الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــةالـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: ABDELHAKEM Youssra

THEME

Etude de l'existence et la stabilité d'un système de Timoshenko avec force extérieur

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mme. Y. Boukhatem	***M.C.B***	***Président***
Mr. A. Boukehila	***M.C.A***	***Examinateur***
Mr. T. Abassi	***M.A.B***	***Examinateur***
Mr. A. Rahmoune	***M.C.A***	***Encadreur***

Année Universitaire 2019/2020

Remerciement

Tout d'abord je remercie **ALLAH** le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur **Dr.A.Rahmoune** pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui mont guidé durant la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

De tous mon cœur je remercie **mes chères parents**, pour leur soutien et leur amour sans faille tout au long de ces années, ma sœur, mes frères et touts ma familles en particulier mes oncles Ali, khaled et Mouhamed. Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Hichame Bouameur, je n'oublie pas mon ami proche ikram finalement merci à tous ceux qui ont cru en moi.

Dédicace

Je dédie ce travail,

à mon père **Abbas**,

à ma mère **Djamila**,

à ma sœur **fatima** avec sa petite famille et mon anges **Bouameur**, **Abbas**, **Mohamed**,

à l'esprit qui a habité mon âme, ma sœur **Zeinab** mon inspiration,

à mes frères **Lamin**, **Taib**, **Ahmaed**

à toute ma **famille**,

à tous ceux qui **m'aiment**,

à mes amis et à tous ceux que **j'aime**.

ملخص

تهدف هذه المذكرة لبرهان وجود ووحدانية حل جملة تيموشينكو مع قوة خارجية مؤثرة و دراسة الاستقرار الأسي لها.

الفصل الأول من المذكرة خصصناه لجملة من التعاريف و النظريات التي تعتبر كمدخل للبحث، مثل فضاءات باناخ، هيلبارت، سوبولاف و بعض المتراجحات المستعملة في هذه المذكرة، وكذلك نظرية شبه الزمر.

الفصل الثاني قمنا ببرهنة وجود ووحدانية حل جملة تيموشينكو باستعمال نظرية شبه الزمر وبالأخص نظرية هيليوشيدا.

أما الفصل الثالث فقد تطرقنا لدراسة الاستقرار الأسي لجملة تيموشينكو باستعمال نظرية الطاقة والتي تعتمد على دالة لايبونوف.

الكلمات المفتاحية

جملة تيموشينكو، نظرية هيليوشيدا، الاستقرار الأس.

Résumé

Dans ce mémoire on a établit la preuve de l'existence et l'unicité du système de Timoshenko avec une force extérieur et on a étudié la stabilité exponentielle.

Le premier chapitre était consacré aux quelques définitions et théorèmes fondamentaux qui sont utiles pour notre travail, tels que les espaces de Banach, Hilbert, Sobolev, et certaines inégalités utilisées dans ce mémoire, et la théorie de semi-groupes.

Dans le second chapitre nous avons démontré l'existence et l'unicité du système de Timoshenko en utilisant la théorie du semi-groupes, en particulier le théorème de Hille–Yosida.

Le troisième chapitre traitait l'étude de la stabilité exponentielle du système de Timoshenko en utilisant la théorie de l'énergie, qui repose sur la fonction de Lyapounov.

Mots clés : Système de Timoshenko ; stabilité exponentielle ; théorème de Hille-Yosida.

Abstract

In this work we stableched of the existence and uniqueness of the Timoshenko system with an influential external force and we studed of its exponential stability.

The first chapter was devoted to the few fundamental definitions and theorems that are useful for our work, such that the spaces of Banach, Hilbert, Sobolev, and some inequalities used in this work,was discaded the theory of semi-groups.

In the second chapter we have demonstrated the existence and uniqueness of the Timoshenko system using the theory of semi-groups, in particular the theory of Hille – Yosida.

The third chapter deals with the study of the exponential stability of the Timoshenko system using the theory of energy, which is based on the Lyapounov function.

Keywords : exponential stability ; Hille-Yosida theorem ; Timoshenko system.

Table des matières

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
H	$=$ Espace de Hilbert.
I	L'opérateur identité sur X.
X'	Le dual topologique de l'espace de Banach X.
A*	adjoint de A.
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est continue.
$C_c^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment dérivable la support compact.
$L^1(I,\mathbb{R})$	l'espace des fonctions $x : I \to \mathbb{B}$ Lebesgue intégrables.
$L^1_{loc}(I,\mathbb{R})$	l'espace des fonctions localement intégrables.
L^2	est l'espace des fonctions de carré intégrable.
$\mathfrak{D}(\Omega)$	l'espace des distributions.
$\triangle$	le Laplacian ($\triangle = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(x)$).
$Im(A)$	l'image de A.
φ_t	$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ la dérivée de φ par rapport à t.
φ_{tt}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à t.
φ_x	$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée de φ par rapport à x.
φ_{xx}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x.
φ_{xt}	$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x par rapport à t.

Introduction

Un modèle simple décrivant la vibration transversale d'un faisceau a été développé par Stephan Timoshenko [28] et donné par le système des équations hyperboliques couplées suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (k(u_x - \varphi))_x \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_p \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + k(u_x - \varphi) \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{1}$$

où t désigne la variable de temps, x est la variable de l'espace le long du faisceau de longueur L dans sa configuration d'équilibre, u est le déplacement transversal du faisceau, φ est l'angle de rotation du filament du faisceau, et ρ, I_p, E, I et k désignent, respectivement, la densité (la masse par unité de longueur), le moment polaire de l'inertie d'une coupe, module de Young d'élasticité, le moment de l'inertie d'une coupe, et le module de cisaillement.

Kim et Renardy [20] ont considéré (1) avec deux contrôles sur le bord de la forme

$$\begin{cases} k\varphi(L,t) - k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(L,t), \quad \forall t \geq 0 \\ EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,t) = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L,t), \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

et ont utilisé les techniques de multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle pour l'énergie normale de (1). Ils ont également fourni des évolutions numériques aux valeurs propres de l'opérateur liées au système (1). Un résultat analogue a été également établi par Feng [12] où la stabilisation d'un système de Timoshenko a été étudiée. Raposo et al [10] ont étudié (1) avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes et des contrôles linéaires, ils ont regardé le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \varphi)_x + u_t = 0 \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} - k(u_x - \varphi) + \varphi_t = 0 \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

et ont montré que l'énergie liée à (2) décroit exponentiellement. Ce résultat est semblable celui obtenu par Taylor [27]. La méthode utilisée est différente de l'habituelle telle que la méthode classique d'énergie. Il emploie principalement la théorie de semi-groupes.Soufyane et Wehbe [5] ont prouvé que c'est possible de stabiliser uniformément (1) en employant un feedback localement distribué unique. Ainsi ils ont considéré

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (k(u_x - \varphi))_x \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_p \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + k(u_x - \varphi) - b\varphi_t \quad dans \quad (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

où b est une fonction positive et continue qui satisfait

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L].$$

En fait, ils ont montré que la stabilité uniforme de (3) tient si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{k}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}\right)$, autrement, seulement la stabilité asymptotique a été prouvée. Xu et Yung [16] ont étudié un système de Timoshenko et ont examiné la stabilité du système en utilisant les valeurs propres et les fonctions propres. Ammar Khodja et al [15] ont considéré un système de Timoshenko linéaire avec un contrôle de type mémoire de la forme

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_t t - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int\limits_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, avec conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Ils ont employé la technique de multiplicateur et ont montré que le système est uniformément stable si et seulement si les vitesses de propagation sont égales

$$\left(\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right), \tag{5}$$

et g décroit exponentiellement vers 0, et la stabilité polynômiale si g décroit polynômialement. Ils ont également considéré quelques conditions techniques supplémentaires sur g' et g'' pour obtenir leur résultat. Les feedbacks de type mémoire ont été également employé par De Lima Santos [24] où ils ont considéré un système de Timoshenko et ont montré à que la présence des deux feedbacks du type mémoire sur une partie de la frontière stabilise le système uniformément.

Ils ont également obtenu le taux de décroissance de l'énergie en fonction des feedbacks. Shi et Feng [13] ont étudié un système de Timoshenko non uniforme rayonné de relaxation soumis à des contrôles localement distribués et ont montré la stabilité exponentielle du système.

A. Guesmia et S. A. Messaoudi [2] ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \varphi_x + \psi + \int\limits_0^t g(t-s)(a(x))\psi_x(s))_x ds + b(x)h(\psi_t) = 0, \quad (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,1) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{6}$$

(soumis à un contrôle frictional et un contrôle de type mémoire complémentaires) et ont étudié l'influence de ces contrôles sur le taux de stabilité des solutions. Ils ont obtenu la stabilité exponentielle et polynômiale sous des conditions plus faibles sur la fonction de relaxation.

B. Said-Houari, Y. Laskri [6] ont considéré un système de Timoshenko avec un retarde de tempe dans feedback, ils regardé le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x,t) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + K(\varphi_x + \psi)(x,t) + \mu_1\psi_t(x,t) + \mu_2\psi_t(x, t-\tau) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

avec $(x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tau > 0$ présenter le retarde de tempe et μ_1, μ_2 deux constants positive. Et les conditions aux bourdes

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, t > 0, \tag{8}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \\ \psi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) = f_0(x,t-tau), \quad (x,t) \in (0,1) \times [0.\tau]. \end{cases} \tag{9}$$

Méthodologie

Dans ce travail, pour assurer le caractère bien posé de nos problèmes, on utilise la théorie de semi-groupes pour établir l'existence et l'unicité des solutions. En théorie des semi-groupes, le théorème de Hille-Yosida est un outil puissant et fondamental reliant les propriétés de dissipation de l'énergie d'un opérateur non borné $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ à l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{A}\Phi(t), \quad t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Pour les résultats de stabilité, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapounov $\mathcal{L}$ équivalente à l'énergie E de la solution. On désigne par $\mathcal{L} \sim E$ l'équivalence

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t), \quad t > 0, \tag{10}$$

pour deux constantes positives α_1 et α_2 : Pour établir la stabilité exponentielle, alors il suffit t de montrer que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

pour un certain $c > 0$: Une intégration simple de (11) sur $[0,t]$ avec (10) mène au résultat souhaité de la stabilité exponentielle. Il vaut la peine de noter que la difficulté dans ce travail est de trouver la fonction de Lyapounov adéquate.

Dans ce travail, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \mu_1\psi_t + \mu_2\psi_t(x,t-\tau) + f(\psi) = 0, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \\ \psi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \quad t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{12}$$

où $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$.

Dans ce mémoire notre objectif est d'étendre le résultat de Said-Houari et Laskri [6] à un cadre non linéaire en ajoutant une force extérieure $f(\psi)$. Le reste est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous présentons quelques remarques préliminaires. Dans le chapitre 2, nous prouvons l'existence et l'unicité du système de Timoshenko avec force extérieur en utilisant la théorie de semi-groupe. Dans le chapitre 3, nous prouvons la stabilité exponentielle de même système en utilisant des méthodes d'énergie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Espaces normés

Un espace vectoriel E est appelé espace normé si à tout $x \in E$ correspond un nombre positif $\|x\|$ (appelé norme de x) tel que les trois axiomes suivants, dits axiomes de la norme, sont vérifiés :

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (la norme est non dégénérée) ;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$ (la norme est homogène) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Ainsi donc, la norme est une application définie sur E, prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés 1 à 3.

Remarque 1.1
Si l'on étudie plusieurs espaces normés à la fois on fera figurer ces espaces en indice pour en distinguer les normes, par exemple $\|x\|_E$.

1.1.2 Espaces de Banach

Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente. Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Hilbert

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est applé espace de Hilbert s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire.

Les espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers sont des généralisations des espaces IR^n *et* C^n.

1.1.4 Espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx, Les fonction f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.1

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \quad mesurable \quad et \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad telle \quad que \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad vérifiant : |f| \leq c \quad p.p \quad sur \quad \Omega\}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \in \mathbb{R} \quad tq \quad |f| \leq c \quad p.p \quad sur \quad \Omega\}.$$

1.1.5 Espaces $L^p(a, b, \Omega)$

Définition 1.2

Soient Ω un espace de Banach et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\|.\|_\Omega$ la norme dans Ω.

On désigne par $L^p(a, b, \Omega)$ l'espace des classes des fonctions mesurables de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\|f\|_{L^p(a,b,\Omega)} = \left[\int_{(a,b)} \|f(x)\|_\Omega^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad pour \quad p < \infty.$$

1.1.6 Espace de Sobolev

Définition 1.3

Soient $(m, p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$,on note $D^\alpha f = \pounds_a$.Donc on définit $W^{m.p}(\Omega)$ par :

$$W^{m.p}(\Omega)=\left\{\begin{matrix} f \quad \in L^p(\Omega) \quad telle \quad que \quad \forall\alpha\in\mathbb{N}^n \quad avec \quad |\alpha|\leq \quad m, \quad \exists\pounds_a\in L^p(\Omega) \quad v\acute{e}rifant: \\ \int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \pounds_a(x)\varphi(x)dx, \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)\end{matrix}\right\}$$

On définit sur $W^{m.p}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{W^{m.p}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leq m}\|\pounds_a\|_{L^p(\Omega)}.$$

Si $1\leq p<+\infty$,on peut considérer sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme équivalent

$$\|f\|_{W^{m.p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|\pounds_a\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.1

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^m.Pour tous $m\geq 1$ et $1\leq p<\infty$, on a

1) $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0\Longrightarrow W^{m.p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q\in[p,q^*]$ *où* $\frac{1}{q^*}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}$.

2) $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0\Longrightarrow W^{m.p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q\in[p,+\infty]$.

3) $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0\Longrightarrow W^{m.p}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $u\in L^2(\Omega)$, dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m-prises au sens faibles sont dans $L^2(\Omega)$.

Ces espaces jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.4

Pour $m\in\mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev d'ordre $m\in\mathbb{N}$ par :

$$H^m(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega): D^\alpha u\in L^2(\Omega), |\alpha|\leq m\}, \tag{1.1}$$

où

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \alpha_j\in\mathbb{N}, |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n, \quad et \quad D^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}, \quad où \quad \partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u,v\rangle_m=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha u(x).D^\alpha v(x)\mathrm{dx}, \quad \forall \mathrm{u,v}\in\mathrm{H^m}(\Omega), \tag{1.2}$$

et la norme associée à ce produit scalaire :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \|D^\alpha u\|_2^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 :

1) *Si* $p \in [1, +\infty]$, *alors* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach (i.e. normé complet).*
2) *Si* $p \in [1, +\infty[$, *alors* $L^p(\Omega)$ *est séparable (i.e. il existe un n ensemble dénombrable dense dans* $L^p(\Omega)$*).*
3) $L^2(\omega)$ *est un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Théorème 1.2

$L^p(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Proposition 1.2

$H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\forall f, g \in H^m(\Omega) : \langle f, g\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2

$C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ *mais l'inverse n'est pas vraie.*

Définition 1.5

On définit $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$*(par rapport à la norme de* $H^m(\Omega)$*) ; c'est-à-dire :*

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ f \in H^m(\Omega) / \exists(\varphi_k) \in \mathfrak{D}(\Omega) \ \ vérifient \ \ : ||\varphi_k - f||_{H^m(\Omega)} \to 0 \ \ tand \ \ k \to +\infty \right\}.$$

De même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ *par rapport à la norme de* $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.6

$H_0^2(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}$ *(par rapport la norme de* $H^2(\Omega)$*).*

Définition 1.7

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *. On pose*

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \forall i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ *est dans* $H^1(\Omega)$ *s'il existe des fonctions* $v_1, \ldots, v_N$ *dans* $L^2(\Omega)$ *telle que :*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Proposition 1.3
$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.3
En générale $\mathfrak{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$

Définition 1.8 *[17]*
Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

Proposition 1.4
L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$, l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.
L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.5
Quand Ω a une frontière régulière, $H_0^1(\Omega)$ peut être décrit comme l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent au sens des traces.
En dimension 1 $(n = 1)$, si $\Omega =]a, b[$ est un intervalle borné, alors $H_0^1(]a, b[)$ est l'ensemble des fonctions u continues sur $[a, b]$ de la forme :

$$u(x) = \int_a^x u'(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

1.1.7 Le Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires.

Définition 1.9
On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est

1. *Continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, v)| \leq c|u||v|, \quad \forall u, v \in H,$$

2. Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,v) \geq \alpha |v|^2, \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.3 ***(Lax-Milgram)****[17]*

Soient H un espace de Hilbert et $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercitive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad et \quad \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \tfrac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.2 Quelques inégalités utiles

1.2.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.6
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\forall x_1, x_2 \in L^2(\Omega)$,

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \|x_1\| \|x_2\|, \tag{1.4}$$

où

$$\left| \int_\Omega x_1 x_2 d\mu \right| \leq \left(\int_\Omega |x_1|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |x_2|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Démonstration
La preuve consiste à étudier la fonction suivante :

$$f(\lambda) = \int_\Omega (x_1 \lambda + x_2)^2 d\mu.$$

La première chose que nous pouvons remarquer est que :

$$(x_1 \lambda + x_2)^2 \geq 0 \Longrightarrow f(\lambda) \geq 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ensuite, essayons de développer $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_\Omega (x_1^2 \lambda^2 + x_2^2 + 2 x_1 \lambda x_2) d\mu \\ &= \int_\Omega x_1^2 \lambda^2 d\mu + \int_\Omega x_2^2 \mathrm{d}\mu + \int_\Omega 2 x_1 \lambda x_2 \mathrm{d}\mu \\ &= \lambda^2 \int_\Omega x_1^2 d\mu + \int_\Omega x_2^2 d\mu + 2\lambda \int_\Omega x_1 x_2 d\mu. \end{aligned}$$

La deuxième chose que nous pouvons remarquer est que $f(\lambda)$ est un polynôme du deuxième degré positive. Par conséquent son descriminant $\Delta \leq 0$, alors :

$$\left(2\int_{\Omega} x_1x_2d\mu\right)^2 - 4\int_{\Omega} x_1^2d\mu \int_{\Omega} x_2^2d\mu \leq 0 \Longrightarrow 4\left(\int_{\Omega} x_1x_2d\mu\right)^2 \leq 4\int_{\Omega} x_1^2d\mu \int_{\Omega} x_2^2d\mu.$$

Il ne nous reste plus qu'à simplifier par 4 et nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

1.2.2 L'inégalité de Hölder

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ telles que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$:$fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\left(i.e. \begin{cases} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{\Omega} |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} & si \quad p, q \in]1, +\infty[, \\ \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x)|dx \quad si \quad p = 1 \quad et \quad q = +\infty & \end{cases} \right).$$

Démonstration

Premier cas : p ou q vaut $+\infty$. Supposons $q = +\infty$, et donc $p = 1$. Alors $g \leq \|g\|_{L^\infty}$, donc $|fg| \leq |f|\|g\|_{L^\infty}$ par conséquent :

$$\|fg\|_{L^1} = \int_{\Omega} |fg|dx \leq \|g\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |f|dx = \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}.$$

Deuxième cas : p et q sont finis. L'inégalité de Hölder est évidente si $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$. En effet par exemple $\|f\|_{L^p} = 0$ alors $|g| = 0$. Donc $|fg| = 0$ et par conséquent $\|fg\|_{L^1} = 0$. Nous supposons donc maintenant que $\|f\|_{L^p} \neq 0$ et $\|g\|_{L^q} \neq 0$.

Rappelons la concavité du logarithme :

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y > 0, \quad \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha \ln(x) + (1 - \alpha) \ln(y).$$

En posant $\alpha = \frac{1}{p}$,et donc $1 - \alpha = \frac{1}{q}$, ainsi que $x = |f_1|^p$ et $y = |g_1|^q$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{|f_1|^p}{p} + \frac{|g_1|^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(|f_1|^p) + \frac{1}{q}\ln(|g_1|^q) = \ln(|f_1g_1|),$$

et donc par croissance de l'exponentielle

$$\frac{|f_1|^p}{p} + \frac{|g_1|^q}{q} \geq |f_1g_1|.$$

Ainsi avec

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}, g_1 = \frac{g}{\|g\|_{L^q}},$$

on obtient :

$$\frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|f|^q}{\|g\|_{L^q}^q}.$$

En intégrant chaque membre, la croissance de l'intégrale implique :

$$\int\limits_{\Omega} \frac{fg}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui est l'inégalité attendue. ■

1.2.3 L'inégalité de Hölder généralisée

Corollaire 1.7 *(Inégalité de Hölder généralisée)*

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $1 \leq i \leq k$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_k\|_{p_k}.$$

1.2.4 L'inégalité de Young

Lemme 1.8

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \textit{où } \varepsilon \textit{ est toute constante positive.} \tag{1.6}$$

Démonstration

Prenant le résultat bien connu

$$(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

pour tous $\varepsilon > 0$, on a :

$$4\varepsilon^2 a^2 + b^2 - 4\varepsilon ab \geq 0. \tag{1.8}$$

Cela implique

$$4\varepsilon ab \geq 4\varepsilon^2 a^2 + b^2, \tag{1.9}$$

par conséquence,

$$ab \geq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon},$$

Cela achève la démonstration. ■

Lemme 1.9

L'inégalité de Young affirme que pour tous a et b réels positifs ou nuls, et tous p et q réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *(sont conjugués), on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.10}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p=b^q$. *L'inégalité de Young est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique. Son nom vient de William Henry Young.*

Démonstration

Soit $I=[0,1]$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable ,telle que :

$$f(x)=\begin{cases} p\log a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ q\log b, & \frac{1}{p} \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

pour $a,b \geq 0$, et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et soit $\phi(t)=\exp(t)$ une fonction convexe, utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I f(x)dx\right) \leq \frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx, \tag{1.12}$$

et par conséquence, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(I)}\int_I \phi(f(x))dx &= \int_0^1 \exp f(x)dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{p}} \exp(p\log a)dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 \exp(q\log b)dx \\ &= \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \end{aligned} \tag{1.13}$$

telle que μ mesure de Lebesgue

donc $\mu(I)=1$ et

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I f(x)dx\right) &= \exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \\ &= \exp\left(\int_0^{\frac{1}{p}} p\log a\ dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 q\log b\ dx\right) \\ &= ab. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Utilisation (1.12) ,(1.13) et (1.14) pour conclure le résultat. ■

Lemme 1.10

Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$*(ou* $\mathbb{C}$*) et pour tous* $p,q \in]1,+\infty$ *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *on a :*

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p+\frac{1}{q}|b|^q.$$

1.2.5 L'inégalité de Minkowski

Théorème 1.4

Supposons que $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$, *Alors*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

et Si $0 \neq p < 1$, *Alors,*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \geq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.2.6 L'inégalité de Sobolev-Poincaré

Lemme 1.11

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *que l'on suppose borné , alors il existe une constante* $C_\Omega > 0$ *telle que, pour toute fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *on a :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.15}$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, *c'est-à-dire :*

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x)dx \leq c \int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx.$$

Démonstration

On peut écrire, pour $x \in [a, b]$,

$$u(x) = \int\limits_a^x u'(y)dy.$$

Alors,

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int\limits_a^x u'(y)dy\right)^2, \\ &\leq \int\limits_a^x (u'(y))^2 dy \int\limits_a^x dy, \end{aligned}$$

donc :

$$\Longrightarrow \int\limits_a^b u^2(x) \leq \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^x (u'(y))^2 dy \times (x-a)\right] dx \leq \|u'\|^2_{L^2_{(a.b)}} \times \int\limits_a^b (x-a)dx.$$

Cela implique :

$$\Longrightarrow \|u\|^2_{L^2_{(a.b)}} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|^2_{L^2_{(a.b)}} \Longrightarrow \|u\|_{L^2_{(a.b)}} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2_{(a.b)}}.$$

D'où

$$\|u\|_{L(\Omega)^2} \leq C\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

1.3 Théorie de semi-groupes

1.3.1 Quelques définitions

Définition 1.10

On dit que A opérateur, soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de norme associée $\|.\|$ et soit $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné.

Définition 1.11

On appelle l'application $S : [0, +\infty[\longrightarrow H$ semi-groupes fortement continu dans H s elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $S(0) = Id$.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$.

iii) $\forall x \in H$, *l'application* $S(.)x$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *dans* $H.i.e$

$\lim\limits_{0 \to 1} \|S(t)x - x\|_H = 0, \quad \forall x \in H.$

Dans la suite, on appelle une telle application semi-groupes de classe C_0 et on la note par C_0-semi-groupes.

Proposition 1.12

Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupes dans H, alors l'opérateur adjoint $(S^*(t))_{t \geq 0}$ est aussi semi-groupes de classe C_0 dans H.

1.3.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

Notation 1.1 *[17]*

Soient E et F deux e.v.n. On désigne par $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme

$$\|S\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|Sx\|.$$

On pose $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, F)$

Théorème 1.5 *(Banach-Steinhaus)[17]*

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que

(1) $\sup\limits_{i \in I} \|S_i x\| < \infty \ \forall x \in E$

Alors

(2) $\sup\limits_{i\in I} \|S_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty$.

Autrement dit, il existe une constante c telle que

$$\|S_i x\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E, \quad \forall i \in I.$$

Lemme 1.13

Soit $(S(t))$ *un* C_0*-semi-groupes alors*

$$\exists M \geq 1, \ \ \exists w \in \mathbb{R} \ \ tels \ \ que : \ \ \|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.16}$$

Démonstration

Considérons le compact $[0,1]$, comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue, alors l'application $t \longmapsto S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0,1]$ par cette application est compacte, et par conséquent

$$\exists M_x \ \ tel \ \ que : \|S(t)x\| \leq M_x, \ \ \forall t \in [0,1].$$

D'après le théorème de Banach-Steinhauss :

$$\exists M \ \ tel \ \ que : \|S(t)\| \leq M, \ \ \forall t \in [0,1].$$

On remarque que la constante $M \geq 1 (1 = \|S(0)\| \leq M)$.

Maintenant si $t \notin [0,1]$ on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|S(t)\| = \|(S(1^n)S(\theta)\| &\leq \|(S(1^n)\|\|S(\theta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq Me^{n\log M} \end{aligned}$$

On pose $\log M = w$, donc

$$\|S(t)\| \leq Me^{nw} \leq Me^{tw}.$$

■

Remarque 1.4

Si $(S(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupes fortement continu à l'origine vérifiant la majoration* (1.16)*, alors il est fortement continue.*

Définition 1.12
On dit que $S(t)$ est un semi-groupes borné si

$$\exists M \geq 0 \ \ tel \quad que \ \ \|S(t)\| \leq M, \qquad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.5
Si $M \leq 1$, $S(t)$ est dit de contraction.

Définition 1.13
On appelle générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tout opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{t\to 0^+} \tfrac{S(t)x - x}{t} \ \ existe \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \ \forall x \in D(A).$$

Parfois on note $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ pour $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Théorème 1.6 *[18]*
Si A est un générateur infinitésimal de semi-groupes $S(t)$, alors A est un opérateur fermé.

Proposition 1.14 *[18]*
Le domaine $D(A)$ d'un générateur infinitésimal A de semi-groupes $(S_A(t))$ est un espace vectoriel dense dans H.

Définition 1.14
On dit que A est dissipatif si

$$\forall x \in D(A), \ \ \langle Ax, x\rangle \leq 0$$

Définition 1.15
$\{e^{At}\}_{t\geq 0}$ est dit analytique si e^{At} admet une extension $S(\lambda)$ pour $\lambda \in \Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}, |arg(\lambda)| < \theta\}$ pour certain $\theta > 0$ tel que $\lambda \to S(\lambda)$ est analytique et

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\in\Delta_\theta\to 0} \|S(\lambda)z\| = 0, \ \forall z \in H, \\ S(\lambda+\mu) = S(\lambda)S(\mu), \ \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta, \end{cases}$$

ou de manière équivalente (voir le Théorème 5.2 dans le livre de Pazy [58], p.61-62), il existe une constante $K > 0$ tel que

$$Ae^{At} \leq Kt^{-1}, \ \forall t > 0.$$

Proposition 1.15 *[22]*

Pour un opérateur borné A sur un espace de Banach X, le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral

$$r(\mathcal{A}) := \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\},$$

est finie et satisfait $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$.

Définition 1.16 *[22]*

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors

$$T(\mathcal{A}) := \sup\left\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\}$$

est appelée la borne spectrale de $\mathcal{A}$.

Pour le générateur $\mathcal{A}$ d'un semi-groupe fortement continu $\tau = (S(t))_{t\geq 0}$, la borne spectrale $T(A)$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \omega_0(\tau) = \inf\left\{\omega \in \mathcal{R} \ \ il \ \ existe \ \ M_\omega \geq 1 \ \ tel \ \ que\|S(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \ \ \forall t \geq 0\right\}.$$

Définition 1.17 *[22]*

Pour la borne spectrale $T(A)$ de générateur A et pour la borne de croissance ω_0 du semi-groupe généré $(S(t))_{t\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned} -\infty \leq T(\mathcal{A}) \leq \omega_0 &= \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \log(r(S(t_0))) < \infty \end{aligned}$$

pour chaque $t_0 > 0$. En particulier, le rayon spectral de l'opérateur de semi-groupe $T(t)$ est donné par

$$r(S(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Corollaire 1.16 *[3]*

Soit $(S(t))$ un C_0-semi-groupes sur H de générateur infinitésimal $-A$. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, le système :

$$\begin{cases} u'(t) + \ \ Au(t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ \qquad\quad u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

admet une unique solution $u \in C^1([0, +\infty[; H) \bigcap C([0, +\infty[; D(A))$ donne par

$$u(t) = S(t)u_0. \tag{1.18}$$

1.4 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.7 ***(Hille-Yosida)****[3]*
Un opérateur linéaire (non borné) $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $S(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si :

1. *$\mathcal{A}$ est fermé et $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*
2. *L'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}^+$ contient et pour tout $\lambda > 0$,*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque 1.6 *[3]*
Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $S(t)$. L'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$ contient toujours le demi-plan ouvert droit, i.e, $\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$ et pour λ

$$\|R(\lambda, \lambda)\| \geq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 1.18 *[17]*
Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné.
On dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in D(\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ est maximal $Im(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \quad tel \quad que \quad u + \mathcal{A}u = f.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif i.e $\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{A})$.

1.4.1 Résolution d'un problème d'évolution

Étant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u & = 0 \quad sur \quad T \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) & = u_0(x), \quad x \in \omega \end{cases} \tag{1.19}$$

Théorème 1.8 ***(Hille-Yosida)*** *[17]*

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction unique

$$u \in C^1\Big([0, +\infty[; H\Big) \cap C\Big([0, +\infty[; D(\mathcal{A})\Big)$$

solution du (1.19)*. De plus on a*

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.7 *[17]*

L'intérêt principal du théorème présidant réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.19) *on se ramène à vérifier que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l' équation stationnaire $u + \lambda \mathcal{A}u = f$.*

1.4.2 Equations avec second membre non linéaires.

Considérons le problème ,soit $f \in L^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \mathcal{A}u(t) & = f(t) \quad sur \quad [0, T] \\ u(x, 0) & = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{1.20}$$

On a le résultat suivant

Théorème 1.9

On suppose que $\mathcal{A}$ est m-dissipatif et E espace de Banach. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ et tout $f \in C^1([0, T]; E)$ il existe une fonction

$$u \in C^1\Big([0, T]; E\Big) \cap C\Big([0, T]; D(\mathcal{A})\Big)$$

unique solution de (1.20)*. De plus u est donnée par la formule*

$$u(t) = S_{\mathcal{A}}(t)u_0 + \int_0^t S_{\mathcal{A}}(t - s)f(s)ds, \tag{1.21}$$

où $S_{\mathcal{A}}(t)$ désigne le semi-groupe [17].

Démonstration

Grâce à la linéarité on prend $u_0(x) = 0$.

Soit $v(t) = \int_0^t S_{\mathcal{A}}(t - s)f(s)ds.$

Écrivons f sous la forme $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, E)$ et $f_2 \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+}, D(\mathcal{A}))$. On va étudier

$$v_1(t) = \int_0^t S_{\mathcal{A}}(t - s)f_1(s)ds = \int_0^t S_{\mathcal{A}}(s)f_1(t - s)ds$$

$$(t, s) \longrightarrow S_{\mathcal{A}}(t - s)f_1(s)$$

$$[0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow E \quad est \quad continue$$

Donc $v_1 \in C^0([0,T],E)$.

$$(t,s) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s)$$
$$[0,1]\times[0,1] \longrightarrow E \quad est \quad continue$$

Donc $v_1 \in C^1([0,T],E)$.

D'où

$$v_1'(t) = \int_0^t S_{\mathcal{A}}(s) f_1'(t-s)ds + S_{\mathcal{A}} f_1(0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{S_{\mathcal{A}}-I}{\sigma} v_1(t) &= \frac{1}{\sigma}\left\{\int_0^t S_{\mathcal{A}}(t+\sigma-s) f_1(s)ds - \int_0^t S_{\mathcal{A}}(t-s) f_1(s)ds\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma}\left\{\int_0^t S_{\mathcal{A}}(\sigma+s) f_1(t-s)ds - \int_0^t S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s)ds\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma}\left\{\int_0^t S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s+\sigma)ds - \int_0^t S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s)ds\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma}\int_0^t S_{\mathcal{A}}(s)\left(f_1(t-s+\sigma) - f_1(t-s)\right)ds \\
&= \frac{1}{\sigma}\int_t^{t+\sigma} S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s+\sigma)ds - \frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma} S_{\mathcal{A}}(s) f_1(t-s)ds
\end{aligned}$$

quand σ tend vers 0, la quantité précédente tend vers $\int_0^t S_{\mathcal{A}}(s) f_1'(t-s)ds + S_{\mathcal{A}}(t) f_1(0) - f_1(t) = v_1'(t) - f_1(t)$. Ce qui implique que $v_1(t) \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}v_1(t) = v_1'(t) - f_1(t)$.

En suivant le même schéma, on montre la même propriété pour v_2 qui découle de f_2 ∎

On retiendra que si $f \in L^1(0,T;E)$ la formule (1.21) — qui a toujours un sens — peut être considérée comme une solution généralisée de (1.20).

Dans les applications, on rencontre de nombreuses équations « semi-linéaires » du type

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = F(u),$$

où F est un opérateur non linéaire .

1.5 Théorème de Lumer-Phillips

Proposition 1.17

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un opérateur dissipatif, Alors :

1. *$\lambda I - A$ est injectif pour tout $\lambda > 0$, et on a*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|, \quad \forall y \in Im(\lambda I - A). \tag{1.22}$$

2. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ soit surjectif si et seulement si, $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.*
3. *A est fermé si et seulement $Im(\lambda_0 I - A)$ est fermé pour un certain $\lambda_0 > 0$, et donc $Im(\lambda I - A)$ est fermé pour tout $\lambda > 0$.*

Théorème 1.10 ***(Lumer-Phillips)***
Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X, alors $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $f \in \mathcal{F}(x)$ on a $\mathcal{R}e\langle f, Ax\rangle \leq 0$.*

Corollaire 1.18
Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X. Si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution de problème

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution d'un système de type Timoshenko avec force extérieure.

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \mu_1\psi_t + \mu_2\psi_t(x, t-\tau) + f(\psi) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$. quand $\mu_1 = \mu_2 = f = 0$, ce système a été proposé par Timoshenko [28] comme modèle pour les vibrations d'un mince faisceau élastique de longueur.Ici, $\varphi = \varphi(x,t)$ désigne le déplacement transversal du faisceau $\psi = \psi(x,t)$ indique l'angle de rotation du filament du faisceau et ρ_1, ρ_2, k, b sont des constantes positives liées aux propriétés physiques de la poutre. Dans le système, $\mu_1\psi_t$ représente un amortissement de friction et $f(\psi)$ est une force extérieure. Le retard de temps est donné par $\mu_2\psi_t(x, t-\tau)$, où μ_1, μ_2, τ sont des constants positif.

Au système (2.1) nous ajoutons les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \\ \psi_t(x, t-\tau) = f_0(x, t-\tau), \quad t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{2.2}$$

Où f_0 est prescrit, et les conditions limites de Dirichlet

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Nous observons que notre problème est défini dans un contexte où : (a) l'amortissement est défini seulement sur l'équation pour l'angle de rotation ; (b) la présence d'un retard de temps ; (c) la stabilité exponentielle dans un forçage non linéaire.

2.2 Préliminaire et résultat principaux

Nous utilisons Lebesgue standard et des espaces Sobolev
$L^q(0,1), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad et \quad H_0^1(0,1).$

Dans le cas $q = 2$ nous écrivons $\|u\|$ au lieu $\|u\|_{L^2}$.

Maintenant nous donnons quelques hypothèses sur la force extérieure $f(\psi(x,t))$. Nous supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant.

$$|f(\psi^2) - f(\psi^1)| \leq k_0(|\psi^1|^\theta + |\psi^2|^\theta)|\psi^1 - \psi^2| \quad pour \quad tous \quad \psi^1, \psi^2 \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

où $k_0 > 0, \theta > 0$. En plus nous le supposons

$$0 \leq \hat{f}(\psi) \leq f(\psi)\psi \quad pour \quad tous \quad \psi \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

avec $\hat{f}(z) = \int\limits_0^z f(s)ds$.

Afin de traiter le retard de rétroaction (feedback), motivé par [6, 25, 26], nous définissons la nouvelle variable dépendante suivante :

$$z(x,\rho,t) = \psi_t(x, t-\tau\rho), \quad x \in (0,1), \rho \in (0,1), t > 0. \tag{2.6}$$

IL sont suit

$$z_t(x,\rho,t) = \frac{\partial\psi_t(x,t-\tau\rho)}{\partial(t-\tau\rho)} \times \frac{\partial(t-\tau\rho)}{\partial t} = \frac{\partial\psi_t(x,t-\tau\rho)}{\partial(t-\tau\rho)}$$
$$z_\rho(x,\rho,t) = \frac{\partial\psi_t(x,t-\tau\rho)}{\partial(t-\tau\rho)} \times \frac{\partial(t-\tau\rho)}{\partial\rho} = -\tau\frac{\partial\psi_t(x,t-\tau\rho)}{\partial(t-\tau\rho)}$$

Donc il est facile de vérifier

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad dans \quad (0,1) \times (0,1) \times (0,\infty). \tag{2.7}$$

Ainsi, l'équation (2.1) est transformée à

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) - k(\varphi_x + \psi)_x(x,t) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + k(\varphi_x + \psi)(x,t) + \mu_1\psi_t(x,t) \\ +\mu_2 z(x,1,t) + f(\psi(x,t)) = 0, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

avec $x \in (0,1), \rho \in (0,1)$ et $t > 0$, les conditions initiales et les condition aux limite qui marque sont

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \quad x \in (0,1) \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\tau), \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ z(x,0,t) = \psi_t(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Tout d'abord, nous montrerons l'existence et l'unicité du problème (2.8)-(2.9).

nous poussent deux nouvelles variables dépendantes $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$, alors le problème (2.8)-(2.9) s'écrit

$$\begin{cases} u = \varphi_t \\ \varphi_{tt} = \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ v = \psi_t \\ \psi_{tt} = \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}\psi_t - \frac{\mu_2}{\rho_2}z(x,1,t) \\ z_t = -\frac{-1}{\tau}z_\rho(x,\rho,t) \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F(U), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, f_0(.,-\tau))^T, \end{cases} \tag{2.10}$$

où $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T$, et $\mathcal{A}$ est l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2} & -\frac{\mu_1}{\rho_2} & -\frac{\mu_2}{\rho_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau}\partial_\rho \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) \\ v \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}v - \frac{\mu_2}{\rho_2}z(.,1) \\ -\frac{1}{\tau}z_\rho \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_2}f(\psi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est alors

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(\varphi, u, \psi, v, z)^T \quad \in H : v = z(.,0), \quad dans \quad (0,1)\right\}, \tag{2.11}$$

où

$$H = (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1) \times (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1; H_0^1(0,1)).$$

Nous définissons l'espace d'énergie $\mathscr{H}$ par

$$\mathscr{H} := H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2((0,1) \times (0,1)). \tag{2.12}$$

Pour $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T$, $\overline{U} = (\overline{\varphi}, \overline{u}, \overline{\psi}, \overline{v}, \overline{z})^T$ et pour ξ une satisfaction constante positive

$$\tau\mu_2 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2), \tag{2.13}$$

nous équipons $\mathscr{H}$ avec le produit scalaire

$$\langle U, \overline{U}\rangle_{\mathscr{H}} = \int_0^1 [\rho_1 u\overline{u} + \rho_2 v\overline{v} + k(\varphi_x + \psi)(\overline{\varphi_x} + \overline{\psi}) + b\psi_x\overline{\psi_x}]dx + \xi \int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\overline{z}(x,\rho)d\rho dx. \tag{2.14}$$

Maintenant nous donnons le résultat d'existence et d'unicité des solutions du problème (2.10)

Théorème 2.1
Supposons que (2.4)-(2.5) *et* $\mu_2 \leq \mu_1$ *, alors nous avons les résultats suivants.*

(i) Si $U_0 \in \mathscr{H}$*, alors problème* (2.10) *a une solution faible (mild) unique* $U \in C([0,\infty), \mathscr{H})$ *avec* $U(0) = U_0$.

(ii) Si U_1 *et* U_2 *sont faible (mild) solutions doux de problème* (2.10) *alors il existe un positif constante de* $C_0 = C(U_1(0), U_2(0))$ *telle que*

$$\|U_1(t) - U_2(t)\|_{\mathscr{H}} \leq e^{C_0 T}\|U_1(0) - U_2(0)\|_{\mathscr{H}} \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.15}$$

(iii) Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$*, alors la solution faible (mild) ci-dessus est une solution forte.*

2.3 Existence et unicité de la solution de problème

L'énergie fonctionnelle des solutions du problème (2.8)-(2.9) est défini par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + b\psi_x^2]dx + \frac{\xi}{2}\int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx + \int_0^1 \hat{f}(\psi(t))dx. \tag{2.16}$$

Dans cette section, nous étudierons l'existence et l'unicité de solutions au problème (2.8)-(2.9) de compléter la preuve du théorème 2.1.

Lemme 2.1

L'énergie $E(t)$ définie par (2.16) est une fonction non-croissante le long de la solution trajectoires, c'est-à-dire, il existe une positive constante c telle que pour tout $t \geq 0$,

$$E'(t) \leq -C\int_0^1 \psi_t^2(x,t)dx - C\int_0^1 z^2(x,1,t)dx \leq 0, \tag{2.17}$$

et il existe deux constantes positives δ_0 et C_1, indépendante des données initiales en $\mathscr{H}$, tel que pour tout $t \geq 0$,

$$E(t) \geq \delta_0 \left(\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho)d\rho dx\right) - C_1. \tag{2.18}$$

Démonstration

En multipliant la première équation en (2.8) par φ_t ,et en intégrant le résultat sur (0,1) par rapport à x on trouve :

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - k\int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi_x)dx = 0$$

on intégrant par parties, on obtient :

$$\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - k[\varphi_t(\varphi_x+\psi)]_0^1 + k\int_0^1 \varphi_{tx}(\varphi_x+\psi)dx = 0.$$

Les conditions aux bords permettent d'écrire la dernière égalité sous la forme suivant :

$$\rho_1\frac{d}{2dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1 \varphi_{tx}(\varphi_x+\psi)dx = 0 \tag{2.19}$$

En multipliant la deuxième équation dans (2.8) par ψ_t, et en intégrant sur $(0,1)$ par rapport à x on trouve :

$$\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - b\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)\psi_t dx + \mu_1\int_0^1 \psi_t^2 dx + \mu_2\int_0^1 z\psi_t dx + \int_0^1 f(\psi)\psi_t dx = 0,$$

et grâce a la formule d'intégration par partie avec les conditions au bord, on obtient.

$$\rho_2\frac{d}{2dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx - b[\psi_x\psi_t]_0^1 + b\frac{d}{2dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)dx + \mu_1\int_0^1 \psi_t^2 dx + \mu_2\int_0^1 z\psi_t dx + \int_0^1 f(\psi)\psi_t dx. \tag{2.20}$$

En additionnant (2.19) et (2.20), on trouve :

$$\rho_1 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x + \psi) dx + k \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx$$
$$+ \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi_t dx = 0$$

$\Longrightarrow$
$\rho_1 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \frac{d}{2dt} \int_0^1 \left[\varphi_x(\varphi_x + \psi) + \psi(\varphi_x + \psi)\right] dx$
$+ \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi_t dx = 0$
$\Longrightarrow$
$\rho_1 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_2 \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \frac{d}{2dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \frac{d}{2dt} \int_0^1 \left[\varphi_x^2 + 2\psi\varphi_x + \psi^2\right] dx$
$+ \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi_t dx = 0$
alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + b\psi_x^2\right] dx\right) = -\mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dt - \mu_2 \int_0^1 \psi_t z(x,1,t) dx.$$

D'après la condition (2.13), on observe que :

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} < 0, \qquad \frac{\mu_2}{2} < \mu_2. \tag{2.21}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + b\psi_x^2\right] dx\right) \leq (-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^2 z^2(x,1,t) dx. \tag{2.22}$$

Nous multiplions la troisième équation en (2.8) par $\frac{\xi}{\tau}z$ et en intégrer le résultat sur $(0,1)\times(0,1)$ par rapport à ρ et x, respectivement, pour obtenir

$$\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 \tau z_t(x,\rho,t)z\ d\rho dx + \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z_\rho(x,\rho,t)z\ d\rho\ dx = 0$$

$$\xi\int_0^1\int_0^1 z_t(x,\rho,t)z\ d\rho\ dx = -\frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z_\rho(x,\rho,t)z\ d\rho\ dx$$

$$\frac{\xi d}{2dt}\int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho\ dx = -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho\ dx$$

$$= -\frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 (z^2(x,0,t)-z^2(x,1,t))dx.$$

Qui,avec (2.22), (2.13) et le fait $\frac{d}{dt}\hat{f}(\psi) = f(\psi)\psi_t \quad pour \quad \psi\in\mathbb{R}$, nous donne (2.17).

Il est facile d'obtenir (2.18) à l'aide de (2.5) avec $\delta_0 = \min\{\frac{1}{2},\frac{\xi}{2}\}$. D'où

$$E(t) \geq \delta_0(\int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 |\varphi_x+\psi|^2 dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1\int_0^1 z^2 d\rho\ dx) - C_1.$$

■

Lemme 2.2

L'opérateur $\mathcal{A}$ défini en (2.10) *est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-group en $\mathscr{H}$.*

Démonstration

Il résulte de (2.10) que pour l'ensemble $U(t)\in D(\mathcal{A})$.

Il suffit de prouver que $\mathcal{A}$ est dissipative, pour cela on montrons que.

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq -C\int_0^2 \psi_t^2(x,t)dx - C\int_0^1 z^2(x,1,t)dx \leq 0$$

On a

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x) \\ v \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}v - \frac{\mu_2}{\rho_2}z(.,1) \\ -\frac{1}{\tau}z_\rho \end{pmatrix}$$

alors,

$$\langle \mathcal{A}U,U\rangle_{\mathscr{H}} = \int_0^1 \Big\{\rho_1[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x)u] + \rho_2[\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}v - \frac{\mu_2}{\rho_2}z(x,1)]v$$

$$+k(u_x+v)(\varphi_x+\psi) + bv_x\psi_x\}\,dx + \xi\int_0^1\int_0^1 -\frac{1}{\tau}z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)d\rho\ dx$$

$$= \int_0^1 k\varphi_{xx}u\ dx + \int_0^1 k\psi_x u\ dx + b\int_0^1 \psi_{xx}v\ dx - k\int_0^1 \varphi_x v\ dx - k\int_0^1 \psi v\ dx - \mu_1\int_0^1 v^2 dx$$

$$-\mu_2\int_0^1 z(x,1)v\ dx + k\int_0^1 u_x\varphi_x dx + k\int_0^1 u_x\psi\ dx + \int_0^1 v\psi\ dx + k\int_0^1 v\varphi_x\ dx + b\int_0^1 v_x\psi_x$$

$$+\xi\int_0^1\int_0^1 -\frac{1}{\tau}z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho\ dx$$

$$= k[\varphi_x u]_0^1 - k\int_0^1 \varphi_x u_x dx + k\int_0^1 \psi_x u\ dx + b[\psi_x v]_0^1 - b\int_0^1 \psi_x v_x dx - k\int_0^1 \varphi_x v\ dx$$

$$-k\int_0^1 \psi v\ dx - \mu_1\int_0^1 v^2 dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1)v\ dx + k\int_0^1 u_x\varphi_x dx + k\int_0^1 u_x\psi dx$$

$$+k\int_0^1 \varphi_x v\ dx + \int_0^1 \psi v\ dx + b\int_0^1 v_x\psi_x dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho\ dx$$

$$= -\mu_1\int_0^1 v^2 dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1)v\ dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho\ dx + k[\varphi_x u]_0^1$$

$$+b[\psi_x v]_0^1 + k[\psi u]_0^1$$

$$= -\mu_1\int_0^1 v^2 dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1)v dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx$$

$$\langle \mathcal{A}U,U\rangle_{\mathscr{H}} = -\mu_1\int_0^1 v^2(x)dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1)v(x)\ dx - \frac{\xi}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho\ dx \tag{2.23}$$

on a :

$$\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho\ dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}z^2(x,\rho)d\rho\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[z^2(x,1) - z^2(x,0)\right]dx.$$

Alors (2.23) devient :

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\mu_1 \int_0^1 v^2(x)dx - \mu_2 \int_0^1 z(x,1)v(x)dx - \frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)dx + \frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,0)dx,$$

on a $z(x,\rho,t) = \psi_t(x, t-\tau\rho) = v(x)$

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\mu_1 \int_0^1 v^2(x)dx - \mu_2 \int_0^1 z(x,1)v(x)dx - \frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)dx + \frac{\xi}{2\tau}\int_0^1 (v^2x)dx$$

En utilisant l'inégalité de Young on obtient :

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq (-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau})\int_0^1 v^2(x)dx + (\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau})\int_0^1 z^2(x,1)dx$$

d'après la condition suivant

$$\tau\mu_2 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2),$$

on observe que

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} < 0 \quad et \quad \frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} < 0.$$

Donc $\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0$ alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipative.

D'autre part, il reste a montrer que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathscr{H}$ est surjectif pour $\lambda > 0$, pour cette proposition, nous prenons $U' = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathscr{H}$, et cherchons un solution $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$ au problème suivant :

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = U'.$$

Nous avons

$$\begin{cases} \lambda\varphi - u = f_1, \\ \lambda u - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2, \\ \psi - v = f_3, \\ \lambda v - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{b}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\mu_1}{\rho_2}v + \frac{\mu_2}{\rho_2}z(.,1) = f_4, \\ \lambda z + \frac{1}{\tau}z_\rho = f_5. \end{cases} \tag{2.24}$$

Supposons que nous ayons trouvé φ et ψ, donc le première et la troisième equation dans (2.24) donnée

$$\begin{cases} u = \lambda\varphi - f_1 \\ v = \lambda\psi - f_3 \end{cases} \tag{2.25}$$

Il est clair que $u \in H_0^1(0,1)$ et $v \in H_0^1(0,1)$. En outre, par (2.24) nous pouvons trouver z comme

$$z(x,0) = v(x) \quad , \quad pour \quad x \in (0,1). \tag{2.26}$$

Après la même approche que dans [25], en utilisant la dernière équation dans (2.24) on obtient,

$$z(x,\rho) = v(x)e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau}\int_0^\rho f_5(x,\sigma)e^{\lambda\sigma\tau}d\sigma. \tag{2.27}$$

De (2.25) ,on obtient

$$z(x,\rho) = \lambda\psi(x)e^{-\lambda\rho\tau} - f_3e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau}\int_0^1 f_5(x,\sigma)e^{\lambda\sigma\tau}d\sigma. \tag{2.28}$$

En utilisant (2.24) et (2.25) les fonctions φ et ψ satisfaisant le système suivant .

$$\begin{cases} \lambda^2\varphi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 + \lambda f_1, \\ \lambda^2\psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\mu_1}{\rho_2}v + \frac{\mu_2}{\rho_2}z(.,1) = f_4 + \lambda f_3. \end{cases} \tag{2.29}$$

La résolution de système (2.29) est équivalant pour trouver $(\varphi,\psi) \in H^2(0.1)\cap H_0^1(0,1)\times H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ tel que

$$\begin{cases} \int_0^1(\rho_1\lambda^2\varphi w + k(\varphi_x+\psi)w_x)dx = \int_0^1 \rho_1(f_2+\lambda f_1)wdx, \\ \int_0^1(\rho_2\lambda^2\psi\chi\ dx + b\psi_x\chi_x + k(\varphi_x+\psi)\chi + \mu_1 v\chi + \mu_2 z(.,1)\chi)dx = \int_0^1 \rho_2(f_4+\lambda f_3)\chi\ dx \end{cases} \tag{2.30}$$

Pour tout $(w,\chi) \in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$ de (2.27)

on a

$$z(x,1) = \lambda\psi(x)e^{-\lambda\tau} + z_0(x)$$

pour $x \in (0,1)$ et

$$z_0(x) = -f_3e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 f_5(x,\sigma)e^{\lambda\sigma\tau}d\sigma. \tag{2.31}$$

C'est clair que de la formule ci-dessus que z_0 dépend seulement de $f_i, i = 3,5$. Par conséquent, le problème (2.30) est équivalant aux problème

$$\zeta((\varphi,\psi),(w,\chi)) = l(w,\chi), \tag{2.32}$$

où la forme bilinéaire de $\zeta : [H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)]^2 \to \mathbb{R}$ et la forme linéaire de $l : H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\to\mathbb{R}$ sont définis par

$$\zeta((\varphi,\psi),(w,\chi)) = \int_0^1(\rho_1\lambda\varphi w + k(\varphi_x+\psi)(w_x+\chi))dx + \int_0^1(\rho_2\lambda\psi\chi + b\psi_x\chi_x)dx + \int_0^1(\mu_1+\mu_2e^{-\lambda\tau})\lambda\psi\chi dx$$

et

$$l(w,\chi) = \int_0^1(\mu_1f_3\chi - \mu_2z_0(x)\chi)dx + \int_0^1\rho_1(f_2+\lambda f_1)wdx + \int_0^1\rho_2(f_4+\lambda f_3)\chi\ dx, \tag{2.33}$$

avec $z_0(x)$ satisfait l'équation dans (2.31) .

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, il suffit de vérifié la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire ζ et la continuité de la forme linéaire l.

1. La continuité de ζ

   en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
|\zeta((\varphi,\psi),(\mathrm{w},\chi))| &= \int_0^1 (\rho_1\lambda^2\varphi \mathrm{w} + k(\varphi_x+\psi)(\mathrm{w}_x+\chi))dx + \int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x)dx \\
&+ \int_0^1 (\mu_1+\mu_2 e^{-\lambda\tau})\lambda\psi\chi dx \\
&\leq \max\left(\lambda^2\rho_1, k, \lambda^2\rho_2, b, \lambda(\mu_1+\mu_2e^{-\lambda\tau})\right)(\|\varphi\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2})(\|\mathrm{w}\|_{L^2}+\|\chi\|_{L^2}) \\
&\leq C_1\left(\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1}\right)\left(\|\mathrm{w}\|_{H_0^1}+\|\chi\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq C_1|\,(\varphi,\psi)\,|_{H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)}|\,(\mathrm{w},\chi)\,|_{H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

   Donc ζ continue.

2. la coercivité de ζ

$$\zeta((\varphi,\psi),(\mathrm{w},\chi)) = \int_0^1 (\rho_1\lambda\varphi \mathrm{w}+k(\varphi_x+\psi)(\mathrm{w}_x+\chi))dx+\int_0^1(\rho_2\lambda\psi\chi+b\psi_x\chi_x)dx+\int_0^1(\mu_1+\mu_2e^{-\lambda\tau})\lambda\psi\chi dx.$$

   D'après l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \varphi_x\psi dx &\leq \int_0^1 |\varphi_x\psi|dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx.
\end{aligned}$$

   Donc

$$\int_0^1 \varphi_x\psi dx \geq \frac{-1}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{-1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx.$$

   On a

$$\begin{aligned}
\zeta((\varphi,\psi),(\mathrm{w},\chi)) &\geq \left\{\int_0^1 (\rho_1\lambda\varphi^2 + \frac{k}{2}\varphi_x^2 + b\psi_x^2 + (\rho_2\lambda^2 + \frac{k}{2} + (\mu_1+\mu_2e^{-\lambda\tau})\lambda)\psi^2\right\} \\
&\geq \min\left(\rho_1\lambda, \frac{k}{2}, b, (\rho_2\lambda^2+\frac{k}{2}+(\mu_1+\mu_2e^{-\lambda\tau})\lambda)\right)\left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2+\|\psi\|_{H_0^1}^2\right) \\
&\geq C_2|\,(\varphi,\psi)\,|^2_{H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

   Donc ζ est coercive.

3. la continuité de l.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
|l(\mathrm{w},\chi)| &= \int_0^1 (\mu_1 f_3\chi - \mu_2 z_0(x)\chi)dx + \int_0^1 \rho_1(f_2+\lambda f_1)\mathrm{w}dx + \int_0^1 \rho_2(f_4+\lambda f_3)\chi\, dx \\
&\leq \|\mu_1 f_3 - \mu_2 z_0(x)\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + \|\rho_1(f_2+\lambda f_1)\|_{L^2}\|\mathrm{w}\|_{L^2} + \|\rho_2(f_4+\lambda f_3)\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} \\
&\leq \max\left(\|\mu_1 f_3 - \mu_2 z_0(x)\|_{L^2} + \|\rho_1(f_2+\lambda f_1)\|_{L^2} + \|\rho_2(f_4+\lambda f_3)\|_{L^2}\right)\left(\|\chi\|_{L^2} + \|\mathrm{w}\|_{L^2}\right) \\
&\leq C_3\left(\|\mathrm{w}\|_{H_0^1} + \|\chi\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq C_3|(\mathrm{w},\chi)|_{H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

Donc l continue.

Par conséquent en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous en déduisons que pour tous $(\mathrm{w},\chi) \in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$, le problème (2.32) admet une solution unique $(\varphi,\psi) \in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$.En appliquant la régularité , il résulte de (2.30) qui $(\varphi,\psi) \in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$.
Donc, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjective pour tous λ. Par conséquent, le résultat du théorème de Hille-Yosid. ■

Lemme 2.3
L'opérateur F définie dans (2.10) est globalement lipschitzienne en $\mathscr{H}$.

Démonstration
Soit $U_1 = (\varphi^1, u^1, \psi^1, v^1, z^1)$ et $U_2 = (\varphi^2, u^2, \psi^2, v^2, z^2)$, puis nous avons

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathscr{H}} \leq \|f(\psi^1) - f(\psi^2)\|_{L^2}.$$

En utilisant (2.4), les inégalités de Hölder et de Poincaré, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
\|f(\psi^1) - f(\psi^2)\|_{L^2} &\leq (\|\psi^1\|_{2\theta}^{\theta} + \|\psi^2\|_{2\theta}^{\theta})\|\psi^1 - \psi^2\| \\
&\leq C_1\|\psi_x^1 - \psi_x^2\|,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathscr{H}} \leq C_1\|U_1 - U_2\|_{\mathscr{H}}.$$

Puis l'opérateur F est localement lipschitzienne en H. La preuve est donc terminée. ■

Démonstration de théorème 2.1 :
Ils résultent des lemmes 2.2-2.3 que le problème de Cauchy est une solution faible (mild) locale unique

$$U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}F(U(s))ds \tag{2.34}$$

définie dans un intervalle maximal $(0, t_{\max})$.
Si $t_{\max} < \infty$, puis

$$\lim_{t \to \infty} \|U(t)\|_{\mathscr{H}} = +\infty \tag{2.35}$$

Soit $U(t)$ une solution faible (mild) avec $U_0 \in D(\mathcal{A})$.En utilisant le théorème 6.1.5 dans Pazy [3], nous concluons que c'est une solution forte. Il en découle (2.18) que pour tout $t \geq 0$,

$$\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \frac{1}{\delta_0}(E(0) + C_1),$$

Qui, par la densité, détient des solutions douces. Puis il y a une contradiction avec (2.35) et par conséquent $t_{\max} = \infty$, autrement dit, la solution est globale. Preuve du théorème 2.1 de (i) est terminée.

On obtenons des inégalités (2.15) à l'aide (2.34), le comportement de Lipschitz local de F et Inégalité de Gronwall. Ensuite, nous pouvons obtenir la dépendance continue des données initiales des solutions faibles (mild). Cela prouve le point (ii) du théorème 2.1.

En utilisant le théorème 6.1.5 dans Pazy [3] (voir aussi [23]), nous savons que toutes les solutions douces avec les données initiales dans $D(\mathcal{A})$ sont fortes. Puis la preuve de théorème 2.1 est donc terminée. ■

Chapitre 3

Stabilité exponentielle

3.1 Introduction

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feed back), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e. :

$$E(t) \to 0, \quad lorsque \quad t \to +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e. :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans les quelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0,$$

où C et α sont des constantes positives. Il y a d'autre degrés de stabilité qu'on a pas citer.

3.2 Stabilité exponentielle

Dans cette section on étudie la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions lorsque le temps tend vers l'infini de l'équation des ondes semi linéaire amorties avec des coefficients variables et des conditions aux limite dynamiques.

Théorème 3.1

Supposons que (2.4)-(2.5) *soit vérifiant et* $\mu_2 < \mu_1$, *Supposons que* $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ *détient également. Alors, en ce qui concerne les solutions faible (mild), il existe* $C > 0$ *et* $\eta > 0$ *tel que*

$$E(t) \leq Ce^{-\eta t}, \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Dans ce chapitre, nous allons prouver le théorème 3.1, qui sera divisé en les lemmes suivants

Lemme 3.1

Soient $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ *la solution du problème* (2.8)-(2.9). *La fonctionnelle* I_1 *définie par*

$$I_1 = -\int_0^1 (\rho_1 \varphi\varphi_t + \rho_2 \psi\psi_t)dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx \tag{3.2}$$

qui satisfait pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_1(t) \quad \leq \quad & -\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2)dx + k\int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + (b + C_1 + \varepsilon)\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + \frac{\mu_2^2}{4\lambda_1\varepsilon}\int_0^1 z^2(x,1,t)dx, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où μ_2 *c et b sont des constants positives ci-après* $\lambda_1 > 0$ *est la première valeur propre dans* $H_0^1(0,1)$.

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= -\int_0^1 (\rho_1\varphi_t\varphi_t + \rho_1\varphi\varphi_{tt} + \rho_2\psi_t\psi_t + \rho_2\psi\psi_{tt})dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 2\psi\psi_t dx \\ &= -\int_0^1 (\rho_1\varphi_{tt}\varphi + \rho_2\psi_{tt}\psi)dx - \int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2)dx - \mu_1\int_0^1 \psi\psi_t dx. \end{aligned}$$

D'après la première et la deuxième équation dans (2.8) on a

$$\begin{cases} \varphi_{tt}(x,t) = \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x(x,t) \\ \psi_{tt}(x,t) = \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi)(x,t) - \frac{\mu_1}{\rho_2}\psi_t(x,t) - \frac{\mu_2}{\rho_2}z(x,1,t) - \frac{1}{\rho_2}f(\psi(x,t)) \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \rho_1 \left(\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x\right) \varphi \, dx \\ &\quad - \int_0^1 \rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}\psi_t - \frac{\mu_2}{\rho_2} z(x,1,t) - \frac{1}{\rho_2} f(\psi)\right) \psi \, dx\end{aligned}$$

on intégrons par partes

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \varphi \, dx - b \int_0^1 \psi_{xx}\psi \, dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi \, dx \\ &\quad + \mu_1 \int_0^1 \psi_t \psi \, dx + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi \, dx + \int_0^1 f(\psi)\psi \, dx - \mu_1 \int_0^1 \psi_t \psi \, dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx - k \left[(\varphi_x + \psi)\varphi\right]_0^1 + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\varphi_x \, dx - b \left[\psi_x \psi\right]_0^1 \\ &\quad + b \int_0^1 \psi_x \psi_x \, dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi \, dx + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi \, dx + \int_0^1 f(\psi)\psi \, dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 \, dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \, dx + k \int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 \, dx + b \int_0^1 \psi_x^2 \, dx \\ &\quad + \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi \, dx + \int_0^1 f(\psi)\psi \, dx. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |z(x,1,t)\psi| \, dx &\leq \varepsilon\lambda_1 \int_0^1 \psi^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon\lambda_1} \int_0^1 z^2(x,1,t) \, dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon\lambda_1} \int_0^1 z^2(x,1,t) \, dx, \qquad (3.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(\psi)\psi| \, dx &\leq \int_0^1 |\psi|^\theta |\psi||\psi| \, dx \leq \|\psi\|_{2(\theta+1)}^\theta \|\psi\|_{2(\theta+1)} \|\psi\| \\ &\leq C_1 \int_0^1 \psi_x^2 \, dx, \qquad (3.6)\end{aligned}$$

que,ensemble avec les équations (3.4)-(3.5),nous donne l'équation (3.3).La preuve est maintenant terminée. ■

Lemme 3.2

Soient $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ *la solution du problème* (2.8)-(2.9). *La fonctionnelle* I_2 *définie par*

$$I_2(t) = \int_0^1 (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \psi_t g)dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx, \tag{3.7}$$

où g *est la solution de*

$$-g_{xx} = \psi_x, \qquad g|_{x=0,1} = 0. \tag{3.8}$$

Alors le fonctionnel I_2 *est satisfaisant, pour chacun* $\eta, \tilde{\eta} > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(t) \quad &\leq \quad (\mu_2 \eta - b \quad) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\rho_2}{4\tilde{\eta}}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{\lambda_1} \tilde{\eta} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &+ \frac{\mu_2}{4\eta\lambda_1} \int_0^1 z^2(x,1,t)dx - \int_0^1 \hat{f}(\psi)dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration

Nous savons d'après l'équation (2.8) et on dérivons I_2,

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} \quad &= \quad \int_0^1 (\rho_2(\psi_t\psi_t + \psi_{tt}\psi) + \rho_1(\varphi_{tt})g + \varphi_t g_t) \ dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 2\psi\psi_t \ dx \\ &= \int_0^1 \rho_2 \psi_t^2 \ dx + \int_0^1 \rho_2 \psi_{tt}\psi \ dx + \int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} g \ dx + \int_0^1 \rho_1 \varphi_t g_t \ dx + \mu_1 \int_0^1 \psi_t \psi \ dx \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \ dx + \rho_2 \int_0^1 \left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}\psi_t - \frac{\mu_2}{\rho_2} z(x,1,t) - \frac{1}{\rho_2} f(\psi) \right) \psi \ dx \\ &+ \rho_1 \int_0^1 \left(\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \right) g \ dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t g_t \ dx + \mu_1 \int_0^1 \psi\psi_t \ dx \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 \ dx + b \int_0^1 \psi_{xx}\psi \ dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi \ dx - \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t)\psi \ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi \ dx \\ &+ k \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x g \ dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t g_t \ dx, \end{aligned}$$

d'après (3.8),et on intégrons par partes

$$\begin{aligned}
\frac{dI_2(t)}{dt} &= \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx + b\left[\psi_x\psi\right]_0^1 - b\int_0^1 \psi_x^2\ dx - k\int_0^1(\varphi_x+\psi)\psi\ dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1,t)\psi\ dx \\
&\quad - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx + k\left[(\varphi_x+\psi)g\right]_0^1 + k\int_0^1(\varphi_x+\psi)g_x\ dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t g_t\ dx \\
&= \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx - b\int_0^1 \psi_x^2\ dx - k\int_0^1 \varphi_x\psi\ dx - k\int_0^1 \psi^2\ dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1,t)\psi\ dx \\
&\quad - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx + k\int_0^1 \varphi_x g_x\ dx + k\int_0^1 \psi g_x\ dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t g_t\ dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{dI_2(t)}{dt} &= -b\int_0^1 \psi_x^2\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx - k\int_0^1 \psi^2\ dx + k\int_0^1 g_x^2\ dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t g_t\ dx \\
&\quad -\mu_2\int_0^1 \psi z(x,1,t)\ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Par (3.8), nous pouvons obtenir

$$\begin{cases}
\int_0^1 g_x^2\ dx \leq \int_0^1 \psi^2\ dx \leq \int_0^1 \psi_x^2\ dx, \\
\int_0^1 g_t^2\ dx \leq \int_0^1 g_{xt}^2\ dx \leq \int_0^1 \psi_t^2\ dx.
\end{cases} \qquad (3.11)$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu_2\int_0^1 |\psi z(x,1,t)|\ dx &\leq \mu_2\eta\lambda_1\int_0^1 \psi^2\ dx + \frac{\mu_2}{4\eta\lambda_1}\int_0^1 z^2(x,1,t)\ dx \\
&\leq \mu_2\eta\int_0^1 \psi_x^2\ dx + \frac{\mu_2}{4\eta\lambda_1}\int_0^1 z^2(x,1,t)\ dx, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1\int_0^1 |\varphi_t g_t|\ dx &\leq \frac{\rho_1}{\lambda_1}\tilde{\eta}\int_0^1 \varphi_t^2\ dx + \frac{\rho_1\lambda_1}{4\tilde{\eta}}\int_0^1 g_t^2\ dx \\
&\leq \frac{\rho_1}{\lambda_1}\tilde{\eta}\int_0^1 \varphi_t^2\ dx + \frac{\rho_1}{4\tilde{\eta}}\int_0^1 \psi_t^2\ dx. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

En combinant (2.5) et (3.12)-(3.13) avec (3.10) et (2.5), on peut compléter la preuve. ■

Maintenant nous définissons la fonctionnel suivant :

$$J(t) := \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx. \tag{3.14}$$

Alors on a

Lemme 3.3

Soient $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ la solution du problème (2.8)-(2.9), et supposez que l'équation $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ tient. Alors le fonctionnel est satisfaisant, pour chacun $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) \quad &\leq \quad b[\psi\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - \frac{k}{2}\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \left(\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &+ \left(\rho_2 + \frac{\mu_1^2}{k}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{k}\int_0^1 z^(x,1,t)dx \\ &- \int_0^1 \hat{f}(\psi)dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Avec b, k et μ_1, μ_2 sont des constants.

Démonstration

En prenant un dérivé de l'équation (3.14), on arrive à

$$\frac{d}{dt}J(t) \quad = \quad \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi)\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)_t\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt}\ dx.$$

En utilisant (2.8), $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ et l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J(t) &= \rho_2 \int_0^1 \left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2}\psi_t - \frac{\mu_2}{\rho_2} z(x,1,t) - \frac{1}{\rho_2} f(\psi) \right)(\varphi_x+\psi)\ dx \\
&+\rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)_t\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt}\ dx \\
&= b\int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x+\psi)\ dx - k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx - \mu_1 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx - \mu_2 \int_0^1 z(x,1,t) \\
&(\varphi_x+\psi)\ dx - \int_0^1 f(\psi)(\varphi_x+\psi)\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)_t\ dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\varphi_{tt}\ dx \\
&= b\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\ dx + b\int_0^1 \psi_x x \psi\ dx - k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx - \mu_1\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx \\
&-\mu_2\int_0^1 z(x,1,t)(\varphi_x+\psi)\ dx - \int_0^1 f(\psi)\varphi_x\ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx + \rho_2\int_0^1 \varphi_{xt}\psi_t\ dx \\
&+\rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\varphi_{tt}\ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\ dx + b\left[\psi_x\psi\right]_0^1 - b\int_0^1 \psi_x^2\ dx - k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx - \mu_1\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx \\
&-\mu_2\int_0^1 z(x,1,t)(\varphi_x+\psi)\ dx - \int_0^1 f(\psi)\varphi_x\ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx + \rho_2\left[\varphi_t\psi_t\right]_0^1 - \rho_2\int_0^1 \varphi_t\psi_{tx}\ dx \\
&+\rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_x\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\left(\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x\right)\ dx \\
&= b\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\ dx - b\int_0^1 \psi_x^2\ dx - k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx - \mu_1\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx - \mu_2\int_0^1 z(x,1,t) \\
&(\varphi_x+\psi)\ dx - \int_0^1 f(\psi)\varphi_x\ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx - \rho_2\int_0^1 \varphi_t\psi_{tx}\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx + \rho_2\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t\ dx + b\left[\psi_x\varphi_x\right]_0^1 \\
&-b\int_0^1 \psi_{xx}\varphi_x\ dx + b\int_0^1 \psi_x^2\ dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &= b\left[\psi_x\varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2\ dx - k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx - \mu_1\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx \\ &\quad -\mu_2\int_0^1 (\varphi_x+\psi)z(x,1,t)\ dx - \int_0^1 \varphi_x f(\psi)\ dx - \int_0^1 f(\psi)\psi\ dx \qquad (3.16)\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$-\mu_1\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi)\ dx \leq \frac{k}{4}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx + \frac{\mu_1^2}{k}\int_0^1 \psi_t^2\ dx, \qquad (3.17)$$

$$-\mu_2\int_0^1 (\varphi_x+\psi)z(x,1,t)\ dx \leq \frac{k}{4}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx + \frac{\mu_2^2}{k}\int_0^1 z^2(x,1,t)\ dx, \qquad (3.18)$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\psi_x f(\psi)|\ dx &\leq \|\psi_x\|\|\psi\|_{2(\theta+1)}^{\theta}\|\psi\|_{2(\theta+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2b^2}\int_0^1 \varphi_x^2\ dx + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\int_0^1 \psi_x^2\ dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx + \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 \psi^2\ dx + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\int_0^1 \psi_x^2\ dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b^2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\ dx + \left(\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right)\int_0^1 \psi_x^2\ dx, \qquad (3.19)\end{aligned}$$

qui, avec (3.17)-(3.18), nous donne (3.15). La preuve est maintenant terminée. ■

Lemme 3.4

Soient $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ la solution du problème (2.8)-(2.9), alors l'estimation suivante tient pour chacun $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}b[\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} &\leq -\frac{\varepsilon\rho_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\varphi_t\varphi_x dx - \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon}\frac{d}{dt}\int_0^1 q\psi_t\psi_x dx + \frac{2\rho_1\varepsilon}{k}\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\varepsilon + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon} + \frac{b^2}{4\varepsilon^3} + \frac{3b^2}{4} + \frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{\rho_2 b}{2\varepsilon} + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon^2}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2\varepsilon}{4}\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx \\ &\quad + \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon^2}\int_0^1 z^2(x,1,t)dx. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Démonstration

Le même argument que dans [6], nous savons que pour toute $\varepsilon > 0$

$$b\left[\psi_x\varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} \leq \varepsilon\left[\varphi_x^2(1)+\varphi_x^2(0)\right]+\frac{b^2}{4\varepsilon}\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right]. \tag{3.21}$$

En utilisant (2.8), l'inégalité de Young, intégration par parties et en le fait suivant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x\,dx &= \int_0^1 b\rho_2\psi_{tt}\psi_x\,dx+\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_{xt}\,dx,\\
&= b^2\int_0^1 q\psi_{xx}\psi_x\,dx-bk\int_0^1 q(\varphi_x+\psi)\psi_x\,dx-b\mu_1\int_0^1 q\psi_t\psi_x\,dx\\
&\quad -b\mu_2\int_0^1 qz(x,1,t)\psi_x\,dx-b\int_0^1 qf(\psi)\psi_x\,dx+\frac{b\rho_2}{2}\left[q\psi_t^2\right]_0^1-\frac{b\rho_2}{2}\int_0^1 q_x\psi_t^2\,dx\\
&= \frac{b^2}{2}\left[q\psi_x^2\right]_{x=0}^{x=1}-\frac{b^2}{2}\int_0^1 q_x\psi_x^2\,dx-bk\int_0^1 q(\varphi_x+\psi)\psi_x\,dx-b\mu_1\int_0^1 q\psi_t\psi_x\,dx\\
&\quad -b\mu_2\int_0^1 qz(x,1,t)\psi_x\,dx-b\int_0^1 qf(\psi)\psi_x\,dx-\frac{b\rho_2}{2}\int_0^1 q_x\psi_t^2\,dx
\end{aligned}$$

Nous voyons que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 b\rho_2 q\psi_t\psi_x\,dx &\leq -b^2\left[\psi_x^2(1)+\psi_x^2(0)\right]+2b^2\int_0^1\psi_x^2\,dx+2\rho_2 b\int_0^1\psi_t^2\,dx\\
&\quad +\left(\frac{\varepsilon}{b^2}+\varepsilon^2k^2\right)\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2\,dx+2\varepsilon b^2\int_0^1\psi_x^2\,dx\\
&\quad +\left(b+\frac{b^2}{\varepsilon^2}\frac{\varepsilon}{b^2\lambda_1}\frac{b^2}{2\varepsilon\lambda_1}\right)\int_0^1\psi_x^2\,dx\\
&\quad +\frac{\mu_1^2}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2\,dx+\frac{\mu_2^2}{\varepsilon}\int_0^1 z^2(x,1,t)\,dx.
\end{aligned}\tag{3.22}$$

De même,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\rho_1 q\varphi_t\varphi_x\,dx \leq -k\left[\varphi_x^2(1)+\varphi_x^2(0)\right]+3k\int_0^1\varphi_x^2\,dx+k\int_0^1\psi_x^2\,dx+2\rho_1\int_0^1\varphi_t^2\,dx,$$

qui, le long avec (3.21)-(3.22), nous donne (3.20). La preuve est maintenant terminée. ■

Afin de gérer le terme $z(x,\rho,t)$, nous introduisons le fonctionnel

$$I_3(t) := \int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho\,dx \tag{3.23}$$

Puis nous trouvons le résultat suivant dans [6].

Lemme 3.5

Soit $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ *la solution de problème* (2.8)-(2.9), *alors l'estimation suivante tient*

$$\frac{d}{dt}I_3(t) \leq -I_3(t) - \frac{c}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1,t)dx + \frac{1}{2\tau}\int_0^1 \psi_t^2 dx, \tag{3.24}$$

où c *est un constant positif*

Maintenant nous définissons le fonctionnel Lyapunov suivant $\mathscr{L}(t)$ par

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(t) \quad &:= \quad ME(t) + \frac{1}{8}I_1(t) + NI_2(t) + J(t) + \frac{\varepsilon}{k}\int_0^1 \rho_1 q\varphi_t\varphi_x \, dx \\ &\quad + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon}\int_0^1 q\psi_t\psi_x \, dx + I_3(t). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Alors nous pouvons obtenir le lemme suivant.

Lemme 3.6

Soient $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)$ *la solution du problème* (2.8)-(2.9). *Pour* M *assez grand, il existe* y_1 *et* y_2 *positif dépendant de* M, N *et* ε *tels que pour tout* $t \geq 0$,

$$\mathsf{y}_1 E(t) \leq \mathscr{L}(t) \leq \mathsf{y}_2 E(t). \tag{3.26}$$

Démonstration

On considérons le fonctionnel

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(t) - ME(t) \quad &= \quad \frac{1}{8}I_1(t) + NI_2(t) + J(t) + \frac{\varepsilon}{k}\int_0^1 \rho_1 q\varphi_t\varphi_x \, dx \\ &\quad + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon}\int_0^1 q\psi_t\psi_x \, dx + I_3(t). \end{aligned} \tag{3.27}$$

et montrer que

$$|\mathscr{L}(t) - ME(t)| \leq CE(t), \quad C > 0.$$

De (3.2), (3.7),(3.14) et (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(t) - ME(t) \quad \leq \quad & \frac{1}{8}\left| -\int_0^1 (\rho_1\varphi\varphi_t + \rho_2\psi\psi_t)dx - \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx \right| + N\left| \int_0^1 (\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\psi_t g)dx + \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx \right| \\ & + \left| \rho_2\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_x\varphi_t dx \right| + \left| \frac{\varepsilon}{k}\int_0^1 \rho_1 q\varphi_t\varphi_x \, dx + \frac{\rho_2 b}{4\varepsilon}\int_0^1 q\psi_t\psi_x \, dx \right| \\ & + \left| \int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x,\rho,t)d\rho \, dx \right| \end{aligned}$$

d'après les inégalités de Young et Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(t)-ME(t) \quad \leq \quad & \alpha_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx+\alpha_2\int_0^1 \psi_t^2 dx+\alpha_3\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2 dx+\alpha_4\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & +\int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho\, dt+\int_0^1 \hat{f}(\psi)dx, \end{aligned} \tag{3.28}$$

où les constantes positives $\alpha_i (i=1,2,3,4)$ sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 & =\frac{\rho_1}{16}+\frac{N\rho_1}{2}+\frac{\rho_2}{2}+\frac{\varepsilon\rho}{k}, \\ \alpha_2 & =\frac{N\rho_2}{2}+\frac{\rho_2}{2}+\frac{\rho_2 b}{2\varepsilon}+\frac{\rho_2}{16}, \\ \alpha_3 & =\frac{\rho_1}{8}+\frac{\rho_2}{2}+\frac{2\varepsilon\rho_1}{k}, \\ \alpha_4 & =\frac{\rho_1}{8}+\frac{\mu_1}{16}+\frac{\rho_2}{2}+\frac{N}{2}(\rho_2+\mu_1+\rho_1)+\frac{\rho_2 b}{2\varepsilon}+\frac{2\varepsilon\rho_1}{k}+\frac{\rho_2}{16}. \end{cases}$$

Effectuant l'inégalité de Young et utilisant le fait

$$\int_0^1 \varphi_x^2 dx \leq 2\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2+2\int_0^1 \psi^2 dx,$$

on a

$$\begin{aligned} E(t) \quad \geq \quad & \frac{1}{4}\min 1,\xi\left(\int_0^1 \varphi_t^2 dx+\int_0^1 \psi_t^2 dx+\int_0^1(\varphi_x+\psi)^2 dx+\int_0^1 \psi_x^2 dx\right. \\ & \left.+\int_0^1\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho\, dt+\int_0^1 \hat{f}(\psi)dx\right), \end{aligned} \tag{3.29}$$

Il résulte de (3.28)-(3.29) qu'il existe une constante positive $\tilde{C}$ telle que

$$|\mathscr{L}(t)-ME(t)| \leq \tilde{C}E(t). \tag{3.30}$$

Puis en choisissant M a si grand que $\mathrm{y}_1 := M\check{}\tilde{C} > 0$ et $\mathrm{y}_2 := M+\tilde{C} > 0$, nous complétons la preuve. ■

Démonstration de théorème 3.1

Il découle (2.17), (3.3), (3.9), (3.15), (3.20), (3.24) et (3.25) qui

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & \left[-MC - \frac{\rho_2}{8} + N\left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\tilde{\eta}}\right) + \frac{\rho_2 b}{2\varepsilon} + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon^2} + \rho_2 + \frac{\mu_1^2}{k} + \frac{1}{2\tau}\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & + \left[-MC + \frac{\mu_2^2}{32\lambda_1\varepsilon} + \frac{N\mu_2}{4\eta\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{k} + \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon^2} - \frac{c}{2\tau}\right]\int_0^1 z^2(x,1,t)dx \\ & + \left[-\frac{\rho_1}{8} + N\tilde{\eta}\frac{\rho_1}{\lambda_1} + \frac{2\rho_1\varepsilon}{k}\right]\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left[-\frac{3k}{8} + \frac{k^2\varepsilon}{4}\right]\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & + \left[\frac{b + C_1}{8} + \varepsilon - N(b - \mu_2\eta) + \frac{b^2}{2\varepsilon} + \frac{b^2}{4\varepsilon^3} + \frac{b^2}{2} + \frac{2\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{\varepsilon\lambda_1}\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + (-N-1)\int_0^1 \hat{f}(\psi)dx. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Tout d'abord nous choisissons η si petit que

$$\eta \leq \frac{b}{2C\mu_2},$$

et puis nous choisissons ε assez petit pour que

$$\varepsilon \leq \frac{5k}{128 + 4k^2}.$$

Ensuite, nous prenons N si grand que

$$\frac{Nb}{4} \geq \frac{b + C_1}{8} + \varepsilon + \frac{b^2}{4\varepsilon^3} + \frac{b^2}{2} + \frac{2\varepsilon}{b^2\lambda_1} + \frac{b^2}{\varepsilon\lambda_1}.$$

Après cela, nous choisissons $\tilde{\eta}$ assez petit pour que $\tilde{\eta} \leq \frac{1}{32N}$.

On prend alors M assez grand qu'il existe un δ constante positive telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq & -\delta \int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2 + z^2(x,1,t)\right) dx \\ & -\delta \int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho\ dx - \delta\int_0^1 \hat{f}(\psi)dx. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Notant que (2.16), nous savons qu'il existe un positif β constante telle que

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\beta E(t), \tag{3.33}$$

qui, avec (3.26), donne

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(t) \leq -\frac{\beta}{\mathsf{y}_2}\mathscr{L}(t).$$

Ensuite, nous pouvons obtenir

$$\mathscr{L}(t) \leq \mathscr{L}(0) e^{-\frac{\beta}{\mathsf{y}_2} t}. \tag{3.34}$$

En utilisant encore (3.26), nous trouvons que

$$E(t) \leq \frac{\mathsf{y}_2}{\mathsf{y}_1} E(0) e^{-\frac{\beta}{\mathsf{y}_2} t},$$

ce qui nous donne que la stabilité exponentielle tient pour tout $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Notant que $D(\mathcal{A})$ est dense en $\mathscr{H}$, nous pouvons étendre les inégalités d'énergie à l'espace de phase $\mathscr{H}$. Ainsi nous complétons la preuve du théorème 3.1.

■

Chapitre 4

Conclusion

En réalisant ce travail, notre objectif était l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un système de type Timoshenko avec force extérieure, en utilisées la théorie du semi-groupes, en particulier le théorème de Hille-Yosida.

Dans un dernier chapitre nous avons établi un résultat de stabilisation exponentielle pour le problème non-linaire en utilisant la théorie de l'énergie, qui repose sur la fonction de Lyapounov. En s'inspirant de l'article de Feng Pelicer [7] et B.S.Houari [6] qui concerne l'existence et la stabilisation exponentielle de la solutions de l'équation des ondes semi linéaire amorties avec des coefficients constantes et des conditions aux limite .

Bibliographie

[1] A. Júnior, DS. Muñoz Rivera, JE. Santos, ML : *The stability number of the Timoshenko system with second sound.* J. Differ. Equ. 253, 2715-2733 (2012).

[2] A. Guesmia, S. A. Messaoudi : *Frictional versus viscoelastic damping for Timoshenko-type systems*, Prépublication, LMAM, Université paul verlainemetz (2006). 1-18.

[3] A. Pazy : *Semi Groupe of lineare operator and application to partial diffrential equation.* Springer-Verlag New York, (1983).

[4] A. Soufyane : *Stabilisation de la poutre de Timoshenko.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Sér. I 328, 731-734 (1999).

[5] A. Soufyane, Wehbe. A : *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping.* Electron. J. Differ. Equ. 2003, 29 (2003).

[6] B. Said-Houari, Laskri. Y : *A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback* . Appl. Math. Comput. 217, 2857-2869 (2010).

[7] B. Feng, M. L. Pelicer :*Global existence and exponential stability for a nonlinear Timoshinko system with delay.*Boundary pelicer value problems 2015 :206 (2015)

[8] B. Beauzamy : *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, Elservier Science PUBLISHERS B.V.1988.

[9] B. P. Rynne, Martin. A. Youngson : *Linear Functional Analysis*, SpringerVerlage London Limited 2008.

[10] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos et N. N. Castro : *Expoenetial stability for the Timoshenko system with two weak dampings*, Applied Math Letters, 18 (2005), 535-541.

[11] Datko. R. Lagnese, J. Polis, MP : *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations.* SIAM J. Control Optim. 24, 152-156 (1986).

[12] D. X. Feng, D. H. Shi et W. Zhang : *Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation*, Sci. China, Ser. A 41, no. 5 (1998), 483-490.

[13] D. H. Shi, D. X. Feng : *Exponential decay rate of the energy of a Timoshenko beam with locally distributed feedback*, ANZIAM, J. 44 no. 2 (2002), 205-220.

[14] E. Fridman : *Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control* . Birkhäuser, Cham (2014).

[15] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Mũnoz Rivera et R. Racke : *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*, J. Differential Equations, 194, no. 1 (2003), 82-115.

[16] G. Q. Xu et S. P. Yung : *Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var, 9 (2003), 579-600.

[17] H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.

[18] Hiroki. Tanabe : *Equation of evolution*, Pitman landon sanfrancisco, Melbourne (1979).

[19] Ioan. I, Vrabie : C_0*-Semigroups and applications*, Elsevier Science B. V. 2003.

[20] J. U. Kim, Y. Renardy : *Boundary control of the Timoshenko beam*, SIAM J. Control Optim, 25, no. 6 (1987), 1417-1429.

[21] JK. Hale, Verduyn. Lunel, SM : *Introduction to Functional-Differential Equations.* Springer, New York (1993).

[22] Klaus-Jochen. Engel, Rainer. Nagel : *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Alfred A.Knopf, 1995.

[23] Liu. Z, Zheng. S : *Semigroups Associated with Dissipative Systems.* Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (1999).

[24] M. De Lima Santos : *Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary*, Abstr. Appl. Anal, 7 no. 10 (2002), 531-546.

[25] Nicaise. S, Pignotti. C : *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks.* SIAM J. Control Optim. 45, 1561-1585 (2006).

[26] Nicaise. S, Pignotti. C : *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay.* Differ. Integral Equ. 21, 935-958 (2008).

[27] S. W. Taylor : *A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability*, J. Comput. Appl. Math, 114 (2000), 23-40.

[28] Sp. Timoshenko : *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philos.* Mag. Ser. 6 41(245), 744-746 (1921).