \mathbb{D}$, *soit* $r_z = 1 - \mid z \mid$, *alors la propriété de la valeur moyenne appliquer a la fonction* $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ *permet d'écrire voir [5]*

$$f(z) = \frac{1}{(r_z)^2} \int\limits_{|z-w|<r_z} f(w) d\mathcal{A}(w),$$

d'où :

$$\mid f(z) \mid = \frac{1}{(r_z)^2} \int\limits_{|z-w|<r_z} \mid f(w) \mid d\mathcal{A}(w) \leq \frac{\parallel f \parallel_2}{(r_z)^2} = \frac{\parallel f \parallel_2}{(1 - \mid z \mid)^2}.$$

Il vient que pour tout compact K *de* $\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \sup \{\mid f(z) \mid \quad z \in K\} &\leq \sup \left\{ \frac{1}{(1 - \mid z \mid)^2} \quad z \in K \right\} \parallel f \parallel_2 \\ &\leq \frac{1}{[dist(K, \partial\mathbb{D})]^2} \parallel f \parallel_2 . \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. $L^2_a(\mathbb{D})$ *est un sous-espace fermé de* $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy, pour la norme $\parallel . \parallel_2$ dans L^2_a par le lemme précédent la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ et alors pour tout compact K de $\mathbb{D}$, on a :

$$\sup_{z \in K} \mid f_n(z) - f_m(z) \mid \overset{n,m \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est complet pour la convergence uniforme sur les sous-ensembles compact de $\mathbb{D}$ alors il existe $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que :

$$\sup_{z \in K} \mid f_n(z) - f(z) \mid \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, K \textit{ compact de } \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

D'autre part $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ est un espace de Hilbert, il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ telle que :

$$\parallel f_n - g \parallel \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quitte a extraire une sous suite $(f_n)_n$ qu'on notera encore $(f_n)_n$, on a :

$$f_n \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad pp. \tag{2.2}$$

(2.1) et (2.2) donnent $f = g$ p.p et donc $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ ce qui prouve que $L^2_a(\mathbb{D})$ est donc sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$. □

Du lemme 2.1.1, on obtient en particulier que l'application évaluation de $L^2_a(\mathbb{D})$ qui est un espace de hilbert dans $\mathbb{C}$ qui a toute fonction f lui associe sa valeur au point z, est borné .

D'où d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in L^2_a(\mathbb{D})$ telle que : $\forall f \in L^2_a(\mathbb{D})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}d\mathcal{A}(w).$$

Nous allons utiliser la proposition 2.0.1 pour donner explicitement l'expression du noyau reproduisant de $L^2_a(\mathbb{D})$, en effet les fonctions

$$e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n \qquad n \in \mathbb{N},$$

constituent une base Hilbertienne de $L^2_a(\mathbb{D})$ et alors :

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\overline{z}^n w^n = \frac{1}{(1-\bar{z}w)^2}.$$

2.2 Opérateur de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$

Comme $L^2_a(\mathbb{D})$ est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, le théorème de la projection orthogonale donne :

$$L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A}) = L^2_a(\mathbb{D}) \oplus (L^2_a(\mathbb{D}))^{\perp}$$

ou $(L^2_a(\mathbb{D}))^{\perp}$ est le complement orthogonale de l'espace de Bergman. Alors il existe une projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$, notée par P, définie par :

$$P(u+v) = \begin{cases} u & si \quad u \in L^2_a(\mathbb{D}) \\ v & si \quad v \in (L^2_a(\mathbb{D}))^{\perp}. \end{cases}$$

Alors $P(f) \in L^2_a(\mathbb{D})$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, on peut alors utiliser la noyau reproduisant $K_z(w)$ pour donner une formule explicite de Pf :

$$Pf(z) =< Pf, K_z >=< f, PK_z >=< f, K_z >= \int_D \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2}d\mathcal{A}(w).$$

$(f - Pf)$ est orthogonale a $K_z \in L^2_a(\mathbb{D})$ l'opérateur de projection P est dit opérateur de projection de Bergman. Initialement la projection de Bergman P est définie sur $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$,

mais l'intégrale précédente a un sens si $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, ce qui étend le domaine de P a $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, en particulier en peut appliquer P a toute fonction dans $L^p(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ pour $1 < p < +\infty$.

Remarque 2.2.1. *La projection de Bergman satisfait les propriétés suivantes :*

1. *P est une projection bornée de $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$.*
2. *$P^* = P$, et $P^2 = P$.*
3. *$\| P \| = 1$, ou $\| . \|$ est l'opérateur de norme.*
4. *Soient n et m deux entier non négatifs alors :*

$$P(z^n, \bar{z}^m) = \begin{cases} \frac{n-m+1}{n+1} z^{n-m} & si \quad n \geq m \\ 0 & si \quad n < m. \end{cases}$$

Étant donné une fonction ϕ bornée sur le disque $\mathbb{D}$, on définie l'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur $L^2_a(\mathbb{D})$ par :

$$\begin{aligned} T_\phi : L^2_a(\mathbb{D}) &\longrightarrow L^2_a(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto T_\phi f = P(\phi f), \end{aligned}$$

où ϕ est dite symbole de l'opérateur T_ϕ.

— Si $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, alors $Pf = f$, est donc $\| Pf \|_2 = \| f \|_2$, donc $\| P \| = 1$, d'où $\| T_\phi \| \leq \| \phi \|_\infty$.

— La représentation intégrale de P nous permet de voir T_ϕ comme l'opérateur intégrale suivant :

$$T_\phi f(z) = P(\phi f)(z) = < \phi f, K_z > = \int_D \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - \overline{w}z)^2} d\mathcal{A}(w).$$

Proposition 2.2.1. 1. *L'opérateur de Toeplitz de symbole la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{D}$ est l'identité de $L^2_a(\mathbb{D})$.*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $f, g \in L^\infty(\mathbb{D})$ $T_{\lambda f + g} = \lambda T_f + T_g$.*
3. *$T_\phi = 0$ si et seulement si $\phi = 0$.*
4. *$T_{\bar{\phi}}$ est l'adjoint de T_ϕ.*

Démonstration. 1.

$$T_\phi : L^2_a(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2_a(\mathbb{D})$$
$$f \longmapsto T_\phi f = P(\phi f)$$

on a :$\phi = 1$

$$T_1 f = P(1f) = p(f) = f.$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall f, g \in L^\infty(\mathbb{D})$

$$\begin{aligned} T_\lambda f + g(h) &= p((\lambda f + g)h) \\ &= p(\lambda f h + gh) \\ &= \lambda p(fh) + p(gh) \\ &= \lambda T_f(h) + T_g(h). \end{aligned}$$

3. Si T_ϕ est nul alors pour tout m et n dans $\mathbb{N}$ dans on a :

$$\begin{aligned} < T_\phi z^n, z^m > &=< p(\phi z^n), z^m > \\ &=< \phi z^n, z^m > \\ &=< \phi, z^m z^{\overline{n}} > \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où ϕ est orthogonale a l'ensemble des polynômes en$(z, \overline{z})$ or, cet ensemble est dense dans $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$et donc ϕ est nulle.

□

Soit $\phi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ et considérons l'opérateur $\tilde{T_\phi}$ appelé aussi opérateur de Toeplitz défini sur $\mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$:

$$\tilde{T_\phi} f(z) =< \phi f, K_z >= \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} d\mathcal{A} \quad \forall z \in \mathbb{D} \tag{2.3}$$

puisque la projection P de Bergman peut s'étendre à $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, il vient pour tout $f \in \mathcal{A}^\infty(\mathbb{D})$l'écriture $\tilde{T_\phi} f(z) = p(\phi f)$ a un sens, comme $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est dense dans $L^2_a(\mathbb{D})$, et si $\tilde{T_\phi}$ est bornée alors $\tilde{T_\phi}$ se prolonge par continuité sur $L^2_a(\mathbb{D})$. Quand c'est le cas nous noterons tout simplement T_ϕ pour designer $\tilde{T_\phi}$.

— Dans la suite nous allons montrer que si ϕ est une fonction intégrable sur $\mathbb{D}$ et a support compact $K \subset \mathbb{D}$. Alors l'opérateur $\tilde{T}_\phi$ est non seulement borné mais aussi compact (la preuve de cette assertion nécessite l'introduction des automorphisme du disque unité $\mathbb{D}$).

— On rappelle qu'un automorphisme du disque unité est une application bijective biholomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, tout automorphisme φ de $\mathbb{D}$ peut s'écrire comme $\varphi(z) = \varphi_a(\xi z)$, ou $\varphi(0) = a \in \mathbb{D}$, et, $\mid \xi \mid = 1$

$$\varphi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Le Jacobien de l'application φ_a est :

$$\frac{d\mathcal{A}(\varphi_a(z))}{d\mathcal{A}(z)} = |\varphi_a'(z)|^2 = \frac{|1 - (a)^2|2}{|1 - \overline{a}z|^4},$$

d'autre part l'inverse φ_a^{-1} de l'automorphisme φ_a n'est autre que φ_a lui même.
L'ensemble des automorphisme du disque, aussi groupe de Möbius est noté Aut $(\mathbb{D})$.

Proposition 2.2.2. *Si ϕ est une fonction intégrable et a support compact dans $\mathbb{D}$, alors T_ϕ est compact.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2_a(\mathbb{D})$. Pour $z \in \mathbb{D}$,
on définie $\varphi_z \in Aut(\mathbb{D})$ par :

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}, \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

Comme les fonctions f_z sont analytiques et donc harmonique sur $\mathbb{D}$, alors en particulier elles vérifient la propriété de la valeur moyenne invariante a savoir :

$$f_n(z) = f_n(\varphi_z(0)) = \int_{\mathbb{D}} f_n(\varphi_z(w)) d\mathcal{A}(w),$$

le changement de variable $y = \varphi_z(w)$ donne :

$$f_n(z) = \int_D f_n(y) \frac{(1- \mid z \mid^2)^2}{\mid 1 - \overline{z}y \mid^4} d\mathcal{A}(y).$$

Or

$$\frac{(1- \mid z \mid^2)^2}{\mid 1 - \overline{z}y \mid^4} \leq \frac{1- \mid z \mid^2}{(1- \mid z \mid)^4} \leq \frac{1}{(1- \mid z \mid)^4},$$

donc pour tout n on a :

$$\mid f_n(z) \mid = \int_{\mathbb{D}} \mid f_n(y) \mid \frac{1}{(1- \mid z \mid)^4} d\mathcal{A}(y).$$

Pour tout compact K de $\mathbb{D}$, il existe $0 < r_k < 1$ tel que K soit inclus dans le disque fermé $\overline{D(0, r_k)}$ et alors pour tout r_k on a :

$$\frac{1}{(1- \mid z \mid)^4} \leq \frac{1}{(1 - r_k)^4}, \quad \forall z \in K.$$

Par la suite pour tout entier n et tout compact K de $\mathbb{D}$ il existe $0 < r_k < 1$ tel que :

$$\sup_{z \in K} \mid f_n(z) \mid \leq \frac{1}{(1 - r_k)^4} \parallel f_n \parallel_1 .$$

D'où pour tout compact K de $\mathbb{D}$ on a :

$$\sup_n (\sup_{z \in K} \mid f_n(z) \mid) \leq \frac{1}{(1 - r_k)^4} \sup_n \parallel f \parallel_1 .$$

D'après le théorème de Montel la suite f_n admet une sous suite (f_{n_i}), qui converge uniformément sur tout les compact K de $\mathbb{D}$ vers une fonction f analytique sur $\mathbb{D}$.
Soit K_ϕ le support compact de la fonction ϕ il vient que :

$$\begin{aligned} \parallel \phi f_{n_i} - \phi f \parallel_2 &= (\int_{K_\phi} \mid \phi(z) \mid^2 \mid f_{n_i}(z) - f(z) \mid^2 d\mathcal{A}(w))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \parallel \phi \parallel_2 \sup_{z \in K_\phi} \mid f_{n_i}(z) - f(z) \mid, \end{aligned}$$

comme $\sup_{z \in K_\phi} \mid f_{n_i} - f(z) \mid \longrightarrow 0$ quand $n_i \longrightarrow +\infty$ alors $\phi f_{n_i} \longrightarrow \phi f$ en norme $\parallel . \parallel_2$, d'autre part la projection de Bergman P est continue sur $L^2_a(\mathbb{D})$ donc $P(\phi f_{n_i})$ converge vers $P(\phi f)$ en norme $\parallel . \parallel_2$ quand $n_i \longrightarrow +\infty$ i.e $T_\phi f_{n_i} \longrightarrow T_\phi f$ dans $L^2_a(\mathbb{D})$ donc T_ϕ est bien un opérateur compact. □

— Dans la suite nous allons quelques situation pour affirmer que l'opérateur de Toeplitz est borné.

2.3 Transformation de Berezin

Soit $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ et $z \in \mathbb{D}$ la transformation de Berezin de f est l'opérateur intégrale définie par :

$$Bf(z) = < fk_z, k_z > = \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{(1- \mid z \mid^2)^2}{\mid 1 - z\overline{w} \mid^4} d\mathcal{A}(w), \tag{2.4}$$

ou $k_z(w) = (1- \mid z \mid^2)^2$. $K_z(w)$ est le noyau de Bergman normalisé de L^2_a il est important de signaler que le noyau k_z possède une propriété fort intéressante qui est la suivante :

Proposition 2.3.1. *k_z tend vers 0 faiblement quand $\mid z \mid$ tend vers 1.*

Démonstration. Pour tout polynôme analytique P sur $\mathbb{D}$, on a :

$$< P, k_Z >= (1- \mid z \mid^2) < P, K_z >= (1- \mid z \mid^2)P(z). \tag{2.5}$$

Il est clair que cette dernière expression tend vers 0 quand $\mid z \mid$ tend vers 1.
Comme l'ensemble des polynômes analytique est dense dans $L^2_a(\mathbb{D})$ alors $< f, k_z > \longrightarrow 0$ quand $\mid z \mid \longrightarrow 1$ pour toute $f \in L^2_a(\mathbb{D})$, et par conséquent k_z tend faiblement vers 0 quand $\mid z \mid \longrightarrow 1$. □

Cette propriété nous sera d'une grande utilité plus tard quand nous annoncerons un deuxième résultat sur la continuité des opérateurs de Toeplitz d'après (2.5) il vient que :

$$B\overline{f} = \overline{Bf},$$
$$et f \geq 0 \Rightarrow Bf \geq 0.$$

Proposition 2.3.2. *La transformation de Berezin est injective.*

Démonstration. soit $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ telle que $Bf = 0$, Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on pose :

$$F(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(\mid 1 - z\overline{w} \mid)^2} d\mathcal{A}(w) = \frac{1}{(1- \mid z \mid^2)^2} Bf(z).$$

Par hypothèse, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $Bf(z) = 0$. Ainsi, $F(z) = 0$ et donc

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial z^n \partial \overline{z}^m}(0) = 0.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $w \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{1}{\mid 1 - z\overline{w} \mid^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{1}{(1 - z\overline{w})(1 - \overline{z}w)} \right] \\ &= \frac{1}{1 - z\overline{w}} . \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{1}{1 - \overline{z}w} \right] \\ &= \frac{1}{1 - z\overline{w}} . \frac{w}{(1 - \overline{z}w)^2}. \end{aligned}$$

En dérivant m fois par rapport a $\bar{z}$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}^m} \left[\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} \right] = \frac{1}{1 - z\overline{w}} . \frac{m! w^n}{(1 - \overline{z}w)^{m+1}}.$$

De la même manière, en dérivant n fois par rapport a z, il vient que

$$\frac{\partial}{\partial z^n}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{z}^m}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\right] = \frac{n!\overline{w}^n}{(1-z\overline{w})^{n+1}}.\frac{m!w^m}{(1-\overline{z}w)^{m+1}}.$$

D'où

$$\frac{\partial^{n+m}F}{\partial z^n \partial \overline{z}^m}(0) = \int_{\mathbb{D}} m!n!w^m w^{-n} f(w)d\mathcal{A}(w) = 0. \tag{2.6}$$

Comme les polynômes en $(z,\overline{z})$ sont dense dans $L^2(\mathbb{D},d\mathcal{A})$, alors l'équation (2.6) implique que la fonction f est orthogonale a l'ensemble des polynômes en $(z,\overline{z})$ et donc $\| f \|_2 = 0$ et par la suite $\| f \|_1 = 0$. □

La transformation de Berezin est étroitement liée aux automorphismes du disque $\mathbb{D}$. En effet en effectuant dans (2.5) la changement de variables

$$w = \psi_z(y),$$

il vient que :

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\psi_z(y))d\mathcal{A}(y).$$

Ainsi l'équation (2.5) est équivalente a :

$$Bf(z) = \int_D f(\psi(w))d\mathcal{A}(w), \quad \textit{pour tout } \psi \in Aut(\mathbb{D}) \quad \textit{tel que } \psi(0) = z.$$

Une autre propriété importante de la transformation de Berezin est donnée par la proposition suivante : elle nous permet de trouver des astuces de calcul de quelques transformations de Berezin en général difficile a faire.

Proposition 2.3.3. *Pour tout $\psi \in Aut(\mathbb{D})$ et toute fonction $f \in L^1(\mathbb{D},d\mathcal{A})$*

$$B(f\circ\psi) = (Bf)\circ\psi.$$

Démonstration. Soit $\delta \in Aut(\mathbb{D})$ et $z \in \mathbb{D}$. On pose :

$$\psi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}$$

et donc

$$\psi_{\delta(z)}(w) = \frac{\delta(z)-w}{1-\overline{\delta(z)}w}$$

il vient que

$$\begin{aligned}\psi_{\delta(z)} \circ \delta \circ \psi_z(0) &= \psi_{\delta(z)}(\delta(z)) = 0\\ \psi_{\delta(z)} \circ \delta \circ \psi_z &\in \mathcal{A}(\mathbb{D})\\ \psi_{\delta(z)} \circ \delta \circ \psi_z(\mathbb{D}) &= \mathbb{D} \quad et \quad \psi_{\delta(z)} \circ \delta \circ \psi_z \quad est \quad bijective.\end{aligned}$$

D'où d'après le lemme de Schwarz, il existe une constante complexe c de module 1 tel que pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$\psi_{\delta(z)} \circ \delta \circ \psi_z(w) = cw$$

pour $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$, on a :

$$B(f \circ \delta) = \int_{\mathbb{D}} (f \circ \delta)(y) \frac{(1- \mid z \mid^2)^2}{\mid 1 - \overline{z}y \mid^4} d\mathcal{A}(y).$$

En effectuant un changement de variable $y = \psi_z(w)$ on obtient :

$$\begin{aligned}B(f \circ \delta)(z) &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \delta \circ \psi_z)(w) d\mathcal{A}(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \psi_\delta(z) \circ \psi_\delta(z) \circ \delta \circ \psi_z)(w) d\mathcal{A}(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \psi_\delta(z))(cw) d\mathcal{A}(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} (f \circ \psi_\delta(z))(u) d\mathcal{A}(u)\\ &= Bf(\delta(z))\\ &= Bf \circ \delta.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.1. *La transformation de Berezin laisse invariant les fonctions harmonique.*

Démonstration. Si $f \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ alors $f \circ \psi$ est aussi harmonique pour tout $\psi \in Aut(\mathbb{D})$. D'après la propriété de la valeur moyenne, pour tout $\psi \in Aut(\mathbb{D})$ tel que $\psi(0) = z$, on a :

$$f(z) = f \circ \psi(0) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \psi(w) d\mathcal{A}(w) = Bf(z)$$

soit $\phi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ il est simple de voir a travers (2.5) que :

$$B\phi(z) =< \phi k_z, k_z >=< \phi k_z, Pk_z >=< P(\phi k_z), k_z >=< T_\phi k_z, k_z > .$$

□

Proposition 2.3.4. *Si $\phi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ alors T_ϕ est borné si et seulement si ϕ est borné. Et T_ϕ est compact si et seulement si ϕ est nulle.*

Démonstration. Il est clair que si ϕ est borné (resp ϕ est nulle) alors T_ϕ est borné (resp T_ϕ nul dans un compact).
Réciproquement, si T_ψ est borné, et comme K_z est unitaire dans $L^2_a(\mathbb{D})$ alors pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\mid B\phi(z) \mid=\mid< T_\phi k_z, k_z >\mid\leq \parallel T_\phi \parallel .$$

Or ϕ est harmonique i.e. $B\phi = \phi$, car B laisse invariant les fonctions harmoniques, et donc ϕ est bornée .
Si T_ϕ est compact, comme k_z tend vers 0 faiblement quand $\mid z \mid$ tend vers 1,
alors $\phi(z) = B\phi(z) =< T_\phi k_z, k_z >$ tend vers 0 quand $\mid z \mid$ tend vers 1.
D'où d'après le principe du maximum, ϕ est nulle sur $\mathbb{D}$. □

***** Si ϕ est une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ Alors $B\phi$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et ϕ coïncide avec $B\phi$ sur $\partial\mathbb{D}$ de $\mathbb{D}$. En effet si $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ alors l'automorphisme $\psi_z(w)$ tend vers z_0 quand z tend vers z_0 pour tout $w \in \mathbb{D}$. Par le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, on a :

$$B\phi(z) = \lim_{z\to z_0} \int_D \phi \circ \psi_z(w) d\mathcal{A}(w) = \phi(z_0).$$

Ceci nous ramène a un troisième résultat sur la compacité des opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.3.5. *Si ϕ est une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ alors T_ϕ est compact si et seulement si ϕ est nulle sur $\partial\mathbb{D}$.*

Démonstration. Si ϕ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ Et nulle sur $\partial\mathbb{D}$ alors il existe une suite (ϕ_n) de fonction continues a support compact sur $\mathbb{D}$ telle que :

$$\parallel \phi - \phi_n \parallel_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty).$$

Or

$$\| T_\phi - T_{\phi_n} \| = \| T_{\phi-\phi_n} \| \leq \| \phi - \phi_n \|_\infty .$$

D'où la suite des opérateurs (T_{ϕ_n}) tend fortement vers T_ϕ quand $n \longrightarrow +\infty$ puisque les opérateurs T_{ϕ_n} sont compact donc T_ϕ est un opérateur compact.
Réciproquement T_ϕ est compact alors $B\phi(z) = < T_\phi k_z, k_z >$ tend vers 0 quand $| z | \longrightarrow 1$ car k_z converge faiblement vers 0 ($| z | \longrightarrow 1$). Ainsi $\phi = 0$ sur $\partial\mathbb{D}$, puisque $B\phi = \phi$ sur $\partial\mathbb{D}$. □

Chapitre 3

Produits d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

3.1 Opérateurs de Toeplitz a symbole harmonique

La question posé sur le produit des opérateurs de Toeplitz est : Si T_f et T_g sont des opérateurs de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$, le produit de ces deux opérateurs est-il un opérateur de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$? Sous quels conditions l'égalité est vérifier ?
Les résultats de **P.Ahren** et **Čučković** [14] sont déclarés dans le théorème suivants :

Théorème 3.1.1. *Si f et g sont deux fonctions harmoniques bornées, et h est bornée sur C^2, une fonction bornée avec un Laplacien invariant, alors $T_f T_g = T_h$ si et seulement si $\overline{f}$ et g sont analytiques, et $fg = h$.*

— Rappelons que Laplacien invariant, est souvent noté $\tilde{\Delta} = (1- \mid z \mid^2)^2\Delta$, ou $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$ est Laplacien.

Définition 3.1.1. *Une fonction $F \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ est dite presque bornée si il existe $\rho < 1$ telle que F est intégrable sur le disque compact disk $\{\mid z \mid \leq \rho\}$, et bornée sur la couronne $\{z \in \mathbb{D}\ \rho < \mid z \mid < 1\}$.*

Si tout ρ existe, alors avec la linéarité de l'opérateur de Toeplitz par rapport a son symbole, T_F peut être écrite ainsi : $T_F = T_{F_{\chi\{|z|\leq\rho\}}} + T_{F_{\chi\{\rho<|z|<1\}}}$. Comme $T_{F_{\chi\{|z|\leq\rho\}}}$ est une fonction intégrable avec support compact, $T_{F_{\chi\{|z|\leq\rho\}}}$ n'est pas seulement borné mais aussi compact,

D'autre part $T_{F_{\chi\{\rho<|z|<1\}}}$ est clairement un opérateur borné car son symbole $F_{\chi\{\rho<|z|<1\}}$ est borné. Alors T_F est borné comme somme deux opérateurs bornés.

— Pour les opérateurs de Toeplitz définis sur $L^2_a(\mathbb{D})$, il existe deux fonctions ϕ et $\psi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ tel que T_ϕ et T_ψ sont bornés et leurs produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz mais ni $\overline{\phi}$ ni ψ sont analytiques .

Néanmoins on peut obtenir un théorème de type **Brown-Halmos** [2] en exigeant des symboles vérifiant des conditions bien précises.

Si ϕ est fonction harmonique bornée sur $\mathbb{D}$, alors il existe deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 analytique telle que :

$$\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}.$$

La décomposition est unique si $\phi_2(0) = 0$, et ϕ_1 et ϕ_2 ne sont pas nécessairement bornées mais elles sont dans l'espace de Bloch.

On rappelle que l'espace de Bloch est l'ensemble des fonctions analytiques f sur $\mathbb{D}$ telle que :

$$\sup\Big\{(1- \mid z \mid^2) \mid f'(z) \mid: \quad z \in \mathbb{D}\Big\} < +\infty$$

ϕ peut s'écrire telle que : $\phi = u + iv$, telle que $u = \Re(\phi)$ et $v = \Im(\phi)$ sont des fonctions réelles harmoniques.

Comme toute fonctions réelle harmonique est la partie réelle d'une fonction analytique, il existe unique fonction analytique f et g sur $\mathbb{D}$, telle que

$$u = \Re(f) \quad f(0) = 0,$$

et

$$v = \Re(g) \quad g(0) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\phi =& \Re(f) + i\Re(g)\\ =& \frac{1}{2}(f + \bar{f}) + i\frac{1}{2}(g + \bar{g})\\ =& \frac{1}{2}(f + ig) + \frac{1}{2}\overline{(f - ig)}.\end{aligned}$$

Si on note $\phi_1 = \frac{1}{2}(f + ig)$ et $\phi_2 = \frac{1}{2}\overline{(f - ig)}$, on a $\phi = \phi_1 + \phi_2$.
La projection de Bergman est bornée de $L^\infty(\mathbb{D})$ dans l'espace de Bloch alors $P(\phi) = \phi_1$ et $P(\bar{\phi}) = \phi_2$ sont dans l'espace de Bloch.
Considérons deux harmoniques a symboles bornés $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ sur $\mathbb{D}$, la linéarité de l'opérateur de Toeplitz donne : le produit est égale a :

$$T_\phi T_\psi = T_{(\phi_1+\bar{\phi_2})} T_{(\psi_1+\bar{\psi_2})} = T_{\phi_1\psi_1} + T_{\phi_1\bar{\psi_2}} + T_{\bar{\phi_2}\psi_1} + T_{\bar{\phi_2}\bar{\psi_2}}. \tag{3.1}$$

Alors si $T_{\phi_1\overline{\psi_2}}$ est un opérateur de Toeplitz. Alors $T_\phi T_\psi$ est aussi un opérateur de Toeplitz c'est l'essence de **P.Ahren** dans [14] où Ahren a caractérisé, en utilisant les transformations de Berezin, toute fonction analytique bornée ϕ et ψ telle que le produit $T_\phi T_{\overline{\psi}}$ est un opérateur de Toeplitz, par conséquent Ahren a donné une condition nécessaire et suffisante pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz avec symbole harmonique bornée sera un opérateur de Toeplitz.
Les résultats de Ahren dépendent de la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Soient ϕ et ψ deux fonctions analytiques sur $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ telle que les opérateurs de Toeplitz T_ϕ et T_ψ sont bornés sur $L^2_a(\mathbb{D})$, et soit $u \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ une fonction presque bornée, donc les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u$.
2. $\phi\overline{\psi} = B(u)$, *ou B est la transformation de Berezin.*
3. $\forall (z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ *on a :*

$$\phi(z)\overline{\psi}(\overline{w}) = (1 - zw)^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1 - \bar{\xi}z)^2(1 - \xi w)^2} d\mathcal{A}(\xi).$$

Démonstration. $T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u$ si et seulement si $T_\phi T_{\overline{\psi}} K_z = T_u K_z$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Or pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} T_{\overline{\psi}} K_z(w) &= P(\overline{\psi} K_z)(w) \\ &= < \overline{\psi} K_z, K_w > \\ &= < K_z, \psi K_w > \\ &= \overline{< \psi K_w, K_z >} \\ &= \overline{\psi K_w(z)} \\ &= \overline{\psi}(z) K_z(w). \end{aligned}$$

D'ou $T_\phi T_{\overline{\psi}} K_z(w) = \overline{\psi}(z)\phi(w)K_z(w)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ et $\forall w \in \mathbb{D}$. Donc pour tout $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} T_\phi T_{\overline{\psi}} = T_u \Leftrightarrow \phi(w)\overline{\psi}(z) &= \frac{1}{K_z(w)} P(uK_z)(w) \\ &= (1-\bar{z}w)^2 < uK_z, K_w > \\ &= (1-\bar{z}w)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1-\xi\bar{z})^2(1-\bar{\xi}w)^2} d\mathcal{A}(\xi). \end{aligned}$$

En remplaçant z par $\bar{z}$ dans cette dernière expression, on obtient bien l'équivalence entre 1 et 2.

Maintenant remplaçons dans 3 w par z on obtient 2 pour clore la preuve, il reste a montrer 2 implique 3.

Soient F et G les fonctions définies et analytiques sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ par :

$$\begin{aligned} F(z,w) &= \phi(z)\bar{\psi}(\bar{w}), \\ G(z,w) &= (1-zw)^2 \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{(1-\xi z)^2(1-\bar{\xi}w)^2} d\mathcal{A}(\xi). \end{aligned}$$

L'assertion 2 est équivalente a dire que la fonction F est égale a la fonction G sur l'ensemble $\{(z,\bar{z}), z \in \mathbb{D}\}$. Comme F et G sont toute les deux analytiques sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ on a bien que $F = G$ sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. □

— Maintenant supposons que un des deux symboles ϕ et ψ sont constants. Alors $\phi\bar{\psi}$ est une fonction harmonique de la proposition, les fonctions harmoniques sont invariant sous les transformations de Berezin, alors $\phi\bar{\psi} = B(\phi\bar{\psi})$. Alors $T_\phi T_\psi = T_u$, alors 2 de la proposition précédente implique que : $B(\phi\bar{\psi}) = B(u)$. Comme B est injective on a $\phi\bar{\psi} = u$, on réfère a ce cas comme un cas triviale, en fait les décomposions $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ ou ψ_2 est constant alors il est clair que $\bar{\psi}$ est analytique ou ϕ est analytique. Donc le produit $T_\phi T_\psi$ est l'opérateur $T_{\phi\psi}$ sous certaines conditions ce cas triviale sera la seule situation ou on aura $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.

— Un autre résultat utilise Laplacien invariant, laplacien invariant a une propriété il commute avec la transformation de Berezin $\tilde{\Delta}(Bu) = B(\tilde{\Delta}u)$, ce fait est cruciale dans la preuve de la proposition suivante.

Proposition 3.1.2. *Si ϕ et ψ sont analytiques sur $\mathbb{D}$ et si $\phi\bar{\psi} = B(u)$ pour une fonction $u \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A}) \cap C^2$ tel que $\tilde{\Delta}u$ est borné sur $\mathbb{D}$, alors ϕ et ψ sont constantes.*

Ici c'est important de signaler que la condition dans les propositions précédentes sont suffisantes mais pas nécessaires, autrement dit il existe une fonction $u \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ tel que $B(u) = \phi\bar{\psi}$ ou ϕ et ψ sont analytiques, mais ni ϕ ni ψ sont constantes.

Lemme 3.1.1. *1.* $z\bar{z} = B(u_1)(z)$ *ou* $u_1(z) = 1 + log \mid z \mid^2$.

2. $z(\bar{z})^2 = B(u_2)(z)$ *ou* $u_2 = 2\bar{z} - \frac{1}{z}$.

il est clair que ni u_1, *ni* u_2 *sont dans* $C^2(\mathbb{D})$ *de plus* u_1 *et* u_2 *ne sont pas bornées mais sont presque bornées.*

Il vient d'après la proposition 3.1.1 que

$$T_z T_{\bar{z}} = T_{1+log|z|^2},$$

et

$$T_z T_{\bar{z}^2} = T_{2\bar{z}-\frac{1}{z}}.$$

Notons dans les deux exemples la fonction ϕ *(qui est égale a* z *) et la fonction* ψ *(qui est égale a* z *dans le premier exemple, et* z^2 *dans le second exemple) sont des polynômes analytique et leurs degré de produit est inférieur ou égale a 3. De la proposition 2.3.3 pour tout* $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ *on a :*

$$\phi\bar{\phi} = B(u_1 \circ \phi),$$

et

$$\phi\bar{\phi}^2 = B(u_2 \circ \phi).$$

De la proposition 3.1.1 cela est équivalent a :

$$T_\phi T_{\bar{\phi}} = T_{u_1 \circ \phi}$$

et

$$T_\phi T_{\bar{\phi}^2} = T_{u_2 \circ \phi}.$$

Le théorème suivant caractérise toutes les fonctions analytiques ϕ et ψ telle que $\phi\bar{\psi} = B(u)$ pour une fonction $u \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ qui nous dit que les deux fonctions ϕ et ψ sont des polynômes analytiques avec une certaine Möbius transformation (automorphisme du disque). De plus le degré du produit des deux polynômes ne dépasse pas 3.

Théorème 3.1.2. *Si ϕ et ψ sont deux fonctions analytiques non-constantes sur $\mathbb{D}$ et $\phi\bar{\psi} = B(u)$ ou $u \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ alors il existe deux polynômes non constant tel que $deg(pq) \leq 3$ et il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\phi = p \circ \varphi_{z_0}$ et $\psi = q \circ \varphi_{z_0}$.*

Ce théorème est une généralisation de la proposition 3.1.2, comme la condition sur Laplacien invariant de u est enlevée en fait si on examine les deux exemples de lemme 3.1.1 il est clair que u_1 et u_2 ne sont pas dans C^2, donc leurs Laplacien n'est même pas définie.

Comme une application du théorème précèdent le corollaire suivant caractérise toutes les fonctions harmoniques bornées ϕ et ψ telle le produit $T_\phi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz.

Corollaire 3.1.1. *Si $\phi = \phi_1 + \bar{\phi_2}$ et $\psi = \psi_1 + \bar{\psi_2}$ sont des fonctions harmoniques bornées, ou ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 sont analytiques dans $\mathbb{D}$ et et ni ϕ_1 ni ψ_2 sont constantes. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction $h \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ ou T_h est borné sur $L^2_a(\mathbb{D})$, telle que $T_\phi T_\psi = T_h$.*
2. *Il existe deux polynômes analytiques non constant p et q avec $deg(pq) \leq 3$ et $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\phi = p \circ \varphi_{z_0}$ et $\psi = q \circ \varphi_{z_0}$ et h doit s'écrire de la forme*

$$h = u \circ \varphi_{z_0} + \bar{\phi_2}\psi_1 + \phi_1\psi_1 + \bar{\phi_2}\bar{\psi_2},$$

ou la fonction u est définie par $p\bar{q} = B(u)$.

Démonstration. Si $T_\phi T_\psi = T_u$ alors, d'après l'équation (3.1), on a :

$$T_{\phi_1} T_{\bar{\psi_2}} = T_{u - \phi_1\psi_1 - \bar{\phi_2}\psi_1 - \bar{\phi_2}\bar{\psi_1}},$$

d'où d'après la proposition 3.1.1,

$$\phi_1\bar{\psi_2} = B(u - \phi_1\psi_1 - \bar{\phi_2}\psi_1 - \bar{\phi_2}\bar{\psi_1}). \tag{3.2}$$

Il vient, par le théorème 3.1.2 que $\phi_1 = p \circ \varphi_{z_0}$ et $\psi_2 = q \circ \varphi_{z_0}$ avec p et q deux polynômes analytiques tels que $deg(pq) \leq 3$ et $\varphi_{z_0} \in Aut(\mathbb{D})$. L'équation (3.2) devient alors :

$$(p\bar{q}) \circ \varphi_{z_0} = B(u - \phi_1\psi_1 - \bar{\phi_2}\psi_1 - \bar{\phi_2}\bar{\psi_1}).$$

Utilisant le faite que la transformation de Berezin B laisse invariant les fonctions harmoniques et qu'elle est injective, on obtient :

$$u = (p\bar{q}) \circ \varphi_{z_0} + \phi_1\psi_1 + \bar{\phi_2}\psi_1 + \bar{\phi_2}\bar{\psi_1}.$$

Réciproquent si $\phi_1 = p \circ \varphi_{z_0}$ et $\psi_2 = q \circ \varphi_{z_0}$ alors d'après la proposition 3.1.1 $T_\phi T_{\bar{\psi_2}} = T_{(p\bar{q})\circ\varphi_{z_0}}$. Donc l'équation (3.1) devient :

$$T_\phi T_\psi = T_{\phi_1\psi_1} + T_{\phi_1\bar{\psi_2}} + T_{\bar{\phi_2}\psi_1} + T_{(p\bar{q})\circ\varphi_{z_0}},$$

c'est a dire : $T_\phi T_\psi = T_u$. □

3.2 Opérateur de Toeplitz quasihomogéne

On a vu dans la section précédente la question que lorsque le produit de deux opérateurs de Toeplitz avec symboles harmonique est un opérateur de Toeplitz était partiellement résolue par **P Ahren** et **Čučković** [14] et puis complètement résolue par **P Ahren**. La même question a était traitée par **Issam louhichi**, **Elizabeth Strouse** et **Lova Zakariasy** [9] mais avec une différence de classe de symboles, en particulier ils ont étudié le produit d'opérateur de Toeplitz avec tel dit : quasihomogéne symbole.
Dans cette section on doit introduire le quasihomogéne opérateur de Toeplitz et résumer quelques fait utiles a propos.

Définition 3.2.1. *une fonction f est dite quasihomogéne de degré $p \in \mathbb{Z}$, s'il existe une fonction radiale ϕ telle que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,*

$$f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta}\phi(r).$$

Si une telle fonction f est dite le symbole d'un opérateur de Toeplitz alors nous dirons que l'opérateur de Toeplitz T_f est quasihomogéne de degré p.
Rappelons que une fonction ϕ est dite radiale pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\phi(z) = \phi(\mid z \mid).$$

Dans toute la suite, nous assimilerons les fonctions radiale dans $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ a des fonctions dans $L^1([0,1], rdr)$.
Pourquoi regarder une telle classe de symboles ? soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions carré intégrable sur $[0,1]$ par rapport a la mesure rdr, comme d'une part les polynômes en $(z, \bar{z})$ sont denses dans $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ et d'autre part pour deux entiers $k_1 \neq k_2$, $e^{ik_1\theta}\mathcal{R}$ est orthogonale a $e^{ik_2\theta}\mathcal{R}$ il vient la décomposition suivante de : $L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ a savoir :

$$L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\mathcal{R}$$

ainsi que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ admet une décomposition suivante :

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} f_k(r), \qquad f_k \in \mathcal{R}.$$

De plus $f \in L^\infty(\mathbb{D}, d\mathcal{A}) \subset L^2(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ alors pour tout $r \in [0,1)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mid f_k(r) \mid = \frac{1}{2} \mid \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \mid,$$

et donc toutes les fonctions f_k sont bornées sur $\mathbb{D}$. même si ce genre de décomposition n'a pas lieu sur $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$.

Nous espérons que le fait d'avoir des résultats sur le produit d'opérateur de Toeplitz a symbole quasihomogéne, nous permettra de dire que plus sur ceux dont les symboles sont des fonctions beaucoup plus générales.

Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\phi \in L^1([0,1], rdr)$ une fonction radiale telle que T_ϕ est bornée sur $L^2_a(\mathbb{D})$, appliquons l'opérateur de Toeplitz $T_{e^{-ip\theta}\phi}$ sur les éléments de la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$ $\{\xi^n \quad n \geq 0\}$ nous donne :

$$\begin{aligned}
T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{-ip\theta}\phi(w) w^n}{(1-z\bar{w})^2} d\mathcal{A}(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} e^{-ip\theta}\phi(w) w^n \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) z^k \bar{w}^k d\mathcal{A}(w) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \phi(r) r^n e^{i(n-p)\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) r^k e^{-ik\theta} z^k \frac{d\theta}{\pi} r d\theta \\
&= \int_0^1 \phi(r) \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \int_0^{2\pi} e^{i(n-p-k)\theta} \frac{d\theta}{\pi} r^{n+k} z^k r dr.
\end{aligned}$$

Si $n \leq p-1$, alors il est impossible d'avoir $n = k+p$ avec $k \geq 0$. Par contre si $n \geq p$ alors il existe toujours un $k \geq 0$ tel que $n = k+p$, par ailleurs :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-p-k)\theta} \frac{d\theta}{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k+p \neq n, \\ 2 & \text{si} \quad k+p = n. \end{cases}$$

Donc

$$T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \leq p+1, \\ 2(n-p+1) \int_0^1 \phi(r) r^{2n-p+1} dr z^{n-p} & \text{si} \quad n \geq p. \end{cases}$$

De la même manière. On montre que pour tout entier $n \geq 0$

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = 2(n+p+1)\int_0^1 \phi(r)r^{2n+p+1}dr z^{n+p}.$$

On définit la transformation de Mellin d'une application ϕ par :

$$\widehat{\phi}(z) = \int_0^1 \phi(r)r^{z-1}dr.$$

Dans notre cas, nous traitons les fonctions radiales $\phi \in L^1([0,1], rdr)$, l'application $z \mapsto \widehat{\phi}(z)$ est bornée sur le demi-plan $\{z : \Re(z) \geq 2\}$ et analytique sur le demi-plan $\{z : \Re(z) > 2\}$.
Pour $z \in \{z : \Re(z) \geq 2\}$ la quantité $\int_0^1 \phi(z)r^{z-1}dr$ est appelée le coefficient de Mellin de ϕ d'indice z et sera noté dorénavant pour $\widehat{\phi}(z)$, En résumé nous avons le lemme de calcul suivant que nous utiliserons souvent.

Lemme 3.2.1. *Si p est un entier positif et ϕ est une fonction radiale sur $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ tel que T_ϕ est un opérateur de Toeplitz borné, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = 2(n+p+1)\widehat{\phi}(2n+p+2)z^{n+p},$$

et

$$T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) \begin{cases} 0 & si \quad n < p \\ 2(n-p+1)\widehat{\phi}(2n-p+2)z^{n+p} & si \quad n \geq p. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1.
— *Du lemme précèdent, on peut voir que l'opérateur de Toeplitz quasihomogéne acte sur tout élément de la base orthogonale tel un opérateur de décalage pondéré harmonique. Cette propriété a été souligner par* ***Louhichi*** *et* ***Rao*** *[12] dans leurs article et il l'ont appelé par un opérateur de décalage harmonique pondéré*

— *La matrice d'un opérateur de Toeplitz quasihomogéne dans la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$, est une matrice dont les éléments sont nuls sauf sur la diagonale par exemple si $p \in \mathbb{N}$ si $\phi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ est radiale tel que T_ϕ est bornée et si $A = (a_{ij})$ est la matrice de $T_{e^{ip\theta}}$ dans la base orthogonale $(\sqrt{k+1}z^k)_{k\geq 0}$ alors :*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i-j \neq p \\ 2\sqrt{j+1}(j+p+1)\widehat{\phi}(2j+p+2) & si \quad i-j = p. \end{cases}$$

On doit toujours utiliser le théorème suivant classique, qui conclue que la transformation de Mellin est injective.

Théorème 3.2.1. *Supposons que ϕ est une fonction analytique borné sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Si ϕ est nulle sur une suite de points distinctes $z_1, z_2, ...$ vérifiant :*

1. $\inf \mid z_n \mid > 0$,
2. $\sum_{n\geq 1} \Re(\frac{1}{z_n}) = \infty$,

alors ϕ est identiquement nulle $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

Corollaire 3.2.1. *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entier positifs supérieur ou égale a 2 vérifiant la condition*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Si $\phi \in L^1([0,1], rdr)$ est telle que $\widehat{\phi} = 0$ pour tout $k \geq 0$, alors ϕ est nulle.

Démonstration. Si $\widehat{\phi}(n_k) = \int_0^1 \phi(r) r^{n_k - 1} r dr = 0$ pour tout $k \geq 0$, alors d'après le théorème précédent $\widehat{\phi}(z) = 0$ pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$, et donc ϕ est nulle. □

3.3 Sur les zéro produit d'opérateur de Toeplitz

Dans cette section, on donne une réponse partiel de la question qui suit :
$(\mathcal{Q})$: sous quelles conditions sur les symboles f et g, le produit $T_f T_g = 0$ a une solution triviale i.e : $f = 0$ ou $g = 0$?
La question suivante a été résolue pour l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy.
Mais sur l'espace de Bergman la question $(\mathcal{Q})$ n'a pas une réponse complète encore.

Corollaire 3.3.1. *Si f et g deux fonctions harmoniques presque bornées tel que $T_f T_g = 0$, alors nécessairement $f = 0$ ou $g = 0$.*

Démonstration. du théorème 3.1.1 on obtient $T_f T_g = T_{fg} = 0$alors $fg = 0$ sur $\mathbb{D}$ comme f et g sont tout les deux harmoniques, alors au moins l'un des deux soit nul □

Corollaire 3.3.2. *Si f, g, u sont des fonctions harmoniques presque bornées tel que $T_f T_g = T_f T_u$ et f non identiquement nulle alors $g = u$.*

Démonstration. Si $T_f T_g = T_f T_u$ alors $T_f T_{g-u} = 0$ donc d'après le corollaire 3.3.1 $g - u = 0 \Rightarrow g = u$. □

Comme la question $\mathcal{Q}$ est résolue pour l'opérateur de Toeplitz avec symbole harmonique borné, maintenant la question qui se pose est la suivante :
Que peut on dire pour le produit l'opérateur de Toeplitz avec symbole général ?

Théorème 3.3.1. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ et soit g la fonction définie par $g(z) = z^m - \bar{z}^n$, ou $n, m \in \mathbb{N}$. Si $T_f T_g = 0$ alors $f = 0$.*

Théorème 3.3.2. *Soit p un entier positif, et soient f et ψ ou ψ est une fonction radiale dans $L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$ telle que T_f et T_ψ sont bornés. Si $T_f T_{e^{ip\theta}\psi} = 0$ alors $f = 0$ ou $\psi = 0$.*

Remarque 3.3.1.

1. *Si $p \in \mathbb{N}$ et $T_f T_{e^{-ip\theta}\psi} = 0$ alors composant les deux cotés de l'égalité par T_{z^p} on obtient $T_f T_{r^p\psi} = 0$. Mais le symbole $r^p\psi$ est une fonction radiale, en particulier il est quasihomogéne de degré 0, et du théorème précédent $f = 0$ ou $r^p\psi = 0$ i.e $\psi = 0$.*
2. *Si $T_{e^{ip\theta}\psi} T_f = 0$ alors*

$$T_{\bar{f}} T_{e^{-ip\theta}\psi} = 0,$$

le même résonnement de (1) reste valable.

Maintenant, on va utiliser des résultats donner par **D.Luecking** [1] a propos du rang finit d'opérateur de Toeplitz sur $L^2_a(\mathbb{D})$ qui peut être énoncer ainsi :

" *le seul rang fini d'opérateur de Toeplitz est le zéro produit.* "

Théorème 3.3.3. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{D})$ telle que $g(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{N} e^{ik\theta} g_k(r)$, ou N est un entier positif. $n_0 \geq 0$ est le plus petit entier tel que $\widehat{g_k}(2n + N + 2) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Si $T_f T_g = 0$ alors $f = 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$T_g(z^n) = \sum_{k=-\infty}^{N} T_{e^{ik\theta} g_k(z)}(z^n).$$

D'après le lemme 3.2.1 $T_{e^{ik\theta} g_k(z)}(z^n) = 0$ pour tout $k \leq -n - 1$, donc :

$$\begin{aligned} T_g(z^n) &= \sum_{k=-n}^{N} T_{e^{ik\theta} g_k(z)}(z^n) \\ &= \sum_{k=-n}^{N} 2(n + k + 1)\widehat{g_k}(2n + k + 2) z^{n+k} \\ &= 2(n + N + 1)\widehat{g_N}(2n + N + 2) z^{n+N} + \sum_{k=-n}^{N-1} 2(n + k + 1)\widehat{g_k}(2n + k + 2) z^{n+k}. \end{aligned}$$

Remplaçons n par n_0, on obtient :

$$T_g(z^{n_0}) = 2(n_0+N+1)\widehat{g_n}(2n+N+2)z^{n+N} + \sum_{k=-n_0}^{N-1} 2(n_0+k+1)\widehat{g_k}(2n_0+k+2)z^{n_0+k},$$

par hypothèse $\widehat{g_N}(2n_0+N+2) \neq 0$, alors :

$$z^{n_0+N} = \frac{1}{\lambda_{n_0}}\left[\sum_{k=-n_0}^{N-1} 2(n_0+k+1)\widehat{g_k}(2n_0+k+2)z^{n_0+k}T_g(z^{n_0})\right],$$

ou $\lambda_{n_0} = 2(n_0+N+1)\widehat{g_N}(2n_0+N+2)$. Cela implique clairement :

$$z^{n_0+N} \in vect\left\{T_g(z^{n_0}), 1, z, ..., z^{n_0+N-1}\right\}. \tag{3.3}$$

Remplaçant $n = n_0+1$, et passant par le même passage précèdent on voit que :

$$\begin{aligned} T_g(z^{n_0+1}) &= 2(n_0+N+2)\widehat{g_N}(2n_0+N+4)z^{n_0+N+1} \\ &\quad + \sum_{k=-n_0-1}^{N-1} 2(n_0+k+2)\widehat{g_k}(2n_0+k+4)z^{n_0+k+1}. \end{aligned}$$

Comme $\widehat{g_N}(2n_0+2+N+2) \neq 0$ on peut écrire z^{n_0+N+1} tel qu'une combinaison linéaire de $T_g(z^{n_0+1}), 1, z, ..., z^{n_0+N}$ donc :

$$z^{n_0+N+1} \in vect\left\{T_g(z^{n_0+1}), 1, z, ..., z^{n_0+N}\right\}.$$

Donc (3.3) implique :

$$z^{n_0+N+1} \in vect\left\{T_g(z^{n_0+1}), T_g(z^{n_0}), 1, z, ..., z^{n_0+N-1}\right\}.$$

En utilisant la même méthode, on peut démontrer que pour tout $l \geq 0$

$$z^{n_0+N+l} \in vect\left\{T_g(z^{n_0+1}), T_g(z^{n_0}), 1, z, ..., z^{n_0+N-l}\right\},$$

et

$$T_f(z^{n_0+N+l}) \in vect\left\{T_fT_g(z^{n_0+1}), T_fT_g(z^{n_0}), T_f(1), T_f(z), ..., T_f(z^{n_0+N-l})\right\}.$$

Mais $T_fT_g(z^{n_0}) = 0$ pour tout $n \geq 0$ alors pour tout $l \geq 0$

$$T_f(z^{n_0+N+l}) \in vect\left\{T_f(1), T_f(z), ..., T_f(z^{n_0+N-1})\right\}.$$

Donc le rang de T_f est au plus égale a n_0+N. D'ici utilisant les résultats de **Luecking** T_f doit être égale a 0 et $f = 0$. □

Remarque 3.3.2. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ et $g(z) = Q(z)+\bar{h}(z)$ ou Q est un polynôme analytique borné, si $T_fT_g = 0$ alors $f = 0$, et comme la transformation de Mellin monôme de z n'est jamais égale a zero les hypothèses "$\widehat{g_k}(2n+N+2) \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$" du théorème 3.3.3 sont satisfaites, et donc $f = 0$.*

Chapitre 4

Commutativité des opérateurs de Toeplitz

Le problème de commutativité d'opérateur de Toeplitz est l'un des problèmes défiants dans la théorie des opérateurs de Toeplitz, ce problème peut être énoncé ainsi :
Si deux opérateurs de Toeplitz commutent, que peut on dire sur leurs symboles ?
Dans ce chapitre, nous commençons par des résultats qui ont été obtenus jusque la.

4.1 Commutativité d'opérateurs de Toeplitz avec symbole harmonique

Axler et**Čučković**[16] ont étudié la commutativité des opérateurs de Toeplitz, sur $L^2_a(\mathbb{D})$ avec symbole harmonique borné, ils ont alors obtenu un résultat similaire a celui du théorème du commutativité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy
Ils ont montré que deux opérateurs de Toeplitz de symbole harmonique bornés commutent dans le cas triviale seulement. Et les seuls opérateurs satisfaisant cette propriétés sont l'identité et le zéro produit.
Les résultats de **Axler** et **Čučković** [16] sont annoncés dans le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Supposons que f et g sont deux fonctions harmoniques bornés sur $\mathbb{D}$. Alors :*

$$T_f T_g = T_g T_f,$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiés

i. *f et g sont analytiques sur $\mathbb{D}$, ou bien*

ii. *$\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont analytiques sur $\mathbb{D}$, ou bien*

iii. *il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{C}$, non nulles, telles que :*

$$af + bg$$

est constant sur $\mathbb{D}$.

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant qu'une fonction est harmonique sur le disque $\mathbb{D}$, si et seulement si elle vérifie la propriété de la valeur moyenne invariante pour la surface et si sa radialisation, définie par :

Définition 4.1.1. *Soit ϕ une fonction intégrable sur $\mathbb{D}$. On définit la radialisation de ϕ, et on note $rad(\phi)$, par :*

$$rad(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}z)d\theta.$$

L'intégrale existe et finie presque partout car $\phi \in L^1(\mathbb{D}, d\mathcal{A})$. Il découle directement de cette définition qu'une fonction ϕ est radiale si et seulement si, $\phi = rad(\phi)$.

Lemme 4.1.1. *Pour T_ϕ borné et tous entier j et k, on a*

$$< T_{rad(\phi)}z^k, z^i >= \begin{cases} < T_\phi z^k, z^k > & si \quad k = j, \\ 0 & si \quad k \neq j. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout entier k et j

$$\begin{aligned} < T_{rad(\phi)}z^k, z^i > &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}w)d\theta w^k \bar{w}^j d\mathcal{A}(w) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \phi(e^{i\theta}w)w^k\bar{w}^j d\theta d\mathcal{A}(w). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $z = e^{i\theta}w$, on obtient :

$$\begin{aligned} < T_{rad(\phi)}z^k, z^i > &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta}d\theta)\int_{\mathbb{D}} \phi(z)z^k\bar{z}^j d\mathcal{A}(w) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\theta}d\theta) < T_\phi z^k, z^j > \\ &= \begin{cases} < T_\phi z^k, z^k > & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.1. *Soit ϕ une fonction harmonique bornée, sur $\mathbb{D}$. Alors l'opérateur de Toeplitz T_ϕ est normal i.e : $T_\phi T_\phi^* = T_\phi^* T_\phi$ si et seulement si l'ensemble $\phi(\mathbb{D})$ vit sur une droite du plan complexe $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On suppose qu'il existe deux constantes non nulle α et β dans $\mathbb{C}$, telles que :

$$\phi(z) = \alpha z + \beta, \qquad \forall \in \mathbb{D}.$$

Alors

$$\bar{\beta}\phi(z) - \alpha\bar{\beta}z = \mid \beta \mid^2 \in \mathbb{R}.$$

Et ceci pour tout $z \in \mathbb{D}$. Et notant $a = \bar{\beta}$ et $b = -\alpha\bar{\beta}$, il vient que l'opérateur $a\phi + b$ est a valeur réelles sur $\mathbb{D}$. Ainsi :

$$T_{a\phi+b}^* = T_{\overline{a\phi+b}} = T_{a\phi+b}$$

i.e : $T_{a\phi+b}$ est auto-adjoint donc normal.
Comme $T_\phi = a^{-1}(T_{a\phi+b} - bI)$, alors T_ϕ est aussi un opérateur normal, comme la fonction ϕ est harmonique bornée sur $\mathbb{D}$, $\bar{\phi}$ est aussi harmonique et borné sur $\mathbb{D}$. D'après le théorème 4.1.1 il vient que :

1. ϕ et $\bar{\phi}$ sont toutes les deux analytiques dans $\mathbb{D}$, ou bien
2. $\exists (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a\phi + b\bar{\phi}$ est constant dans $\mathbb{D}$.

□

4.2 Commutativité des opérateurs de Toeplitz analytique

Un opérateur de Toeplitz T_ϕ est analytique, si son symbole ϕ est analytique. Dans ce cas T_ϕ est l'opérateur de multiplication par ϕ. Comme deux opérateurs de multiplication commentent, si T_ϕ et T_ψ sont analytiques sur $L_a^2(\mathbb{D})$, alors $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$. On réfère alors a ce cas comme un triviale .

Théorème 4.2.1. *Soit ϕ une fonction analytique bornée non-constante sur le domaine ouvert borné Ω. Alors la norme fermé de sous algèbre de $L^\infty(\mathbb{D})$ généré par $\bar{\phi}$ et les fonctions analytiques bornées sur Ω contient $C(\bar{\Omega})$.*

Théorème 4.2.2. *Si ϕ est une fonction analytique non constante sur Ω et ψ est une fonction mesurable borné sur Ω, tel que T_ϕ et T_ψ commutent, alors ψ est analytique.*

Démonstration. Comme ψ est borné :

$$\psi \in L^2(\Omega, d\mathcal{A}) = L^2_a(\Omega) \oplus (L^2_a(\Omega))^\perp,$$

ou $(L^2_a(\Omega))^\perp$ est le complement orthogonale de l'espace de Bergman $L^2_a(\Omega)$. Donc $\psi = f+u$ avec $f \in L^2_a(\Omega)$ et $u \in L^2(\Omega, d\mathcal{A}) \ominus L^2_a(\Omega)$. Si n est entier non négative alors :

$$T_{\phi^n} T_\psi(1) = \phi^n P(f+u) = \phi^n f, \tag{4.1}$$

et

$$T_\psi T_{\phi^n}(1) = P(f\phi^n + u\phi^n) = f\phi^n + p(u\phi^n). \tag{4.2}$$

Alors $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$, $T_{\phi^n} T_\psi = T_\psi T_{\phi^n}$ pour tout entier $n \geq 0$. Donc les equations (4.1) et (4.2) doivent être égales, et $p(u\phi^n) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
Si h est une fonction dans $L^2_a(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= < h, u\phi^n > \\ &= \int_\Omega \bar{u} h \overline{\phi_n}, \ \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

La dernière pour toute fonction analytique bornée arbitraire h sur Ω, et pour tout entier non négatif n, les résultats de Bishop impliquent

$$\int_\Omega \bar{u} w d\mathcal{A} = 0,$$

pour tout w dans $C(\bar{\Omega})$ l'ensemble de toute les fonctions continues sur la fermeture de Ω. Donc $C(\bar{\Omega})$ est dense dans $L^2(\Omega, d\mathcal{A})$ on a alors :

$$\int_\Omega \mid u \mid^2 d\mathcal{A} = 0,$$

donc $u = 0$, alors $\psi = f$ et donc ψ est analytique. □

4.3 Commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogéne

Dans cette section on s'intéresse a la commutativité des opérateurs de Toeplitz avec symbole quasihomégene, la commutativité de tel opérateur a été étudié par **SH.Axler**[15],

il a caractérisé toutes les fonctions ψ bornés sur $\mathbb{D}$ tel que T_ψ et $T_{e^{ip\theta}r^m}$ commutent avec p et m deux entiers positifs ils ont donc obtenus les résultats suivants :

Théorème 4.3.1. *Soient* $\psi(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r)$ *et* $\phi(re^{i\theta}) = e^{i\delta\theta}r^m$ *deux fonctions dans* $L^\infty(\mathbb{D})$*, ou* $\psi_k \in \mathcal{R}$*,* $m \in \mathbb{N}$ *et* $\delta \in \mathbb{N}$*. Alors* T_ϕ *et* T_ψ *commutent si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*, il existe des constants :*

$a_0(k)$*,* $a(k)$*,* $b(k)$ *et* $d(k)$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

$$\widehat{\psi_k}(z) = a_0(k)\frac{\Gamma(\frac{z}{2\delta}+a(k))\Gamma(\frac{z}{2\delta}+b(k))}{\Gamma(\frac{z}{2\delta}+c(k))\Gamma(\frac{z}{2\delta}+d(k))},$$

ou Γ *est une Gamma fonction. De plus, la valeur des constantes*

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{k}{2\delta}, \\ b(k) &= \frac{(m+\delta-k)}{2\delta}, \\ c(k) &= \frac{(2\delta-k)}{2\delta}, \\ d(k) &= \frac{(k+\delta+m)}{2\delta}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration de ce théorème, **SH.Axler**[15] ont prouvé pour une fonction borné $\psi(re^{ik\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\psi_k(r)$. Si T_ψ commute avec un opérateur de Toeplitz quasihomogéne donné, alors ce dernier commute avec $T_{e^{ik\theta}\psi_k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Plus tard **Louhichi** et **Zakariasy**[8] on utilisé se fait cruciale pour caractériser toute fonction borné ψ telle que : T_ψ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$.

Si on voit séparément le quasihomogéne terme de degré négatif et positif dans la décomposition du symbole ψ, il ont montré premièrement que deux opérateurs de Toeplitz quasihomogéne non-triviale avec des signes différents ne comment jamais. Deuxièmement ils ont montré que deux opérateurs de Toeplitz avec symbole radiale non-triviale ne commute pas avec un opérateur de Toeplitz quasihomogéne non nulle et degré positif. Troisièmement pour un opérateur de Toeplitz quasihomogéne donné $T_{e^{ip\theta}\phi}$ de degré positif et par un entier fixé mais arbitrairement positif s, s'il existe une fonction radiale ψ telle que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi} = T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors ψ est unique a une unique constante multiplicative prés.

Leurs résultats se résument dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.2. *Soit* ϕ *une fonction radiale bornée non-nulle,* p *un entier positif et*

$$\psi(re^{ik\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}).$$

Alors :

a) *T_ψ commute avec $T_{e^{ik\theta}\phi}$ si et seulement si $T_{e^{ik}\psi_k}$ commute avec $T_{e^{ik\theta}\phi}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

b) *il existe $k \in \mathbb{Z}_-$ et une fonction radiale bornée ψ_k telle que :*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

Alors ψ_k doit être égale a zéro.

c) *il existe $k \in \mathbb{Z}_+$ est une fonction radiale bornée ψ_k telle que :*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\psi_k} = T_{e^{ik\theta}\psi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

Alors ψ_k est unique a une constante multiplicative prés.

Bibliographie

[1] A.Alexzndrov et G.Rozenblum : *Finite rank toeplitz operators : some extensions of D.Luecking's theorem*,Jurnal of analysis ,Elsevier ,2009.

[2] A.Brown et P.R.Halmos : *Algebric proprieties of Toeplitz operators.* J.Rienne Angrew. Math 123(1964), 89-102.

[3] A.F.Youcef : *Two problems in theory of Toeplitz on the Bergman space* , Tolède, Mai 2009.

[4] B.Barusseau : *Propriétés spectrales des operateurs de Toeplitz* , université Bordeaux 1, Mai 2010.

[5] E.Amar et E.Matheron : *Analyse complexe*, Cassini, Paris 2004.

[6] H.Brezis : *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris 1983.

[7] H.Hedenmalm,B.Korenblum,K.Zhu : *Theory of Bergman spaces* , pringer, New York 2000.

[8] I.Louhichi et L.Zakaziasy : *On Toeplitz operators with quasihomogeous symbols* , Archiv der Mathematik volume 85, Number3(2005), 248-257.

[9] I.Louhichi et E.Strousse et L.Zakaziasy : *Products of Toeplitz operators theory* , Published on line : octobre 2005.

[10] I.Louhichi et E.Strousse et L.Zakaziasy : *Products of Toeplitz operators on the Bergman space* , Intergral Equation and operator theory : Published on line octobre 2005.

[11] I.Louhichi et E.Strousse et L.Zakaziasy : *Products of Toeplitz operators theory* , Published on line : octobre 2005.

[12] I.Louhichi et NV Rao A.F.Youcef : *Two questions of Toeplitz operators on the Bergman space* ,complex analysis and operators theory3(4) ,881-889 .

[13] K.Zhu : *Operator theory in function spaces* , Marcel Dekker, New-York, 1990

[14] P.Ahren et Z.Čučković : *A theorem of Brown-Halmos type for Bergman space Toeplitz operators*. Journal of functional analysis 187 (2001), 200-210.

[15] SH.Axler : *Bergman space and their operators*, Pitman Res. Note in math. vol I(1988), 1-50.

[16] SH.Axler et Z.Čučković : *Commuting Toeplitz operators with harmonic symbols* , Integer Equat.oper th.14(1991), 1-12.

[17] W.Rudin : *Real and complex analysis* . McGrew-Hill, New-York, 1966.