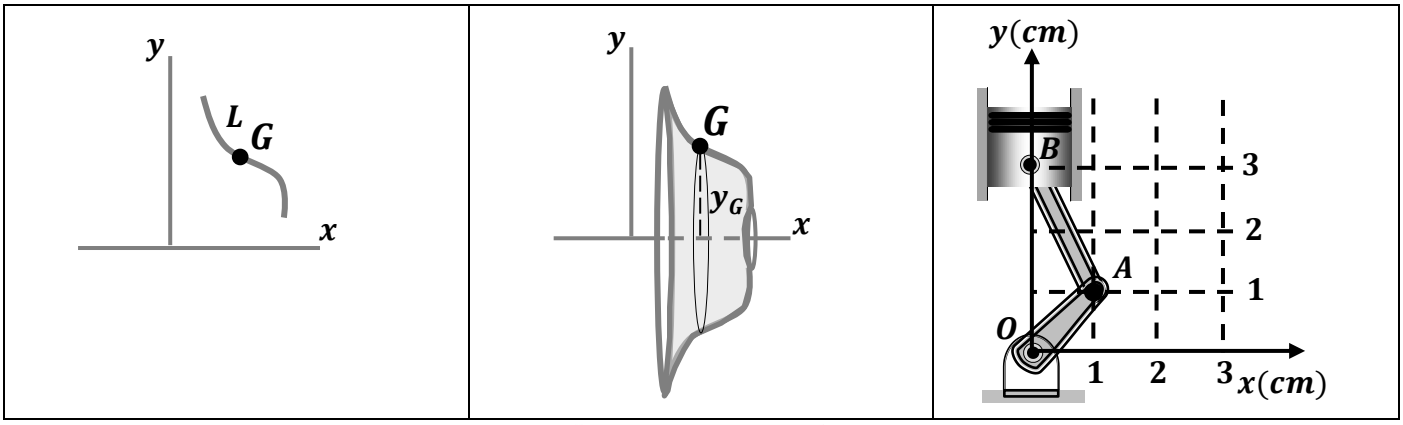
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria

جامعة عمار ثليجي بالأغـــواط
Amar Telidji University - Laghoaut

كلية التكنولوجيا
Faculty of Technology

مقياس
الميكانيك العقلانية
ملخصات للدروس وتمارين

Module
Rational mechanics
Course reminders and exercises



Directed by:
Dr: DAHAME Tahar

من إنجاز:
د: دحام طاهر

مقياس
الميكانيك العقلانية
ملخصات للدروس وتمارين

Module
Rational mechanics
Course reminders and exercises

من إنجاز:

د: دحام طاهر

أستاذ محاضر "أ" في مادة الفيزياء

بجامعة عمار ثليجي بالأغواط

Directed by:

Dr : DAHAME Tahar

Lecturer "A" in physics at AMAR Telidji University of LAGHOUAT

كلمة المؤلف

محتوى هذه المطبوعة الجامعية" مقياس الميكانيك العقلانية ملخصات للدروس وتما رين" مخصص لطلاب السنة الثانية تكنولوجيا انظام (ل م د) و مهندسين، يضم الجزء الأكبر من برنامج الميكانيكا العقلانية المعتمد و المنصوص عليه في إضبارة مشروع التكوين في جامعة عمار تيليجي بالأغواط.

توزع محتوى هذه المطبوعة على خمسة فصول، كل منها مشكل من درس مدعم بأمثلة متبوع بعشر تمارين محلولة بالتفصيل تليها خمس تمارين إضافية مع إجابات موجزة.

بعد تذكير رياضي على المتجهات و الأشعة التي تشكل الفصل الأول ، يخصص الفصل الثاني للعموميات والتعريفات الأساسية للقوى من وجهة نظر الفيزياء والتمثيل الرياضي، كما يتطرق لتعريف و نمذجة الجسم الصلب. يتناول الفصل الثالث سكون و توازن الأجسام الصلبة وكذلك الأفعال المتبادلة بينها عندما تتلامس مع بعضها البعض، كما يتطرق إلى بديهية الوصلات الميكانيكية بين الأجسام الصلبة وظروف التوازن. الفصل الرابع يتعلق بحركيات الجسم الصلب و يركز أساسا على حقل السرعة و حقل التسارع و كيفية التعبير عنهما في المعالم الثابتة والمتحركة. يقدم الفصل الخامس مفاهيم حول الكتلة و توزيعها في الفضاء و كيفية حساب مركزها، كما يركز على عزم العطالة أو عزم القصور الذاتي للأجسام الصلبة و كيفية حساب ممتد هذا المقدار على اعتبار أنه متعدد المناحي.

يُعد مقياس الميكانيكا العقلانية من وحدات التدريس الأساسية في الفصل الدراسي الثالث للطلاب في الجذع المشترك في كليات العلوم والتكنولوجيا، و سعيا مني على تذليل الصعوبات و تبسيطها في هذا المقياس حاولت مجتهدا تقديمه بلغتنا الأم العربية تكريما لها، تقابلها اللغة الإنجليزية جنبا إلى جنب، متمنيا أن أكون عند حسن ظن القارئين و مستعملي هذه المطبوعة.

د: دحام طاهر

Author's word

The content of this textbook "Rational mechanics courses and exercises" is intended for second-year students systems technology (LMD) and engineers, it brings together the large part of the rational mechanics program taught at the AMAR Telidji University of Laghouat. The content of this publication is divided into five chapters, each of which is made up of a lesson supported by examples followed by ten exercises solved in detail followed by five additional exercises with brief answers. After a mathematical reminder on vectors which constitutes the first chapter, the second is devoted to basic generalities and definitions on the forces from the point of view of physics and mathematical representation. The third chapter addresses statics and its axioms as well as the connections between solids and equilibrium conditions. The fourth chapter deals with the kinetics of a solid body and mainly focuses on the velocity field and the acceleration field and how to express them in fixed and moving reference frame. The fifth chapter presents concepts about mass, the center of mass, He also focuses on the moment of inertia of solid bodies and how to calculate its tensor as an anisotropic physical quantity. The rational mechanics module is one of the basic teaching modules in the third semester for students in the common stem at the faculties of Science and technology, In an effort to overcome the difficulties, I tried hard to present it in our native Arabic language and English language side by side, I hope that I will be well thought by the readers and users of this publication.

Dr : DAHAME Tahar

Contents	الفهرس

General introduction	**1**	**مقدمة عامة**

Chapter 1 Mathematical reminders (Vector calculation elements)	**3**	**الفصل 1 تذكرة رياضياتية (عمليات على الأشعة)**
1.1 Introduction	**4**	**1.1 مقدمة**
1.2 The vector	**4**	**2.1 الشعاع**
1.2.1 Definition	**4**	**1.2.1 تعريف**
1.2.2 Notation of a vector in Cartesian Reference	**4**	**2.2.1 كتابة شعاع في المعلم الكارتيزي**
1.2.3 Unit vector of any vector	**5**	**3.2.1 شعاع الوحدة المرتبط بأي شعاع**
1.2.4 Vector operations	**6**	**4.2.1 العمليات على الأشعة**
1.2.4.1 Addition	**6**	**1.4.2.1 الجمع**
1.2.4.2 Subtraction	**7**	**2.4.2.1 الطرح**
1.2.4.3 Multiplication	**8**	**3.4.2.1 الجداء**
1.2.4.3.1 Multiplication of a vector by a scalar	**8**	**1.3.4.2.1 جداء شعاع بعدد حقيقي**
1.2.4.3.2 Multiplication of a vector by a vector	**8**	**2.3.4.2.1 جداء شعاع في شعاع**
a) The scalar product	**9**	**أ. الجداء السلمي**
b) The vector product	**11**	**ب) الجداء الشعاعي:**
c) The double vector product	**15**	**ج) الجداء الشعاعي المزدوج**
d) Orthogonal projection of the vectors	**16**	**د) الإسقاط العمودي للأشعة**
1.3 Moment of a vector with respect to a point	**17**	**3.1 عزم شعاع بالنسبة لنقطة**
1.4 The torsors	**19**	**4.1 المُفتلات**
1.4.1 Definition	**19**	**1.4.1 تعريف**
1.4.2 Distribution of moments	**19**	**2.4.1 توزيع العزوم**
1.4.3 Operations on the torsors	**20**	**3.4.1 عمليات على المُفتلات**
1.4.3.1 Equivalence of two torsors	**20**	**1.3.4.1 تكافؤ مُفتلين**
1.4.3.2 Sum of two torsors	**20**	**2.3.4.1 جمع مُفتلين**
1.4.3.3 Product of two torsors	**20**	**3.3.4.1 جداء مُفتلين**
1.4.4 Scalar invariant of a torsor	**21**	**4.4.1 الثابت السلمي لمُفتل**
1.4.5 Central axis of a torsor	**21**	**5.4.1 المحور المركزي لمُفتل**
1.4.6 Step of a torsor	**21**	**6.4.1 خطوة المُفتل**
1.4.7 Particular torsor	**21**	**7.4.1 مُفتلات خاصة**
1.4.7.1 Slider torsor	**21**	**1.7.4.1 مُفتل انسحابي (انزلاقي)**
1.4.7.2 Couple torsor	**22**	**2.7.4.1 مُفتل المزدوجة**
1.5 Derivative and integral of a vector	**23**	**5.1 إشتقاق و تكامل شعاع**
1.6 Operators and vectors	**24**	**6.1 المؤثرات و الأشعة**
1.6.1 Gradient	**24**	**1.6.1 التدرج**
1.6.2 Divergence	**24**	**2.6.1 التباعد**
1.6.3 Rotational	**25**	**3.6.1 الدوران**
1.6.4 The Laplacian	**25**	**4.6.1 لابلاسيان**
1.7 Resolved exercises	**26**	**7.1 تمارين محلولة**
1.8 Additional exercises	**39**	**8.1 تمارين إضافية**

Chapter 2 Forces and Moments	41	الفصل 2 القوى و العزوم
2.1 Introduction	42	1.2 مقدمة
2.2 Definition and physical meaning of force	42	2.2 تعريف القوة و مفهومها الفيزيائي
2.2 Mathematical representation of the force	42	2.2 التمثيل الرياضياتي للقوة
2.3 Operations on the forces	43	3.2 عمليات على القوى
2.3.1 Composition of forces	43	1.3.2 تركيب القوى
2.3.2 Decomposition of forces	45	2.3.2 تحليل القوى
2.3.3 Force projections	46	3.3.2 إسقاطات القوة:
2.3.3.1 Orthogonal projection of a force on a straight line	46	1.3.3.2 المسقط العمودي لقوة على مستقيم
2.3.3.2 Orthogonal projection of a force on a plane	47	2.3.3.2 المسقط العمودي لقوة على مستوي
2.4 Classification of forces	49	4.2 تصنيف القوى:
2.4.1 Remote forces, contact forces	49	1.4.2 القوى البعدية و القوى التلامسية
2.4.1.1 Remote forces	49	1.1.4.2 القوى البعدية
2.4.1.2 Contact forces (connection)	50	2.1.4.2 القوى التلامسية (الوصلات):
2.4.2 Localized forces, distributed forces	50	2.4.2 القوى النقطية و القوى المتوزعة
2.4.2.1 Localized forces	50	1.2.4.2 القوى النقطية
2.4.2.2 Distributed forces	50	2.2.4.2 القوى المتوزعة
2.4.3 Internal forces, external forces	50	3.4.2 القوى الداخلية و القوى الخارجية
2.4.3.1 Internal forces	50	1.3.4.2 القوى الداخلية
2.4.2.2 external forces	51	2.4.2.2 القوى الخارجية
2.5 Mechanical models	52	5.2 النمذجة الميكانيكية
2.5.1 Material point	52	1.5.2 النقطة المادية
2.5.2 Non-deformable solid	52	2.5.2 الجسم الصلب
2.6 Resolved exercises	53	6.2 تمارين محلولة
2.7 Additional exercises	66	7.2 تمارين إضافية

Chapter 3 static and equilibrium of the solid body	69	الفصل 3 سكون و توازن الجسم الصلب
3.1 Introduction	70	1.3 مقدمة
3.2 The axioms of statics	71	2.3 بديهيات السكون
3.2.1 Axiom 1	71	1.2.3 البديهية 1
3.2.2 Axiom 2	71	2.2.3 البديهية 2
3.2.3 Axiom 3	71	3.2.3 البديهية 3
3.2.4 Axiom 4	72	4.2.3 البديهية 4
3.2.5 Axiom 5	72	5.2.3 البديهية 5
3.2.6 Axiom 6	72	6.2.3 البديهية 6
3.3 Mechanical connections	73	3.3 الوصلات الميكانيكية
3.3.1 Free solid and bound solid	73	1.3.3 الصلب الحر و الصلب المرتبط
3.3.1.1 Free solid	73	1.1.3.3 الصلب الحر
3.3.1.2 Bound solid	75	2.1.3.3 الصلب المرتبط
3.3.1.2.1 Degree of bonding	75	1.2.1.3.3 درجة الرابطة
3.3.1.2.2 Degree of Freedom	75	2.2.1.3.3 درجة الحرية
3.3.2 Types of mechanical joints	75	2.3.3 أنواع الروابط (الوصلات)

3.3.2.1 The embedding	75	1.2.3.3 التثبيت (الوصلة الإندماجية)
3.3.2.2 Pivot (Cylindrical joint)	76	2.2.3.3 التمحور الأسطواني
3.3.2.3 Slide	77	3.2.3.3 المنزلقة
3.3.2.4 Sliding pivot	78	4.2.3.3 التمحور الأسطواني المنزلق
3.3.2.5 Finger ball joint	78	5.2.3.3 التمحور الكروي ذو الأصبع
3.3.2.6 Helical joint	79	6.2.3.3 الوصلة الحلزونية
3.3.2.7 plan-plan joint	80	7.2.3.3 وصلة مستوي مستوي
3.3.2.8 Ball Joint (Spherical)	81	8.2.3.3 التمحور الكروي
3.3.2.9 Linear rectilinear	81	9.2.3.3 خطية مستقيمة
3.3.2.10 Annular linear	82	10.2.3.3 خطية حلقية
3.3.2.11 Punctual joint	83	11.2.3.3 الوصلة النقطية
3.3.3 Axiom of linking	85	3.3.3 بديهية الوصلات الميكانيكية:
3.4 Equilibrium conditions	86	4.3 شروط التوازن (السكون)
3.4.1 Three-dimensional system of forces	87	1.4.3 جملة قوى ثلاثية الأبعاد
3.4.2 system of concurrent forces	87	2.4.3 جملة قوى متلاقية
3.4.3 Plane forces	89	3.4.3 القوى المستوية
3.5 Resolved exercises	92	5.3 تمارين محلولة
3.6 Additional exercises	108	6.3 تمارين إضافية

Chapter 4 kinematics of the solid body	112	**الفصل 4 حركيات الجسم الصلب**
4.1 Introduction	113	1.4 مقدمة
4.2 Brief reminders on the kinematic quantities of the material point	113	2.4 تذكرة بالمقادير الحركية للنقطة المادية
4.2.1 Trajectory	113	1.2.4 المسار
4.2.2 Position vector	113	2.2.4 شعاع الموضع
4.2.3 Displacement vector	114	3.2.4 شعاع الإنتقال
4.2.4 Average speed vector	114	4.2.4 شعاع السرعة المتوسطة
4.2.5 Instantaneous velocity vector	115	5.2.4 شعاع السرعة اللحظية
4.2.6 Average acceleration vector	116	6.2.4 شعاع التسارع المتوسط
4.2.7 Instantaneous acceleration vector	116	7.2.4 شعاع التسارع اللجظي
4.2.8 Tangential acceleration and normal acceleration	117	8.2.4 التسارع المماسي و التسارع الناظمي
4.2.9 Polar coordinates	120	9.2.4 الإحداثيات القطبية
4.2.9.1 Position vector	120	1.9.2.4 شعاع الموضع
4.2.9.2 Velocity vector	120	2.9.2.4 شعاع السرعة
4.2.9.3 Acceleration vector	120	3.9.2.4 شعاع التسارع
4.3 Kinematics of the solid body	122	3.4 حركيات الجسم الصلب
4.3.1 Definition of an undeformable solid	122	1.3.4 تعريف الجسم الصلب
4.3.2 Speed field	122	2.3.4 حقل السرعات
4.3.3 Field of accelerations	123	3.3.4 حقل التسارعات
4.3.4 Instantaneous canter and axis of rotation	127	4.3.4 المركز و المحور الآنيان للدوران
4.3.5 Pure Translational Movement	131	5.3.4 حركة انسحابية بحتة
4.3.6 Rotation around a fixed axis	132	6.3.4 حركة دورانية حول محور ثابت
4.3.7 Planar movement	132	7.3.4 الحركة المستوية
4.3.8 Compound movement	134	8.3.4 الحركة المركبة

4.3.8.1 Velocity vector in a moving axis system	134	1.8.3.4 شعاع السرعة في معلم متحرك
4.3.8.2 Aacceleration vector in a moving axis system	137	2.8.3.4 شعاع التسارع في معلم متحرك
4.4 Solved exercises	144	4.4 تمارين محلولة
4.5 Additional exercises	160	5.4 تمارين إضافية

Chapter 5 Mass geometry	164	**الفصل 5 هندسية الكتلة**
5.1 Introduction	165	1.5 مقدمة
5.2 Mass of a material system	165	2.5 كتلة جملة مادية
5.2.1 Discreet system	165	1.2.5 الجملة المنتهية
5.2.2 Continuous system	165	2.2.5 الجملة المستمرة (غير المنتهية)
5.2.2.1 Linear distribution	166	1.2.2.5 التوزيع الخطي
5.2.2.2 Area distribution	166	2.2.2.5 التوزيع السطحي
5.2.2.3 Volume distribution	166	3.2.2.5 التوزيع الحجمي
5.3 Center of mass	167	3.5 مركز الكتلة
5.3.1 Discreet system	167	1.3.5 الجملة المنتهية
5.3.2 Continuous system	167	2.3.5 الجملة المستمرة
5.3.2.1 Linear	167	1.2.3.5 الخطية
5.3.2.2 Surface	167	2.2.3.5 السطحية
5.3.2.3 Volumetric	167	3.2.3.5 الحجمية
5.3.3 GULDIN's Theorems	168	3.3.5 نظريتا GULDIN
5.3.3.1 Theorem 1	169	1.3.3.5 النظرية 1
5.3.3.2 Theorem 2	169	2.3.3.5 النظرية 2
5.4 Moment of inertia	171	4.5 عزم العطالة
5.4.1 Case of a material point	171	1.4.5 حالة نقطة مادية
5.4.2 Discrete system	174	2.4.5 حالة جملة مادية منتهية
5.4.3 Continuous material system	176	3.4.5 جملة مادية مستمرة
5.4.3.1 Linear	176	1.3.4.5 خطية
5.4.3.2 Surface distribution	176	2.3.4.5 سطحية
5.4.3.3 Volumetric distribution	177	3.3.4.5 حجمية
5.4.4 Influence of symmetry on the inertia tensor	179	4.4.5 تأثير التناظر على ممتد العظالة
5.4.4.1 Plane of symmetry	179	1.4.4.5 تناظر بالنسبة لمستوي
5.4.4.2 Axis of symmetry	180	2.4.4.5 تناظر بالنسبة لمحور
5.4.4.3 Symmetry of revolution	181	3.4.4.5 تناظر محوري توراني
5.4.4.4 Spherical symmetry	182	4.4.4.5 التناظر الكروي
5.5 Solid plan	184	5.5 الجسم الصلب المستوي
5.6 Main axes of inertia	185	6.5 المحاور الرئيسية للعطالة
5.7 Huygens Theorem	188	7.5 نظرية HUYGENS
5.8 Moment of inertia of a solid with respect to an axis $\Delta(O,\vec{u})$	191	8.5 عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور $\Delta(O,\vec{u})$
5.9 Solved exercises	194	9.5 تمارين محلولة
4.10 Additional exercises		10.5 تمارين إضافية

General introduction

Mechanics is defined as the science that describes and predicts the conditions of rest or movement of bodies under the action of forces. It includes the mechanics of rigid bodies, the mechanics of deformable bodies and fluid mechanics.

The mechanics of rigid bodies is subdivided into: Statics, which deals with the behavior of solids at rest, and Kinematics, which is the study of the geometry of motion and Kinetics, which takes into account the causes of the movement and its effects on it.

In this manuscript, we assume that the bodies are perfectly rigid. In fact, real structures and machines are never absolutely rigid; they deform under the loads to which they are subjected. However, since these deformations are generally small, they do not significantly affect the equilibrium conditions or the movement of the structure under consideration. The deformations are treated in the course of resistance of materials, which is part of the mechanics of deformable bodies. The third division of mechanics is fluid mechanics, which is of great importance in the field of hydraulics and applications involving water and gases.

Mechanics is a physical science, since it deals with the study of physical phenomena. However, some teachers associate mechanics with mathematics, while many others consider it an engineering subject. These two points of view are partly justified. Mechanics is the

مقدمة عامة

تُعرف الميكانيكا على أنها العلم الذي يُعنى بدراسة ووصف وتوقع وضعيات سكون (توازن) أو حركة الأجسام تحت تأثير القوى. ويشمل ميكانيكا الأجسام الصلبة، وميكانيكا الأجسام المرنة وميكانيكا الموائع.

ينقسم ميكانيكا الأجسام الصلبة في عمومه إلى: السكون والذي يتعامل مع سلوك المواد الصلبة في حالة سكونها أي توازنها، والحركة دون التطرق لمسبباتها و التحريك الذي يأخذ في الحسبان أسباب الحركة و تأثيراتها عليها.

في هذه المطبوعة ، نفترض تمام مثالية الأجسام الصلبة. في الواقع، الهياكل والآلات الحقيقية ليست أبدا صلبة تماما، فهي تتشوه تحت الأحمال و القوى التي تتعرض لها. ومع ذلك، نظرا لأن هذه التشوهات صغيرة بشكل عام ، فإنها لا تؤثر بشكل كبير على ظروف التوازن أو حركة الصلب قيد الدراسة. يتم التعامل مع التشوهات في سياق مقاومة المواد ، والتي هي جزء من ميكانيكا الأجسام المشوهة. القسم الثالث للميكانيكا هو ميكانيكا الموائع ، وهو ذو أهمية كبيرة في مجال المكونات الهيدروليكية والتطبيقات التي تشمل المياه و الغازات.

الميكانيكا هي علم فيزيائي ، لأنها تتعامل مع دراسة الظواهر الفيزيائية. ومع ذلك، يعتبرها الكثير من الأساتذة أنها متعلقة بنسبة كبيرة جدا بالرياضيات، لذا يطلق عليها اسم الميكانيكا العقلانية أو الرشيدة، وبينما يعتبرها آخرون مادة هندسية. و كلاهما محق في تبريراته. الميكانيكا هي أساس

basis of most engineering sciences and is an indispensable prerequisite for their study.

The purpose of mechanics is to explain and predict physical phenomena and thus lay the foundations for engineering applications. For example, any student or engineer in the mechanics of solid bodies needs to know the modes of statics to determine the force exerted on a point in the design of a bridge and find out if the structure can withstand this force With which the dam must resist static or moving river water. He also needs to be well versed in statics positions to calculate the weights that a crane can resist, the force it takes for a locomotive to pull a freight train or the force that a printed circuit board in a computer can withstand.

The concepts of dynamics allow you to analyze the flight characteristics of a jet aircraft, design an earthquake-resistant building and mitigate the shocks and vibrations of passengers in a vehicle. The concepts of dynamics allow you to calculate the force necessary to send a satellite into orbit, accelerate a cruise ship by a few thousand tons, or design a toy truck that does not break.

All these examples mentioned are the fruit that the mechanical engineer acquires through the theories, exercises and applications on which he practices and with his mastery of the ideas and methods to which he is exposed during his formation, which will form the approved basis for engineering applications in his work.

معظم العلوم الهندسية وهي شرط أساسي لا غنى عنه لدراستهم .

الغرض من الميكانيكا هو شرح الظواهر الفيزيائية والتوقع لها وبالتالي وضع الأسس للتطبيقات الهندسية الضرورية و اللازمة للعمل الصحيح. فأي دارس أو مهندس في ميكانيكا الأجسام الصلبة يحتاج مثلا إلى معرفة أوضاع السكون لتحديد القوة التي تمارس على نقطة في تصميم جسر ومعرفة ما إذا كان هيكله يمكنه تحمل هذه القوة التي يجب أن يقاوم بها السد مياه النهر ساكنة أو متحركة. وهو أيضا بحاجة إلى دراية جيدة بوضعيات السكون لحساب الأثقال التي يمكن لرافعة تحمُلها، أو القوة التي تبذلها قاطرة لسحب قطار شحن أو القوة التي يمكن أن تتحملها لوحة الدوائر المطبوعة في الكمبيوتر.

تسمح لك مفاهيم الديناميكيات أو ميكانيكا التحريك بتحليل خصائص الطيران للطائرة النفاثة ، وتصميم مبنى مقاوم للزلازل والتخفيف من صدمات واهتزازات الركاب في السيارة. تسمح لك أيضا بحساب القوة اللازمة لإرسال قمر صناعي إلى مدار ما، أو تسريع سفينة سياحية ببضعة آلاف من الأطنان ، أو تصميم شاحنة لعبة لا تنكسر.

كل هذه الأمثلة المذكورة هي ثمرة يكتسبها مهندس الميكانيكا من خلال النظريات و التمارين و التطبيقات التي يتمرس عليها و بإتقانه للأفكار والأساليب التي يتعرض لها خلال تكوينه والتي ستشكل الأساس المعتمد للتطبيقات الهندسية في عمله.

الفصل 1
تذكرة رياضياتية (عمليات على الأشعة)

Chapter 1
Mathematical reminders
(Vector calculation elements)

1.1 Introduction

Modelling in physics is an essential phase, it is the basis of the scientific approach, it constitutes the simplified representation of a system or a physical phenomenon making it possible to reproduce its functioning, to analyse it, to explain it and to predict certain aspects of it. In mechanics, vector quantities such as positions, speeds, accelerations, forces, moments, ... are modelled by vectors.

1.1 مقدمة

النمذجة في الفيزياء هي مرحلة أساسية، إنها أساس النهج العلمي، فهي تشكل تمثيلا مبسطا لنظام أو ظاهرة فيزيائية تجعل من الممكن إعادة إنتاج وظائفه وتحليله وشرحه والتنبؤ بجوانب معينة منه. في الميكانيكا، المقادير الموجهة مثل الموضع، السرعة، التسارع، القوة، العزم، وعلى غرار المتجهات، تنمذج بأشعة.

1.2 The vector

1.2.1 Definition

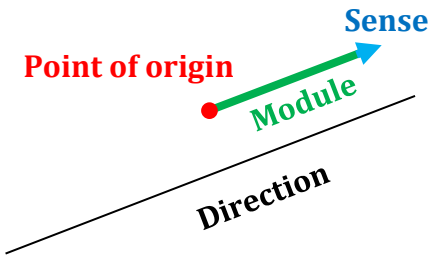
A vector (Fig. 1.1) is defined by the following characteristics:
*** A point of origin.**
*** One direction.**
*** A sense.**
*** A module.**

2.1 الشعاع

1.2.1 تعريف

يعرف الشعاع (الشكل 1.1) بالخصائص التالية:

- نقطة التطبيق.
- الحامل.
- الاتجاه.
- الطويلة.



الشكل 1.1: خصائص الشعاع

Fig. 1.1: Characteristics of a vector

1.2.2 Notation of a vector in Cartesian Reference

We note analytically a vector in three-dimensional space relatively attributed to the Cartesian reference frame $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ by its components. The following two notations are often used:

2.2.1 كتابة شعاع في المعلم الكارتيزي

نكتب الصيغة التحليلية لشعاع في الفضاء المنسوب للمعلم الكارتيزي $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$، بمركباته الثلاث. تعتمد إحدى الكتابتين التاليتين:

$\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (Horizontal notation) (1.1)

$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Vertical notation) (1.2)

طويلة الشعاع في هذا المعلم، تحسب بالعلاقة التالية:

The modulus of a vector in such a reference frame, is calculated by the relation:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.3)$$

مثال 1.1

أحسب طويلة الشعاع:

Example 1.1

Calculate the modulus of the vector:

$$\vec{V} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{k} \quad cm$$

الحل

Solution

$\|\vec{V}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$

$\|\vec{V}\| = 5.916 \quad cm$

3.2.1 شعاع الوحدة المرتبط بأي شعاع

بكل شعاع كيفي $(\vec{V})$، يرفق شعاع وحدة $(\vec{u})$ يكون لهما نفس الحامل ونفس الاتجاه. هذا الترافق يعبر عنه بالعلاقة التالية:

1.2.3 Unit vector of any vector

To each vector $\vec{V}$, we can correspond a unit vector $\vec{u}$ of the same direction and the same sense, this correspondence is interpreted by the relation:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \quad (1.4)$$

يمكن التحقق من العلاق (2-0) أن: $\|\vec{u}\| = 1$

It is clear from the relation (0-1) that $\|\vec{u}\| = 1$

مثال 2.1

Example 1.2

Calculate the unit vector $\vec{u}$ related to the vector:

أحسب شعاع الوحدة المتعلق بالشعاع:

$$\vec{V} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k} \quad cm$$

Solution

الحل

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \qquad \|\vec{V}\| = 2\ cm$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \qquad \vec{u} = \frac{\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}}{2}\ cm \qquad \vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\ cm$$

1.2.4 Vector operations

1.2.4.1 Addition

The addition of several vectors of the same nature gives a new vector called the resultant vector.

4.2.1 العمليات على الأشعة

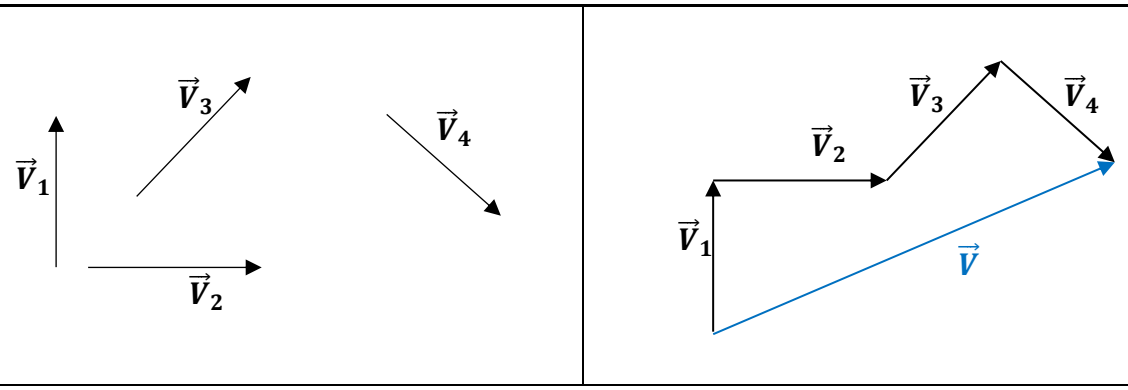
1.4.2.1 الجمع

ينتج عن جمع عدة أشعة من نفس الطبيعة شعاعا نسميه محصلة.

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \cdots \qquad (1.5)$$

Graphically, the resultant vector is obtained by polygonal construction (Fig. 1.2).

يمكننا إيجاد المحصلة من خلال رسم مضلع الأشعة (الشكل. 2.1).



الشكل 2.1: شعاع المحصلة لأربعة أشعة بطريقة تشكيل المضلع

Fig. 1.2: Vector resultant of four vectors by polygonal construction

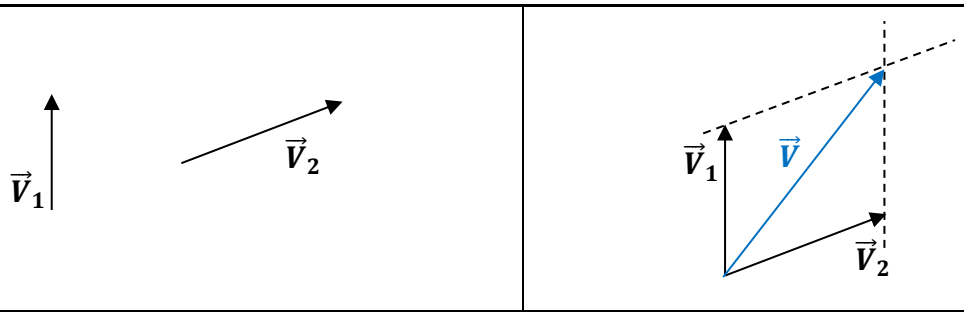
In the case of addition of two vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$, the resultant vector is written in the form:

في حالة جمع شعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$، يكتب شعاع المحصلة على الشكل التالي:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad (1.6)$$

the resultant vector is obtained from the graphical construction of the parallelogram of sides $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ (Fig. 1.3)

نستطيع إيجاد المحصلة بإنشاء متوازي الأضلاع المشكل من $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ (الشكل 3.1)



الشكل 3.1: الشعاع المحصلة الناتج عن متواري الأضلاع المشكل من $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$

Fig.1.3 : Vector parallelogram resulting from the two vectors $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$

1.2.4.2 Subtraction

If the vector $\vec{V}_2$ is subtracted from the vector $\vec{V}_1$, the operation reduces to an addition between the vector $\vec{V}_1$ and the vector $(-\vec{V}_2)$ (Fig. 1.4).

2.4.2.1 الطرح

إذا طرحنا الشعاع $(\vec{V}_2)$ من الشعاع $(\vec{V}_1)$ ، فيمكن اعتبار العملية جمعا بين الشعاع $\vec{V}_1$ والشعاع $(-\vec{V}_2)$ (الشكل 4.1).

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \qquad (1.7)$$

الشكل 4.1 : الشعاع المحصلة الناتج عن متواري الأضلاع المشكل من $(\vec{V}_1)$ و $(-\vec{V}_2)$

Fig. 1.4: Parallelogram resulting from the two vectors $\vec{V}_1$, $(-\vec{V}_2)$

We can use the relation (1.8) to analytically calculate the resulting vectors in the previous cases.

كما يمكننا أيضا استعمال العلاقة)1.8(من أجل الحساب التحليلي لمركبات شعاع المحصلة.

$$\vec{V} = \sum_{1}^{n} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

1.2.4.3 Multiplication

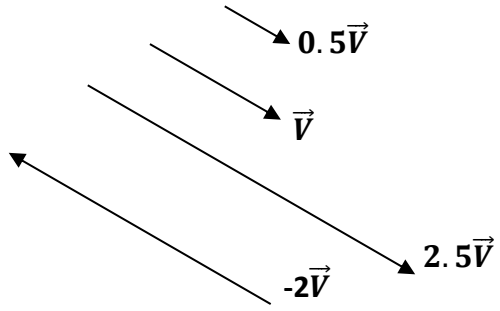
3.4.2.1 الجداء

1.2.4.3.1 Multiplication of a vector by a scalar

1.3.4.2.1 جداء شعاع بعدد حقيقي

The product of a vector $\vec{V}$ by a scalar p is the vector $p\vec{V}$, of the same direction as $\vec{V}$ and of modulus p times the modulus of $\vec{V}$ and whose sense is identical or opposite to that of $\vec{V}$, depending on whether p is positive or negative (Fig. 1.5).

جداء شعاع $(\vec{V})$ بعدد سلمي (p) ، هو الشعاع $(p\vec{V})$ الذي له نفس حامل $(\vec{V})$ وطويلته (p) مرة طويلة $(\vec{V})$ وجهته تتعلق بإشارة (p)، فهي نفسها إذا كان (p) موجبا وعكسها إذا كان سالبا (الشكل. 5.1).



الشكل 5.1: جداء شعاع $(\vec{V})$ بعدد سلمي (p).

Fig. 1.5 : Multiplication of a vector $(\vec{V})$ by a scalar (p).

1.2.4.3.2 Multiplication of a vector by a vector

2.3.4.2.1 جداء شعاع في شعاع

There are two types of this multiplication or this product:

نميز نوعين من عملية جداء شعاع في شعاع:

a) The scalar product:

a) . 1 Definition

أ) الجداء السلمي

أ) . 1 تعريف

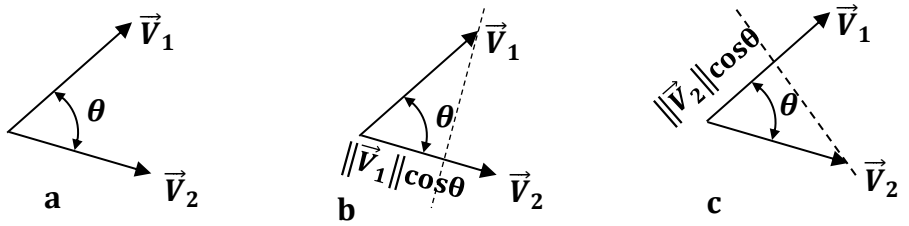
The scalar product of the vector $(\vec{V}_1)$ by the vector $(\vec{V}_2)$ denoted $(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$ is defined by:

يعرف الجداء السلمي بين $(\vec{V}_1)$ الشعاعين و $(\vec{V}_2)$ بالعلاقة التالية:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|\cos(\vec{V}_1,\vec{V}_2) \qquad (1.9)$$

$(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$, is the angle (θ) between the vector $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ (Fig. 1.6 a). It can be seen as the product of the orthogonal projection of $\vec{V}_1$ on $\vec{V}_2$ by $\|\vec{V}_2\|$ (Fig. 1.6 b) or the product of the orthogonal projection of $\vec{V}_2$ on $\vec{V}_1$ by $\|\vec{V}_1\|$ (Fig. 1.6 c).

$(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$، هي الزاوية بين الشعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ (الشكل. 6.1 a). يمكن أن يُرى أنه جداء المسقط العمودي للشعاع $(\vec{V}_1)$ على الشعاع $(\vec{V}_2)$ في $(\|\vec{V}_2\|)$ (الشكل. 6.1 b)، أو أنه جداء المسقط العمودي للشعاع $(\vec{V}_2)$ على الشعاع $(\vec{V}_1)$ في $(\|\vec{V}_1\|)$ (الشكل. 6.1 c)



الشكل 6.1: الجداء السلمي بين شعاعين.

Fig. 1.6 : Scalar product between two vectors.

a) . 2 Properties of the scalar product

أ) . 2 خصائص الجداء السلمي:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_2.\vec{V}_1 \qquad (1.10)$$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\vec{V}_3 \qquad (1.11)$$

$$p(\vec{V}_1.\vec{V}_2) = (p\vec{V}_1).\vec{V}_2 = \vec{V}_1.(p\vec{V}_2) \qquad (1.12)$$

a) . 3 Consequences

أ) . 3 استنتاجات:

$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$	$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$	$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}\vec{k} = 0$

$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$	$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|$	$\vec{V}.\vec{V} = \|\vec{V}\|^2$	$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}\vec{k} = 1$

If the components of $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ are respectively $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ then, we can also define the scalar product analytically by the following relation:

إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ هي $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ على الترتيب، فيمكننا تعريف الجداء السلمي تحليليا بالعلاقة التالية:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (1.13)$$

Example 1.3

1. Calculate the scalar product of the two vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$.
2 . Calculate the angle $\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

مثال 3.1

1 . أحسب الجداء السلمي للشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.
2 . أحسب الزاوية $\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

$$\vec{V}_1 = 0\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k} \qquad \vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Solution

1. The scalar product:

الحل

1 . الجداء السلمي:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times (-2)$$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -5$$

2. The angle between $\vec{V}_1$and $\vec{V}_2$:

2 . الزاوية بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$:

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} \qquad \|\vec{V}_1\| = 5$$

$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$		$\|\vec{V}_2\| = 3$
$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \cos\theta$	$cos\theta = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|}$	$cos\theta = \frac{-5}{5 \times 3}$
$cos\theta = -0.3333$		$\theta = 109.47°$
		$\theta = 250.52°$

b) The vector product:

b) . 1 Definition

The vector product between two vectors $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$ noted $(\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2)$ is a vector, which is characterized by:

- **Its direction is perpendicular to the vectors $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$**
- **Its modulus is given by the relation:**

ب) الجداء الشعاعي:

ب) . 1 تعريف

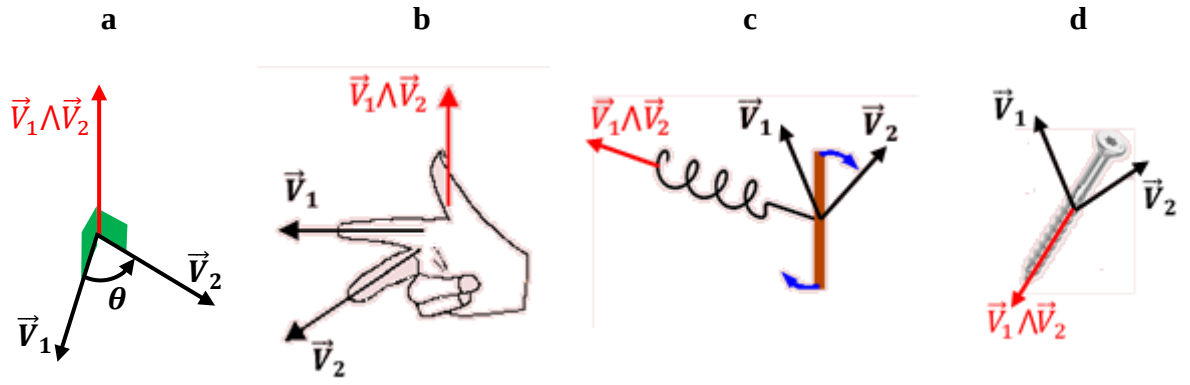
الجداء الشعاعي بين شعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ والذي يرمز له بـ $(\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2)$، هو شعاع يتميز بالخصائص التالية:

- حامله عمودي على كل من الشعاعين و.
- طويلته تحسب بالعلاقة التالية:

$$\|\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| sin\,(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \qquad (1.14)$$

- **its sense can be known by one of the following rules (Fig. 1.7):**

- يمكن التعرف على اتجاهه باتباع إحدى القواعد التالية (الشكل. 7.1):



الشكل 7.1: قواعد تعيين اتجاه الشعاع $(\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2)$

Fig. 1.7 : Rules for determining the direction of the vector $(\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2)$.

b) . 2 Properties of vector product: | ب) . 2 خصائص الجداء الشعاعي:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 \quad (1.15)$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \quad (1.16)$$

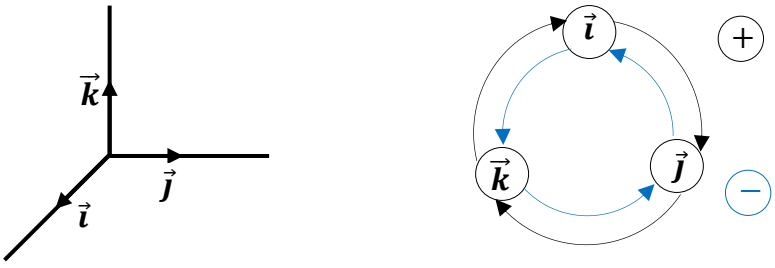
$$p(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (p\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (p\vec{V}_2) \quad (1.17)$$

b) . 3 Consequences | ب) . 3 استنتاجات:

$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$	$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$	$\vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$	$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$ $\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0}$ $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$
$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$	$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|$		$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}.\vec{\imath} = \vec{k}$ $\vec{\jmath}.\vec{k} = -\vec{k}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}$ $\vec{k}.\vec{\imath} = -\vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}$

In a three-dimensional reference frame, the vector product of two unit vectors gives the third if we have in the direct direction, on the other hand in the indirect direction we must precede it by a sign $(-)$.Thus the (Fig. 1.8) the two direct and indirect directions in an orthonormal Cartesian reference $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

في المعلم الفضائي، جداء شعاعي وحدة مختلفين يُنتج شعاع الوحدة الثالث إذا كان الجداء في الاتجاه المباشر، أما في الاتجاه الغير المباشر فتُضاف له الإشارة السالبة $(-)$ فقط. (الشكل. 8.1) يوضح الاتجاهين المباشر وغير المباشر في المعلم المتعامد والمتجانس.



الشكل 8.1: الإتجاه المباشر $(+)$ و العكسي $(-)$ لثلاثية أشعة الوحدة

Fig. 1.8 : Direct $(+)$ and indirect $(-)$ direction of a trihedral of unit vectors

إذا كانت مركبات الأشعة $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ في المعلم الكارتيزي $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ هي $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ على الترتيب، وإذا كان ناتج جدائهما الشعاعي هو $\vec{V}_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$، فإن العبارات التحليلية (18.1)، (19.1) و (20.1) تمكننا من حساب مركبات الشعاع $(\vec{V}_3)$.

In a Cartesian coordinate system $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, if the components of $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$, are respectively $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$, and if the result of their vector product is $\vec{V}_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$, the analytical expressions (1.18), (1.19) and (1.20) allows us to calculate the components of the vector $(\vec{V}_3)$, which are the result of the vector product.

$$x_3 = y_1z_2 - y_2z_1 \qquad (1.18)$$

$$y_3 = -(x_1z_2 - x_2z_1) \qquad (1.19)$$

$$z_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad (1.20)$$

هذه العبارات مستخرجة من مبدا الجداء المتصالب المطبق على مركبات الشعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ (الشكل 9.1).

These expressions are deduced from the cross multiplication principle applied to the components of the vectors $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$ (Fig. 1.9).

$$\vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ & y_1 & z_1 \\ & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & & z_1 \\ x_2 & & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & \\ x_2 & y_2 & \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}+\\-\end{matrix}$$

الشكل 9.1: الجداء التصالبي لمركبات شعاعين

Fig. 1.9 : Cross product of the components.

مثال 4.1

1 . أحسب الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

2 . أحسب الزاوية $\theta = (\vec{V}_1,\vec{V}_2)$.

Example 1.4

1. Calculate the vector product of the two vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$.

2 . Calculate the angle $\theta = (\vec{V}_1,\vec{V}_2)$.

$\vec{V}_1 = 0\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$	$\vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$

Solution

1. The vector product:

الحل

1 . الجداء الشعاعي:

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. The angle between $\vec{V}_1$and . $\vec{V}_2$

2 . الزاوية بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$:

$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}$		$\|\vec{V}_1\| = 5$
$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}$		$\|\vec{V}_2\| = 3$
$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{(-10)^2 + 8^2 + (-6)^2}$		$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = 10\sqrt{2}$
$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \sin\theta$	$sin\theta = \dfrac{\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|}$	$sin\theta = \dfrac{10\sqrt{2}}{5 \times 3}$
$sin\theta = 0.9428$		$\theta = 70.53°$ $\theta = 109.47°$

b) . 4 Applications

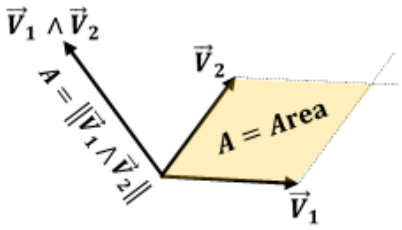
- **Calculation of areas**

In reality, the surfaces are vector quantities, they result from the vector product between two vectors, thus the surface vector $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ has as its modulus the area of the parallelogram delimited by $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$ (Fig. 1.10).

ب) . 4 تطبيقات

- **حساب المساحات**

في الحقيقة، إن السطوح هي مقادير شعاعية، تنتج من الجداء الشعاعي بين شعاعين، وبالتالي فإن شعاع السطح $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ يتميز بطويلة تقدر بمساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ (الشكل. 10.1).



الشكل 10.1: المساحة المشكلة بالشعاعين $(\vec{V}_1)$ و $(\vec{V}_2)$ تساوي طويلة الشعلع $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

Fig. 1.10 : The area formed by $(\vec{V}_1)$ and $(\vec{V}_2)$ equal to the modulus of $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

- **Calculation of volumes**

The volume of a parallelepiped (Fig. 1.11) formed by three non-coplanar vectors can be calculated by calculating

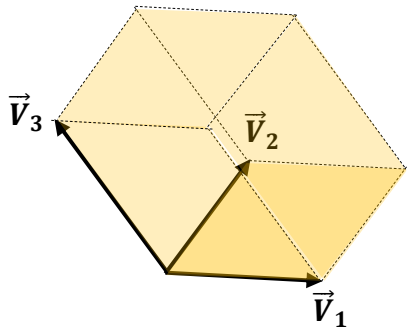
- **حساب الأحجام**

يمكننا حساب حجم متوازي المستطيلات (الشكل. 11.1) المؤلف من ثلاث أشعة لا تقع في نفس المستوي،

the absolute value of the mixed product (scalar and vector) between these three vectors defined by the relation:

وذلك بحساب الجداء المختلط (الشعاعي والسلمي) بين هذه الأشعة الثلاث، مستعملين العلاقة التالية:

$$v = |\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)| \qquad (1.21)$$



الشكل 11.1: الحجم المشكل من الأشعة الثلاث $(\vec{V}_1)$، $(\vec{V}_2)$ و $(\vec{V}_3)$.

Fig. 1.11 : Volume formed by the three vectors $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ and $\vec{V}_3$

C) The double vector product

The double vector product is defined by:

ج) الجداء الشعاعي المزدوج

يحسب الجداء الشعاعي المزدوج بالعلاقة التالية:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)\vec{V}_3 \qquad (1.22)$$

According to this relation, the result of a double vector product is a vector that belongs to the plane $(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$.

نتيجة الجداء الشعاعي المزدوج هي شعاع يقع في المستوي $(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$.

d) Orthogonal projection of the vectors

د) الإسقاط العمودي للأشعة

d).1 Orthogonal projection of a vector on an axis

د).1 المسقط العمودي لشعاع على مستقيم

The orthogonal projection $\vec{V}_\Delta$ of a vector $\vec{V}$ on a line Δ defined by its unit vector of orientation $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ is calculated by the following relation:

يحسب المسقط العمودي $\vec{V}_\Delta$ لشعاع $\vec{V}$ على مسقيم Δ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ بالعلاقة التالية:

$$\vec{V}_\Delta = (\vec{V}.\vec{u})\vec{u} \qquad (1.23)$$

Example 1.5

Find the orthogonal projection $\vec{V}_\Delta$ of the vector $\vec{V} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ on the line that passes through the points $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$.

مثال 5.1

أحسب المسقط العمودي $\vec{V}_\Delta$ للشعاع $\vec{V} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ على المستقيم Δ الذي يمر من النقطتين $A(1,2,1)$ و $B(-1,0,2)$.

Solution

first, let's look for the orientation unit vector of Δ

الحل

لنبحث أولا عن شعاع الوحدة التوجيهي للمسقيم Δ

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ $\quad \|\overrightarrow{AB}\| = 3$	$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ $\quad \vec{u} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$
$\vec{V}_\Delta = (\vec{V}.\vec{u})\vec{u}$	$\vec{V}_\Delta = \left(\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.\left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right)\right)\left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right)$
$\vec{V}_\Delta = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$	$\vec{V}_\Delta = \dfrac{1}{9}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$

d).2 The orthogonal projection of a vector on a plane

د).2 المسقط العمودي لشعاع على مستوٍ

The orthogonal projection $\vec{V}_\pi$ of a vector $\vec{V}$ on a plane π defined by its normal unit vector $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ is calculated by the following relation:

يحسب المسقط العمودي $\vec{V}_\pi$ لشعاع $\vec{V}$ على مستوٍ π معرف بشعاعه الناظم $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \delta\end{pmatrix}$ بالعلاقة التالية:

$$\vec{V}_\pi = \vec{n}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{n}) \qquad (1.24)$$

Example 1.6

Find the orthogonal projection $\vec{V}_\pi$ of the vector $\vec{V} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ on the plane xOy.

مثال 6.1

أحسب المسقط العمودي $\vec{V}_\pi$ للشعاع $\vec{V} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ على المستوي (xOy).

Solution

The unit vector normal to the xoy plane is $\vec{k}$.

الحل

شعاع الوحدة الناظم على المستوي (xOy) هو $\vec{k}$.

$$\vec{n} = \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{V}_\pi = \vec{n}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{n}) \qquad \vec{V}_\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{V}_\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{V}_\pi = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

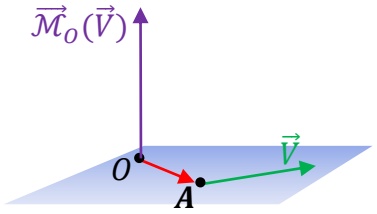
1.3 Moment of a vector with respect to a point.

3.1 عزم شعاع بالنسبة لنقطة.

The moment of a vector $\vec{V}$ which has as its origin the point A relative to a point B (Fig. 1.12) is defined by:

يُحسب عزم شعاع $\vec{V}$ مبدأه النقطة A بالنسبة لنقطة B (الشكل. 12.1) بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{V}) = \overrightarrow{BA}\wedge\vec{V} \qquad (1.25)$$



الشكل 12.1: عزم شعاع $(\vec{V})$ بالنسبة لنقطة (B)

Fig. 1.12 : Moment of the vector $\vec{V}$ with respect to the point B

يعبر عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة للنقطة B، عن القدرة التدويرية لهذا الشعاع حول هذه النقطة.

It represents the rotational power of the vector $\vec{V}$ around the point B.

مثال 5.1

لتكن ثلاث نقاط $A(1,1,0)$، $B(2,-3,1)$ و $C(4,0,-3)$ من الفضاء المنسوب للمعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. أحسب عزم الشعاع بالنسبة:

1 . النقطة (O).

2 . النقطة (C).

Example 1.5

Let be the three points $A(1,1,0)$, $B(2,-3,1)$ and $C(4,0,-3)$ of the space linked to the Cartesian reference frame $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Calculate the moment of the vector $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ with respect:

1 . To point (O).

2 . To point (C).

الحل

1 . عزم $(\vec{V})$ بالنسبة إلى (O):

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V} \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V})=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{V})=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

2 . عزم $(\vec{V})$ بالنسبة إلى (C):

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{V})=\overrightarrow{CA}\wedge\vec{V} \qquad \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{V})=\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{V})=\begin{pmatrix}13\\6\\11\end{pmatrix}$$

Solution

1 . Moment of $\vec{V}$ with respect to O:

2 . Moment of $\vec{V}$ with respect to C:

1.4 The torsors

1.4.1 Definition

To any set of vectors $\vec{V}_i$ applied to the points P_i, the torsor $[T]_A$ is associated with the point A, described by these two reduction elements $\vec{R}$ and $\vec{\mathcal{M}}_A$ such that:

$\vec{R}$ is the resultant of the vectors $\vec{V}_i$ and $\vec{\mathcal{M}}_A$ is the resultant of their moments with respect to A.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \qquad (1.26)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{V}_i \qquad (1.27)$$

For an A-torsor, the following notation is adopted:

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{cases} \qquad (1.28)$$

1.4.2 Distribution of moments

Let's express the moment of the vector system $\vec{V}_i$ at point A and then at point B.

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{V}_i \qquad \vec{\mathcal{M}}_B = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP}_i \wedge \vec{V}_i$$

Let's subtract $\vec{\mathcal{M}}_A$ from $\vec{\mathcal{M}}_B$.

$$\vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BP}_i \wedge \vec{V}_i - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{V}_i \qquad \vec{\mathcal{M}}_B - \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{BP}_i - \overrightarrow{AP}_i\right) \wedge \vec{V}_i$$

4.1 المُفتلات

1.4.1 تعريف

بكل مجموعة من الأشعة $\vec{V}_i$ المطبقة عند النقاط P_i ، نرفق مُفْتِلا $[T]_A$ بالنسبة لنقطة A ، متميزا بعنصري الإرجاع $\vec{R}$ و $\vec{\mathcal{M}}_A$ بحيث:

$\vec{R}$ هي محصلة الأشعة $\vec{V}_i$ و $\vec{\mathcal{M}}_A$ هو محصلة عزومها بالنسبة للنقطة A.

من أجل مفتل $[T]$ بالنسبة لنقطة A، نستعمل الترميز التالي:

2.4.1 توزيـع العزوم

لنعبر عن عزوم الأشعة $\vec{V}_i$ بالنسبة للنقطة A ثم بالنسبة للنقطة B.

لنطرح $\vec{\mathcal{M}}_A$ من $\vec{\mathcal{M}}_B$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B - \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{BP_i} + \overrightarrow{P_iA}\right) \wedge \vec{V}_i \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_B - \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}_i$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B - \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{BA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (1.29)$$

This relationship is called the relationship of moment distributions or moment field.

تسمى هذه العلاقة بعلاقة توزيع العزوم أو حقل العزوم

1.4.3 Operations on the torsors

1.4.3.1 Equivalence of two torsors

Two torsors are equivalent, if and only if, their reduction elements at the same point *A* are equal.

3.4.1 عمليات على المُفتلات

1.3.4.1 تكافؤ مُفتلين

يتكافؤ مُفتلان إذا وفقط إذا تساوى عنصريهما الإرجاعيين بالنسبة لنفس النقطة *A*.

$$[T_1]_A = [T_2]_A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A} \end{cases} \qquad (1.30)$$

1.4.3.2 Sum of two torsors

The sum of two torsors $[T_1]_A$ and $[T_2]_A$ is a torsor $[T]_A$ whose resultant $\vec{R}$ is the sum of the two resultants and the resulting moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ at the point *A* is the sum of the two moments at this same point.

2.3.4.1 جمع مُفتلين

جمع مُفتلين $[T_1]_A$ و $[T_2]_A$ هو مُفتل $[T]_A$ محصلته $\vec{R}$ هي جمع محصلتيهما و محصلة عزومه بالنسبة للنقطة *A* هي جمع محصلتي عزومهما بالنسبة لنفس النقطة *A*.

$$[T]_A = [T_1]_A + [T_2]_A \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A} \end{cases} \qquad (1.31)$$

1.4.3.3 Product of two torsors

It is a scalar that is equal to the sum of the scalar products of the resultant of one torsor by the moment of the other. To be able to calculate it, the two torsors must be expressed at the same reduction point.

3.3.4.1 جداء مُفتلين

هو عدد سلمي ينتج من جمع جداء محصلة المفتل الأول بعزم الثاني و جداء محصلة الثاني في عزم الأول. يشترط أن يكون عزمي المُفتلان محسوبان بالنسبة لنفس النقطة الإرجاع.

$$[T]_{1P} \odot [T]_{2P} = \vec{R}_1 . \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2P} + \vec{R}_2 . \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2P} \qquad (1.32)$$

1.4.4 Scalar invariant of a torsor

The scalar invariant or the automoment of a given torsor, is by definition the scalar product of the reduction elements at any point of this torsor.

4.4.1 الثابت السلمي لمُفتل

يعرف الثابت السلمي أو العزم الذاتي لمُفتل ما بأنه الجداء السلمي بين عنصري إرجاعه وهو نفسه بالنسبة لأي نقطة يحسب بالنسبة لها العزم.

$$I_{[T]} = \vec{R}.\vec{\mathcal{M}} \qquad (1.33)$$

1.4.5 Central axis of a torsor

The central axis (Δ) of a torsor with a non-zero resultant $\vec{R}$ is defined by the set of Points $P(x,y,z)$ of the space such that the moment of the torsor at these points is parallel to the resultant.

5.4.1 المحور المركزي لمُفتل

يعرف المحور المركزي (Δ) لمُفتل محصلته $\vec{R}$ غير معدومة بأنه مجموعة النقاط $P(x,y,z)$ من الفضاء التي من أجلها يكون عزم المفتل منطبقا على محصلته.

$$\forall P \in \Delta \Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_P = \alpha\vec{R} \qquad (1.34)$$

1.4.6 Step of a torsor

The step of a torsor of reduction elements $\vec{R}$ and $\vec{\mathcal{M}}_P$ is defined by the scalar quantity λ such that:

6.4.1 خطوة المُفتل

تعرف خطوة المثفتل ذا عنصري الإرجاع $\vec{R}$ و $\vec{\mathcal{M}}_P$ بأنه العدد السلمي λ بحيث:

$$\lambda = \frac{\vec{R}.\vec{\mathcal{M}}}{\|\vec{R}\|^2} \qquad (1.35)$$

1.4.7 Particular torsor

1.4.7.1 Slider torsor

A torsor with a non-zero resultant is a slider, if and only if, its scalar invariant is zero.

7.4.1 مُفتلات خاصة

1.7.4.1 مُفتل انسحابي (انزلاقي)

يكون المُفتل ذو المحصلة غير المعدومة انسحابيا، إذا وفقط إذا كان ثابته السلمي معدوما.

$$[T]_A \left(\begin{matrix}\textbf{Slider}\\ \text{إنسحاب}\end{matrix}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} I_{[T]_A} = \vec{R}.\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0} \\ \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases} \qquad (1.36)$$

1.4.7.2 Couple torsor

A non-zero torsor is a couple torsor, if and only if, its resultant is zero.

2.7.4.1 مُفتل المزدوجة

يكون المُفتل غير المعدوم مُفتل مزدوجة، إذا و فقط إذا كانت محصلته معدومة.

$$[T]_A\begin{pmatrix}\text{Couple}\\ \text{مزدوجة}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{R}=\vec{0}\\ \vec{\mathcal{M}}_A\neq\vec{0}\end{cases} \qquad (1.37)$$

Example 1.6

Let be the three vectors $\vec{V}_1=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+5\vec{k}$ $\vec{V}_2=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+4\vec{k}$ and $\vec{V}_3=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$ defined in a coordinate system $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ and related respectively to the points $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$ and $C(1,1,0)$.

1 . Determine the torsor $[T]_O$ associated with the system of vectors $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ and $\vec{V}_3$.

2 . Deduce therefrom the automoment of the torsor $[T]_O$.

3 . Calculate the step of $[T]_O$.

4 . Determine the central axis of the torsor vectorally and analytically.

مثال 6.1

لتكن الأشعة الثلاث $(\vec{V}_1=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+5\vec{k})$،

$(\vec{V}_2=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+4\vec{k})$ و $(\vec{V}_3=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k})$

المعرفة في المعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ والمرتبطة بالنقاط

$A(0,1,1)$ ، $B(1,0,1)$ و $C(1,1,0)$ على الترتيب.

1 . أوجد المُفتل $[T]_O$ المتولد عن جملة الأشعة $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$.

2 . استنتج العزم الذاتي للمُفتل $[T]_O$.

3 . أحسب خطوته.

4 . عين محوره المركزي شعاعيا وتحليليا.

Solution

1 . Determination of $[T]_O$:

الحل

1. تعيين $[T]_O$:

$\vec{R}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$	$\vec{R}=\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+5\vec{k}+2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+4\vec{k}+\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$
$\vec{R}=4\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+7\vec{k}$	
$\vec{\mathcal{M}}_o=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V}_1+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V}_2+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{V}_3$	
$\vec{\mathcal{M}}_o=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$	
$\vec{\mathcal{M}}_o=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$	$\vec{\mathcal{M}}_o=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

2 . The automoment of $[T]_O$: | **2. العزم الذاتي لـ $[T]_O$:**

$I_{[T]} = \vec{R}.\vec{\mathcal{M}}$	$I_{[T]} = \begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$	$I_{[T]} = -7$

3 . The step of $[T]_O$: | **3. خطوة $[T]_O$:**

$\lambda = \dfrac{\vec{R}.\vec{\mathcal{M}}}{\left\|\vec{R}\right\|^2}$	$\lambda = \dfrac{-7}{74}$

4 . The central axis of $[T]_O$:
Its vector equation is given by:

4. المحور المركزي لـ $[T]_O$:
معادلته الشعاعية تكتب على الشكل التالي:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O}{\left\|\vec{R}\right\|^2} + \alpha\vec{R}$$

Analytically: we pose | **تحليليا: نعوض في العلاقة السابقة قيم المركبات**

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{74}\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{74}\begin{pmatrix}-13\\15\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = -\frac{13}{74} + 4\alpha \\ y = \frac{15}{74} + 3\alpha \\ z = \frac{1}{74} + 7\alpha \end{cases}$

1.5 Derivative and integral of a vector

If the components (x, y, z) of a vector $\vec{V}$ depend on a scalar parameter t, the derivative and the integral of the vector $\vec{V}$ can be defined by the relation (1.38) and (1.39) successively.

5.1 إشتقاق و تكامل شعاع

إذا كانت المركبات (x, y, z) للشعاع $\vec{V}$ تتعلق بمتغير t، فإن مشتقة و تكامل الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة لهذا المتغير تعرفان بالعلاقة (38.1) و (39.1) على التوالي.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (1.38)$$

$$\int \vec{V}dt = \left(\int xdt\right)\vec{\imath} + \left(\int ydt\right)\vec{\jmath} + \left(\int zdt\right)\vec{k} \quad (1.39)$$

1.6 Operators and vectors

In a space provided with a system of orthonormal axes, if we can correspond to each point (x, y, z) a vector field $\vec{V}(x, y, z)$, and a scalar field $U(x, y, z)$, it is convenient to use the following operators:

6.1 المؤثرات و الأشعة

في الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس، إذا أرفقت كل نقطة (x, y, z) بالمقدار شعاعي $\vec{V}(x, y, z)$ و المقدار سلمي $U(x, y, z)$، فإن المؤثرات التالية تكون ضرورية:

1.6.1 Gradient

It is a differential vector operator, also called NABLA symbolized by ($\vec{\nabla}$) or ($\overrightarrow{grad}$), defined by (1.40). It applies to scalar functions.

1.6.1 التدرج

هو مؤثر تفاضلي شعاعي، يسمى أيضا نابلا، يرمز له بـ ($\vec{\nabla}$) أو ($\overrightarrow{grad}$)، يطبق على الدوال العددية و يحسب بالعلاقة التالية:

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (1.40)$$

Using this operator, we can define other operators.

باستعمال هذا المؤثر، يمكننا تعريف مؤثرات أخرى.

1.6.2 Divergence

It is a scalar defined by (1.41), it presents the scalar product between the vector ($\overrightarrow{grad}$) and a vector field $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$, it is noted $div(\vec{V})$.

2.6.1 التباعد

هو مقدار سلمي، ينتج من الجذاء السلمي بين شعاع التدرج ($\overrightarrow{grad}$) و حقل شعاعي ($\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$)، يرمز له بـ $div(\vec{V})$ و يحسب بالعلاقة التالية:

$$div(\vec{V}) = \overrightarrow{grad}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}\right)$$

$$div(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.41)$$

1.6.3 Rotational

It is a vector defined by (1.42), it presents the vector product between the vector $(\overrightarrow{grad})$ and a vector field $\vec{V}=V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}$, it is noted $rot(\vec{V})$.

3.6.1 الدوران

هو مقدار شعاعي، ينتج من الجذاء الشعاعي بين شعاع التدرج $(\overrightarrow{grad})$ و حقل شعاعي $(\vec{V}=V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k})$، يرمز له بـ $div(\vec{V})$ و يحسب بالعلاقة التالية:

$$rot(\vec{V})=\overrightarrow{grad}\wedge\vec{V}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\wedge\left(V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}\right)$$

$$rot(\vec{V})=\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.42)$$

1.6.4 The Laplacian

It is a scalar operator defined by the relation (1.43), it presents the square of the NABLA operator, it applies to the vector field to give a vector, or to the scalar field to give a scalar, it is denoted Δ.

4.6.1 لابلاسيان

هو مؤثر سلمي، ينتج من تربيع المؤثر نابلا، إذا طبق على حقل شعاعي يعطي شعاعا، وإذا طبق على حقل سلمي يعطي مقدارا سلميا، يرمز له بـ Δ و يحسب بالعلاقة التالية:

$$\Delta=\left(\vec{\nabla}\right)^2$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.43)$$

1.7 Resolved exercises | 7.1 تمارين محلولة

Exercise 1.7.1 | التمرين 1.7.1

Are the following vectors: $\vec{V}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{V}_2 = \vec{\imath} + \vec{k}$ and $\vec{V}_3 = \vec{\jmath} + \vec{k}$

1) Calculate $(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$ and $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.

2) Deduce the angle θ between $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$.

3) Calculate the following products $\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ and $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

4) Determine the triangle surface formed by the vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_3$.

لتكن الأشعة التالية: $\vec{V}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$، $\vec{V}_2 = \vec{\imath} + \vec{k}$ و $\vec{V}_3 = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

1. أحسب $(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$ و $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.

2. استنتج الزاية θ بين الشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

3. أحسب الجداءات التالية:

$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

4. عين مساحة المثلث المشكل بالسعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_3$.

Solution | الحل

1 . Calculation of $(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$ and $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.

1. حساب $(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$ و $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$.

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 1$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

2 . The angle θ between $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$.

2. استنتاج الزاوية θ بين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$

$$cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \theta = 60°$$

3 . Calculation of the product

$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ and $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

3. حساب الجداءات

$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ و $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = -2$$

$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$	$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

4 . The surface of the triangle formed by the vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_3$.

4. مساحة المثلث المشكل بالشعاعين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_3$.

$S = \frac{1}{2} \| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \|$	$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\|$	$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\|$	$S = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercise 1.7.2

Three points A, B and C of space have as coordinates $A(a,a,0)$, $B(0,a,a)$ and $C(a,0,a)$.

1 . Calculate the modules $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ and $\|\overrightarrow{BC}\|$.

2 . Deduce the nature of the triangle ABC.

3 . What must be the value of (a) for the surface (S) of the triangle ABC to be equal to $\sqrt{3}/2\ m^2$

4 . Calculate the volume of parallelepiped formed by $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{OC}$.

التمرين 2.7.1

ثلاث نقاط من الفضاء $A(a,a,0)$ ، $B(0,a,a)$ و $C(a,0,a)$.

1 . أحسب طويلة كل من: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

2 . استنتج طبيعة المثلث ABC.

3 . كم يجب أن تكون قيمة a حتى تكون مساحة المثلث ABC مساوية لـ $\frac{\sqrt{3}}{2} m^2$.

4 . أحسب حجم متوازي الأوجه الذي أساسه الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$.

Solution

1 . Calculation of the modules $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ and $\|\overrightarrow{BC}\|$.

الحل

1. حساب طويلة طويلة كل من $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$	$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}a$
$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix}$	$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}a$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$	$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}a$

2 . The nature of the triangle ABC.

Since:

2. استنتاج طبيعة المثلث ABC.

بما أننا وجدنا:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}a$$

therefore, the triangle ABC is equilateral.

و منه المثلث ABC متساوي الأضلاع.

3 . The value of (a):

We have:

3. قيمة a حتى تكون مساحة المثلث مساوية لـ $\frac{\sqrt{3}}{2}m^2$.

لدينا العلاقة:

$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$	$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}\right\|$	$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ a^2 \end{pmatrix}\right\|$
$S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$		

By equalizing the surface (S) calculated by the given surface (S):

بمساواة المساحة (S) المحسوبة مع قيمة المساحة المعطاة نستخرج قيمة

$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$a = 1\ m$

4 . The volume of the parallelepiped formed by $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ and $\overrightarrow{OC}$

4. حجم متوازي الأوجه الذي أساسه الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$.

$v = \left\|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})\right\|$	$v = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\|$	$v = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|$
$v = 2\ m^3$		

Exercise 1.7.3

Let be the following vectors: $\vec{V}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + b\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ and $\vec{V}_4 = -2\vec{\imath} + c\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

1 . Determine (a) and (b) so that the vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ are collinear.

2 . Determine the value of (c) so that the vectors $\vec{V}_3$ and $\vec{V}_4$ are perpendicular.

التمرين 3.7.1

لتكن الأشعة التالية: $\vec{V}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$، $\vec{V}_2 = 2\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + b\vec{k}$ و $\vec{V}_3 = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ و $\vec{V}_4 = -2\vec{\imath} + c\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

1 . عين a و b حتى يكون الشعاعان $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ منطبقان.

2 . عين c حتى يكون الشعاعان $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ متعامدان.

Solution

1 . Determination of (a) and (b).

$\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$ collinear, implies

الحل

1. تعيين (a) و (b).

الشعاعان $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ منطبقان فيستلزم:

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
$\begin{cases}2b - a = 0\\2 - b = 0\\a - 4 = 0\end{cases}$	$(a, b) = (4, 2)$

2 . Determination of (c).

$\vec{V}_3$ and $\vec{V}_4$ perpendicular, implies

2. تعيين قيمة (c).

الشعاعان $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_4$ متعامدان فيستلزم:

$\vec{V}_3 . \vec{V}_4 = \vec{0}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}-2\\c\\-3\end{pmatrix} = 0$
$-2 + 4c - 6 = 0$	$c = 2$

Exercise 1.7.4

Check that the four points $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ and $D(2,2,2)$ belong to the same plane.

التمرين 4.7.1

تحقق من أن النقاط $A(6,0,0)$، $B(0,6,0)$، $C(0,0,6)$ و $D(2,2,2)$ تنتمي إلى نفس المستوي.

Solution

To verify that four points belong to the same plane, it suffices to show that any base formed by these points occupies a zero volume. We will take for example the base $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ and $\overrightarrow{DC}$.

الحل

من أجل التحقق من أن النقاط الأربعة تنتمي إلى نفس المستوي، يكفي أن نثبت أن أي أساس مشكل من هذه النقاط يشغل حجما معدوما. فلنختر مثلا الأساس $\overrightarrow{DA}$، $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$.

$v = \left\vert \overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}\right)\right\vert$	$v = \left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\right\vert$
$v = \left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}\right\vert$	$v = 0$

Exercise 1.7.5

Find the orthogonal projection $\vec{P}$ of the vector $\vec{V} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ on the line that passes through the points $A(1,-2,1)$, $B(-1,-1,2)$.

التمرين 5.7.1

أوجد المسقط العمودي $\vec{P}$ للشعاع $\vec{V} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ على المستقيم المار بالنقطتين A (1,2,1) و B(-1,0,2).

Solution

The projection $\vec{P}$ of a vector $\vec{V}$ on a straight line of unit vector $\vec{u}$ is

الحل

المسقط العمودي $\vec{P}$ لشعاع $\vec{V}$ على المستقيم شعاع وحدته التوجيهي $\vec{u}$ هو:

$$\vec{P} = \left(\vec{V}.\vec{u}\right)\vec{u}$$

Let's look for $\vec{u}$ from the line AB

لنبحث عن شعاع الوحدة التوجيهي $\vec{u}$ للمستقيم AB

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\Vert \overrightarrow{AB}\right\Vert}$	$\vec{u} = \dfrac{-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}}$	$\vec{u} = \dfrac{-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}}{3}$

$$\vec{P} = \left((2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}).\left(\frac{-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}}{3}\right)\right)\left(\frac{-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}}{3}\right)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{9}(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$$

Exercise 1.7.6	**التمرين 6.7.1**
If the variable vector is:	**إذا كانت عبارة الشعاع بدلالة المتغير (t) هي:**

$$\vec{V}(t) = (t^3 + 2t)\vec{\imath} - 3e^{-2t}\vec{\jmath} + 2sin5t\vec{k}$$

Calculate at $t = 0$ the following quantities:		**فاحسب عند $(t = 0)$ المقادير التالية:**	
$\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$	$\left\|\frac{d\vec{V}(t)}{dt}\right\|$	$\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}$	$\left\|\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}\right\|$

Solution	**الحل**

$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = (3t^2 + 2)\vec{\imath} + 6e^{-2t}\vec{\jmath} + 10cos5t\vec{k}$	$\frac{d\vec{V}(0)}{dt} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 10\vec{k}$
$\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = 11.832$	
$\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = 6t\vec{\imath} - 12e^{-2t}\vec{\jmath} - 50sint\vec{k}$	$\frac{d^2\vec{V}(0)}{dt^2} = 12\vec{\jmath}$
$\left\|\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}\right\| = 12$	

Exercise 1.7.7	**التمرين 7.7.1**
If the variable vector is:	**إذا كانت عبارة الشعاع بدلالة المتغير (t) هي:**

$$\vec{V}(t) = (3t^2 - 1)\,\vec{\imath} - (2t - 3)\vec{\jmath} + (3t^2 - 4t)\vec{k}$$

Calculate at $t = 0$ the following quantity.	**أحسب عند $(t = 0)$ المقدار التالي:**

$$\int_1^2 \vec{V}(t)dt$$

Solution | **الحل**

$$\int_1^2 \vec{V}(t)dt = \int_1^2 \left((3t^2-1)\vec{i} - (2t-3)\vec{j} + (6t^2-4t)\vec{k}\right) dt$$

$$\int_1^2 \vec{V}(t)dt = (t^3-t)\vec{i} - (t^2-3t)\vec{j} + (2t^3-2t^2)\vec{k}\Big]_1^2$$

$$\int_1^2 \vec{V}(t)dt = 6\vec{i} + 8\vec{k}$$

Exercise 1.7.8 | التمرين 8.7.1

In a space provided with a system of orthonormal axes of the reference $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, to each point (x,y,z) corresponds a vector field $\vec{V}(x,y,z)$ and a scalar field $F(x,y,z)$.

في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد و متجانس مرجعه $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، يُرفق بكل نقطة (x,y,z) حقلا شعاعيا $\vec{V}(x,y,z)$ و حقلا سلميا $F(x,y,z)$ بحيث:

$$\vec{V}(x,y,z) = xz\vec{i} - y^2\,\vec{j} + 2x^2\,y\vec{k}$$

$$F(x,y,z) = x^2\,yz^3$$

1 . Calculate: | **1. أحسب:**

$\overrightarrow{grad}F$	ΔF	$div\vec{V}$	$\overrightarrow{rot}(\vec{V})$	$\Delta\vec{V}$

2 . Find a scalar field $\phi(x,y,z)$ which check the conditions: | **2. أوجد حقلا سلميا $\phi(x,y,z)$ يحقق الشرطين التاليين:**

$$\vec{V}(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\phi(x,y,z) \qquad \phi(1,1,1) = 4$$

Solution | **الحل**

1 – Calculation of: | **1. حساب المقادير:**

$$\overrightarrow{grad}F = \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}F = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$$

$\Delta F = \frac{\partial^2(x^2yz^3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x^2yz^3)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(x^2yz^3)}{\partial z^2}$	$\Delta F = 2yz^3 + 6x^2yz$

$$div\vec{V} = \overrightarrow{grad}.\vec{V}(x,y,z)$$

$$div\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + 2x^2y\vec{k}\right)$$

$$div\vec{V} = z - 2y$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \overrightarrow{grad}\wedge\vec{V}(x,y,z)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + 2x^2y\vec{k}\right)$$

$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\vec{V} = 2x^2\vec{\imath} + (x - 4xy)\vec{\jmath}$

$$\Delta\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{V}(x,y,z)$$

$$\Delta\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + 2x^2y\vec{k}\right)$$

$$\Delta\vec{V}(x,y,z) = -2\vec{\jmath} + 4y\vec{k}$$

2 . The scalar field $\phi(x,y,z)$.
We have :

2. الحقل السلمي $\phi(x,y,z)$.
لدينا:

$\vec{V}(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\phi$	$xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + 2x^2y\vec{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} = xz \\ \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial y} = -y^2 \\ \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial z} = 2x^2y \end{cases}$	$\frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} = xz$	$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2z + C(y,z)$

$\frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}$	$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -y^2$	$C(y,z) = -\frac{1}{3}y^3 + C(z)$

$(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{3}y^3 + C(z)$	$\frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial z} = xz + \frac{\partial C(z)}{\partial z}$
$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 2x^2y - xz$	$C(z) = 2x^2yz - \frac{1}{2}xz^2 + C$
$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2yz - \frac{1}{2}xz^2 + C$	$\phi(1,1,1) = 4$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} + C = 4$	$C = \frac{7}{3}$
$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2yz - \frac{1}{2}xz^2 + \frac{7}{3}$	

Exercise 1.7.9

In a space provided with a system of orthonormal axes of the reference $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, We consider three vectors $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ and $\vec{V}_3$ related, respectively, to the points $A(2,1,3)$, $B(1,1,5)$, $C(0,2,0)$ and defined by :

$\vec{V}_1 = t\,\vec{j} + 2t\vec{k}$	$\vec{V}_2 = 3t\vec{i} + t\,\vec{j} + t\vec{k}$	$\vec{V}_3 = \vec{i} - t\,\vec{j} + 2\vec{k}$

1 . What are the reduction elements of the $[T]_O$ associated with this vector system?

2 . Calculate the scalar invariant of this torsor.

التمرين 9.7.1

في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد و متجانس مرجعه $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر ثلاثة أشعة $\vec{V}_1$، $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$، بداياتها على الترتيب $A(2,1,3)$، $B(1,1,5)$ و $C(0,2,0)$ و معرفة كما يلي:

1. ماهي عناصر المُفتل $[T]_O$ المرفق بهذه الجملة من الأشعة؟

2. أحسب ثابته السلمي.

3 . What are the possible values of t for the scalar invariant to be zero?

4 . Is there a value of t (if yes, calculate it) for which the torsor reduces to a couple?

3. ماهي قيم (t) الممكنة لكي يكون الثابت السلمي معدوما؟

4. هل توجد قيم لـ (t) (أحسبها إذا كان الجواب بنعم) و التي من أجلها يكون $[T]_O$ مُفتل مزدوجة؟

Solution

1 . The reduction elements of the $[T]_O$:

الحل

1. عناصر المُفتل $[T]_O$:

$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$	$\vec{R} = t\vec{j} + 2t\vec{k} + 3t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k} + \vec{i} - t\vec{j} + 2\vec{k}$
$\vec{R} = (3t+1)\vec{i} + t\vec{j} + (3t+2)\vec{k}$	

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_3$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} -t \\ -4t \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t \\ 14t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} -5t+4 \\ 10t \\ -2 \end{pmatrix}$
$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = (3t+1)\vec{i} + t\vec{j} + (3t+2)\vec{k} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = (-5t+4)\vec{i} + 10t\vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$	

2 . The scalar invariant of the torsor $[T]_O$:

2. الثابت السلمي للمُفتل $[T]_O$:

$I_{[T]_O} = \vec{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$	$I_{[T]_O} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \\ 3t+2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -5t+4 \\ 10t \\ -2 \end{pmatrix}$	$I_{[T]_O} = -5t^2 + t$

3 . The values of t so that $I_{[T]_O}$ is zero :

3. قيم (t) التي من أجلها يكون الثابت السلمي معدوما:

$I_{[T]_O} = 0$	$-5t^2 + t = 0$	$t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{1}{5}$

4 . For the torsor to be reduced to a couple, it is necessary that :

4. لكي يؤول $[T]_O$ إلى مُفتل مزدوجة، يجب أن تنعدم محصلته، أي:

$\vec{R} = \vec{0}$	$\begin{cases} 3t + 1 = 0 \\ t = 0 \\ 3t + 2 = 0 \end{cases}$	$t = -\frac{1}{3}$ $t = 0$ $t = -\frac{2}{3}$

There is no value for (t) that can verify these three equations at the same time, so the torsor $[T]_O$ cannot be reduced to a couple.

لا يمكن إيجاد أي قيمة لـ (t) بحيث تتحقق المعادلات الثلاث في آن واحد، و منه لا يمكن أن يؤول $[T]_O$ إلى مُفتل مزدوجة.

Exercise 1.7.10

In the space linked to the orthonormal reference frame $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, let be the torser $[T]_O$, defined by:

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = a\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - b\vec{k} \end{cases}$$

1 . Is the torsor $[T]_O$ a couple?

2 . Calculate (a) so that $[T]_O$ is a slider.

3 . Determine its central axis (Δ).

4 . What is the value of the moment on the central axis?

5 . Calculate (b), knowing that the minimum distance between (Δ) and (O) is $3/2$.

التمرين 10.7.1

في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد و متجانس مرجعه $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$، نعتبر المُفتل $[T]_O$ المعرف بما يلي:

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ b > 0$$

1. هل المُفتل $[T]_O$ مُفتل مزدوجة؟

2. أحسب (a) حتى يكون $[T]_O$ انسحابيا.

3. أوجد معادلة محوره المركزي (Δ).

4. ماهي قيمة العزم على هذا المحور؟

5. أحسب (b)، علما أن أصغر مسافة بين (Δ) و (O) هي $3/2$.

Solution

1 . For a torsor to be a couple, it is necessary that $\vec{R} = \vec{0}$, which is not the case here. Then $[T]_O$ is not a couple.

2 . Calculation of (a) so that $[T]_O$ is a slider:

الحل

1. لكي يكون المُفتل مزدوجة، يجب أن يتحقق الشرط $(\vec{R} = \vec{0})$، و الذي نفتقده في هذه الحالة، وعليه فالمُفتل $[T]_O$ ليس بمُفتل مزدوجة.

2. حساب (a) حتى يكون $([T]_O)$ انسحابيا:

$$[T]_O \begin{cases} \textbf{slider} \\ \text{انسحاب} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = 0$$

$(a\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}).(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - b\vec{k}) = 0$	$2a - 2 = 0$	$a = 1$

3 . Determination of the central axis : | **3. تحديد المحور المركزي:**

$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}_O}}{\|\vec{R}\|^2} + \alpha\vec{R}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -b \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x = \frac{2}{5}b + \alpha \\ y = \frac{1}{5}b - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = b \\ z = 1 \end{cases}$

4 . The value of the moment on the central axis : | **4. قيمة العزم على المحور المركزي:**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\big)_{\Delta} = (\overrightarrow{\mathcal{M}_O}.\vec{u})\vec{u}$$

Where $\vec{u}$ is the direction vector of the central axis Δ. | **حيث ($\vec{u}$) هو شعاع الوحدة التوجيهي للمحور المركزي (Δ).**

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\big)_{\Delta} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\big)_{\Delta} = \vec{0}$

5 – The value of (b) :
The distance between Δ and O is minimal if | **5. قيمة (b):**
تكون المسافة بين (Δ) و (O) أصغر ما يمكن عندما:

$$\overrightarrow{OP}.\vec{u} = 0$$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}b+\alpha \\ \frac{1}{5}b-2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=0$	$\frac{2}{5}b+\alpha-\frac{2}{5}b+4\alpha=0$	$\alpha=0$

So on this condition: | **و منه ينتج عن ذلك:**

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}b \\ \frac{1}{5}b \\ 1 \end{pmatrix}$	$\|\overrightarrow{OP}\|=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{5}b\right)^2+\left(\frac{1}{5}b\right)^2+1=\frac{9}{4}$	$b=\pm\frac{5}{2}$

Since ($b>0$) so : | **و بما أن ($b>0$) ينتج:**

$$b=\frac{5}{2}$$

1.8 Additional exercises | 8.1 تمارين إضافية

Exercise 1.8.1 | التمرين 1.8.1

Using the scalar and the vector product, find the shortest distance between the point $O(0,0,0)$ and the plane formed by the points $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$ and $C(1,1,0)$.

باستعمال الجداء السلمي و الجداء الشعاعي، أوجد أقصر مسافة بين النقطة $O(0,0,0)$ و المستوي الذي يشمل النقاط $A(0,1,1)$، $B(1,0,1)$ و $C(1,1,0)$.

Answer: $2/\sqrt{3}$ **الجواب:**

Exercise 1.8.2 | التمرين 2.8.1

The vertices of a triangle are located at the points $A(2,1,-1)$, $B(-1,3,2)$ and $C(1,-2,1)$.

Find the length of the median of the segment AB.

إحداثيات رؤوس مثلث في المعلم الفضائي هي : $A(2,1,-1)$، $B(-1,3,2)$ و $C(1,-2,1)$.

أوجد طول متوسط القطعة AB.

Answer: $\frac{1}{2}\sqrt{66}$ **الجواب:**

Exercise 1.8.3 | التمرين 3.8.1

Let be the two vectors: **ليكن الشعاعان:**

$\vec{V}_1 = x^2\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + xz\vec{k}$ $\vec{V}_2 = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath} - xyz\vec{k}$

Calculate:
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ **at the point** $(1,-1,2)$

أحسب:
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$ عند النقطة $(1,-1,2)$

Answer:	$-4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$	**الجواب:**

Exercise 1.8.4	التمرين 4.8.1
Find the two vectors $\vec{V}_1$ and $\vec{V}_2$, knowing that :	**أوجد الشعاعان ($\vec{V}_1$) و ($\vec{V}_2$)، علما أن:**
$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$	$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 8\vec{\imath} - 14\vec{\jmath} + \vec{k}$

Answer:	$\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$	$\vec{V}_2 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$	الجواب:

Exercise 1.8.5	التمرين 5.8.1
Using the dot product, find all possible angles between the diagonal halves of a cube with side a.	**باستعمال الجداء السلمي، أوجد جميع الزوايا الممكنة بين أنصاف أقطار مكعب ضلعه (a).**

Answer:	$\theta_1 = 70.528°$	$\theta_2 = 109.471°$	$\theta_3 = 180°$	الجواب:

الفصل 2
القوى و العزوم

Chapter 2
Forces and Moments

2.1 Introduction

In this chapter, we will touch on two important and fundamental physical quantities in mechanics, namely Force and Moment. Their importance is highlighted in the Static and Kinematic, and their relationship is closely related to the nature of movement of objects. We also discuss their modeling and mathematical representation in the Problems and exercises.

1.2 مقدمة

في هذا الفصل، سنتطرق إلى مقدارين فيزيائيين مهمين و أساسيين في الميكانيك، ألا و هما القوة و العزم. تبرز أهميتهما في علم السكون و علم التحريك، و يعتبر ارتباطهما ارتباطا وثيقا بطبيعة الحركة للأجسام. كما نتطرق إلى نمذجتهما و تمثيلهما رياضياتيا في المسائل و التمارين.

2.2 Definition and physical meaning of force

A force is a modeling of a mechanical action that can be exerted on an object by imposing on it a deformation or a variation in its state of motion or both at the same time. (Fig. 1.2) shows some examples of force in our daily life.

2.2 تعريف القوة و مفهومها الفيزيائي

القوة هي نمذجة لفعل ميكانيكي يمكن أن يؤثر على جسم ما، فيؤدي إلى تغيير شكله أو حالة الحركته أو كليهما في نفس الوقت (الشكل. 1.2) يوضح بعض الأمثلة عن القوة في حياتنا اليومية.

الشكل 1.2 أمثلة على القوى

Fig. 2.1: Examples of force.

2.2 Mathematical representation of the force

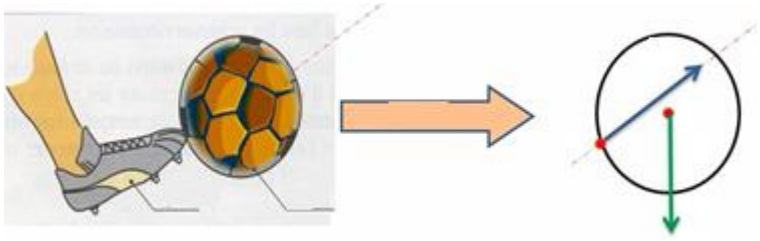
The forces are represented by vectors. Possessing the general properties of the vectors seen in the previous chapter,

2.2 التمثيل الرياضياتي للقوة

تمثل القوة بشعاع، له مميزات و خصائص الأشعة التي رأيناها في الفصل السابق، هذه المميزات هي:

نقطة البداية أو نقطة التطبيق، حامل اتجاه (الشكل 2.2) و شدة معبر عليها بالنيوتن N.

they are characterized by an intensity or a modulus expressed in Newton N, a direction, a sense (Fig. 2.2) and a point of application.



الشكل 2.2: خصائص قوة تأثير القدم على الكرة

Fig. 2.2: Characteristics of the force of impact of the foot on the ball

3.2 عمليات على القوى

1.3.2 تركيب القوى

بإمكاننا تعويض مجموعة من القوى $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، $\vec{F}_3$،... تؤثر في آن واحد على صلب، بقوة وحيدة يكون لها نفس الأثرعلى الصلب. هذه القوة تسمى بالمحصلة و نرمز لها عموما بالزمز $\vec{R}$، و تُعتبر الجمع الشعاعي لكل القوى المؤثرة على الصلب S.

2.3 Operations on the forces

2.3.1 Composition of forces

We can replace several forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$ acting on a solid at the same time, by a single force which will have the same effect on the solid. This force is called the resultant R, it is the vector sum of all the forces exerted on the solid.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} \qquad (2.1)$$

مثال 1.2

أوجد بيانيا ثم حسابيا، محصلة القوى الثلاث الموضحة في (الشكل 3.2)

Example 2.1

Graphically and then analytically calculate the resultant of the three forces represented in the (Fig. 2.3).

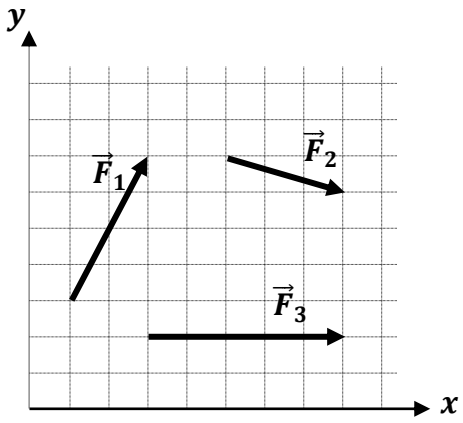


Fig. 2.3 **الشكل 3.2**

Solution :

The resultant by the graphical method or the polygon method (Fig. 2.4), gives us :

الحل:

بيانيا يمكن سحب الأشعة تباعا الواحد تلو الآخر، حتى نُغلق المضلع الذي تُشكله بشعاع المحصلة، كما هو موضح في (الشكل. 4.2)

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The resultant by the analytical method is: **بالطريقة الحسابية تكون المحصلة:**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

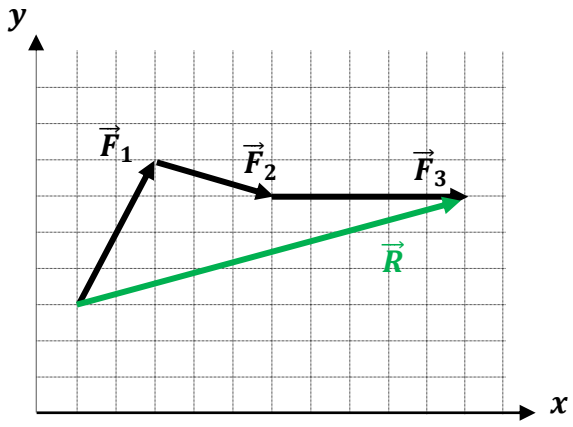


Fig. 2.4 **الشكل 4.2**

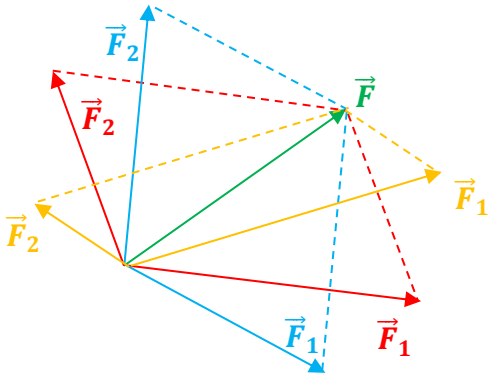
2.3.2 Decomposition of forces

A force $\vec{F}$ can be decomposed in a plane into two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$, each following a determined direction (Fig 2.5).
Whatever the directions of $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$, they verify the relationship :

2.3.2 تحليل القوى

يمكن لقوة $(\vec{F})$ أن تُحلل في مستوٍ إلى قوتين $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$، كل منهما وفق منحى واتجاه معينين (الشكل 5.2).
مهما يكن منحى واتجاه كل من $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$، فإنهما تحققان العلاقة:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (2.2)$$



الشكل 5.2: تحليل قوة $(\vec{F})$.

Fig. 2.5: Decomposition of force $\vec{F}$.

Example 2.2

Find the components of each force presented in the (Fig 2.6).

مثال 2.2

أوجد مركبتي كل قوة من القوى الموجودة في (الشكل 6.2).

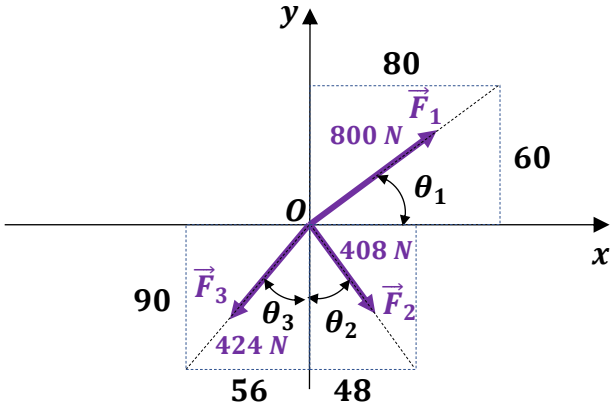


Fig. 2.6 الشكل 6.2

Solution : | **الحل:**

$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800cos\theta_1 \\ 800sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 408cos\theta_2 \\ -408sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -424cos\theta_3 \\ -424sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$cos\theta_1 = \frac{0.8}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} = 0.8$		$sin\theta_1 = \frac{0.6}{\sqrt{0.8^2 + 0.6^2}} = 0.6$
$cos\theta_3 = \frac{0.9}{\sqrt{0.56^2 + 0.9^2}} = 0.8009$		$sin\theta_3 = \frac{0.56}{\sqrt{0.56^2 + 0.9^2}} = 0.4983$
$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 640 \\ 480 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 352.9411 \\ -188.2352 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -339.6226 \\ -211.3207 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.3.3 Force projections

3.3.2 إسقاطات القوة:

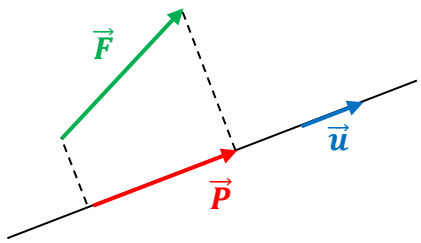
2.3.3.1 Orthogonal projection of a force on a straight line

1.3.3.2 المسقط العمودي لقوة على مستقيم

The orthogonal projection of a force $\vec{F}$ (Fig. 2.7) on a straight line having a unit vector $\vec{u}$ is given by the relation :

المسقط العمودي لقوة $(\vec{F})$ على خط مستقيم شعاع توجيهه $(\vec{u})$ (الشكل 7.2) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{P} = (\vec{F}.\vec{u})\vec{u} \qquad (2.3)$$



الشكل 7.2: الإسقاط العمودي لقوة على خط مستقيم.

Fig. 2.7: Orthogonal projection of a force on a straight line.

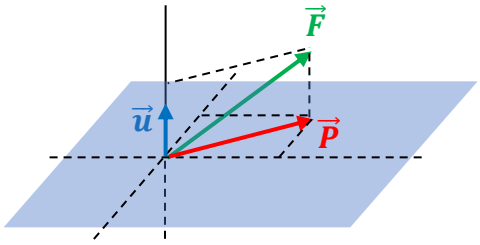
2.3.3.2 Orthogonal projection of a force on a plane

2.3.3.2 المسقط العمودي لقوة على مستوي

The orthogonal projection of a force $\vec{F}$ on a plane possessing a normal unit vector $\vec{n}$ (Fig. 2.8) is given by the relation :

المسقط العمودي لقوة $(\vec{F})$ على خط مستوي شعاعه النظم $(\vec{n})$ (الشكل 8.2) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{P} = \vec{n} \wedge (\vec{F} \wedge \vec{n}) \qquad (2.4)$$



الشكل 8.2: الإسقاط العمودي لقوة على خط مستوي.

Fig. 2.8: Orthogonal projection of a force on a plane.

Example 2.3

Find the orthogonal projection of the force $\vec{F} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ on:
a). The line that passes through the points $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$.
b). The plane xOy.
c). the plane defined by the points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
d). Deduce the normal component of $\vec{F}$ in each of the previous cases.

مثال 3.2

أوجد المسقط العمودي للقوة $\vec{F} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ على:
أ). المستقيم (Δ) الذي يمر من النقطتين $A(1,2,1)$ و $B(-1,0,2)$.
ب). المستوي (xOy)
ج). المستوي المحدد بالنقاط $A(1,0,0)$، $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$.
د). استنتج مركبة $\vec{F}$ العمودية في كل حالة من الحلات السابقة.

Solution

a. The orthogonal projection of $\vec{F}$ on Δ:

first, let's look for the orientation unit vector of Δ

الحل

أ). المسقط العمودي للقوة $\vec{F}$ على (Δ):

لنبحث أولا عن شعاع الوحدة التوجيهي للمسقيم (Δ)

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=3$	$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$	$\vec{u}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$
$\vec{F}_{\Delta}=(\vec{F}.\vec{u})\vec{u}$		$\vec{F}_{\Delta}=\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\right)\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$	
$\vec{F}_{\Delta}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$		$\vec{F}_{\Delta}=\frac{1}{9}(2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k})$	

b. The orthogonal projection of $\vec{F}$ on xOy:

The unit vector normal to the xoy plane is $\vec{k}$.

ب). المسقط العمودي للقوة $\vec{F}$ على (xOy):

شعاع الوحدة الناظم على المستوي (xOy) هو $\vec{k}$.

$\vec{n}=\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{F}_{xOy}=\vec{n}\wedge(\vec{F}\wedge\vec{n})$	$\vec{F}_{xOy}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$
$\vec{F}_{xOy}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$		$\vec{F}_{xOy}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

c. The orthogonal projection of $\vec{F}$ on plane defined by ponts A, B and C:

The unit vector $\vec{n}$ normal to the plane by ponts A, B and C is:

ج). المسقط العمودي للقوة $\vec{F}$ على المستوي المحدد بالنقاط A، B و C:

شعاع الوحدة الناظم على المستوي (xOy) هو $\vec{k}$.

$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|},$	$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

By applying the relationship (2.4)

بتطبيق العلاقة (4.2):

$\vec{P}=\vec{n}\wedge(\vec{F}\wedge\vec{n})$	$\vec{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
$\vec{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$	$\vec{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-5\\1\end{pmatrix}$

d. The normal component of $\vec{F}$ in each cases:

د). استنتاج مركبة $\vec{F}$ العمودية في كل حالة :

(Δ)	$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\Delta}$	$\vec{F}_{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_{\perp} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$
(xOy)	$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{xOy}$	$\vec{F}_{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(ABC)	$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{ABC}$	$\vec{F}_{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_{\perp} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.4 Classification of forces

The forces are classified according to one of the following three criteria :

2.4.1 Remote forces, contact forces

2.4.1.1 Remote forces

A remote force is exerted between solids that can be separated by vacuum or fluid air or otherwise. there are three kinds of remote forces :

*** <u>The forces of gravitation</u>:**

They are exerted between the stars; between the earth and terrestrial objects. The weight of a body is essentially a gravitational force. These are attractive forces.

*** <u>Electrical forces</u>:**

They are exerted between two objects carrying electrical charges. They can be both attractive and repulsive.

*** <u>Magnetic forces</u>:**

They are exerted between magnets or between magnets and certain materials (in particular iron). They can also be attractive or repulsive.

4.2 تصنيف القوى:

تصنف القوى على حسب أحد المعايير الثلاثة التالية :

1.4.2 القوى البعدية و القوى التلامسية

1.1.4.2 القوى البعدية:

هي القوى التي يظهر أثرها بين الأجسام عن بعد بغض النظر عن ما يفصل بينها من فراغ أو مائع أو غير ذلك. توجد ثلاث أنواع من القوى البعدية:

***<u>قوى الجاذبية</u>:**

تتبادلها الأجسام الكتلية كالأجرام السماوية و النجوم، نجدها بين الأرض والأجسام الأرضية. وزن الجسم هو في الأساس قوة الجاذبية بينه و بين الأرض. هذه القوى جاذبة على الإطلاق.

***<u>القوى الكهربائية</u>:**

تكون كأفعال متبادلة تمارس بين جسمين يحملان شحنات كهربائية. يمكن أن تكون تجاذبية أو تنافرية.

*** <u>القوى المغناطيسية</u>:**

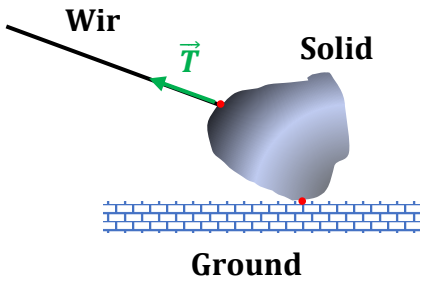
عبارة عن قوى متبادلة بين المغانط فيما بينها أو بين المغناط و بعض المعادن (خاصة الحديد). يمكن أن تكون أيضا تجاذبية أو تنافرية.

2.4.1.2 Contact forces (connection)

It is mandatory that there is contact between the two objects for a contact force to be born. For example, the tensile force of a wire, the reaction of the ground, applies to the solid-wire and solid-ground contact points (Fig. 2.9).

2.1.4.2 القوى التلامسية (الوصلات):

في هذا النوع من القوى، من الضروري أن يكون هناك اتصال بين الأجسام الصلبة حتى تولد قوة تماس أو كما تسمى أحيانا قوة اتصال. على سبيل المثال ، تنطبق قوة الشد للسلك، رد فعل الأرض، على نقاط الاتصال سلك-جسم و أرض- جسم (الشكل 9.2).



الشكل 9.2: نقاط (باللون الأحمر) التطبيق لقوى الاتصال.

Fig. 2.9: Points (in red) of application of contact forces.

2.4.2 Localized forces, distributed forces

2.4.2.1 Localized forces

A localized force is applied at a point on an object or on a point object. For example, a wire pulls an object with a force $\vec{T}$ located at the attachment point (Fig. 2.9).

2.4.2.2 Distributed forces

A distributed force is applied to a set of points distributed over a line, a surface or in a volume of the object. For example, the weight $\vec{P}$ is distributed throughout the volume of an object.

2.4.2 القوى النقطية و القوى المتوزعة

1.2.4.2 القوى النقطية:

القوة النقطية، يكون تأثيرها أو تطبيقها محدد في نقطة واحدة من الجسم أو على جسم نقطي. فمثلا عندما يشد حبل جسما ما فإن قوة التوتر $(\vec{T})$ تكون مطبقة عند نقطة تثبيت الحبل بالجسم (الشكل 9.2).

2.2.4.2 القوى المتوزعة:

هي القوى التي يكون تطبيقها في مجموعة من النقاط موزعة على خط أو سطح من الجسم أو على حجم الجسم بأكمله. فمثلا ، الثقل $(\vec{P})$ يكون موزعا على جميع أنحاء حجم الجسم.

2.4.3 Internal forces, external forces

2.4.3.1 Internal forces:

3.4.2 القوى الداخلية و القوى الخارجية

1.3.4.2 القوى الداخلية:

Internal forces are those that are exerted by objects internal to the system. For example, muscle forces are internal forces in humans or animals.

2.4.2.2 external forces

External forces are exerted by objects external to the system. Like the weight $\vec{P}$ of a solid, for example, which is an external force because it is applied by the Earth.

هي قوى تُنشؤها الأجزاء الداخلية من الجملة، فعلى سبيل المثال ، قوى العضلات هي قوى داخلية في جسم الإنسان أو الحيوان.

2.4.2.2 القوى الخارجية:

القوى الخارجية هي القوى التي تُنشؤها الأجزاء الخارجية عن النظام. مثل الثقل $(\vec{P})$ لجسم ما هو قوة خارجية عن الجسم لأن المتسبب في وجودها هي الأرض.

Example 2.4

Of the following mechanical actions, say whether they are contact or remote. Specify the ones that are localized and the one that are distributed in surface or volume.

1. Hammer blow on a nail.
2. Earthly attraction.
3. Action exerted by the wind on a sail.
4. Action exerted by a magnet on an iron nail.
5. Action exerted by an arrow on a target.
6. Action exerted by the sun on the earth.
7. Action exerted by a table on a book placed on it

مثال 4.2

من الأفعال الميكانيكية التالية ، حدد ما إذا كانت بعدية أو تماسية. حدد أيضا في ما إذا كانت نقطية الطبيق أو متوزعة سطحيا أو حجميا.

1 .ضربة مطرقة على مسمار.
2 .جاذبية أرضية.
3 .العمل الذي تمارسه الرياح على الشراع.
4 .عمل يمارسه مغناطيس على مسمار حديدي.
5 .العمل الذي تمارسه سهم على الهدف.
6 .العمل الذي تمارسه الشمس على الأرض.
7. عمل تمارسه طاولة على كتاب موضوعة عليه

Solution :

1. Mechanical contact action. (Localized).
2. Remote Mechanical action (Distributed).
3. Mechanical contact action (Distributed).

الحل:.

1 .فعل ميكانيكي تماسي (نقطي).
2 .فعل ميكانيكي بعدي (متوزع).
3 .فعل ميكانيكي تماسي (متوزع).

4. Remote Mechanical action (Distributed).

5. Mechanical contact Action (Localized).

6. Remote Mechanical action (Distributed).

7. Mechanical Contact Action (Distributed).

4 .فعل ميكانيكي تماسي (متوزع).

5 .فعل ميكانيكي تماسي (نقطي).

6 .فعل ميكانيكي تماسي (متوزع).

7. فعل ميكانيكي تماسي (متوزع).

2.5 Mechanical models

2.5.1 Material point :

This model is suitable for cases where we are only interested in the movements of the center of gravity. In particular, it does not take into account either the object's own rotations or its deformations.

2.5.2 Non-deformable solid

This modeling is well suited for the study of the movements of solid bodies and the dynamic forces implemented. It allows to take into account the proper rotations.

5.2 النمذجة الميكانيكية

1.5.2 النقطة المادية:

هذا النموذج مناسب للحالات التي نهتم فيها فقط بحركات مركز الثقل الأجسام. على وجه الخصوص ، فإنه لا يأخذ في الاعتبار لا دوران الجسم حول نفسه ولا تشوهاته.

2.5.2 الجسم الصلب:

هذه النمذجة مناسبة تماما لدراسة حركات الأجسام الصلبة والقوى الديناميكية المطبقة عليها آخذين بعين الإعتبار عزوم هذه القوى و آثارها التدويرية حلال هذه الحركات.

2.6 Resolved exercises | 6.2 تمارين محلولة

Exercise 2.6.1 | التمرين 1.6.2

The modulus of the resultant $\vec{F}$ of two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ is equal to 100 N and $\vec{F}$ forms an angle of $\alpha = 30°$ with the force $\vec{F}_1$. Knowing that $\|\vec{F}_1\| = 80N$ Find graphically and analytically $\|\vec{F}_2\|$ and the angle θ between the two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$.

طويلة المحصلة $(\vec{F})$ لقوتين $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$ تساوي 100 N و القوة $(\vec{F})$ تشكل زاوية $\alpha = 30°$ مع القوة و $(\vec{F}_1)$. مع العلم أن $\|\vec{F}_1\| = 80N$. أوجد بيانيا و تحليليا $\|\vec{F}_2\|$ والزاوية (θ) بين القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

Solution | الحل

Graphically (Fig. 2.10):

بيانيا (الشكل. 10.2):

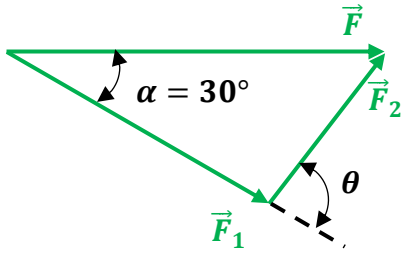


Fig. 2.10 | **الشكل 10.2**

We trace $\vec{F}$ with a scale of $1cm$ for 20 N, A spacing of $\alpha = 30°$ is fixed and then $\vec{F}_1$ is plotted with the same scale. We trace $\vec{F}_2$ starting from the end of $\vec{F}_1$ to the end of $\vec{F}$. After the modulus of $\vec{F}_2$ is measured by the ruler and the angle θ by the protractor.

نرسم $(\vec{F})$ بسلم قدره $(1cm)$ لكل $(20\ N)$، نحدد زاوية قدرها $(\alpha = 30°)$ ثم نرسم $(\vec{F}_1)$ بنفس السلم. نرسم بعد ذلك $(\vec{F}_2)$ من نهاية $(\vec{F}_1)$ إلى نهاية $(\vec{F})$.
نقيس بعد ذلك طويلة $(\vec{F}_2)$ بالمسطرة وقيمة الزاوية (θ) بالمنقلة.

Analytically, We have:

بيانيا، لدينا:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad \vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1 \qquad \vec{F}_2^{\,2} = (\vec{F} - \vec{F}_1)^2$$

$$\|\vec{F}_2\|^2 = \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{F}_1\|^2 - 2\|\vec{F}\|\|\vec{F}_1\| cos\alpha$$

$\|\vec{F}_2\|^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \times 100 \times 80 \times cos\,30°$		$\|\vec{F}_2\| = 50.434\ N$
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$	$\vec{F}^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2$	
$\|\vec{F}\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 + 2\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2\|cos\theta$	$cos\,\theta = \dfrac{\|\vec{F}\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2 - \|\vec{F}_2\|^2}{2\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2\|}$	
$cos\,\theta = \dfrac{100^2 - 80^2 - 50.434^2}{2 \times 80 \times 50.434}$	$cos\theta = 0.1309$	$\theta = 82.477°$

Exercise 2.6.2

Two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ act on a point A. their intensities and directions are indicated on the (Fig. 2.11).
Determine their resultant, graphically and then analytically.

التمرين 2.6.2

قوتان $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$ تؤثران في نفس النقطة A.شدتيهماو منحى كل منهما موضح في (الشكل 11.2).
حدد بيانيا ثم تحليليا خصائص محصلتهما $(\vec{F})$.

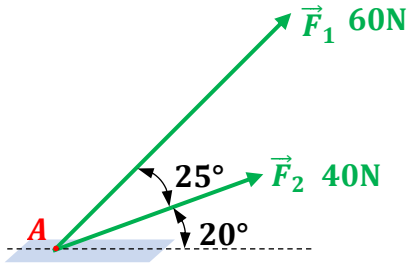


Fig. 2.11 — **الشكل 11.2**

Solution

Graphically (Fig. 2.12):

We build the parallelogram from the sides $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$. The resultant $\vec{F}$ represents the longest diagonal of this parallelogram, its intensity is measured using a ruler for the same scale as $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ and its direction which is described by the angle θ which is measured using a protractor.

الحل

بيانيا (الشكل. 12.2):

نرسم متوازي الأضلاع المشكل من $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$. المحصلة $(\vec{F})$ تمثل أطول القطرين لمتوازي الأضلاع في هذه الحالة، شدتها أو طويلتها تقاس بالمسطرة و بنفس السلم الذي رسمنا به $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$ و منحاها تحدده الزاوية (θ) التي نقيسها باستعمال المنقلة.

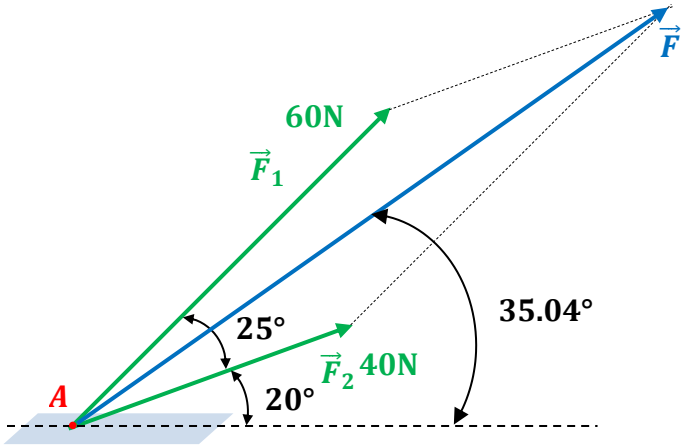


Fig. 2.12 — الشكل 12.2

Analytically, We have: — **بيانيا، لدينا:**

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$	$\vec{F}^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2$	$\vec{F}_2{}^2 = (\vec{F} - \vec{F}_1)^2$
$\|\vec{F}\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 + 2\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2\| cos 25°$		
$\|\vec{F}_2\|^2 = 100^2 + 80^2 - 2 \times 100 \times 80 \times cos\, 30°$		$\|\vec{F}\| = 97.725\ N$
$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$	$\vec{F}_1 = \vec{F} - \vec{F}_2$	$\vec{F}_1{}^2 = (\vec{F} - \vec{F}_2)^2$
$\|\vec{F}_1\|^2 = \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 - 2\|\vec{F}\|\|\vec{F}_2\| cos\,(\vec{F}, \vec{F}_2)$		
$cos(\vec{F}, \vec{F}_2) = \dfrac{\|\vec{F}\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 - \|\vec{F}_1\|^2}{2\|\vec{F}\|\|\vec{F}_2\|}$		$cos(\vec{F}, \vec{F}_2) = \dfrac{97.725^2 + 40^2 - 60^2}{2 \times 97.725 \times 40}$
$cos(\vec{F}, \vec{F}_2) = 0.9657$	$cos(\vec{F}, \vec{F}_2) = 15.04°$	$(\vec{F}, \vec{F}_2) = 15.04°$
$\theta = 20° + (\vec{F}, \vec{F}_2)$	$\theta = 20° + 15.4°$	$\theta = 35.4°$

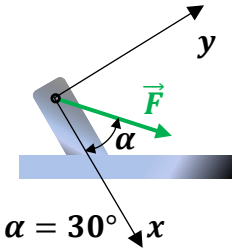
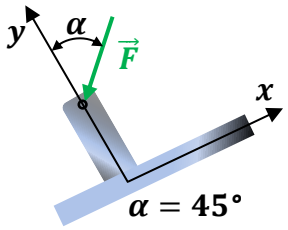
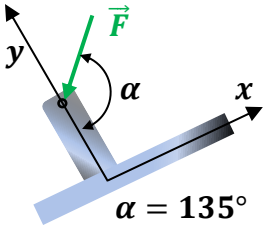
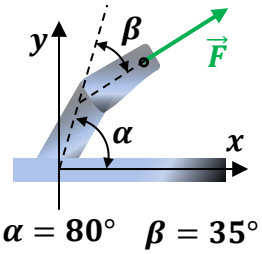
Exercise 2.6.3

Write the Cartesian components F_x and F_y of the force $\vec{F}$ as a function of its modulus $\|\vec{F}\|$ and the angles α and β, in the four cases of the (Fig. 2.13). Numerical application $\|\vec{F}\| = 100N$

التمرين 3.6.2

أكتب المركبات الكارتيزية (F_x) و (F_y) للقوة $(\vec{F})$ بدلالة طويلتها $(\|\vec{F}\|)$ و الزاويتين (α) و (β) في كل حالة من الحالات الموضحة في (الشكل 13.2).

تطبيق عددي: $\|\vec{F}\| = 100N$

a 	b 
c 	d 
Fig. 2.13	الشكل 13.2

Solution

In the four cases the force $\vec{F}$ is decomposed into $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$

الحل

في جميع الحالات الأربع القوة $(\vec{F})$ محللة إلى اركبتين بحيث $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$.

(a)	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 100\begin{pmatrix} cos30° \\ sin30° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 86.6 \\ 50 \end{pmatrix} N$
(b)	$\vec{F} = -F\begin{pmatrix} sin\alpha \\ cos\alpha \end{pmatrix}$	$\vec{F} = -100\begin{pmatrix} sin45° \\ cos45° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = -\begin{pmatrix} 70.7 \\ 70.7 \end{pmatrix} N$
(c)	$\vec{F} = -F\begin{pmatrix} sin(\pi - \alpha) \\ cos\alpha(\pi - \alpha) \end{pmatrix}$	$\vec{F} = -100\begin{pmatrix} sin45° \\ cos45° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = -\begin{pmatrix} 70.7 \\ 70.7 \end{pmatrix} N$
(d)	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} sin\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ cos\alpha\left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 100\begin{pmatrix} sin45° \\ cos45° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 70.7 \\ 70.7 \end{pmatrix} N$

Exercise 2.6.4

In the (Fig. 2.14), determine the components of the force $\vec{F}$ with respect to the reference (xOy), $(x'Oy')$, (xOy') and $(x'Oy)$. Numerical application:

$\|\vec{F}\| = 100N$, $\alpha = 30°$ and $\beta = 40°$

التمرين 4.6.2

في الجملة الموضحة في (الشكل 14.2)، عين مركبات القوة $(\vec{F})$ حسب كل معلم من المعالم التالية: (xOy)، $(x'Oy')$ (xOy') و $(x'Oy)$.

تطبيق عددي :

$\|\vec{F}\| = 100N$، $\alpha = 30°$ و $\beta = 40°$

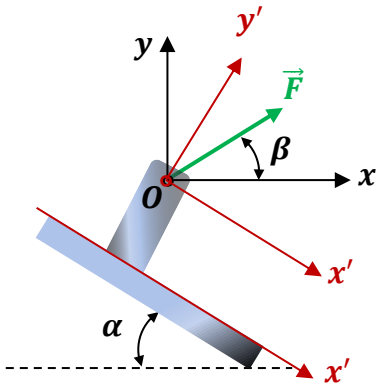


Fig. 2.14

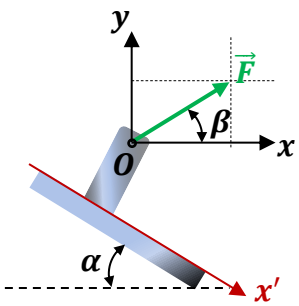
الشكل 14.2

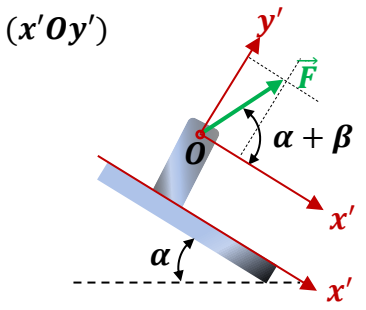
Solution

In order to find compounds $\vec{F}$, we draw a parallelogram of diameter $\vec{F}$, depending on the reference we choose (Fig 2.15).

الحل

من أجل إيجات مركبات $(\vec{F})$، نقوم برسم متوازي الأضلاع قطره $(\vec{F})$ حسب المعلم الذي نختاره (الشكل 15.2).





(xOy')		$(x'Oy)$

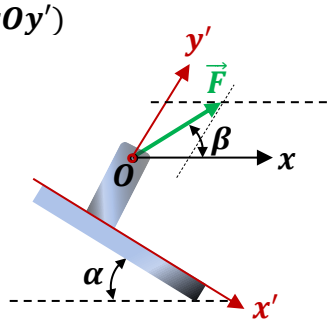
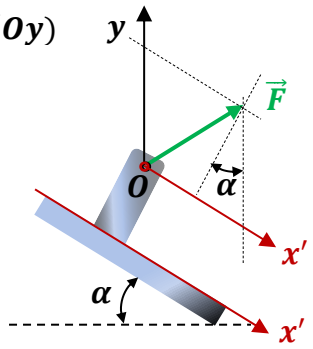

		

Fig. 2.15		**الشكل 15.2**

(xOy)	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} cos\beta \\ sin\beta \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 200\begin{pmatrix} cos40° \\ sin40° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 153.20 \\ 128.55 \end{pmatrix} N$
$(x'Oy')$	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} sin(\alpha+\beta) \\ cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 100\begin{pmatrix} sin70° \\ cos70° \end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 93.96 \\ 34.20 \end{pmatrix} N$
(xOy')	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} cos\beta - sin\beta.tan\alpha \\ \dfrac{sin\beta}{cos\alpha} \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 100\begin{pmatrix} cos40° - sin40°.tan30° \\ \dfrac{sin40}{cos30} \end{pmatrix}$	
	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 39.49 \\ 74.22 \end{pmatrix} N$		
$(x'Oy)$	$\vec{F} = F\begin{pmatrix} sin\beta + cos\beta.tan\alpha \\ \dfrac{cos\beta}{cos\alpha} \end{pmatrix}$	$\vec{F} = 100\begin{pmatrix} sin40° + cos40°.tan30° \\ \dfrac{cos40}{cos30} \end{pmatrix}$	
	$\vec{F} = \begin{pmatrix} 108.5 \\ 88.45 \end{pmatrix} N$		

Exercise 2.6.5

The (Fig. 2.16) shows the assembly with welding of three bars at a point O.

1. Determine the components of the tension force $\vec{T}_1$ of the bar (1) if $\|\vec{T}_1\| = 2000\ N$.

2 . Determine the modulus of the tension force $\vec{T}_3$ and its component T_{3x} if $T_{3y} = 1000\ N$.

3 . Determine the modulus of the tension force $\vec{T}_3$ if $T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0$.

التمرين 5.6.2

يوضح (الشكل 16.2) جملة مشكلة من ثلاث أذرع معدنية ملحمة عند القطة O.

1. عين مركبات قوة التوتر $(\vec{T}_1)$ للذراع (1) إذا كانت $\|\vec{T}_1\| = 2000\ N$.

2. عين طويلة قوة التوتر $(\vec{T}_3)$ و مركبته (T_{3x}) إذا كانت $T_{3y} = 1000\ N$.

3. عين طويلة قوة التوتر $(\vec{T}_3)$ إذا كانت $T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0$.

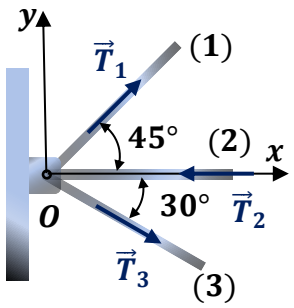


Fig. 2.16	الشكل 16.2

Solution	الحل
1. The components of tension $\vec{T}_1$	1. مركبات قوة التوتر $(\vec{T}_1)$

$\vec{T}_1 = 2000\begin{pmatrix} cos45° \\ sin45° \end{pmatrix}$	$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} 1414.21 \\ 1414.21 \end{pmatrix} N$

2. The module of tension $\vec{T}_3$ and its component T_{3x}.	2. مركبات قوة التوتر $(\vec{T}_3)$ و مركبتها (T_{3x}).

$T_{3y} = \|\vec{T}_3\| sin30°$	$\|\vec{T}_3\| = \frac{T_{3y}}{sin30°}$	$\|\vec{T}_3\| = \frac{1000}{0.5}$	$\|\vec{T}_3\| = 200\ N$
$T_{3x} = \|\vec{T}_3\| cos30°$	$T_{3x} = 200 \times 0.866$	$T_{3x} = 173.2\ N$	

3. The module of tension $\vec{T}_2$.	3. مركبات قوة التوتر $(\vec{T}_3)$.
Since the bar (2) is horizontal on the axis Ox then:	بما أن الذراع (2) أفقية وفق المحور (Ox) فإن:

$T_{2y} = 0$	$\|\vec{T}_2\| = \|T_{2x}\|$	$\|\vec{T}_2\| = (T_{1x} + T_{3x})$	$\|\vec{T}_2\| = 314.6\ N$

Exercise 2.6.6	التمرين 6.6.2
Use the diagram presented in the (Fig. 2.17) to Calculate: **1. The moment in B of the force $\vec{F}$ with a modulus equal to 200 N.** **2 . The moment of $\vec{F}$ in C and in D.**	**إستغل الرسم الموضح في (الشكل 17.2) من أجل حساب:** **1. عزم القوة $(\vec{F})$ التي طويلتها $(\|\vec{F}\| = 2000\ N)$. و ذلك بالنسبة للنقطة B.** **2. عزم القوة $(\vec{F})$ بالنسبة للنقطة C و بالنسبة للنقطة D.**

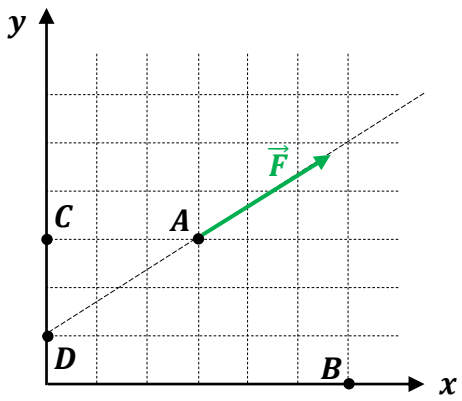


Fig. 2.17	الشكل 17.2

Solution	الحل
1. The moment in B of the force $\vec{F}$.	**1. عزم القوة $(\vec{F})$ بالنسبة للنقطة B.**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

From the (Fig. 2.17) :	انطلاقا من (الشكل 18.2) :

$\vec{F} = 200\vec{u}$	$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{DA}}{\|\overrightarrow{DA}\|}$	$\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$	$\vec{F} = \dfrac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}) = \dfrac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$		$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}) = \dfrac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\0\\-15\end{pmatrix} N.m$	

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}) = -832.05\vec{k}\ N.m$$

2. The moment of $\vec{F}$ in C and in D.

2. عزم القوة $(\vec{F})$ بالنسبة للنقطة C و بالنسبة للنقطة D.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}) = \frac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}) = \frac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} N.m$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_D(\vec{F}) = \overrightarrow{DA} \wedge \vec{F}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_D(\vec{F}) = \frac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_D(\vec{F}) = \frac{200}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} N.m$

Exercise 2.6.7

Use the diagram presented in the (Fig. 2.18) to calculate the moment in O of the force $\vec{F}$ with a modulus equal to 1414 N.

التمرين 7.6.2

استغل الرسم الموضح في (الشكل 18.2) من أجل حساب عزم القوة $(\vec{F})$ التي طويلتها $(\|\vec{F}\| = 1414\ N)$ و ذلك بالنسبة للنقطة O.

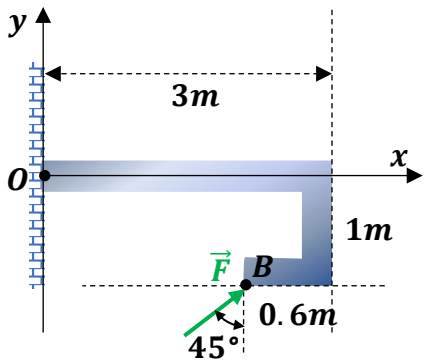


Fig. 2.18

الشكل 18.2

Solution

The moment in O of the force $\vec{F}$.

From the (Fig. 2.17) :

الحل

عزم القوة $(\vec{F})$ بالنسبة للنقطة O.

انطلاقا من (الشكل 18.2) :

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \begin{pmatrix}3-0.6\\-1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1414cos45°\\1414sin45°\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3398.97 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = 3398.97\vec{k}\ N.m$

Exercise 2.6.8	التمرين 8.6.2
Use the diagram presented in the (Fig. 2.19) to calculate : **1. The moment in C of the force $\vec{F}_1$ of modulus equal to 270 N.** **2 . The moment in C of the force $\vec{F}_2$ of modulus equal to 282.8 N.** **3 . The resulting moment in C of the two forces.**	إستغل الرسم الموضح في (الشكل 19.2) من أجل حساب: 1. عزم القوة ($\vec{F}_1$) التي طويلتها ($\|\vec{F}_1\| = 270\ N$) و ذلك بالنسبة للنقطة C. 2. عزم القوة ($\vec{F}_2$) التي طويلتها ($\|\vec{F}_2\| = 282.8\ N$) و ذلك بالنسبة للنقطة C. 3. محصلة عزمي القوتين ($\vec{F}_1$) و ($\vec{F}_2$) بالنسبة للنقطة C.

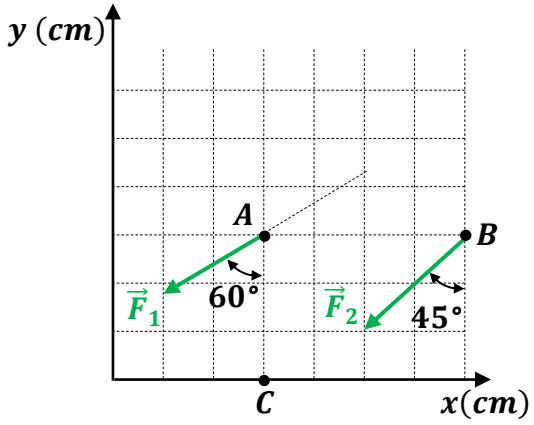


Fig. 2.19	الشكل 19.2

Solution	الحل
1. The moment in C of the force $\vec{F}_1$.	1. عزم القوة ($\vec{F}_1$) بالنسبة للنقطة C.

$\overrightarrow{\mathcal{M}_C}(\vec{F}_1) = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F}_1$	$\vec{F}_1 = 270\begin{pmatrix} -sin60° \\ -cos60° \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -233.82 \\ -135 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}_C}(\vec{F}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.03 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -233.82 \\ -135 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_C}(\vec{F}_1) = 7\vec{k}\ N.m$	

2. The moment in C of the force $\vec{F}_2$.	2. عزم القوة $(\vec{F}_2)$ بالنسبة للنقطة C.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_2) = \overrightarrow{CB} \wedge \vec{F}_2$	$\vec{F}_2 = 282.8\begin{pmatrix} -sin45° \\ -cos45° \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_2 = 282.8\begin{pmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_2) = 282.8\begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.03 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.707 \\ -0.707 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_2) = -2\vec{k}\ N.m$	

3. The resulting moment in C of the two forces.	3. محصلة عزمي القوتين $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$ بالنسبة للنقطة C.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C = \overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_2)$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_C = 5\vec{k}\ N.m$

Exercise 2.6.9	التمرين 9.6.2
In the (Fig. 2.20), find $\vec{F}$ knowing that :	في (الشكل 19.2) أوجد $(\vec{F})$ علما أن :

1)	$\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{F}_6$
2)	$\vec{F} + \vec{F}_4 = \vec{F}_5$
3)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_7 + \vec{F}_9$
4)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_8$

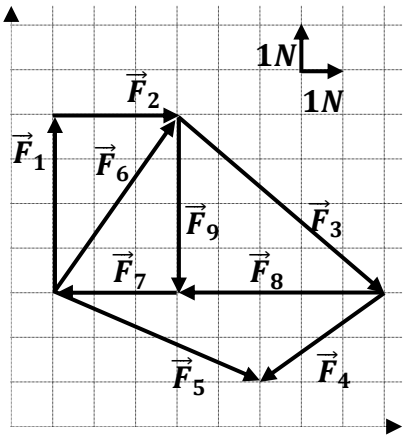


Fig. 2.20 الشكل 20.2

Solution | **الحل**

1)	$\vec{F} = \vec{F}_6 - \vec{F}_2$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$
2)	$\vec{F} = \vec{F}_5 - \vec{F}_4$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$
3)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_7 + \vec{F}_9$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
4)	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_8$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$	$\vec{F} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

Exercise 2.6.10

Use the diagram presented in the (Fig. 2.21) to calculate :

1. The reduction element in O of the torsion bar $[T]_O$ associated with the forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ and $\vec{F}_3$, linked respectively to points A, B and C.

2 . The scalar invariance of $[T]_O$.

3 . The central axis of $[T]_O$.

التمرين 10.6.2

إستغل الرسم الموضح في (الشكل 21.2) من أجل حساب:

1. عنصي الإرجاع عند O للمُفتل $[T]_O$ المشكل بالقوى $(\vec{F}_1)$، $(\vec{F}_2)$ و $(\vec{F}_3)$ المرتبطة بالنقاط A، B و C.

2. الثابت السلمي للمُفتل $[T]_O$.

3. المحور المركزي للمُفتل $[T]_O$.

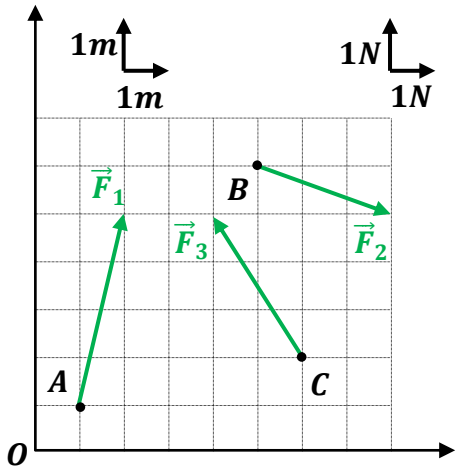


Fig. 2.21 | **الشكل 21.2**

Solution | **الحل**

1. The elements of reduction in O : | **1. عنصري الإرجاع عند النقطة O.**

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}_3 \end{cases}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = 2\vec{k} \end{cases}$$

2. The scalar invariance of $[T]_O$:

2. الثابت السلمي للمُفتل $[T]_O$:

$$I_{[T]_O} = \vec{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$$

$$I_{[T]_O} = 0$$

3. The central axis of $[T]_O$:

This is the set of points that verify the equation :

3. المحور المركزي للمُفتل $[T]_O$:

هو مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}_O}{\|\vec{R}\|^2} + \alpha\vec{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{10} + 2\alpha \\ y = -\frac{1}{10} + 6\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

The central axis equation is :

و منه معادلة المحور المركزي:

$$y - 3x = -1$$

2.7 Additional exercises | 7.2 تمارين إضافية

Exercise 2.7.1 | التمرين 1.7.2

Find a force $\vec{F}$ whose norm is equal to $3N$ and its components in the directions $\vec{j}$ and $\vec{k}$ are twice as large as that in the direction $\vec{\imath}$.

أوجد القوة $(\vec{F})$ التي طويلتها $(3N)$ و مركبتها وفق $(\vec{j})$ و $(\vec{k})$ تقدر كل منهما بضعف مركبتها وفق $(\vec{\imath})$.

Answer: $\vec{F} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ **الجواب:**

Exercise 2.7.2 | التمرين 2.7.2

Find a force $\vec{F}$ whose norm is equal to $6N$ and its direction is that of the vector :

$\vec{V} = -\vec{\imath} + 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}$.

أوجد القوة $(\vec{F})$ التي طويلتها $(6N)$ و منحاها هو منحى الشعاع: $\vec{V} = -\vec{\imath} + 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}$.

Answer: $\vec{F} = \mp\frac{6}{5}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **الجواب:**

Exercise 2.7.3 | التمرين 3.7.2

Calculate the reduction elements of the torsors $[T]_A$ and $[T]_C$ associated with the forces acting on the square plate of the (Fig. 2.22).

Numerical application :

$$\|\vec{F}_1\| = 9N, \|\vec{F}_2\| = 3N, \|\vec{F}_3\| = 4N, \|\vec{F}_4\| = 5N, \|\vec{F}_5\| = 6N\,, \|\vec{F}_2\| = 2N.$$

أحسب عنصري الإرجاع لكل من المُفتلين $[T]_A$ و $[T]_C$ المرافقين لمجموعة القوى المؤثرة على الصفيحة المربعة الموضحة في (الشكل 22.2).

تطبيق عددي:

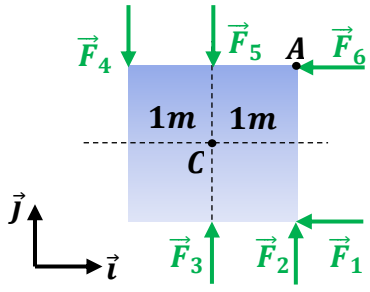


Fig. 2.22 **الشكل 22.2**

Answer:	$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -11\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}\ N \\ \vec{\mathcal{M}}_A = -6\vec{k}\ Nm \end{cases}$	$[T]_C = \begin{cases} \vec{R} = -11\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}\ N \\ \vec{\mathcal{M}}_C = \vec{k}\ Nm \end{cases}$	**الجواب:**

Exercise 2.7.4

Find the resultant of the concurrent forces in each case of the (Fig. 2.23).

التمرين 4.7.2

أوجد محصلة القوى المتلاقية في كل حالة من الحالات الموضحة في (الشكل 23.2).

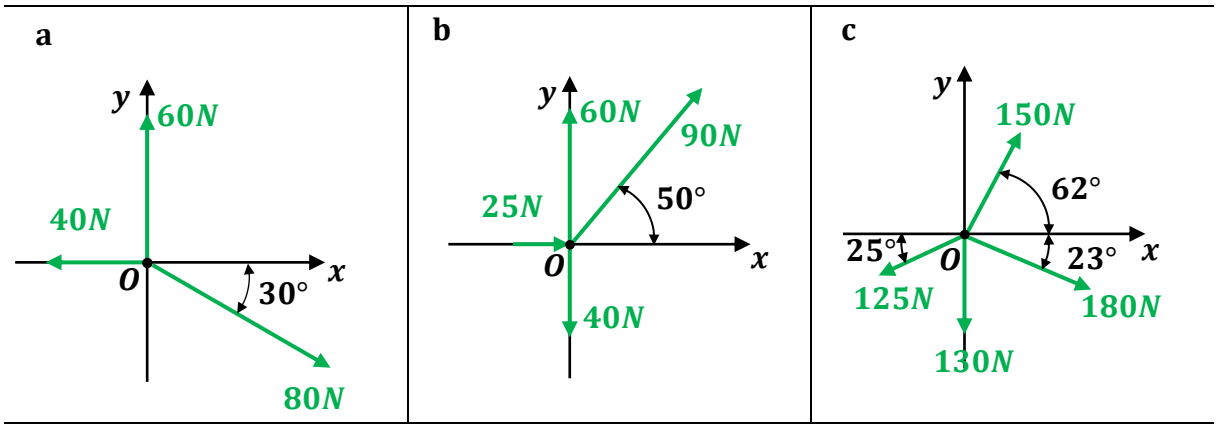


Fig. 2.23 **الشكل 23.2**

Answer:	**a)**	$\|\vec{F}\| = 35N$	$(\vec{F}, Ox) = 34°$	**الجواب:**
	b)	$\|\vec{F}\| = 59N$	$(\vec{F}, Ox) = 236°$	
	c)	$\|\vec{F}\| = 172N$	$(\vec{F}, Ox) = 315°$	

Exercise 2.7.5

The figure (Fig. 2.24) shows two tugs that bring a ship to a port. The most powerful tug generates a force of 20000 N on its cable, the smallest a force of 16000 N. The ship follows a straight line.

Calculate the angle that the most powerful tug forms with the ship's direction.

التمرين 5.7.2

الشكل (الشكل24.2) يظهر اثنين من القاطرات التي تجلب سفينة كبيرة إلى الميناء. تولد أقوى قاطرة قوة تبلغ 20000 N على حبل الجر المعدني، بينما تطبق القاطرة الأصغر قوة تبلغ 16000 N. تتبع السفينة خطا مستقيما.

احسب الزاوية التي تشكلها أقوى قاطرة مع اتجاه السفينة.

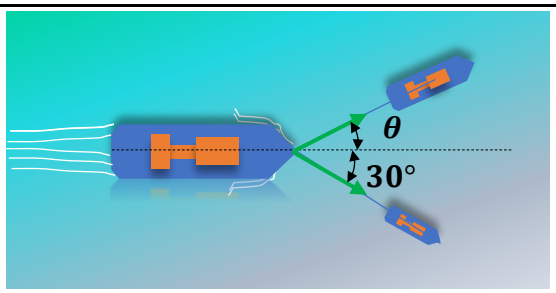


Fig. 2.24	الشكل 24.2

Answer:	$\theta = 23.57°$	الجواب:

الفصل 3

سكون و توازن الجسم الصلب

Chapter 3

static and equilibrium of the solid body

3.1 Introduction

In this chapter, we will study the effect of forces acting on a solid body, and how to replace a certain system of forces with a simpler equivalent system. This analysis is based on the basic assumption that the effect of a certain force on a solid body remains unchanged if that force is moved along its line of action (the principle of transmissibility).

It follows from this that the forces acting on a solid body can be represented by sliding vectors, as described in the second chapter.

Two important concepts related to the effect of a force on a rigid body are the moment of the force about a point, and its moment about an axis .

The determination of these quantities involves computing vector products and scalar products of two vectors that we saw in the first chapter.

In this chapter, we will also discuss the concept of mechanical connections between solid bodies and the consequent restriction of their movements, and we know the degrees of these connections as well as the degrees of freedom of the connected solid body.

We model all possible mechanical connections in the plane and in space, as well as the balance sheet of movements and the balance sheet of reactions of a solid body in contact with another solid. We train at the end of the class with a set of exercises solved in detail, Followed by another set of exercises for training and self-assessment.

1.3 مقدمة

في هذا الفصل ، سوف ندرس تأثير القوى التي تؤثر على الجسم الصلب ، و كيفية استبدال نظام معين من القوى بنظام مكافئ أبسط. يعتمد هذا التحليل على الافتراض الأساسي بأن تأثير قوة معينة على جسم صلب يظل دون تغيير إذا تم تحريك تلك القوة على طول خط عملها (مبدأ قابلية الانتقال).

ويترتب على ذلك أن القوى المؤثرة على جسم صلب يمكن تمثيلها بواسطة نواقل منزلقة ، كما هو موضح في الفصل الثاني.

هناك مفهومان مهمان مرتبطان بتأثير القوة على جسم صلب هما لعزم القوة حول نقطة، وعزمها حول محور . يتضمن تحديد هذه الكميات استخدام الحسابات على الأشعة التي رأيناها في الفصل الأول.

كما أننا سنتطرق في هذا الفصل إلى مفهوم الوصلات الميكانيكية بين الأجسام الصلبة و ما يترتب عنها من تقييد لحركاتها، و نعرف درجات هذه الوصلات و كذا درجات الحرية للجسم الصلب الموصول.

نُنمذج جميع الوصلات الميكانيكية الممكنة في المستوى و في الفضاء كما نتطرق إلى الحصيلة الحركية و حصيلة ردود الأفعال لجسم صلب متماس مع صلب آخر. نتدرب في آخر الفصل بمجموعة من التمارين المحلولة بالتفصيل، تليها مجموعة أخرى من التمارين للتدريب و التقييم الذاتي.

3.2 The axioms of statics

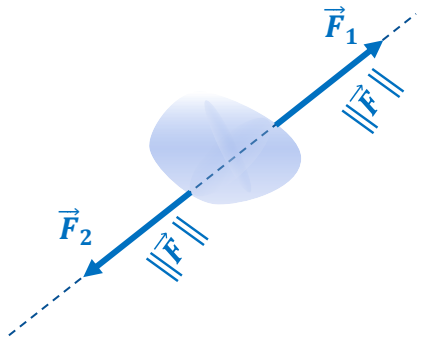
2.3 بديهيات السكون

3.2.1 Axiom 1 :

If a mechanical system is at rest and subjected to two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ (Fig. 3.1), then these two forces have: same direction, same modulus and opposite directions.

1.2.3 البديهية 1:

إذا كانت جملة ميكانيكية في حالة سكون و كانت خاضعة لقوتين ($\vec{F}_1$) و ($\vec{F}_2$) (الشكل 3.1)، فإن هاتين القوتين لهما نفس الحامل و متعاكستين في الإتجاه و متساويتين في الشدة.



الشكل 1.3 : جملة ميكانيكية ساكنة خاضعة لقوتين.

Fig. 3.1: Static mechanical system subjected to two forces.

3.2.2 Axiom 2 :

If we add (subtract) a balanced system of forces to (from) a system of forces applied to a solid, the kinetic state ofthe latter will not be modified.

2.2.3 البديهية 2:

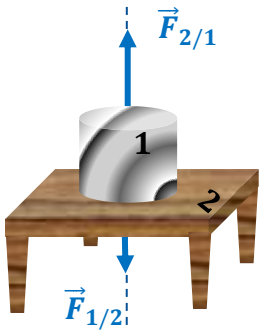
إذا أضفنا (حذفنا) جملة قوي متوازنة إلى (من) جملة قوى مطبقة على جسم صلب، فإن الحالة الحركية لهذا الأخير تبقى على حالها ولا تتغير.

3.2.3 Axiom 3 :

The mutual forces between two solids (1) and (2) are always of: same direction, same modulus and opposite directions (Fig. 3.2).

3.2.3 البديهية 3:

القوتان المتبادلتان بين صلبين(1) و (2) يكون لهما دوما: نفس الحامل نفس الشدة و متعاكستين في الإتجاه (الشكل 2.3).



$$\|\vec{F}_{1/2}\| = \|\vec{F}_{2/1}\|$$

الشكل 2.3 : قوتان متبادلتان بين صلبين (1) و (2).

Fig. 3.2: Two mutual forces between two solids 1 and 2.

3.2.4 Axiom 4 :

The dimensions and the shape of the solid play no role in the statics of the perfect solid, that is to say that if a given force system is balanced on a solid, it remains balanced also on any other solid.

4.2.3 البديهية 4:

أبعاد و شكل الجسم الصلب لا يؤثران على الحالة السكونية للجسم الصلب المثالي، أي أنه إذا توازنت جملة قوى مطبقة على جسم صلب ما، فإنها ستبقى متوازنة على أي جسم صلب آخر.

3.2.5 Axiom 5 :

If a deformable body is in equilibrium, it also remains in equilibrium after solidification (Principle of solidification).

5.2.3 البديهية 5:

إذا توازن جسم قابل للتشوه، فإنه يبقى متوازنا أيضا عندما يتحول إلى الحالة الصلبة (مبدأ التصلبية أو مبدأ التجمدية).

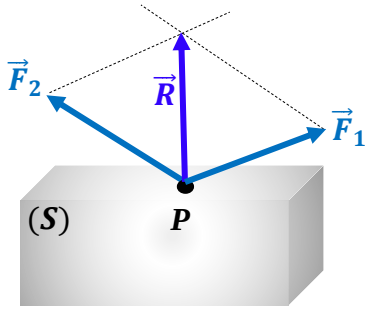
3.2.6 Axiom 6 :

The resultant $\vec{R}$ of two forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ applied to the same point P of the solid S,

has its point of application at this same point. Its modulus and direction are determined by the diagonal of the parallelogram built on these two forces (Fig. 3.3).

6.2.3 البديهية 6:

المحصلة $(\vec{R})$ لقوتين $(\vec{F}_1)$ و $(\vec{F}_2)$ مطبقتان في نقطة (P) من جسم صلب (S)، تكون نقطة تأثيرها هي ذات النقطة، أي النقطة (P). طويلة و منحى هذه المحصلة يحددان بقطر متوازي الأضلاع المؤلف بهاتين القوتين (الشكل 3.3).



الشكل 3.3 : قاعدة متوازي الأضلاع.

Fig. 3.3: Parallelogram rule.

3.3 الوصلات الميكانيكية

1.3.3 الصلب الحر و الصلب المرتبط

1.1.3.3 الصلب الحر

يكون الصلب حرا إذا كان بإمكانه القيام بأي حركة في الفضاء.

3.3 Mechanical connections

3.3.1 Free solid and bound solid

3.3.1.1 Free solid

A solid is said to be free if it can make any movement in space.

تعتبر كل حركة في الفضاء، إما واحدة أو تركيبا من مجموعة من الحركات الست التالية (الجدول 1.3)

Each movement in space, can be considered as one or a composition among the following six movements (Table 3.1):

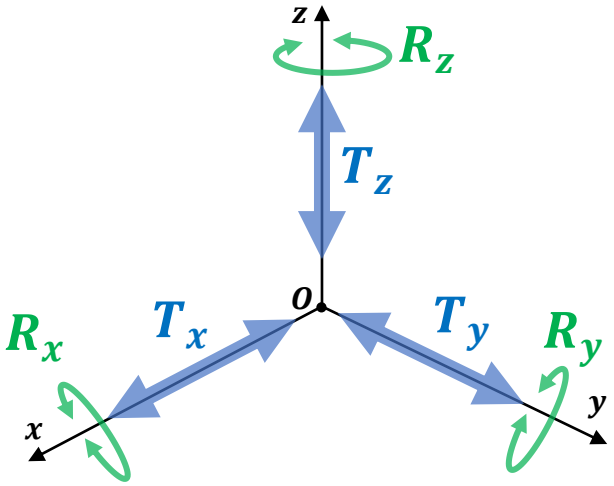
الجدول 1.3: الحركات الممكنة في الفضاء

Table 3.1: Possible movements in space

T_x	Translation along the Ox axis حركة انسحابية وفق المحور Ox	R_x	Rotation around the Ox axis حركة دورانية حول المحور Ox
T_y	Translation along the Oy axis حركة انسحابية وفق المحور Oy	R_y	Rotation around the Oy axis حركة دورانية حول المحور Oy
T_z	Translation along the Oz axis حركة انسحابية وفق المحور Oz	R_z	Rotation around the Oz axis حركة دورانية حول المحور Oz

نعرض هذه الحركات في (الشكل. 4.3). يمكن للجسم الصلب الحر أن يقوم بجميع هذه الحركات. يقال أن لديه 6 (سِتُ) درجات من الحرية.

These movements are exposed in the (Fig. 3.4). A free solid can make all these movements. It is said that it has 6 (six) degrees of freedom.



الشكل 4.3 : أساس الحركات في الفضاء .

Fig. 3.4: The basis of movements in space .

مثال 1.3

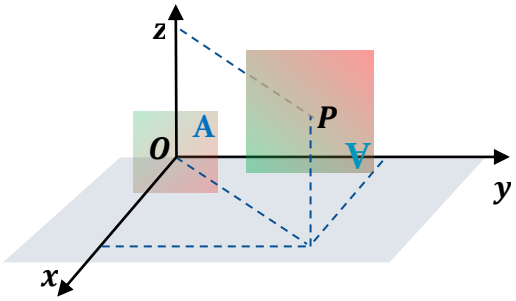
الجسم الذي شكله على هيئة مربع مُعلم بالحرف A، كان في البداية عند المبدإ وتم تحريكه ليوضع عند النقطة P (الشكل. 5.3).

ماهي الحركات الممكن تركيبها لنقل هذا الجسم بهذه الكيفية؟.

Example 3.1

The object in the form of a square marked by the letter A was initially centered at the origin, then it was moved to the point P (Fig. 3.5).

What are the possible movements to achieve this displacement?



الشكل 5.3

Fig. 3.5

الحل:

الحركات الممكنة هي:

Solution :

Les mouvements possibles sont :

Movement (1)	$T_x + T_y + T_z + 2R_x + R_z$	الحركة (1)
Movement (2)	$T_x + T_y + T_z + R_y$	الحركة (2)

3.3.1.2 Bound solid

A solid is said to be bound if it is in contact with other solids. These will partially or completely prevent it from moving. For each link corresponds to two numbers:

2.1.3.3 الصلب المرتبط

يقال عن جسم صلب أنه مرتبط إذا كان متصلا بأجسام صلبة أخرى. مما تجعله مُقيدا جزئيا أو كليا عن الحركة. من أجل كل ارتباط أو اتصال نعرف عددين.

3.3.1.2.1 Degree of bonding

This is the number of movements prohibited by this link.

1.2.1.3.3 درجة الرابطة

هو عدد الحركات الممنوعة بسبب هذه الرابطة.

3.3.1.2.2 Degree of Freedom

This is the number of movements allowed by this link.

2.2.1.3.3 درجة الحرية

هو عدد الحركات المسموحة بوجود هذه الرابطة.

3.3.2 Types of mechanical joints

In solid mechanics, there are 11 types of bonds. In order to detail them with their balances of movements and reactions, we will assume that two solids S_1 and S_2 are in contact and that the frictional forces are negligible.

2.3.3 أنواع الروابط (الوصلات)

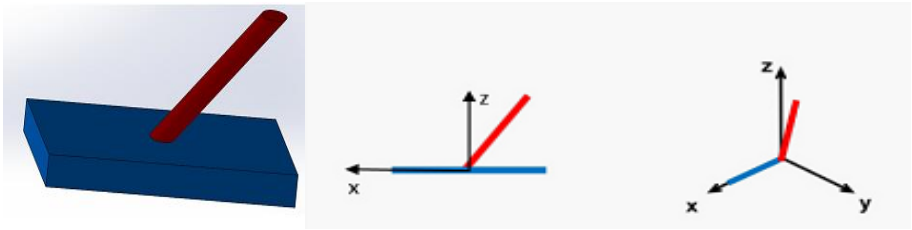
في ميكانيكا الجسم الصلب، يوجد أحد عشر (11) نوعا من الوصلات الميكانيكية. من أجل تفصيلها بحصيلتها الحركية و ردود أفعالها، نعتبر تلامس جسمين صلبين (S_1) و (S_2) بإهمال قوى الإحتكاك بينهما.

3.3.2.1 The embedding

In this type of joint, the solid S_1 is embedded in the solid S_2 (Fig. 3.6). It can't make any movement. The degree of this bond is 6 and its degree of freedom is 0. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.2).

1.2.3.3 التثبيت (الوصلة الإندماجية)

في هذا النوع من الروابط يكون الصلب (S_1) مثبتا بإحكام في الصلب (S_2) (الشكل 6.3). لا يمكنه أن يقوم بأي حركة. درجة هذه الرابطة إذن هي (6) و درجة حريتها (0). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 2.3).



الشكل 6.3: وصلة الإندماج.

Fig. 3.6: Embedding linkage.

الجدول 2.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة الإندماج

Table 3 2: Bilan of movement - reaction of the Embedding

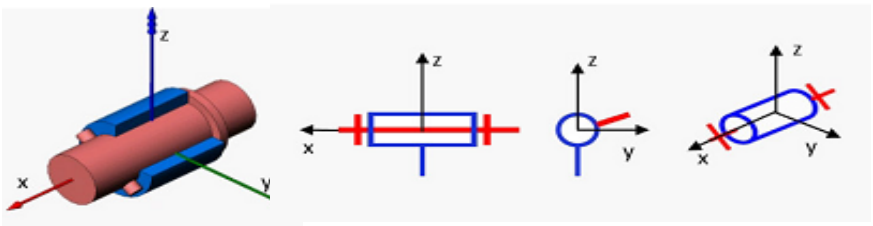
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	0	0	1	1	6	0
y	0	0	1	1		
z	0	0	1	1		

2.2.3.3 التمحور الأسطواني

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) فقط أن يدور داخل الصلب (S_2) حول المحور Ox مثلا (الشكل 7.3).. درجة هذه الرابطة إذن هي (5) و درجة حريتها (1). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 3.3).

3.3.2.2 Pivot (Cylindrical joint)

In this type of joint, the solid S_1 can only rotate in the solid S_2 about the Ox axis for example (Fig. 3.7). The degree of this bond is 5 and its degree of freedom is 1. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.3).



الشكل 7.3: وصلة التمحور الأسطواني.

Fig. 3.7: Pivot (Cylindrical joint).

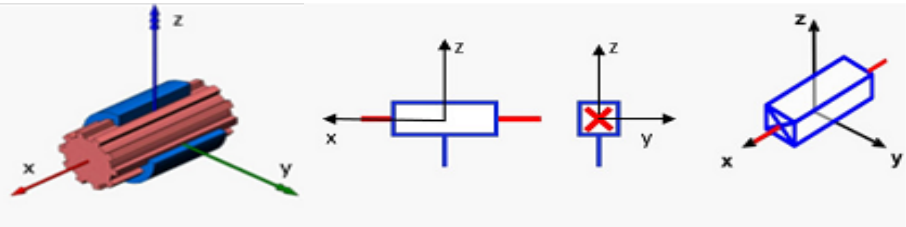
الجدول 3.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة التمحور الأسطواني						
Table 3.3: Bilan of movement - reaction of the Pivot (Cylindrical joint)						
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	0	1	1	0	5	1
y	0	0	1	1		
z	0	0	1	1		

3.3.2.3 Slide

In this type of joint, the solid S_1 can only slide in the solid S_2 along the Ox axis for example (Fig. 3.8). The degree of this bond is 5 and its degree of freedom is 1. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.4).

3.2.3.3 المنزلقة

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فقط داخل الصلب (S_2) وفق المحور Ox مثلا (الشكل 8.3). درجة هذه الرابطة إذن هي (5) و درجة حريتها (1). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 4.3).



الشكل 8.3: وصلة المزلقة.

Fig. 3.8: Sliding joint.

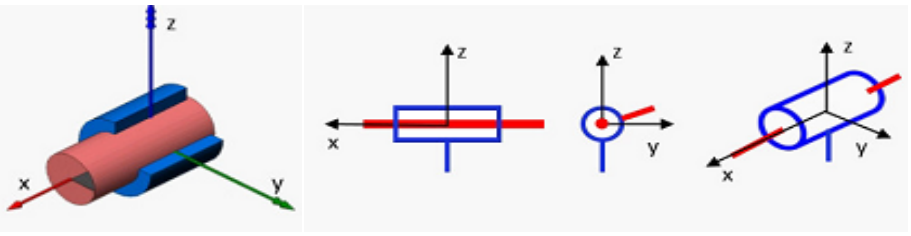
الجدول 4.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة المنزلقة						
Table 3.4: Bilan of movement - reaction of the Sliding joint						
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	0	0	1	5	1
y	0	0	1	1		
z	0	0	1	1		

3.3.2.4 Sliding pivot

In this type of joint, the solid S_1 can rotate in the solid S_2 about the Ox axis for example as it can slide along this axis too (Fig. 3.9). The degree of this bond is 4 and its degree of freedom is 2. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.5).

4.2.3.3 التمحور الأسطواني المنزلق

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن يدور داخل الصلب (S_2) حول المحور Ox مثلا (الشكل 9.3)، كما يمكنه أن ينسحب وفقه أيضا. درجة هذه الرابطة إذن هي (4) و درجة حريتها (2). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 5.3).



الشكل 9.3: وصلة التمحور الأسطواني المزلق.

Fig. 3.9: Sliding pivot.

الجدول 5.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة التمحور الأسطواني المنزلق

Table 3.5: Bilan of movement - reaction of the Sliding pivot

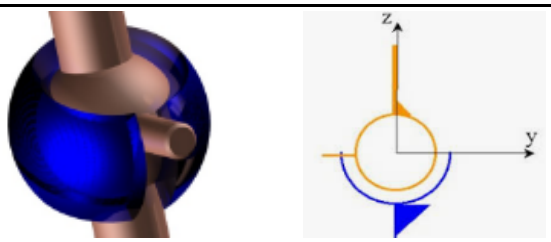
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	1	0	0	4	2
y	0	0	1	1		
z	0	0	1	1		

3.3.2.5 Finger ball joint

In this type of joint, the solid S_1 can rotate in the solid S_2 only around the two axis Ox and Oy (Fig. 3.10). The degree of this bond is 4 and its degree of freedom is 2. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are shown in the (Table 3.6).

5.2.3.3 التمحور الكروي ذو الأصبع

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن يدور فقط حول داخل الصلب (S_2) حول محورين Ox و Oy مثلا (الشكل 10.3). درجة هذه الرابطة إذن هي (4) و درجة حريتها (2). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 6.3).



الشكل 10.3: وصلة التمحور الكروي ذو الأصبع.

Fig. 3.10: Finger ball joint.

الجدول 6.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة التمحور الكروي ذو الأصبع

Table 3.6: Bilan of movement - reaction of the Finger ball joint

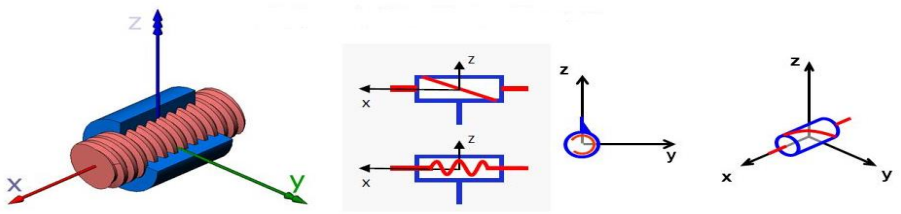
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	0	1	1	0	3	3
y	0	1	1	0		
z	0	0	1	1		

6.2.3.3 الوصلة الحلزونية

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فوق الصلب (S_2) و ذلك وفق المحورين Ox و Oy، كما يمكنه أن يدور أيضا حول المحاور الثلاث Ox، Oy و Oz (الشكل 11.3). درجة هذه الرابطة إذن هي (2) و درجة حريتها (4). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 7.3).

3.3.2.6 Helical joint

the rotation of the solid S_1 inside the solid S_2 about the axis Ox for example, generates its displacement along this same axis (Fig. 3.11). In this case, one of the two movements depends on the other. The degree of this bond is 1 and its degree of freedom is 5. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.7).



الشكل 11.3: الوصلة الحلزونية.

Fig. 3.11: Helical joint.

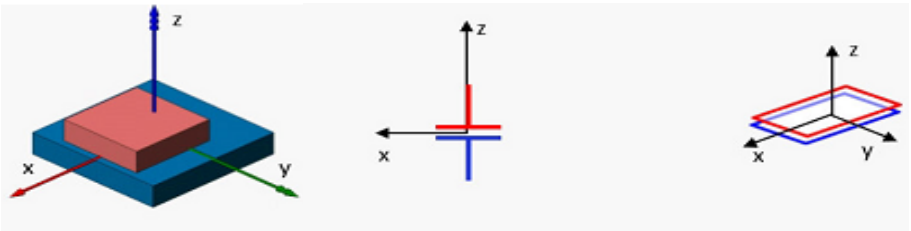
الجدول 7.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال للوصلة الحلزونية						
Table 3.7: Bilan of movement - reaction of the Helical joint						
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	1	0	0	2	4
y	0	0	1	1		
z	0	0	1	1		

7.2.3.3 وصلة مستوي مستوي

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فوق الصلب (S_2) وفق محورين Ox و Oy مثلا (الشكل 12.3)، كما يمكنه أن يدور حول المحور Oz. درجة هذه الرابطة إذن هي (3) و درجة حريتها (3). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 8.3).

3.3.2.7 plan-plan joint

In this type of joint, the solid S_1 can slide on the solid S_2 along the axis Ox and Oy as it can rotate around Oz (Fig. 3.12). The degree of this bond is 3 and its degree of freedom is 3. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are shown in the (Table 3.8).



الشكل 12.3: وصلة مستوي مستوي.

Fig. 3.12: Support Plan Plan.

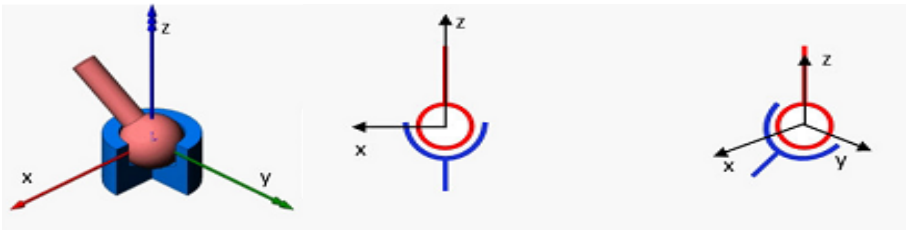
الجدول 8.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة مستوي مستوي						
Table 3.8: Bilan of movement - reaction of the Plan Plan						
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	0	0	1	3	3
y	1	0	0	1		
z	0	1	1	0		

3.3.2.8 Ball Joint (Spherical)

In this type of joint, the solid S_1 can rotate in the solid S_2 around the three axes Ox, Oy and Oz (Fig. 3.13). The degree of this bond is 3 and its degree of freedom is 3. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.9).

8.2.3.3 التمحور الكروي

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فوق الصلب (S_2) وفق محورين Ox و Oy مثلا (الشكل 13.3)، كما يمكنه أن يدور حول المحور Oz. درجة هذه الرابطة إذن هي (3) و درجة حريتها (3). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 9.3).



الشكل 13.3: وصلة التمحور الكروي.

Fig. 3.13: Ball Joint.

الجدول 9.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال لوصلة التمحور الكروي

Table 3.9: Bilan of movement - reaction of the Ball Joint

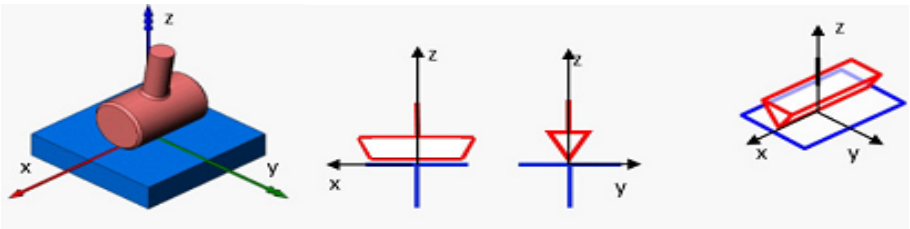
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	0	1	1	0	3	3
y	0	1	1	0		
z	0	1	1	0		

3.3.2.9 Linear rectilinear

In this type of joint, the solid S_1 can slide on the solid S_2 along the two axes Ox, and Oy as it can also rotate around the axis Ox and Oz (Fig. 3.14). The degree of this bond is 2 and its degree of freedom is 4. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.10).

9.2.3.3 خطية مستقيمة

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فوق الصلب (S_2) وفق محورين Ox و Oy مثلا (الشكل 14.3)، كما يمكنه أن يدور حول المحور Oz. درجة هذه الرابطة إذن هي (2) و درجة حريتها (4). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 10.3).



الشكل 14.3: الوصلة الخطية المستقيمة.

Fig. 3.14: Linear rectilinear Joint.

الجدول 10.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال للوصلة الخطية المستقيمة

Table 3.10: Bilan of movement - reaction of the Linear rectilinear Joint

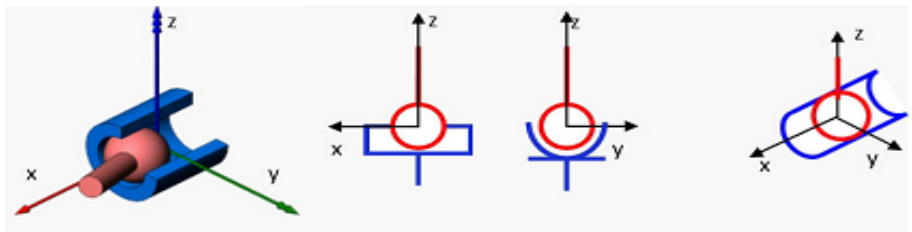
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	1	0	0	2	4
y	1	0	0	1		
z	0	1	1	0		

10.2.3.3 خطية حلقية

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن يدور داخل الصلب (S_2) و ذلك حول المحاور الثلاث Ox، Oy و Oz، كما يمكنه أن ينسحب وفق المحور Ox مثلا (الشكل 15.3). درجة هذه الرابطة إذن هي (2) و درجة حريتها (4). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 11.3).

3.3.2.10 Annular linear

In this type of joint, the solid S_1 can rotate in the solid S_2 around the three axes Ox, Oy and Oz as it can also slide along the axis Ox (Fig. 3.15). The degree of this bond is 2 and its degree of freedom is 4. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.11).



الشكل 15.3: الوصلة الخطية الحلقية.

Fig. 3.15: Annular linear Joint.

الجدول 11.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال للوصلة الخطية الحلقية

Table 3.11: Bilan of movement - reaction of the Annular linear Joint

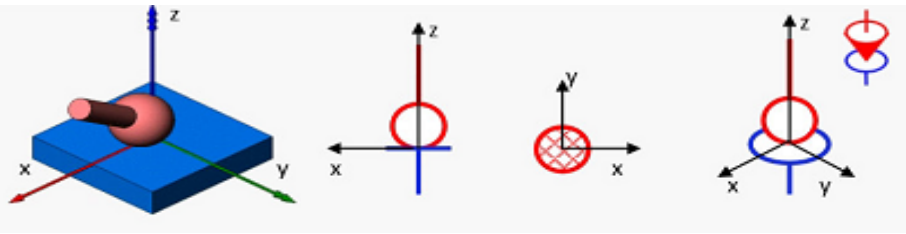
	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	1	0	0	2	4
y	0	1	1	0		
z	0	1	1	0		

11.2.3.3 الوصلة النقطية

في هذا النوع من الروابط يمكن للصلب (S_1) أن ينسحب فوق الصلب (S_2) و ذلك وفق المحورين Ox و Oy، كما يمكنه أن يدور أيضا حول المحاور الثلاث Ox، Oy و Oz (الشكل 16.3). درجة هذه الرابطة إذن هي (2) و درجة حريتها (4). الحصيلة الحركية و ردود الأفعال و كذا درجة الحرية و درجة الرابطة مرتبة في (الجدول 11.3).

3.3.2.11 Punctual joint

In this type of joint, the solid S_1 can slide on the solid S_2 along the two axes Ox and Oy as it can also rotate around the three axis Ox, Oy and Oz (Fig. 3.16). The degree of this bond is 1 and its degree of freedom is 5. The bilan of movements and reactions as well as the degree of freedom and joint are summarized in the (Table 3.11).



الشكل 16.3: الوصلة النقطية.

Fig. 3.16: Punctual joint.

الجدول 12.3 : حصيلة الحركة و ردود الأفعال للوصلة النقطية

Table 3.12: Bilan of movement - reaction of the Punctual joint

	الحصيلة الحركية		حصيلة ردود الأفعال		درجة الرابطة	درجة الحرية
	Bilan of movement		Bilan of reaction		degree of joint	Degree of freedom
	انسحابية	دورانية	قوة	عزم		
	Translation	Rotation	Force	Moment		
x	1	1	0	0	1	5
y	1	1	0	0		
z	0	1	1	0		

Example 3.2

We apply three forces $\vec{F}_A = 20\vec{k}$, $\vec{F}_B = 10\vec{j}$ and $\vec{F}_C = 5\vec{\imath}$ on a beam of length L, which weighs $\vec{P} = 15\vec{k}\ N$ and is recessed at the point O (Fig. 3.17). Determine the reaction to embedding point O.

مثال 2.3

نطبق ثلاث قوى $(\vec{F}_A = 20\vec{k})$، $(\vec{F}_B = 10\vec{j})$ و $(\vec{F}_C = 5\vec{\imath})$ على عارضة طولها (L)، و ثقلها $(\vec{P} = 15\vec{k}\ N)$ و مدمجة بإحكام عند النقطة (O) (الشكل. 17.3). عين رد الفعل عند نقطة الإندماج(O).

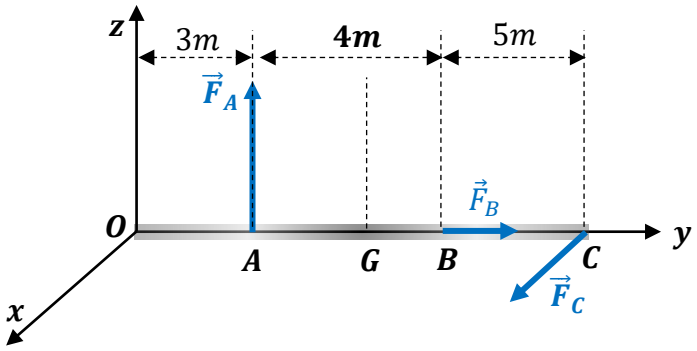


Fig. 3.17 — الشكل 17.3

Solution :

The beam is submitted to the action of the three forces $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ and its weight $\vec{P}$ appliqué applied in G and has the reaction in O which is composed of a force $\vec{R}$ and a moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$ such that:

الحل:

تخضع العارضة لقوى الأفعال المتمثلة في القوى الثلاث $(\vec{F}_A)$، $(\vec{F}_B)$، $(\vec{F}_C)$ و ثقلها $(\vec{P})$ المطبق عند النقطة (G)، كما أنها تخضع لردود الأفعال عند النقطة (O) و المتمثلة في القوة $(\vec{R})$ و العزم $(\overrightarrow{\mathcal{M}}_O)$ بحيث:

$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_{ox} \\ R_{oy} \\ R_{oz} \end{pmatrix}$		$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} M_{ox} \\ M_{oy} \\ M_{oz} \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\vec{M}(\vec{F}_A)_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A$
$\vec{M}(\vec{F}_A)_{/O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$		$\vec{M}(\vec{F}_A)_{/O} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{M}(\vec{F}_B)_{/O} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$

$\overrightarrow{M}(\vec{F}_B)_{/O} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{M}(\vec{F}_B)_{/O} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}$	$\vec{F}_C = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{M}(\vec{F}_C)_{/O} = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}_C$

$\overrightarrow{M}(\vec{F}_C)_{/O} = \begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{M}(\vec{F}_C)_{/O} = \begin{pmatrix}0\\0\\-60\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$	$\vec{P} = \begin{pmatrix}0\\0\\-15\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{M}(\vec{P})_{/O} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$

$\overrightarrow{M}(\vec{P})_{/O} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-15\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{M}(\vec{P})_{/O} = \begin{pmatrix}-90\\0\\0\end{pmatrix}$

Since the beam is in equilibrium then :	**بما أن العارضة في حالة سكون فإن:**

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\begin{cases} R_{ox} + 5 = 0 \Longrightarrow R_{ox} = -5 \\ R_{oy} + 10 = 0 \Longrightarrow R_{oy} = -10 \\ R_{oz} + 20 - 15 = 0 \Longrightarrow R_{oz} = -5 \end{cases}$
$\sum \overrightarrow{M}_O = \vec{0}$	$M_{ox} + 60 - 90 = 0 \Longrightarrow M_{ox} = 30$ $M_{oy} = 0$ $M_{oz} - 60 = 0 \Longrightarrow M_{oz} = 60$

So the reaction at point O is :	**إذن فرد الفعل عند النقطة (O) يكون:**

$\vec{R} = \begin{pmatrix}-5\\-10\\-5\end{pmatrix}\ N$	$\overrightarrow{M}_O = \begin{pmatrix}30\\0\\60\end{pmatrix}\ Nm$

3.3.3 Axiom of linking

For any bonded solid body, it is possible to remove the bonds by replacing them with the reactions.

3.3.3 بديهية الوصلات الميكانيكية:

من أجل أي جسم صلب مرتبط، من الممكن إزالة الروابط و استبدالها بردود الفعل.

Example 3.3

Apply the axiom of the connections on the plane-plane support contact (Fig. 3.18).

مثال 3.3

طبق بديهية الوصلات الميكانيكية على التماس مستوي مستوي في (الشكل 18.3)

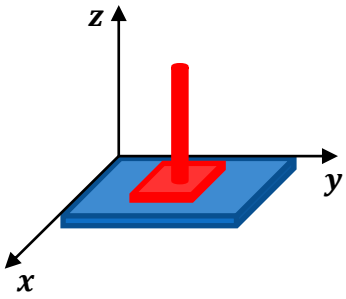


Fig. 3.18	الشكل 18.3

Solution :

We can omit the Solid S_2 in blue (Fig. 3.19) and replace it with the three rections which are :

A force $\vec{R}_z$ which prevents the translation following Oz.

A moment $\vec{M}_x$ which prevents the rotation around Ox.

A moment $\vec{M}_y$ which prevents the rotation around Oy. (Fig. 3.19)

الحل:

يمكننا أن نحذف الصلب (S_2) ذو اللون الأزرق من (الشكل 18.3) و نعوضه بردود الأفعال الثلاثة التالية:

قوة $(\vec{R}_z)$ تمنع الصلب (S_1) من الإنسحاب وفق (Oz).

عزم $(\vec{M}_x)$ يمنع الصلب (S_1) من الدوران حول (Ox).

عزم $(\vec{M}_y)$ يمنع الصلب (S_1) من الدوران حول (Oy).

(الشكل 19.3)

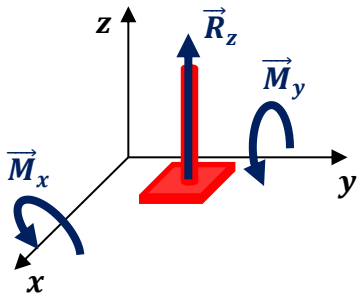


Fig. 3.19	الشكل 19.3

3.4 Equilibrium conditions

For a solid S to be in equilibrium, it is necessary and sufficient that :

4.3 شروط التوازن (السكون)

لكي يكون صلب (S) في حالة توازن (سكون)، فمن الضروري و الكفاية أن يتحقق ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\right)_{ext} = \vec{0} \qquad (1.3)$$

$$\forall P: \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M}_{/P}\left(\left(\vec{F}_i\right)_{ext}\right) = \vec{0} \qquad (2.3)$$

3.4.1 Three-dimensional system of forces

The projection of the two equations (3.1) and (3.2) on the axes of the spatial reference frame, allows us to obtain six equations :

1.4.3 جملة قوى ثلاثية الأبعاد

بإسقاط المعادلتين (1.3) و (2.3) على محاور المعلم الفضائي، نحصل على ستة معادلات كما يلي:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\end{cases} \qquad (3.3)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0\\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0\end{cases} \qquad (4.3)$$

3.4.2 system of concurrent forces

In the case of a system of concurrent forces at a point, the moment will be zero with respect to this point, the equilibrium condition is reduced to equations (3.3).

2.4.3 جملة قوى متلاقية

في الحالة التي تكون فيها القوى متلاقية في نقطة واحدة، تنعدم عزومها بالنسبة لهذه النقطة، و يُختصر شرط التوازن في مجموعة المعادلات (3.3).

Example 3.4

In the (Fig. 3.20), AB is a wire attached to the wall BD at B and AC is a wire attached to the ceiling DC at C.

مثال 4.2

في (الشكل. 20.3)، (AB) حبل متصل بالجدار (BD) عند (B) و (AC) حبل متصل بالسقف (DC) عند (C).

A weight $\vec{P}$ is hung at A. the angles of AB and AC with the wall and the ceiling are respectively θ_1 and θ_2. Calculate the tensions $\vec{T}_1$ and $\vec{T}_2$ of the two wires.
Numerical application: $\theta_1 = \theta_1 = 60°$, $\|\vec{P}\| = 100\ N$

حمولة ثقلها $(\vec{P})$ معلقة في النقطة (A). الزاوية بين الحبل (AB) و الجدار هي (θ_1) بينما الزاوية بين الحبل (AC) و السقف هي (θ_2). أحسب توتري الحبلين $(\vec{T}_1)$ و $(\vec{T}_2)$.
تطبيق عددي: $\theta_1 = \theta_1 = 60°$، $\|\vec{P}\| = 100\ N$.

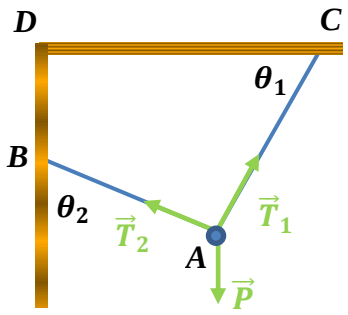


Fig. 3.20	الشكل 20.3

Solution :

The forces acting on the weight meet at point A, so the condition of rest is:

الحل:.

القوى المؤثرة على الحمولة تتلاقى عند النقطة A، و عليه يكون شرط السكون:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Let's project the forces in the plans (Fig. 3.21):

نقوم بإسقاط العلاقة على محاور المستوي (الشكل 21.3):

$$\begin{pmatrix} \|\vec{T}_1\| cos\theta_1 \\ \|\vec{T}_1\| sin\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{T}_2\| sin\theta_2 \\ \|\vec{T}_2\| cos\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{P}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{T}_1\| cos\theta_1 - \|\vec{T}_2\| sin\theta_2 = 0$$
$$\|\vec{T}_1\| sin\theta_1 + \|\vec{T}_2\| cos\theta_2 = \|\vec{P}\|$$

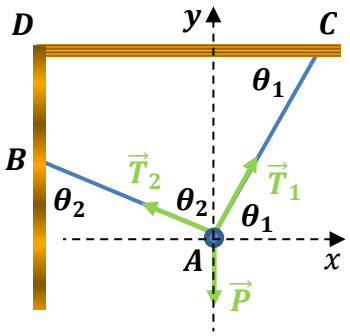


Fig. 3.21	الشكل 21.3

By solving this system by the determinant method :

نقوم بحل جملة المعادلتين هذه بطريقة المحدد :

$$\|\vec{T}_1\| = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -sin\theta_2 \\ \|\vec{P}\| & cos\theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_2 \\ sin\theta_1 & cos\theta_2 \end{vmatrix}} \qquad \|\vec{T}_2\| = \frac{\begin{vmatrix} cos\theta_1 & 0 \\ sin\theta_1 & \|\vec{P}\| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_2 \\ sin\theta_1 & cos\theta_2 \end{vmatrix}}$$

$$\|\vec{T}_1\| = \frac{sin\theta_2}{cos\,(\Delta\theta)}\|\vec{P}\| \qquad \|\vec{T}_2\| = \frac{cos\theta_1}{cos\,(\Delta\theta)}\|\vec{P}\| \qquad \Delta\theta = |\theta_2 - \theta_1|$$

$$\vec{T}_1 = \frac{sin\theta_2}{cos\,(\Delta\theta)}\|\vec{P}\|\begin{pmatrix} cos\theta_1 \\ sin\theta_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{T}_2 = \frac{cos\theta_1}{cos\,(\Delta\theta)}\|\vec{P}\|\begin{pmatrix} -sin\theta_2 \\ cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_1 = 86.6\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix} \qquad \vec{T}_2 = 50\begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

3.4.3 Plane forces

In the case of a plane problem (for example xOy), we will have three equilibrium equations. Two equations related to the sum of the forces:

3.4.3 القوى المستوية

في الحالة التي تكون القوى في المستوي (xOy مثلا)، يكون لدينا ثلاثة معادلات من شرطي التوازن. إثنتان تنتجان من مجموع القوى :

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i)_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad (5.3)$$

An equation related to the sum of the moments:

ومعادلة متعلقة بمجموع العزوم :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{/Point}\left(\left(\vec{F}_i\right)_{ext}\right) = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \qquad (6.3)$$

Example 3.5

A bar AB, of length L and weight $\vec{P}$ of $50\ N$, connected at A by a non-sliding cylindrical joint and its end B, rests on a simple support. A force $\vec{F}$ of $200\ N$ acts in its middle at an angle of $45°$ in the vertical plane (Fig. 3.22). Determine the reactions at the A and B ends.

مثال 5.3

عارضة (AB)، طولها (L) و ثقلها $(\vec{P})$ قيمته $(50\ N)$، متصلة عند (A) بتمفصل محوري أسطواني غير انزلاقي، نهايتها (B) مستندة بتماس نقطي بسيط. قوة $(\vec{F})$ شدتها $(200\ N)$ تؤثر على العارضة في منتصفها بزاوية قدرها $(45°)$ في المستوي الشاقولي (الشكل 22.3).
عين ردود الأفعال عند النهايتين (A) و (B).

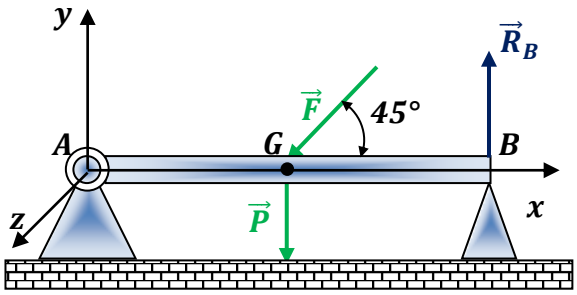


Fig. 3.22	الشكل 22.3

Solution

The equilibrium condition :

الحل

شرط التوازن:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$		$\sum \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$
$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$	$\|\vec{T}_2\| = \dfrac{cos\theta_1}{cos\,(\Delta\theta)}\|\vec{P}\|$	$\Delta\theta = \|\theta_2 - \theta_1\|$

Decomposing the forces according to the reference $R(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

نحلل القوى إلى مركباتها حسب المعلم $R(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$\begin{pmatrix}-141.4\\-141.4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-50\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\\R_{Az}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\R_{By}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$R_{Ax}=141.4N$ $R_{Ay}+R_{By}=191.4$ $R_{Az}=0$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})+\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{P})+\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_A)+\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_B)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG}\wedge\vec{F}+\overrightarrow{AG}\wedge\vec{P}+\overrightarrow{AA}\wedge\vec{R}_A+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{R}_B=\vec{0}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-141.4\\-141.4\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-50\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\R_{By}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathcal{M}_{Ax}\\\mathcal{M}_{Ay}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-70.7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\R_{By}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathcal{M}_{Ax}\\\mathcal{M}_{Ay}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$R_{By}=95.7N$	$R_{Ay}=95.7N$	$\mathcal{M}_{Ax}=0$	$\mathcal{M}_{Ay}=0$

The reactions in A and B are : | **ردود الأفعال عند (A) و (B) هي :**

$A\begin{pmatrix}141.4&0\\95.7&0\\0&0\end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix}0&0\\95.7&0\\0&0\end{pmatrix}$

3.5 Resolved exercises

5.3 تمارين محلولة

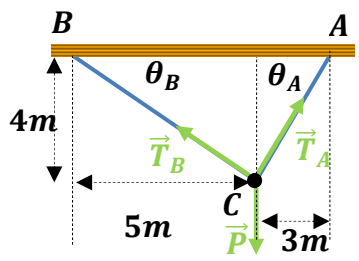
Exercise 3.5.1

Two cables are attached together to a point C which is loaded by a weight $\vec{P}$ of $400N$, as shown in (Fig. 3.23). Determine the voltage $\vec{T}_A$ in AC and $\vec{T}_B$ in BC in each of the following cases :

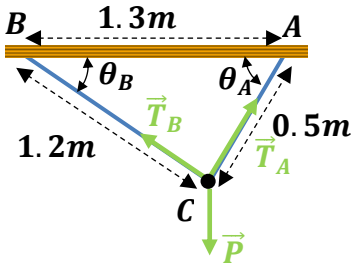
التمرين 1.5.3

حبلان معدنيان مربوطان مع بعضهما في نقطة (C) المُحملة بالثقل $(\vec{P})$ الذي قدره $(400N)$، كما هو موضح في (الشكل 23.3). عين التوتر $(\vec{T}_A)$ في الحبل (AC) و التوتر $(\vec{T}_B)$ في الحبل (BC) في كل حالة من الحالات التالية:

a



b



c

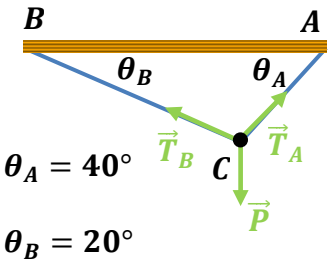


Fig. 3.23 | الشكل 23.3

Solution

All three cases of the exercise are similar in (Figure 24.3). We project the three forces onto the axes and we find:

الحل

جميع حالات التمرين الثلاث تتشابه في (الشكل 24.3). نقوم بإسقاط القوى الثلاث على المحاور فنجد:

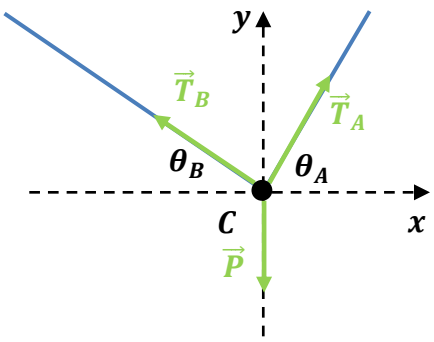


Fig. 3.24 | الشكل 24.3

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{P} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \|\vec{T}_A\| cos\theta_A \\ \|\vec{T}_A\| sin\theta_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{T}_B\| cos\theta_B \\ \|\vec{T}_B\| sin\theta_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{P}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{T}_A\| cos\theta_A - \|\vec{T}_B\| cos\theta_B = 0$$
$$\|\vec{T}_A\| sin\theta_A + \|\vec{T}_B\| sin\theta_B = \|\vec{P}\|$$

By solving this system by the determinant method :

نقوم بحل جملة المعادلتين هذه بطريقة المحدد :

$$\|\vec{T}_A\| = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -cos\theta_B \\ \|\vec{P}\| & sin\theta_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta_A & -cos\theta_B \\ sin\theta_A & sin\theta_B \end{vmatrix}} \qquad \|\vec{T}_B\| = \frac{\begin{vmatrix} cos\theta_A & 0 \\ sin\theta_A & \|\vec{P}\| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta_A & -cos\theta_B \\ sin\theta_A & sin\theta_B \end{vmatrix}}$$

$$\|\vec{T}_A\| = \frac{cos\theta_B}{sin(\theta_A + \theta_B)} \|\vec{P}\| \qquad \|\vec{T}_B\| = \frac{cos\theta_A}{sin(\theta_A + \theta_B)} \|\vec{P}\|$$

$$\vec{T}_A = \frac{cos\theta_B}{sin(\theta_A + \theta_B)} \|\vec{P}\| \begin{pmatrix} cos\theta_A \\ sin\theta_A \end{pmatrix} \qquad \vec{T}_B = \frac{cos\theta_A}{sin(\theta_A + \theta_B)} \|\vec{P}\| \begin{pmatrix} -cos\theta_B \\ sin\theta_B \end{pmatrix}$$

Numerical application:
In case (b) the triangle (ABC) is right at (C), we can verify this by the vitagoras theorem.

تطبيق عددي :
في الحالة (b) المثلث (ABC) قائم عند (C)، يمكننا التحقق من ذلك بنظرية فيتاغورس.

	$sin\theta_A$	$cos\theta_A$	$sin\theta_B$	$cos\theta_B$	$\vec{T}_A$	$\vec{T}_B$
(a)	0.8	0.6	0.6247	0.7808	$\begin{pmatrix} 187.483 \\ 249.977 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -187.483 \\ 149.928 \end{pmatrix}$
	$\theta_A = 53.13°$		$\theta_B = 38.66°$			

	$sin\theta_A$	$cos\theta_A$	$sin\theta_B$	$cos\theta_B$	$\vec{T}_A$	$\vec{T}_B$
(b)	0.923	0.3846	0.3846	0.923	$\begin{pmatrix} 141.994 \\ 340.771 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -141.991 \\ 59.166 \end{pmatrix}$

	$\theta_A + \theta_B = 90°$		

(c)	$sin\theta_A$	$cos\theta_A$	$sin\theta_B$	$cos\theta_B$	$\vec{T}_A = \begin{pmatrix} 332.228 \\ 278.75 \end{pmatrix}$	$\vec{T}_B = \begin{pmatrix} -332.228 \\ 121.003 \end{pmatrix}$
	0.6427	0.766	0.342	0.993		
	$\theta_A + \theta_B = 60°$					

Exercise 3.5.2

In the syteme of (Fig. 3.25), Calculate:

1. the angle θ for which the two moduli of the cable tensions are equal.

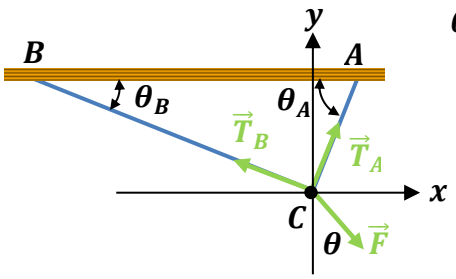
2. The maximum valu of force $\vec{F}$ applied in C knowing that the maximum tension in each of the AC and BC strings is equal to 2500N.

التمرين 2.5.3

في الجملة الموضحة في (الشكل 25.3)، احسب:

1. الزاوية (θ) التي من أجلها تتساوى طويلتا قوتي التوتر.

2. القيمة الأعظمية لطويلة القوة $(\vec{F})$ المطبقة عند (C) علما أن أقصى شدة توتر يتحملها كل حبل تساوي 2500N.



$\theta_A = 50°$

$\theta_B = 20°$

Fig. 2.25	الشكل 25.3

Solution

1. The angle θ for which $\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\|$

We apply the equilibrium condition and project the forces onto the two axes:

الحل

1. حساب الزاوية (θ) التي من أجلها $\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\|$

نطبق شرط التوازن و نسقط القوى على المحورين:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \|\vec{T}_A\| cos\theta_A \\ \|\vec{T}_A\| sin\theta_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{T}_B\| cos\theta_B \\ \|\vec{T}_B\| sin\theta_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|\vec{F}\| sin\theta \\ -\|\vec{F}\| cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{T}_A\| = \|\vec{T}_B\| = \|\vec{T}\|$$

$$\|\vec{F}\|sin\theta = \|\vec{T}\|(cos\theta_B - cos\theta_A) \dots (1)$$
$$\|\vec{F}\|cos\theta = \|\vec{T}\|(sin\theta_A + sin\theta_B) \dots (2)$$

$\frac{(1)}{(2)}$	$tan\theta = \frac{cos\theta_B - cos\theta_A}{sin\theta_A + sin\theta_B}$	$tan\theta = \frac{cos20° - cos50°}{sin50° + sin20°}$
$tan\theta = 0.2679$		$\theta = 15°$

2. The maximum valu of force $\vec{F}$:
We express $\vec{F}$ as $\|\vec{T}\|$ from equation (1) or (2)

2. أعظم شدة للقوة ($\vec{F}$) يمكن أن يتحملها الحبلان:
نعبر عن ($\|\vec{F}\|$) بدلالة ($\|\vec{T}\|$) من المعادلة (1) أو (2)

$$\|\vec{T}\| = \frac{\|\vec{F}\|sin\theta}{cos\theta_B - cos\theta_A}$$

The maximum value of the tension intensity of the two cords is :

القيمة الأعظمية لشدة التوتر في الحبلين هي:

$\|\vec{T}\| < 2500$	$\frac{\|\vec{F}\|sin\theta}{cos\theta_B - cos\theta_A} < 2500$
$\|\vec{F}\| < \frac{2500(cos\theta_B - cos\theta_A)}{sin\theta}$	$\|\vec{F}\| < 2867.88\ N$

Exercise 3.5.3

A $600N$ block is supported by two cables AC and BC (Fig. 3.26).
1 . For which value of θ, the tension of the cable BC is minimum?
2 . What are the values of the tensions of the corresponding AC and BC cables

التمرين 3.5.3

حمولة قدرها ($600N$) معلقة بحبلين (AC) و (BC) (الشكل 26.3).
1. من أجل أي قيمة للزاوية (θ)، يكون توتر الحبل (BC) أصغر ما يمكن؟.
2. كم تكون عندئذ قيمة التوترين في الحبلين (AC) و (BC)؟.

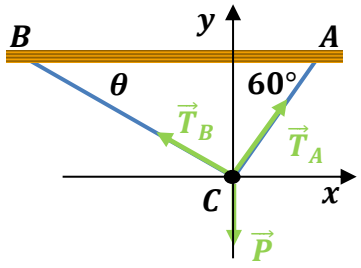


Fig. 3.26	الشكل 26.3

Solution	الحل
1. The value of θ for minimale $\|\vec{T}_B\|$	1. قيمة الزاوية (θ) التي من أجلها $\|\vec{T}_B\|$ أصغرية:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{F} = \vec{0}$
$\begin{pmatrix} \|\vec{T}_A\| cos60° \\ \|\vec{T}_A\| sin60° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\|\vec{T}_B\| cos\theta \\ \|\vec{T}_B\| sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\vec{P}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
$\|\vec{T}_A\| = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -cos\theta \\ \|\vec{P}\| & sin\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos60° & -cos\theta \\ sin60° & sin\theta \end{vmatrix}}$	$\|\vec{T}_B\| = \dfrac{\begin{vmatrix} cos60° & 0 \\ sin60° & \|\vec{P}\| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos60° & -cos\theta \\ sin60° & sin\theta \end{vmatrix}}$
$\|\vec{T}_B\| = \dfrac{600 cos\theta}{sin(60° + \theta_B)}$	$\|\vec{T}_B\| = \dfrac{300}{sin(60° + \theta_B)}$

$\|\vec{T}_B\|$ is minimal if:	$\|\vec{T}_B\|$ أصغرية إذا كان:

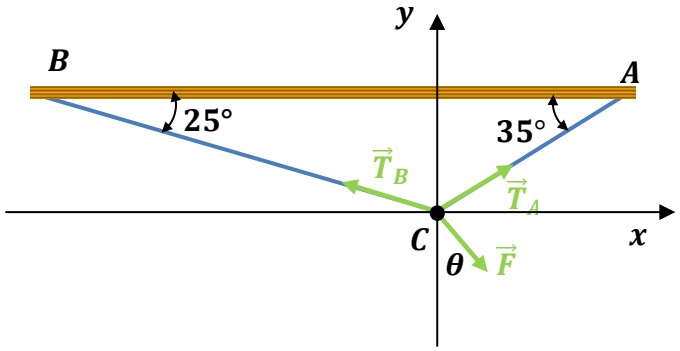
$sin(60° + \theta_B) = 1$	$60° + \theta_B = 90°$	$\theta_B = 30°$

2. The values of the tensions of the AC and BC cables :	2. قيمة التوترين في الحبلين (AC) و (BC):

$\vec{T}_A = \dfrac{600 \times cos30°}{sin(60° + 30°)} \begin{pmatrix} cos60° \\ sin60° \end{pmatrix}$	$\vec{T}_B = \dfrac{300}{sin(60° + 30°)} \begin{pmatrix} -cos30° \\ sin30° \end{pmatrix}$

$\vec{T}_B = \begin{pmatrix} -259.8 \\ 150 \end{pmatrix} N$	$\vec{T}_A = \begin{pmatrix} 259.8 \\ 449.973 \end{pmatrix} N$

التمرين 4.5.3	Exercise 3.5.4
أحسب الزاوية (θ) و القوة $(\vec{F})$ علما أن شدة توتري الحبلين (AC) و (AC) متساويتان و قيمة كل منهما هي $(750N)$ (الشكل 27.3)	Calculate the angle θ and the force $\vec{F}$ knowing that the modulus of the tension of the two cables AC and BC is the same and is equal to $750N$ (Fig. 3.27)



الشكل 27.3	Fig. 3.27

الحل	Solution
نستغل نتيجة التمرين (2.5.3):	According to the exercise (3.5.2) :

$\|\vec{F}\|sin\theta = 750 \times (0.08715)$ $\|\vec{F}\|cos\theta = 750 \times (0.99619)$	$\|\vec{F}\|sin\theta = \|\vec{T}\|(cos25° - cos35°)$ $\|\vec{F}\|cos\theta = \|\vec{T}\|(sin25° + sin35°)$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 65.3668 \\ -747.146 \end{pmatrix} N$	$\|\vec{F}\| = 750\ N$	$\theta = 5°$

التمرين 5.5.3	Exercise 3.5.5
قوة $(\vec{F} = 100\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k})$ مطبقة في النقطة (C) من أنبوب بتروني $(ABCD)$ (الشكل 27.3)، عزمها بالنسبة للنقطة (O) هو $(\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\ (\vec{F}\ ) = 75\vec{\imath} - 140\vec{\jmath} + M_z\vec{k})$. أحسب (F_y)، (F_z) و (M_z).	A force $\vec{F} = 100\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$ is applied at point C of a pipe $ABCD$ (Fig. 3.27), its momoent to O is $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\ (\vec{F}\ ) = 75\vec{\imath} - 140\vec{\jmath} + M_z\vec{k}$. Determine: F_y, F_z and M_z.

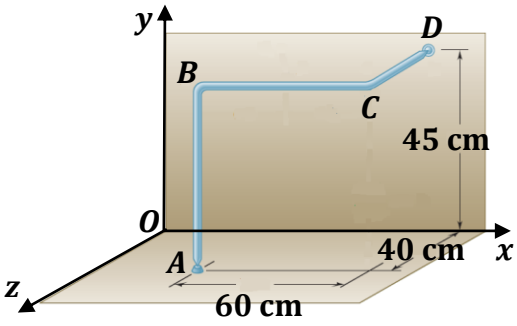


Fig. 3.28	الشكل 28.3

Solution

The moment of the force $\vec{F}$ with respect to O is :

الحل

عزم القوة $(\vec{F})$ بالنسبة للنقطة (O) هو:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = (0.6\vec{\imath} + 0.45\vec{\jmath} + 0.4\vec{k}) \wedge (100\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = (0.6\vec{\imath} + 0.45\vec{\jmath} + 0.4\vec{k}) \wedge (100\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = (0.45F_z - 0.4F_y)\vec{\imath} + (40 - 0.6F_z)\vec{\jmath} + (0.6F_y - 45)\vec{k}$$

Compared to the data:

بالمقارنة بالمعطيات:

$$0.45F_z - 0.4F_y = 75$$
$$40 - 0.6F_z = -140$$
$$0.6F_y - 45 = M_z$$

$$F_z = 300\ N$$
$$F_z = 150\ N$$
$$M_z = 45\ N.m$$

Exercise 3.5.6

A fixed crane has a mass of 1000 kg and is used to lift a body weighing 2400 kg. It is held in place by a pin at A and a rocker at B. The center of gravity of the crane is located at G (Fig. 3.29). Determine the components of the reactions in A and B.

التمرين 6.5.3

تستخدم رافعة كتلتها (1000 kg) مثبتة في نقطين (A) بتماس محوري و (B) تماس نقطي لنقل حمولة كتلتها (2400 kg). مركز ثقل هده الرافعة يقع في النقطة (G) (الشكل 29.3).

عين مركبات رد الفعل عند كل من (A) و (B).

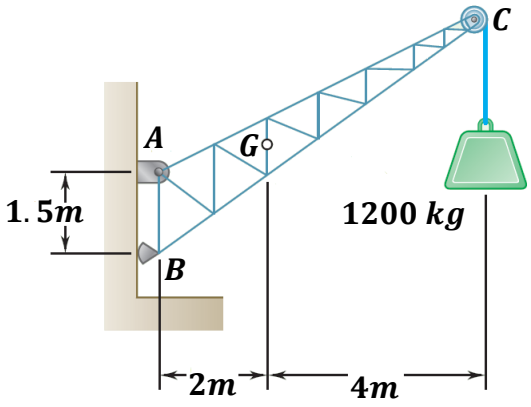


Fig. 3.29	الشكل 29.3

Solution

The system is in the plane, so we only work in two dimensions.

Starting from (Fig. 3.30) and applying the equilibrium conditions:

الحل

الجملة مستوية، يكفينا العمل بمركبتين إذن.

إنطلاقا ب من (الشكل 30.3) و بتطبيق شروط التوازن:

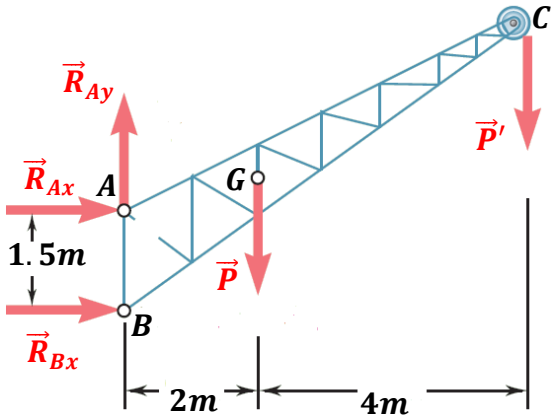


Fig. 3.30	الشكل 30.3

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\sum \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$
$\vec{P} + \vec{P}' + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -9810 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -23544 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$R_{Ax} + R_{Bx} = 0$	$R_{Ay} = 33354\ N$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{P}') + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_B) = \vec{0}$		
$\overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{P}' + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{BB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$		
$\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-9810\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\y'\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-23544\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1.5\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$		
$-19620 - 141264 - 1.5R_{Ax} = 0$	$R_{Ax} = -107256\ N$	$R_{Bx} = 107256\ N$
$\vec{R}_A = \begin{pmatrix}-107256\\33354\end{pmatrix} N$	$\vec{R}_B = \begin{pmatrix}107256\\0\end{pmatrix} N$	

Exercise 3.5.7

A homogeneous board AB with a length $l = 2\ m$ and a weight $\|\vec{P}\|$ of 50 N rests on two simple supports at C and D $0.6m$ and $0.4m$ apart from A and B respectively (Fig. 3.31).
Determine the reactions in C and D.

التمرين 7.5.3

لوحة متجانسة (AB) طولها $(l = 2\ m)$ و ثقلها $(\|\vec{P}\| = 50\ N)$ متوازنة فوق مسندين بسيطين عند كل من النقطتين (C) و (D) اللتين تبعدان بمسافة $(0.6m)$ و $(0.4m)$ عن (A) و (B) على التوالي (الشكل 31.3).
عين ردود الأفعال عند (C) و(D).

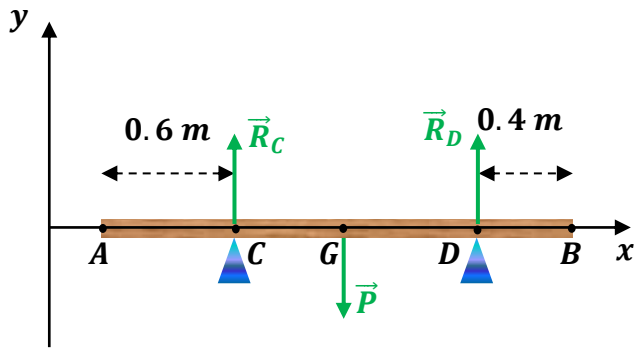


Fig. 3.31	الشكل 31.3

Solution

Applying the equilibrium conditions:

الحل

نطبق شرطا التوازن:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{P} + \vec{R}_C + \vec{R}_D = \vec{0}$	$\begin{pmatrix}0\\-50\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\R_C\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\R_D\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$R_C + R_D = 0 \dots (1)$	$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_C) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_D) = \vec{0}$	
$\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_C + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D = \vec{0}$			
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-50\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.6\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_C\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1.6\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_D\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$			
$\begin{pmatrix}0\\0\\-50\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0.6R_C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1.6R_D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$		$0.6R_C + 1.6R_D = 50 \dots (2)$	
$R_C = 30\ N$	$R_D = 20\ N$	$\vec{R}_C = \begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix} N$	$\vec{R}_D = \begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix} N$

Exercise 3.5.8

The maximum value of each reaction in A and B is $200\ N$, their directions are vertical and are directed upwards. The two forces $\vec{F}_D$ and $\vec{F}_E$ have as modules 30 and $20\ N$ respectively. Neglecting the weight of the beam (Fig. 3.32) :

1. Determine the interval of the values of $\vec{F}_C$ Who is fit to work the system.
2. Determine the reactions in A and B for $\|\vec{F}_C\| = 150N$.

التمرين 8.5.3

القيمة الأعظمية لطويلة كل من ردي الفعل عند النقطتين (A) و (B) هي $(200\ N)$، منحى كل منهما شاقوليٌ و جهة كل منهما نحو الأعلى.شدة كل من القوتين $(\vec{F}_D)$ و $(\vec{F}_E)$ هي $(30\ N)$ و $(20\ N)$ على الترتيب (الشكل 32.3).

بإهمال ثقل اللوحة حدد:

1. مجال شدة القوة $(\vec{F}_C)$ الذي يصلح لعمل الجملة.
2. أحسب ردود الأفعال عند (A) و(B) عندما تكون $(\|\vec{F}_C\| = 150N)$.

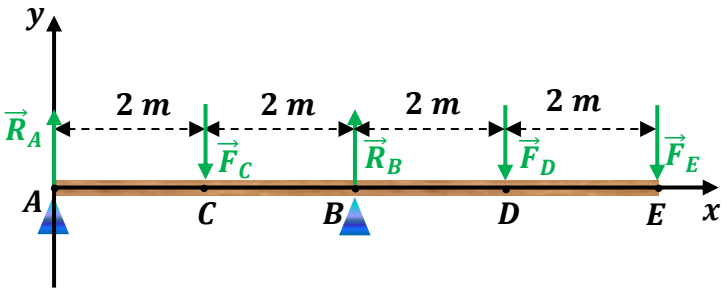


Fig. 3.32	الشكل 32.3

Solution

1. The interval of the values of $\vec{F}_C$.

The maximum value of the intensity of ($\vec{F}_C$) for the support B:

الحل

1. مجال شدة القوة ($\vec{F}_C$).

القيمة الأعظمية لشدة ($\vec{F}_C$) بالنسبة للمسند (B):

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \vec{0}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{R}_B) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_C) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_D) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_E) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_D + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{F}_E = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_A\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_B\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_C\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_D\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_E\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\4R_B\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-2F_C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-6F_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-8F_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$4R_B - 2F_C = 340$	$R_B = \dfrac{340 + 2F_C}{4}$

We put the condition that was given to us on the value of $\vec{R}_B$.

نضع الشرط الذي أُعطي لنا على شدة ($\vec{R}_B$)

$R_B \leq 200$	$\dfrac{340 + 2F_C}{4} \leq 200$	$F_C \leq 230\ N$

The maximum value of the intensity of ($\vec{F}_C$) for the support A:

القيمة الأعظمية لشدة ($\vec{F}_C$) بالنسبة للمسند (A):

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_B) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_C) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_D) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_E) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{BB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{F}_C + \overrightarrow{BD} \wedge \vec{F}_D + \overrightarrow{BE} \wedge \vec{F}_E = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_A\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\R_B\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_C\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_D\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F_E\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-4R_A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2F_C\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-2F_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-4F_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$4R_A = 2F_C - 140$	$R_A = \dfrac{2F_C - 140}{4}$

We put the condition that was given to us on the value of $\vec{R}_A$.

نضع الشرط الذي أُعطي لنا على شدة $(\vec{R}_A)$

$R_A \leq 200$	$\frac{2F_C - 140}{4} \leq 200$	$F_C \leq 330\ N$

So the maximum value of the intensity $\vec{F}_C$ that preserves the system is the smallest, that is:

إذن القيمة الأعظمية لشدة $(\vec{F}_C)$ التي تحافظ على النظام هي أصغرهما أي:

$$F_C \leq 230\ N$$

In order to find the smallest value of the intensity $\vec{F}_C$, the following condition must be on the reaction of the support A:

لكي نجد القيمة الأصغرية لشدة $(\vec{F}_C)$ يجب وضع الشرط التالي على رد فعل المسند (A):

$$R_A \geq 0$$

This condition reflects the existence of the $\vec{R}_A$ reaction.

هذا الشرط يفسر وجود رد الفعل $(\vec{R}_A)$.

$\frac{2F_C - 140}{4} \geq 0$	$2F_C - 140 \geq 0$	$F_C \geq 70\ N$

So the intensity domain of $\vec{F}_C$ is:

إذن مجال شدة $(\vec{F}_C)$ هو:

$$70 \leq F_C \leq 230$$

2. Calculation of the value of reactions when $\|\vec{F}_C\| = 150N$.

2. حساب قيمة ردود الأفعال عندما $(\|\vec{F}_C\| = 150N)$.

$R_A = \frac{2F_C - 140}{4}$	$R_A = 40\ N$	$R_B = \frac{340 + 2F_C}{4}$	$R_B = 160\ N$

Exercise 3.5.9

Two homogeneous rods OA and OB of lengths a and b respectively, of the same density λ connected at O, so that AOB forms a right angle. The system is suspended at O vertically (Fig. 3.33).

1 . Determine the reaction at O.

2 . Find the angles α and β so that there is equilibrium.

التمرين 9.5.3

ساقان (OA) و (OB) متجانستان لهما نفس الكتلة الخطية (λ) طولاهما (a) و (b) على الترتيب، مثبتتان إلى بعضهما في (O) و تصنعان زاوية قائمة. تعلق الجملة شاقوليا من النقطة (O) (الشكل 33.3).

1. عين قوة رد الفعل عند (O)

2. أوجد الزاوية (α) و (β) اللتان من أجلهما يتحقق التوازن.

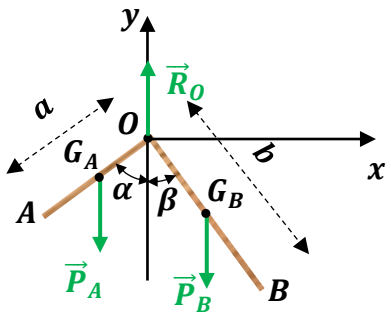


Fig. 3.33 — الشكل 33.3

Solution

1. Reaction at Point O:

By applying the first equilibrium condition :

الحل

1. رد الفعل عند النقطة (O):

من خلال تطبيق شرط التوازن الأول :

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{R}_O + \vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{0}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ R_O \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$R_O = P_A + P_B$$

2. The angles α and β :

By applying the second equilibrium condition :

2. حساب الزاويتين (α) و (β):

من خلال تطبيق شرط التوازن الثاني :

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$	$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_A) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_B) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}_O) = \vec{0}$

$$\overrightarrow{OG_A} \wedge \vec{P}_A + \overrightarrow{OG_B} \wedge \vec{P}_B + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R}_O = \vec{0}$$

$$\frac{a}{2}\begin{pmatrix} -sin\alpha \\ -cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P_A \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}\begin{pmatrix} sin\beta \\ -cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aP_A sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -bP_B sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aP_A sin\alpha = bP_B sin\beta$$

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{bP_B}{aP_A}$$

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{bm_B}{am_A}$$

The two rods are homogeneous, which allows us to write :

الساقان متجانستان ، مما يسمح لنا بكتابة ما يلي:

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{\lambda b}{\lambda a}$$

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{b^2}{a^2}$$

The two rods form a right angle, so :

يشكل الساقان زاوية قائمة ، مما يعني:

$$sin\beta = cos\alpha$$

Finally we find :

وأخيرا نجد :

$$tan\alpha = \frac{b^2}{a^2}$$

Exercise 3.5.10

The end of a homogeneous scale of weight $\vec{P}$ and length l, is pressed against a perfectly smooth vertical wall and its foot rests on the supposed horizontal ground whose coefficient of friction is μ (Fig. 3.34).

التمرين 10.5.3

النهاية العلوية لسلم متجانس تقله $(\vec{P})$ و طوله (l) مستندة إلى حائط أملس تماما، و نهايته السفلية ترتكز على أرضية سطحها خشن معامل احتكاكها (μ) (الشكل 34.3).

a. Determine the smallest angle α that the scale can make with the ground to stay in equilibrium. b. will there be equilibrium if $\mu = 0$	أ. عين أصغر زاوية (α) يصنعها السلم مع الأرضية بحيث يحافظ على سكونه. ب. هل يمكن أن يكون هناك توازن للسلم لما $(\mu = 0)$؟

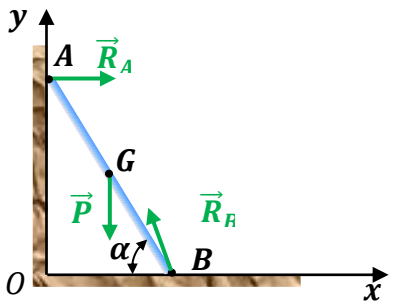


Fig. 3.34	الشكل 34.3

Solution

a. Determination of the minimum value of α :

By applying the first equilibrium condition :

الحل

أ. تحديد أصغر قيمة لـ (α) حتى يبقى السلم ساكنا:

بتطبيق الشرط الأول التوازن:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_{Bx} \\ R_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{cases} R_A = R_{Bx} \\ P = R_{By} \end{cases}$

By applying the second equilibrium condition :

بتطبيق الشرط الثاني التوازن:

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_A) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_B) = \vec{0}$
$\overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{BB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$	$\frac{l}{2}\begin{pmatrix} -cos\alpha \\ sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} -cos\alpha \\ sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Pcos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_A sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$R_A = \frac{P}{2tan\alpha}$

لكي يظل السلم في حالة توازن ، من الضروري : R_A هذا يعني : R_{Bx}

For the scale to remain in equilibrium, it is necessary that :

$R_A \leq R_{Bx}$	$\frac{P}{2tan\alpha} \leq R_{Bx}$	$\frac{1}{2tan\alpha} \leq \frac{R_{Bx}}{P}$

$\frac{1}{2tan\alpha} \leq \frac{R_{Bx}}{R_{By}}$	$\frac{1}{2tan\alpha} \leq \mu$	$tan\alpha \geq \frac{1}{2\mu}$	$\alpha \geq arctan\left(\frac{1}{2\mu}\right)$

ب. مناقشة توازن السلم إذا كان ($\mu = 0$):

إذا عوضنا في العلاقة الأخيرة ($\mu = 0$) فنجد أن ($\alpha \geq \pi/2$) و هذا يعني أنه لا يمكن إمالة السلم بزاوية أقل من ($\alpha < \pi/2$) و إلا فإنه سيسقط.

Discussion of the equilibrium of the scale if $\mu = 0$:

$\mu = 0$, brings us back to $\alpha \geq \pi/2$ that is to say that the scale cannot be tilted with an angle $\alpha < \pi/2$.

3.6 Additional exercises

6.3 تمارين إضافية

Exercise 3.6.1

The (Fig. 3.35) represents a weight $\vec{P}$, hooked to three wires of the same length l, which are themselves attached to the vertices of a horizontal equilateral triangle from the side a. calculate the wire tensions according to $\|\vec{P}\|$, l and a

التمرين 1.6.3

يمثل (الشكل 35.3) ثقلا ($\vec{P}$) معلقا بثلاث حبالٍ لها نفس الطول (l)، و أطرافها الأخرى متصلة بنقاط سقف بحيث تشكل فيما بينها مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه (a).

أحسب شدة توتر كل حبل بدلالة ($\|\vec{P}\|$، l و a).

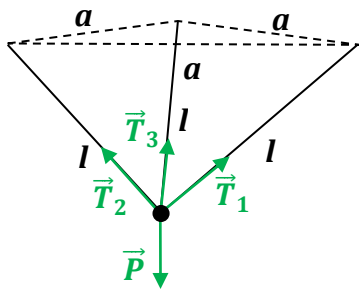


Fig. 3.35 — الشكل 35.3

Answer: $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_3\| = \dfrac{lP}{\sqrt{3(3l^2 - a^2)}}$:الجواب

Exercise 3.6.2

The table shown (Fig. 3.36) weighs 30 Kg and has a diameter of 1 m. It is supported by three equidistant legs. A vertical load with a mass of 100 Kg is applied at the top of the table in D. Determine the maximum value of a if the table should not tilt.

التمرين 2.6.3

مائدة مستديرة كتلتها (30 Kg) و قطرها (1 m). تستند على ثلاثة أرجل تشكل مثلثا متساوي الأضلاع (الشكل 36.3). يوضع فوقها حمل ثقله (100 Kg) عند النقطة (D). عين أكبر قيمة للبعد (a) حتى لا تفقد المائدة توازنها وتنقلب.

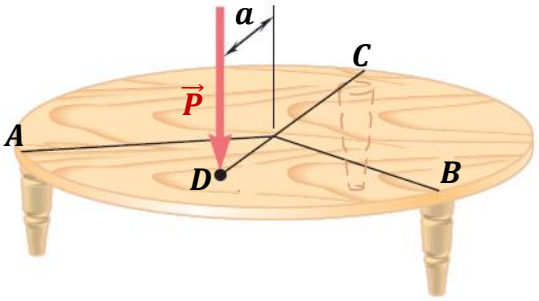


Fig. 3.35	الشكل 35.3

Answer: $a = 0.325\ m$ **الجواب:**

Exercise 3.6.3

A table of negligible weight has the shape of an equilateral triangle ABC with side l, it rests perpendicularly on three legs fixed to the vertices. A weight $\vec{P}$ is placed on the table at a point distant from a on the AC side and from b on the BC side (Fig. 3.36).

Find out which part of the weight will be supported by the feet A, B and C respectively.

التمرين 3.6.3

مائدة مهملة الكتلة لها شكل مثلث متساوي الأضلاع رؤوسه (ABC) وضلعه (l)، في وضع ساكن، تستند إلى الأرض على ثلاثة أرجل مثبتة على رؤوسها. يوضع فوقها ثقل $(\vec{P})$ في نقطة تبعد بمسافة (a) عن الضلع (AC) و بمسافة (b) عن الضلع (BC) (الشكل 36.3).

حدد الجزء الذي تتحمله من الثقل الرجل (A)، (B) و (C) على الترتيب.

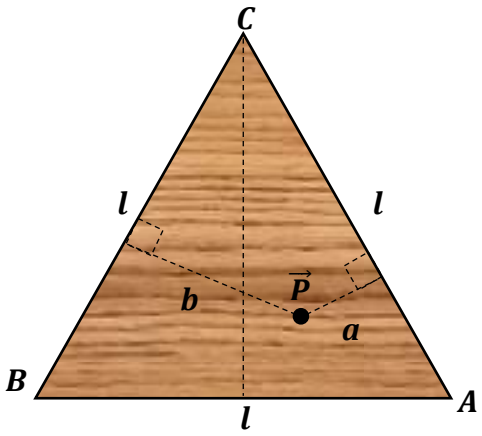


Fig. 3.36	الشكل 36.3

Answer:	$\frac{2Pb}{\sqrt{3}l}, \quad \frac{2Pa}{\sqrt{3}l}, \quad \frac{P\left(\sqrt{3}l-2(a+b)\right)}{\sqrt{3}l}$	الجواب:

Exercise 3.6.4	التمرين 4.6.3
As indicated (Fig. 3.37), a force $\vec{F}$ of 455 N is applied to the 6 m long pole ABC. The mast is held by a ball joint at A and by two cables BD and BE. For $a = 3\ m$, determine the tension in each cable and the reaction in A.	كما يوضحه (الشكل 37.3)، قوة $(\vec{F})$ شدتها $(455\ N)$ مطبقة في النهاية العلوية (C) لسارية (ABC) طولها $(6\ m)$ مثبتة شاقوليا في طرفها السفلي (A) بتمحور كروي و بحبلين (BD) و (BE). من أجل $(a = 3\ m)$، عين شدة قوة التوتر في كل حبل و كذا رد الفعل عند (A).

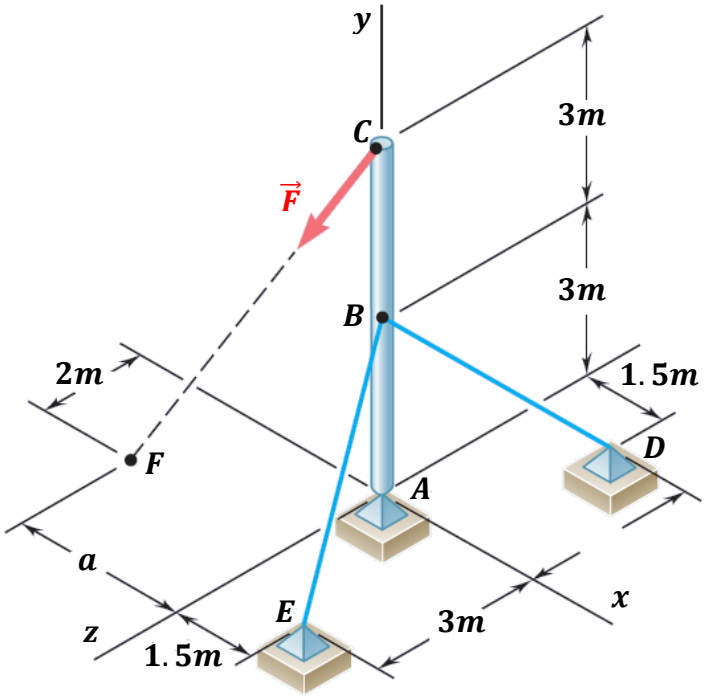


Fig. 3.37	الشكل 37.3

Answer:	$\vec{T}_{BD} = \begin{pmatrix} 260 \\ -520 \\ -520 \end{pmatrix} N, \quad \vec{T}_{BE} = \begin{pmatrix} 130 \\ -260 \\ 260 \end{pmatrix} N, \quad \vec{R}_A = \begin{pmatrix} -195 \\ 1170 \\ 130 \end{pmatrix} N$	الجواب:

Exercise 2.7.5	التمرين 5.7.2
The ACD Half-frame is supported by ball joints at A and D and by a cable passing through a ring at B and attached to the hooks at G and H (Fig. 3.37). Knowing that the Half-frame supports at point C a load of 268 N, determine the two voltages $\vec{T}_{BH}$ and $\vec{T}_{BG}$ of the cable.	نصف إطار (ACD) مثبت أفقيا بتمحور كروي عند كل من (A) و (D) و بحبلين مربوطين عند (B) و ينتهيان عند (G) و (H) كما يوضحه (الشكل 38.3). يتحمل نصف الإطار هذا عند النقطة (C) ثقلا $(\vec{P})$ قيمته $(268\ N)$، عين شدة التوترين $(\vec{T}_{BH})$ و $(\vec{T}_{BG})$ في الحبلين.

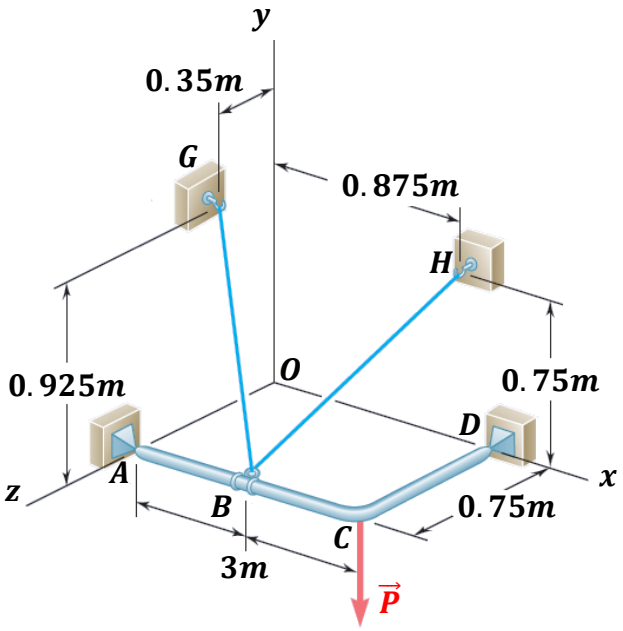


Fig. 2.24	الشكل 38.3

Answer:	$\vec{T}_{BH} = 120\vec{\imath} + 240\vec{\jmath} - 240\vec{k} \wedge \vec{T}_{BG} = -160\vec{\imath} + 296\vec{\jmath} - 128\vec{k}$	الجواب:

الفصل 4
حركيات الجسم الصلب

Chapter 4
kinematics of the solid body

4.1 Introduction

In this chapter, we study the kinetics of solid bodies. Before that, we start with a reminder of the quantities related to motion, such as the position, speed and acceleration of a material point and the relationships that connect them, and then we generalize this to a solid body that forms a set of cohesive material points among themselves.

1.4 مقدمة

في هذا الفصل ، ندرس حركية الأجسام الصلبة. نبدأ قبل ذلك بتذكرة على المقادير المتعلقة بالحركة كالموضع و السرعة و التسارع لنقطة مادية و العلاقات التي تربط بينها ثم نعمم ذلك على الجسم الصلب الذي يشكل جملة من النقاط المادية المتماسكة فيما بينها.

4.2 Brief reminders on the kinematic quantities of the material point

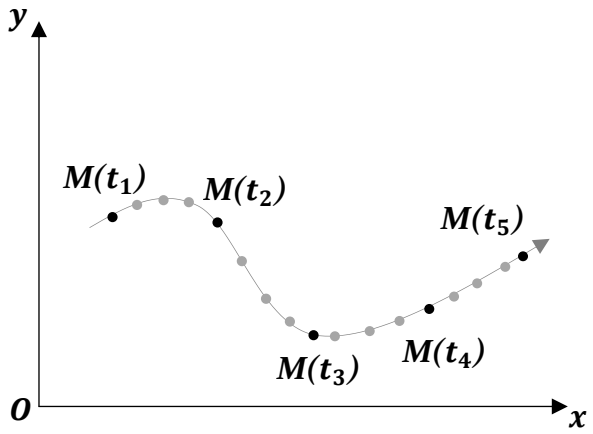
2.4 تذكرة بالمقادير الحركية للنقطة المادية

4.2.1 Trajectory

The trajectory (Fig. 4.1) of a moving material particle M is the set of points $M(t_i)$ occupied by M at times (t_i) during this movement.

1.2.4 المسار

مسار النقطة المتحركة (M) (الشكل 1.4)، هو مجموعة النقاط $(M(t_i))$ التي تشغلها خلال حركتها في كل لحظة(t_i).



الشكل 1.4: مسار نقطة مادية متحركة (M).

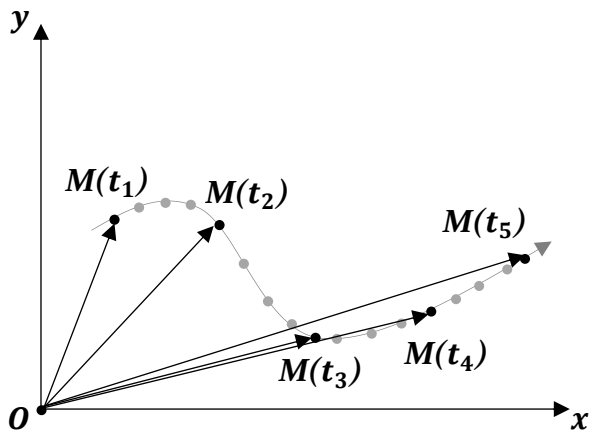
Fig. 4.1: Trajectory of a moving material point.

4.2.2 Position vector

It is the vector linking the origin of the reference O to the moving point M at any moment t. (Fig. 4.2).

2.2.4 شعاع الموضع:

هو الشعاع الذي يصل مبدأ المعلم (O) بالنقطة المتحركة (M) في أي لحظة (t) (الشكل 2.4).



الشكل 2.4: شعاع الموضع لنقطة مادية (M)

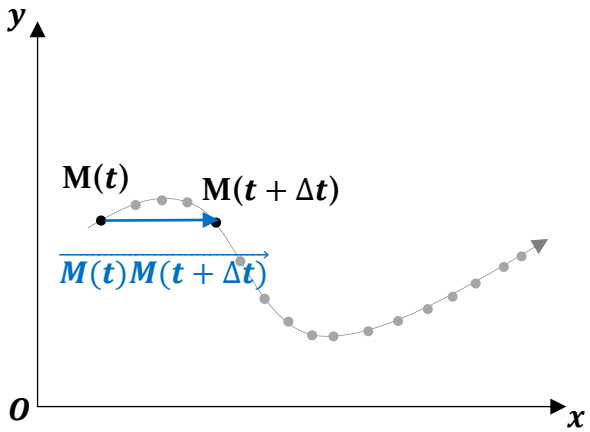
Fig. 4.2: Vectors positions of the point M.

4.2.3 Displacement vector

It is the vector linking the position of the point M at the instant t that is to say $M(t)$, to the position of this same point which is in motion at the instant $(t + \Delta t)$ namely $M(t + \Delta t)$ (Fig. 4.2).

3.2.4 شعاع الإنتقال

هو الشعاع الذي يربط موضع النقطة (M) في اللحظة (t) أي ($M(t)$) ، إلى موضع هذه النقطة نفسها التي تتحرك في اللحظة ($t + \Delta t$) وهو ($M(t + \Delta t)$) (الشكل 3.4).



الشكل 3.4: شعاع الإنتقال لنقطة (M) بين لحظتين (t) و ($t + \Delta t$)

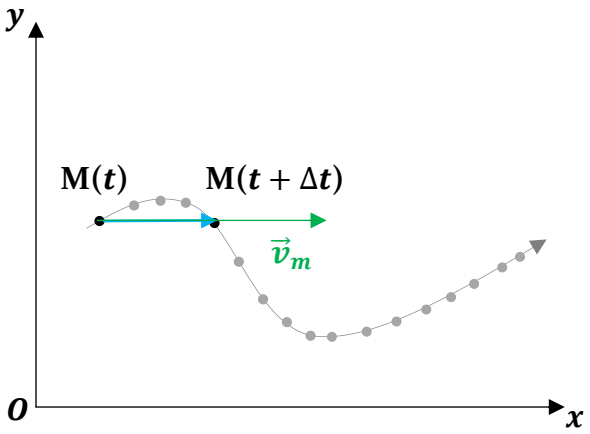
Fig. 4.3: Vector displacement of the point M between the instant t and $t + \Delta t$.

4.2.4 Average speed vector

The average velocity vector between two instants t and $t + \Delta t$ is the displacement vector between these two moments per unit of time. They have the same direction and the same direction (Fig. 4.4).

4.2.4 شعاع السرعة المتوسطة

شعاع السرعة المتوسطة بين لحظتين (t) و ($t + \Delta t$)، هو شعاع الإنتقال بين هاتين اللحظتين على وحدة الزمن. يكون لهما نفس الحامل و الاتجاه (الشكل 4.4).



الشكل 4.4: شعاع السرعة المتوسطة بين لحظتين (t) و $(t + \Delta t)$

Fig. 4.4: The average velocity vector between the instant t and $t + \Delta t$.

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}}{\Delta t} \qquad (4.1)$$

4.2.5 Instantaneous velocity vector

The limit of the average velocity vector $\vec{v}_{moy}$ between two instants t and $t + \Delta t$ when Δt is very small $(\Delta t \to 0)$ is reduced to the velocity vector at instant t denoted $\vec{v}(t)$, it is at any instant t tangent to the trajectory in $M(t)$. (Fig. 4.5).

5.2.4 شعاع السرعة اللحظية

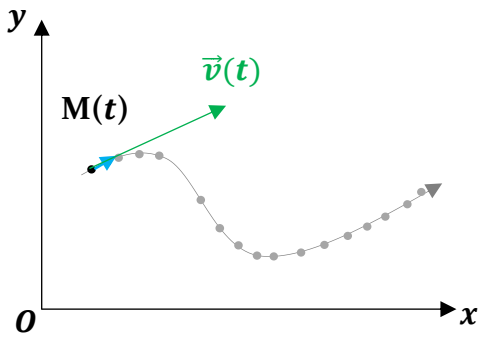
هو ما يؤول إليه شعاع السرعة المتوسطة $(\vec{v}_{moy})$ بين لحظتين (t) و $(t + \Delta t)$ عندما يكون المجال الزمني (Δt) بينهما صغيرا جدا أي $(\Delta t \to 0)$. وهذ المثال $(\vec{v}(t))$ يعتبر شعاع السرعة في لحظة (t)، ويكون في أي لحظة مماسيا للمسار في النقطة $(M(t))$ (الشكل 5.4).

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} \qquad (4.2)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}}{\Delta t} \qquad (4.3)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \qquad (4.4)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\overrightarrow{OM}} \qquad (4.5)$$



الشكل 5.4: شعاع السرعة اللحظي في لحظة (t).

Fig. 4.5: Instantaneous velocity vector at instant t.

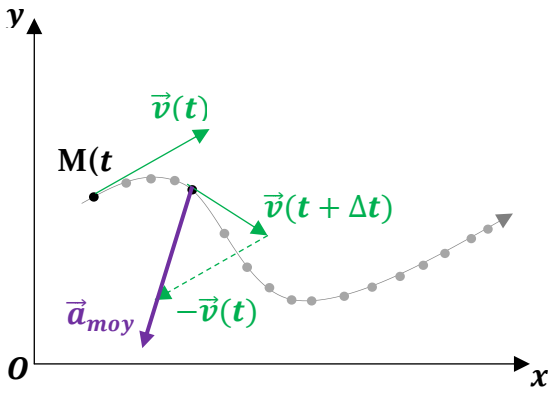
6.2.4 شعاع التسارع المتوسط

شعاع التسارع المتوسط بين لحظتين (t) و ($t + \Delta$) هو التغير في شعاع السرعة اللحظية بين هاتين اللحظتين على وحد الزمن (الشكل 6.4).

4.2.6 Average acceleration vector

The average acceleration vector between two instants t and $t + \Delta t$ is the variation of the velocity vector between these two moments per unit of time. (Fig. 4.6).

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (4.6)$$



الشكل 6.4: شعاع التسارع المتوسط بين لحظتين (t) و (Δt)

Fig. 4.6: Average acceleration vector between the instant t and $t + \Delta t$.

7.2.4 شعاع التسارع اللحظي

هو ما يؤول إليه شعاع السرعة التسارع المتوسط ($\vec{a}_{moy}$) بين لحظتين (t) و ($t + \Delta t$) عندما يكون المجال الزمني (Δt) بينهما صغيرا جدا أي ($\Delta t \to 0$). وهذ المثال ($\vec{a}(t)$) يعتبر شعاع التسارع في لحظة (t).

4.2.7 Instantaneous acceleration vector

The limit of the average acceleration vector $\vec{a}_{moy}$ between two instants t and $t + \Delta t$ when Δt is very small ($\Delta t \to 0$) is reduced to the acceleration vector at instant t denoted $\vec{a}(t)$.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} \qquad (4.7)$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (4.8)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\dot{\overrightarrow{OM}}}{dt} = \ddot{\overrightarrow{OM}} \qquad (4.9)$$

4.2.8 Tangential acceleration and normal acceleration

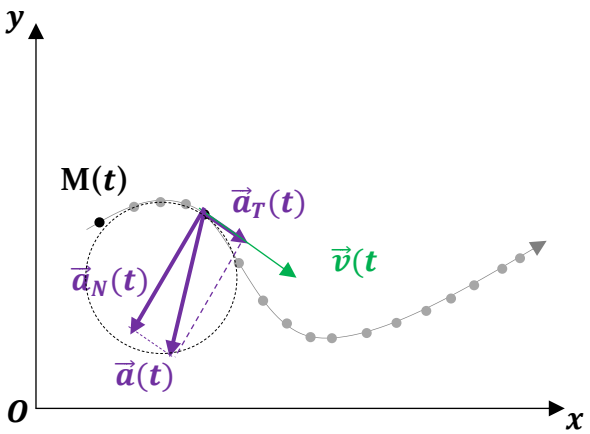
In deriving the instantaneous velocity vector, account must be taken of the variation in its modulus which generates a tangential acceleration component and the variation in its direction which produces a normal acceleration component (Fig. 4.7).

8.2.4 التسارع المماسي و التسارع الناظمي

عند اشتقاق شعاع السرعة اللحظية، يجب أن يؤخذ في الاعتبار تغيره الزمني في شدته و في اتجاهه. فتغيره في شدته يولد التسارع المماسي للمسار بينما تغيره في الإتجاه ينتج التسارع الناظمي أي العمودي على المسار في تلك اللحظة و النقطة الشكل. 4.7).

$$\vec{a}_T(t) = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_T \qquad (4.10)$$

$$\vec{a}_N(t) = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}\vec{u}_N \qquad (4.11)$$



الشكل 7.4: شعاع التسارع اللحظي و مركبتيه المماسية و الناظمية

Fig. 4.7: The instantaneous acceleration vector and its components.

Example 4.1

The three-dimensional motion of a particle is defined by the position vector :

$$\vec{r}(t) = (2tcost)\,\vec{i} + (4t-5)\,\vec{j} + (2tsint)\,\vec{k}$$

Where $\vec{r}(t)$ and t are expressed in meters and seconds, respectively.

1 . Show that the curve described by the particle is located on the hyperboloid :

$$(y+5)^2 = 4(x^2+z^2)$$

2 . Determine :

a). The velocity and acceleration of the particle at $t = 0$.

b). The instant t for which the position vector and the velocity vector are perpendicular.

c). The two tangential and normal components of acceleration.

d). The radius of curvature.

مثال 1.4

شعاع موض نقطة تتحرك في الفضاء معرف كما يلي:

بحيث ($\vec{r}(t)$) و (t) مقدران كبالمتر و الثانية على الترتيب.

1. بين أن مسار النقطة المتحركة محدد بالقطع الزائد ذو المعادلة :

2. عين:

أ). شعاعي السرعة و التسارع عند اللحظة ($t = 0$).

ب). اللحظة (t) التي يكون فيها شعاع السرعة و شعاع التسارع متعامدان.

ج).مركبتا التسارع المماسية و الناظمية.

د).نصف قطر الإنحناء.

Solution

الحل

1 . The curve described by the particle:

We have:

1. المنحنى الذي ترسمه النقطة المتحركة:

لدينا:

$x = 2tcost$	$y = 4t-5$	$z = 2tsint$
$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = (tcost)^2$	$\left(\frac{y+5}{4}\right)^2 = t^2$	$\left(\frac{z}{2}\right)^2 = (tsint)^2$
$\left(\frac{y+5}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2$		$(y+5)^2 = 4(x^2+z^2)$

2 . a. The velocity and acceleration of the particle at $t = 0$:

We have:

2.أ . سرعة و تسارع النقطة المتحركة عند اللحظة $t = 0$:

لدينا:

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	$\vec{v}(t) = 2(cost - tsint)\vec{i} + 4\vec{j} + 2(sint + tcost)\vec{k}$
$\vec{v}(0) = 2\vec{i} + 4\vec{j}\ m/s$	
$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$	$\vec{a}(t) = 2(-2sint - tcost)\vec{i} + 2(2cost - tsint)\vec{k}$
$\vec{a}(0) = 4\vec{k}\ m/s^2$	

2 . b. The instant t so that $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$:

We have:

2.ب. اللحظة التي يكون فيها $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$:

لدينا:

$\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t) \Longrightarrow \vec{r}(t).\vec{v}(t) = 0$	
$4t\,cos^2t\ - 4t^2sintcost + \ 16t\ - 20 + 4\,t\,sin^2t + 4t^2sintcost = 0$	
$20t - 20 = 0$	$t = 1\ s$

2 . c. The components of the acceleration vector :

2.ج. مركبات شعاع التسارع:

$\vec{a}_T(t) = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_T$	$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\big(2(cost - tsint)\big)^2 + 16 + \big(2(sint + tcost)\big)^2}$
$\|\vec{v}(t)\| = 2\sqrt{t^2 + 5}$	$\vec{a}_T(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2 + 5}}\vec{u}_T$
$\|\vec{\gamma}_N(t)\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}(t)\|^2 - \|\vec{\gamma}_T(t)\|^2}$	
$\|\vec{a}_N(t)\| = \sqrt{\big(2(-2sint - tcost)\big)^2 + \big(2(2cost - tsint)\big)^2 - \left(\dfrac{2t}{\sqrt{t^2 + 5}}\right)^2}$	
$\|\vec{a}_N(t)\| = \sqrt{16 + 4t^2 - \left(\dfrac{2t}{\sqrt{t^2 + 5}}\right)^2}$	$\|\vec{a}_N(t)\| = 2\sqrt{\dfrac{t^4 + 8t^2 + 20}{t^2 + 5}}$

2 . d. The radius of curvature :

2.د. نصف قطر إنحناء المسار:

$\|\vec{a}_N(t)\| = \dfrac{\|\vec{v}(t)\|^2}{R}$	$R = \dfrac{\|\vec{v}(t)\|^2}{\|\vec{a}_N(t)\|}$

$$R = \frac{4(t^2+5)}{2\sqrt{\frac{t^4+8t^2+20}{t^2+5}}}$$

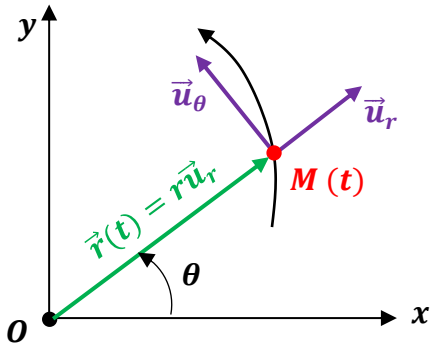
$$R = \sqrt{\frac{2(t^2+5)}{t^4+8t^2+20}}$$

4.2.9 Polar coordinates

In certain situations, in plane motion, the position M of the particles is defined by its polar coordinates r and θ (Fig. 4.8). It is then appropriate to express the velocity and the acceleration of the particle in components parallel and perpendicular to the radial line OM. These components are called radial and transverse components.

9.2.4 الإحداثيات القطبية:

في حالات معينة، في الحركة المستوية، يتم تحديد موضع النقطة المتحركة (M) من خلال إحداثياتها القطبية (r) و (θ) (الشكل 8.4)، ومن ثم فإنه من المناسب أن نعبر عن أشعة موضع وسرعة وتسارع النقطة المتحركة بمركبتين موازية وعمودية على الخط القطري (OM). تسمى هاتين المركبتين بالقطرية والعرضية.



الشكل 4.8: الإحداثيات القطبية و أشعة الوحدة

Fig. 4.8: Polar coordinates and unit vectors.

4.2.9.1 Position vector

1.9.2.4 شعاع الموضع:

$$\vec{r}(t) = r\vec{u}_r \qquad (4.12)$$

4.2.9.2 Velocity vector

2.9.2.4 شعاع السرعة:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad (4.13)$$

4.2.9.3 Acceleration vector

3.9.2.4 شعاع التسارع:

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta \qquad (4.14)$$

Example 4.2

The rotation of the arm OA of length $l = 0.9\ m$ around O (Fig. 4.9) is defined by the relation: $\theta = 0.15t^2$ where θ is expressed in radians and t in seconds. The collar B slides along the arm in such a way that its distance to O is: $r = 0.9 - 0.12\ t^2$, where r is expressed in meters and t in seconds. Once the OA arm has rotated by 30°, determine :

1 . The total speed of the collar.

2 . The total acceleration of the collar.

3 . The relative acceleration of the collar with respect to the arm.

مثال 2.4

ذراع (OA) طولها $(l = 0.9\ m)$ تدول حول النقطة (O) (الشكل 9.4) بزاوية متغيرة بدلالة الزمن معادلتها $(\theta = 0.15t^2)$، حيث (θ) مقدرة بالراديان و (t) باثانية. الطوق (B) ينزلق وفق الذراع بحيث تكون المسافة بينه و بين (O) هي : $(r = 0.9 - 0.12\ t^2)$ حيث (r) مقدرة بالمتر و (t) باثانية. عندما تكون الذراع عند الزاوية (30°)، عين:

1. السرعة الكلية للطوق.
2. التارع الكلي للطوق.
3. التسارع النسبي للطوق بالنسبة للذراع.

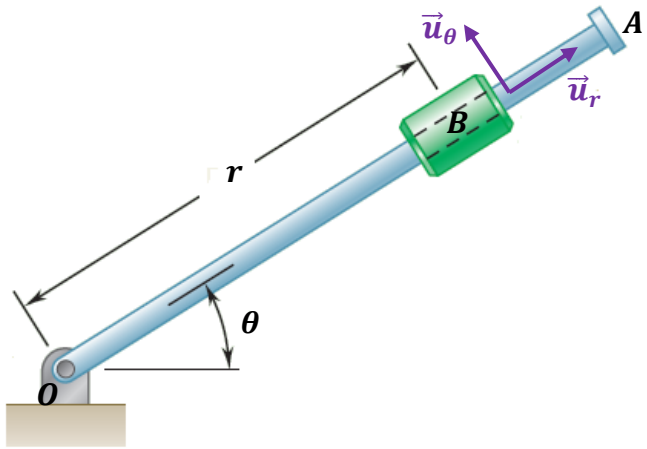


Fig. 4.9	الشكل 9.4

Solution

الحل

1. The total speed:

1. السرعة الكلية:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \vec{v}(t) = (0.24t)\vec{u}_r + (0.9 - 0.12t^2)(0.3t)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}(t) = (0.24t)\vec{u}_r + (0.27t - 0.036t^3)\vec{u}_\theta$$

2. The total acceleration:

2. التسارع الكلي:

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = (0.24 - (0.9 - 0.12t^2)(0.3t)^2)\vec{u}_r + \left((0.9 - 0.12t^2)0.3 + 2(0.24t)(0.3t)\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = (0.0108t^4 - 0.081t^2 + 0.24)\vec{u}_r + (0.108t^2 + 0.27)\vec{u}_\theta$$

3. The relative acceleration of the collar relative to the arm :

The movement of the collar relative to the arm is rectilinear and defined by the coordinate r, so :

3. التسارع النسبي للطوق بالنسبة للذراع:

حركة الطوق بالنسبة للذراع هي حركة مستقيمة و محددة بالإحداثية القطرية (r)، بحيث:

$$\vec{a}_{B/OA}(t) = \ddot{r}\vec{u}_r$$

$$\vec{a}_{B/OA}(t) = -(0.024)\vec{u}_r\ m/s^2$$

4.3 Kinematics of the solid body

3.4 حركيات الجسم الصلب

4.3.1 Definition of an undeformable solid

1.3.4 تعريف الجسم الصلب:

An undeformable solid S is the mathematical model which represents a set of material points, the distance between any pair of these points of which is invariant over time, independently of the forces applied (Fig. 4.10).

الجسم الصلب هو النموذج الرياضي الذي يمثل مجموعة من النقاط المادية، المسافة بين أي زوج من هذه النقاط ثابتة دوما ، بغض النظر عن القوى المطبقة عليه (الشكل. 10.4).

$$\forall\ (A, B) \in (S): \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = constant \qquad (4.15)$$

Fig. 4.10 Non-deformable solid

الشكل 10.4: صلب لا يتشوه

4.3.2 Speed field:

2.3.4 حقل السرعات:

Each point of a solid S animated by any movement, has its own speed (Fig. 4.11). These velocities are related to each other by the following relationship

تتميز كل نقطة من نقاط الجسم الصلب المتحرك كيفيا بسرعتها (الشكل. 11.4). ترتبط هذه السرعات ببعضها بالعلاقة التالية

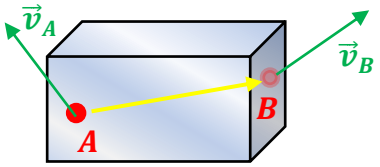
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (4.16)$$

Where $\vec{\omega}$ is the rotational speed or angular velocity and is always collinear to the axis of rotation.

حيث $\vec{\omega}$ هي سرعة الدوران أو السرعة الزاوية و تكون منطبقة دوما على محور الدوران.

This relationship is known by the velocity distribution relationship or velocity field.

تعرف هذه العلاقة بعلاقة توزيع السرعات أو حقل السرعات.



الشكل 11.4: جسم صلب أثناء الحركة

Fig. 4.11: Undeformable solid in motion

4.3.3 Field of accelerations:

By deriving the previous relation, we can find the accelerations of all the points of the solid S.

3.3.4 حقل التسارعات:

باشتقاق العلاقة السابقة أي علاقة حقل السرعات، نجد تسارع أي نقطة من نقاط الصلب (S).

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB})}{dt}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \qquad \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AB}) \qquad (4.17)$$

Where $\vec{\alpha}$ Is the rotational acceleration or angular acceleration.

حيث $\vec{\alpha}$ هو تسارع الدوران أو التسارع الزاوي.

It is known by the acceleration distribution relation or acceleration field.

تعرف هذه العلاقة بعلاقة توزيع التسارعات أو حقل التسارعات.

In plane motions, $\vec{\alpha}$ and $\vec{\omega}$ are collinear and they are perpendicular to the plane of motion, and the relation (4.17) can be simplified as follows:

في الحركات المستوية يكون $\vec{\alpha}$ منطبقا على $\vec{\omega}$ و يكونان عموديان على مستوي الحركة، و يمكن تبسيط العلاقة (4.17) كما يلي:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{AB} - \omega^2\wedge\overrightarrow{AB} \qquad (4.18)$$

Example 4.3

The (Fig. 4.12) represents a shovel in full work, with the characteristics indicated.

1 . If $\omega_{AB} = rad/s$, $\alpha_{AB} = 2\ rad/s^2$, $\omega_{BC} = -1\ rad/s$ and $\alpha_{BC} = -4\ rad/s^2$.

a. Calculate the speed of point C.

b. Calculate the acceleration of point C.

2 . If the speed of the point C is constant and is equal to $4\vec{\imath}\ m/s$.

Calculate the values of:

a. ω_{AB} and ω_{BC}.

b. $\alpha_{AB}$and α_{BC}.

مثال 3.4

يمثل الشكل الموالي حفارة أثناء العمل، تتميز بالأبعاد المشار إليها.

1 . إذا كان $\omega_{AB} = 2\ rad/s$، $\omega_{BC} = -1\ rad/s$، $\alpha_{AB} = 2\ rad/s^2$ و $\alpha_{BC} = -4\ rad/s^2$.

أ. أحسب سرعة النقطة C.

ب. أحسب تسارع النقطة C.

2 . إذا كانت سرعة النقطة C ثابتة وتقدر بـ $4\vec{\imath}\ m/s$

أحسب قيم:

أ. ω_{AB} و ω_{BC}،

ب. α_{AB} و α_{BC}

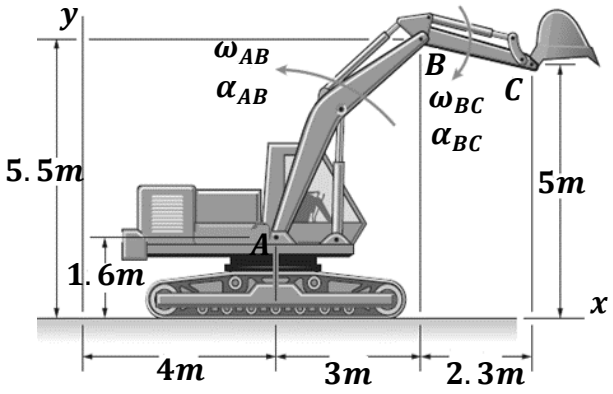


Fig. 4.12 | **الشكل 12.4**

Solution

الحل

1. a The speed of point C:

1.أ سرعة النقطة C:

$$\begin{matrix}\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC}\wedge\overrightarrow{BC} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\end{matrix} \quad + \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB}\wedge\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{BC}\wedge\overrightarrow{BC}$$

Point A is static:

النقطة A ساكنة.

$$\vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\vec{v}_C = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\3.9\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2.3\\-0.5\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix}-7.8\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0.5\\-2.3\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_C = -8.3\vec{\imath} + 3.7\vec{j} \ \ m/s$$

1.b The acceleration of point C: | **1. ب تسارع النقطة C:**

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC}$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB}$$

$$+$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} + \vec{\alpha}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC}$$

Point A is static: | **النقطة A ساكنة.**

$$\vec{a}_A = \vec{0}$$

$$\vec{a}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3.9 \\ 0 \end{pmatrix} - (2)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3.9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2.3 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1)^2 \begin{pmatrix} 2.3 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \begin{pmatrix} -7.8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -15.6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -9.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.3 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_C = -24.1\vec{\imath} - 18.3\vec{j} \ \ m/s$$

2. a the values of $\vec{\omega}_{AB}$ and $\vec{\omega}_{BC}$: | **2.أ قيم $\vec{\omega}_{AB}$ و $\vec{\omega}_{BC}$:**

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC}$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$+$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC}$$

Point A is static: | **النقطة A ساكنة.**

$$\vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3.9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2.3 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.9\omega_{AB} \\ 3\omega_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5\omega_{BC} \\ 2.3\omega_{BC} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = -0.8787\,\vec{k} \quad rad/s \qquad \vec{\omega}_{BC} = 1.1461\,\vec{k} \quad rad/s$$

2.b the values of $\vec{\alpha}_{AB}$ and $\vec{\alpha}_{BC}$: | **2. ب قيم $\vec{\alpha}_{AB}$ و $\vec{\alpha}_{BC}$:**

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC}$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB}$$

$$+$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} + \vec{\alpha}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC}$$

Point A is static and the velocity of point C is constant, so:	**النقطة A ساكنة و سرعة النقطة C ثابتة، إذن:**

$$\vec{a}_A = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{a}_C = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_{AB}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\3.9\\0\end{pmatrix} - (0.8787)^2 \begin{pmatrix}3\\3.9\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_{BC}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2.3\\-0.5\\0\end{pmatrix} - (1.1461)^2 \begin{pmatrix}2.3\\-0.5\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3.9\alpha_{AB}\\3\alpha_{AB}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2.3163\\-3.0112\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.5\alpha_{BC}\\2.3\alpha_{BC}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3.0211\\0.6567\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{\alpha}_{AB} = -1.066\,\vec{k} \quad rad/s^2$	$\vec{\alpha}_{BC} = 2.4063\,\vec{k} \quad rad/s^2$

Example 4.4

The plate ABD and the rod OB are tightly fixed and rotate around the ball joint O with an angular velocity :

مثال 4.4

صفيحة ABD مثبتة بإحكام مع الساق OB، يمكنهما الدوران بفضل التمفصل الكروي حول النقطة O بسرعة دوران:

$$\vec{\omega} = 1.5\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k} \quad rad/s$$

The speed of Point A is given in the position shown in (Fig. 10.4):	**تعطى سرعة النقطة A في الوضعية المبينة في (الشكل. 10.4):**

$$\vec{v}_A = 0.08\vec{\imath} + 0.36\vec{\jmath} + v_{Az}\vec{k} \quad m/s$$

Calculate: **1. The rotation speed of the system.** **2. The speed of Point D.**	**أحسب:** **1 . سرعة الدوران للجملة.** **2 . سرعة النقطة D.**

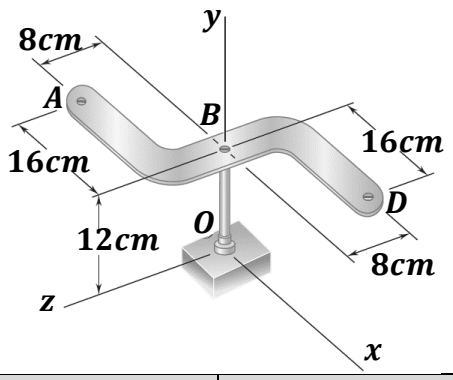


Fig. 4.13	**الشكل 13.4**

Solution

1. The rotation speed of the system:

By applying the velocity distribution relationship between point A and O which is fixed :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.36 \\ v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.12 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.36 \\ v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08\omega_y - 0.12\omega_z \\ -0.16\omega_z - 0.12 \\ 0.18 + 0.16\omega_y \end{pmatrix}$$

$$v_{Az} = -0.38\ m/s$$

$$\omega_y = -3.5\ rad/s$$

$$\omega_z = -3\ rad/s$$

2. The velocity of point D:

By applying the velocity distribution relationship between point D and O which is fixed :

$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3.5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.12 \\ -0.08 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.36 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$

4.3.4 Instantaneous center and axis of rotation

In a plane movement of a solid S, there exists at any instant t an immobile point I, this point which may be inside the solid or not is called the instantaneous center of rotation. The axis perpendicular to the plane passing through this point is called the instantaneous axis of rotation. If we apply the relation of the velocity field between this point I ($\vec{v}_I = \vec{0}$) and any point M of the solid S, we obtain :

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} \qquad (4.19)$$

الحل

1. سرعة الدوران للجملة:

بتطبيق علاقة حقل السرعات بين النقطتين A و O الساكنة:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.36 \\ v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.16 \\ 0.12 \\ 0.08 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.36 \\ v_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08\omega_y - 0.12\omega_z \\ -0.16\omega_z - 0.12 \\ 0.18 + 0.16\omega_y \end{pmatrix}$$

$$v_{Az} = -0.38\ m/s$$

$$\omega_y = -3.5\ rad/s$$

$$\omega_z = -3\ rad/s$$

2. سرعة النقطة D:

بتطبيق علاقة حقل السرعات بين النقطتين D و O الساكنة:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3.5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.12 \\ -0.08 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.36 \\ 0.74 \end{pmatrix}$$

4.3.4 المركز و المحور الآنيان للدوران

في الحركة المستوية لجسم صلب (S)، توجد في كل لحظة (t) نقطة ساكنة (I)، قد تكون داخل الجسم الصلب أو خارجه، تسمى بالمركز الآني للدوران. و المحور العمودي على مستوي الحركة و المار بهذه النقطة يسمى بالمحور الآني للدوران. إذا طبقنا علاقة توزيع السرعات بين النقطة (I) بحيث ($\vec{v}_I = \vec{0}$) و أي نقطة (M) من الصلب (S)، نجد:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} \qquad (4.19)$$

This relationship allows us to deduce graphically the place of the point I. Indeed, it constitutes the intersection of the lines perpendicular to the velocity vectors of the points M of the solid.

تسمح لنا هذه العلاقة بتحديد مكان النقطة (I) بيانيا. فهي تعتبر تقاطع المستقيمات العمودية على أشعة السرعات للنقاط (M) من الجسم الصلب.

Example 4.5

The (Fig. 4.14) represents a plate in movement at a given instant in the xOy plane.

1 . What can we say about its movement?

2 . Determine :

a. The angular velocity $\vec{\omega}$ of the plate.

b. The speed of point C.

c. The instantaneous center of rotation $I(x, y, 0)$.

d. The equation of the location of the point $M(x, y)$ of the plate which has a speed of modulus $\|\vec{v}(M)\| = 10\ cm/s$

مثال 5.4

(الشكل 14.4) يوضح صفيحة خلال حركتها في المستوي (xOy).

1. ماذا يمكن أن نقول عن حركتها؟

2. عين:

أ. السرعة الزاوية $(\vec{\omega})$ للصفيحة

ب. سرعة النقطة (C)

ج. المركز الآني للدوران $I(x, y, 0)$

د. معادلة مجموعة النقاط $M(x, y)$ من الصفيحة التي تتميز بسرعة قيمتها $(\|\vec{v}(M)\| = 10\ cm/s)$.

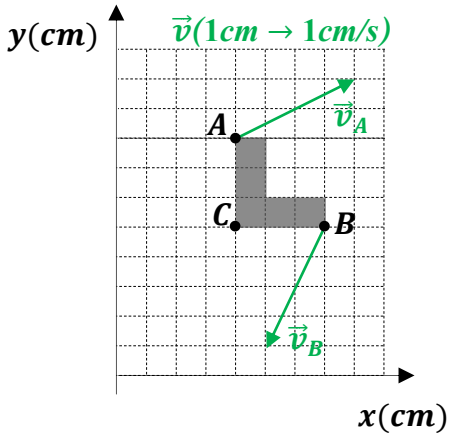


Fig. 4.14 | الشكل 14.4

Solution

الحل

1. We can say that the movement of the plate is not a pure translation, because:

1. يمكننا الجزم بأن حركة الصفيحة ليست انسحابية بحتة، لأن:

$$\vec{v}_B \neq \vec{v}_A$$

2. Determination of :

a. The angular velocity $\vec{\omega}$ of the plate:

Let's apply the relationship of the velocity distribution between A and B :

2. تعيين:

أ. السرعة الزاوية $(\vec{\omega})$ للصفيحة:

لنطبق علاقة حقل السرعة بين النقطتين (A) و (B)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\omega \\ 3\omega \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega = -2\ rad/s$$

b. The speed of point C:

Let's apply the relationship of the velocity distribution between A and C :

ب. سرعة النقطة (C):

لنطبق علاقة حقل السرعة بين النقطتين (A) و (C):

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c. The instantaneous center of rotation $I(x, y, 0)$.

- **Calculation method:**

According to the definition:

ج. المركز الآني للدوران $I(x, y, 0)$

- **طريقة الحساب:**

من خلال التعريف:

$$\vec{v}_I = \vec{0}$$

Let's apply the relationship of the velocity distribution between A and I :

لنطبق علاقة حقل السرعة بين النقطتين (A) و (I):

$$\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AI} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-4 \\ y-8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(y-8) \\ -2(x-4) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = 5\ cm \qquad y = 6\ cm$$

- **Graphic method:**

The instantaneous center of rotation is the point of intersection of the lines perpendicular to the velocity vectors (Fig. 4.15).

- **الطريقة البيانية:**

المركز الآني للدوران هو نقطة تقاطع المستقيمات العمودية على أشعة السرعات (الشكل 15.4).

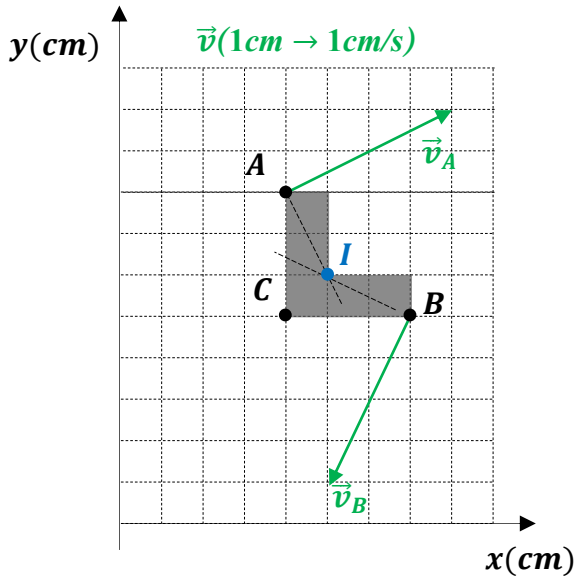


Fig. 4.15	الشكل 15.4

d. The equation of the set of points $M(x,y)$ of the plate which has a speed of modulus $\|\vec{v}(M)\| = 10\ cm/s$ **By applying the relationship of the speeds between A and $M(x,y,0)$:**	**د. معادلة مجموعة النقاط $M(x,y)$ من الصفيحة التي تتميز بسرعة قيمتها $(\|\vec{v}(M)\| = 10\ cm/s)$.** **بتطبيق علاقة حقل السرعات بين النقطتين (A) و $M(x,y,0)$:**
$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$	$\vec{v}_M = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-4 \\ y-8 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{v}_M = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(y-8) \\ -2(x-4) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_M = 2\begin{pmatrix} y-6 \\ 5-x \\ 0 \end{pmatrix}$
we have	**لدينا**
$\|\vec{v}_M\| = 2$	$4 = 4((5-x)^2 + (y-6)^2)$
$(5-x)^2 + (y-6)^2 = 1$	
This is the equation of a circle with a center $I\ (5\ ,6)\ cm$ and a radius $R = 1\ cm$ (Fig. 4.16)	**و هي معادلة دائرة مركزها $I\ (5\ ,6)\ cm$ و نصف قطرها $(R = 1\ cm)$ (الشكل 16.4).**

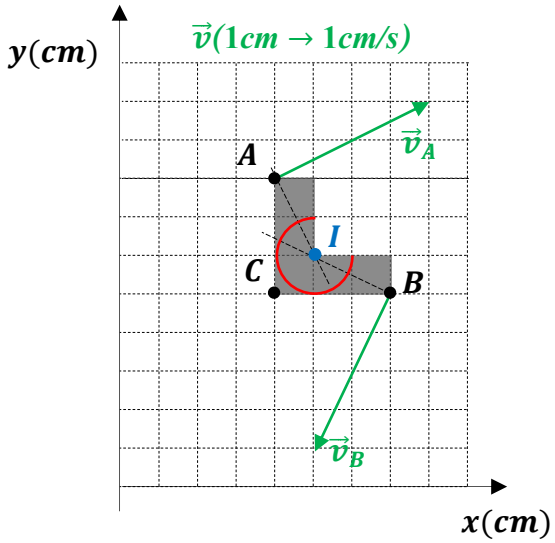


Fig. 4.16	الشكل 16.4

4.3.5 Pure Translational Movement

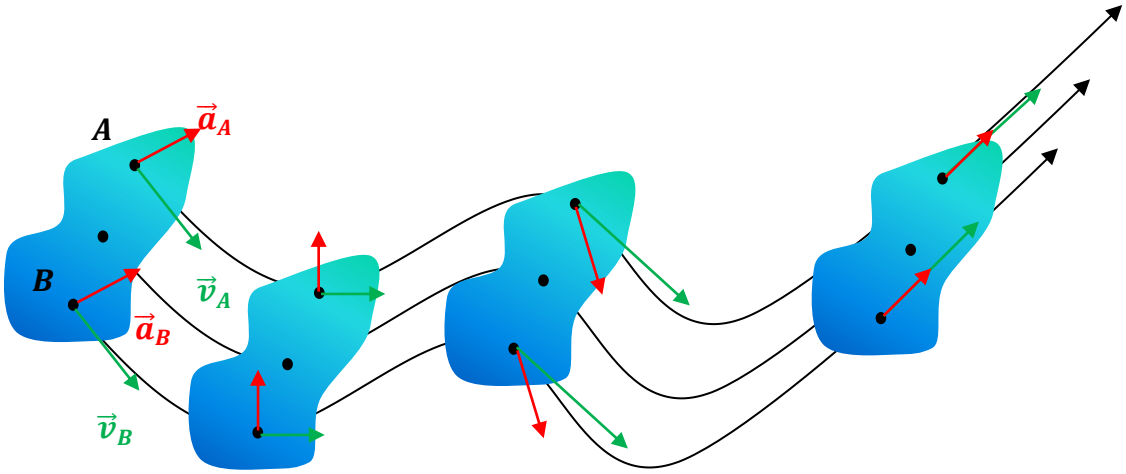
In this type of movement, the trajectory can be rectilinear or curvilinear, the speed of rotation $\vec{\omega}$ is zero ($\vec{\omega} = \vec{0}$) and all the points of the solid have the same speed and the same acceleration (Fig. 4.17).

5.3.4 للحركة الانسحابية البحتة

في هذه الحالة من الحركة يكون المسار مستقيما أو منحنيا، و تكون سرعة الدوران ($\vec{\omega}$) معدومة ($\vec{\omega} = \vec{0}$) وكل نقاط الجسم الصلب تتميز بنفس شعاع السرعة و نفس شعاع التسارع (الشكل 17.4).

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \qquad (4.20)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B \qquad (4.21)$$



الشكل 17.4: حركة انسحابية بحتة

Fig. 4.17 Pure Translational Movement

4.3.6 Rotation around a fixed axis

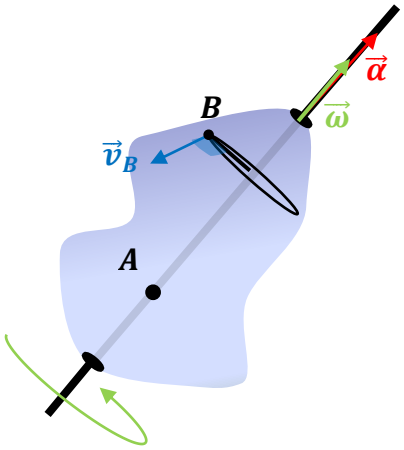
In this type of movement, all the points which constitute the axis of rotation are immobile, their speeds are zero (Fig. 4.18). If we assume that A belongs to the axis of rotation, we can express the speed and acceleration of any other point B by :

6.3.4 الحركة الدورانية حول محور ثابت

في هذه الحالة من الحركة، كل النقاط التي تشكل محور الدوران تكون ساكنة، و سرعاتها معدومة (الشكل 18.4). وباعتبار النقطة (A) تنتمي لهذا المحور، يمكننا التعبير عن سرعة و تسار ع أي نقطة أخرى (B) بما يلي:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (4.22)$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \qquad (4.23)$$



الشكل 18.4 حركة دورانية حول محور ثابت

Fig. 4.18 Rotation around a fixed axis

4.3.7 Planar movement

In this type of movement, the rotation speed $\vec{\omega}$ and the vector $\overrightarrow{AB}$ are perpendicular. In our studies, it is assumed that it takes place in the plane of the figure xOy and the rotational speed vector $\vec{\omega}$ will have only one component along Oz axis.

7.3.4 الحركة المستوية

في هذه الحالة من الحركة، يكون شعاع سرعة الدوران $(\vec{\omega})$ وشعاع الجسم الصلب $(\overrightarrow{AB})$ متعامدان. نفترض في دراساتنا أن الأجسام الصلبة تتحرك في المستوى (xOy) و بالتالي تكون لشعاع سرعة الدوران $(\vec{\omega})$ مركبة واحدة وفق المحور (Oz).

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \qquad (4.24)$$

Example 4.6

A $5\,m$ long steel beam is lowered horizontally by two cables which run at the same speed (Fig. 4.19). When the beam approaches the ground, the crane operators apply brakes to slow down the unwinding movement. At the instant considered, the deceleration of the cable connected at B is $2.5\ m/s^2$, while that of the cable connected at D is $1.5\ m/s^2$.
Determine :
1 . The angular acceleration of the beam.
2 . The acceleration of points A and E.

مثال 6.4

عارضة معدنية أفقية طولها ($5\ m$)، يتم إنزالها بواسطة حبلين بنفس السرعة (الشكل 19.4). عندما تقترب العارضة من الأرض، تُفرمل حركتها من قبل جهاز التحكم الذي يُسير عملية الإنزال. فيصبح تسارع الحبل الموصول بالنقطة (B) هو ($2.5\ m/s^2$)، بينما تسارع الحبل الموصول بالنقطة (D) هو ($1.5\ m/s^2$). عين:

1. التسارع الزاوي للعارضة
2. تسارع النقطتين (E) و (A).

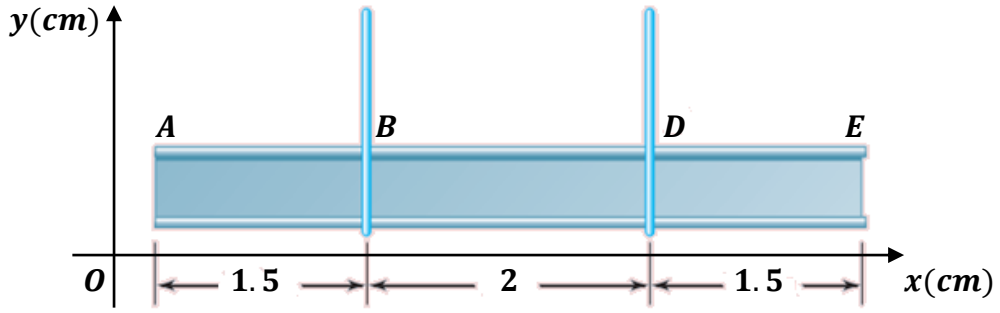


Fig. 4.19	الشكل 19.4

Solution

الحل

1. The angular acceleration of the beam :

1. التسارع الزاوي للعارضة:

$\vec{a}_B = \vec{a}_D + \vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{DB} - \omega^2\overrightarrow{DB}$	$-2.5\vec{j} = -1.5\vec{j} - \alpha\vec{k}\wedge(-2\vec{\imath}) - \omega^2(-2\vec{\imath})$
$-2.5\vec{j} = -1.5\vec{j} - \alpha\vec{k}\wedge(-2\vec{\imath}) - \omega^2(-2\vec{\imath})$	$2\omega^2\vec{\imath} + (2\alpha + 1)\vec{j} = \vec{0}$
$\omega = 0$	$\alpha = -0.5\ rad/s^2$

2. The acceleration of points A and E :

2. تسارع النقطتين (E) و (A):

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{BA} - \omega^2\overrightarrow{BA}$	$\vec{a}_A = -2.5\vec{j} + (-0.5\vec{k})\wedge(-1.5\vec{\imath}) - 0^2(-1.5\vec{\imath})$
$\vec{a}_A = -1.75\vec{j}$	$\vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{BE} - \omega^2\overrightarrow{BE}$
$\vec{a}_E = -2.5\vec{j} + (-0.5\vec{k})\wedge(3.5\vec{\imath}) - 0^2(3.5\vec{\imath})$	$\vec{a}_E = -4.25\vec{j}$

4.3.8 Compound movement

8.3.4 الحركة المركبة

4.3.8.1 Velocity vector in a moving axis system

Be in the space, the two references $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ that we consider fixed and $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ moving relative to the first. If a point P located in $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ by the vector variable with time t.

1.8.3.4 شعاع السرعة في معلم متحرك

ليكن في الفضاء، المعلمان $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ الذي نعتبره ساكنا و المعلم $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ الذي يتحرك بالنسبة للمعلم الأول. إذا حددت نقطة متحركة P في المعلم المتحرك R' بشعاع موضعها المتغير بدلالة الزمن t

$$\overrightarrow{O'P} = \left(x(t)\vec{\imath'} + y(t)\vec{\jmath'} + z(t)\vec{\jmath'}\right)$$

Its derivative with respect to R' will be:

فإن مشتقته بالنسبة للمعلم R' تكون:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt}\right)_{R'} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{\jmath'} \qquad (4.25)$$

Let's calculate the velocity of the point P relative to the reference R

لنحسب سرعة النقطة P بالنسبة للمعلم R

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P})}{dt}\right)_R$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}\right)_R + \left.\frac{d(\overrightarrow{O'P})}{dt}\right)_R$$

And we know that

و نعلم أن:

$$\left.\frac{d(\overrightarrow{O'P})}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

Where $\vec{\omega}$ is the rotational speed or angular velocity of the reference R' with respect to the reference R.

حيث $\vec{\omega}$ هو شعاع السرعة الزاوية أو شعاع سرعة الدوران للمعلم R' بالنسبة للمعلم R.

$\left.\frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt}\right)_R = \vec{v}_{abs}$ is the absolute speed of the point P.

$\left.\frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt}\right)_R = \vec{v}_{abs}$ هو شعاع السرعة المطلقة للنقطة P.

$\left.\frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}\right)_R = \frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}$ is the speed of the point O' with respect to O

$\left.\frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt}\right)_{R'} = \vec{v}_{rel}$ is the relative speed of the point P.

$\vec{v}_{R'/R} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$ is the speed of the moving reference frame R' relative to the fixed reference frame R.

$\left.\frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}\right)_R = \frac{d(\overrightarrow{OO'})}{dt}$ هو شعاع سرعة النقطة (O') بالنسبة للنقطة (O).

$\left.\frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt}\right)_{R'} = \vec{v}_{rel}$ هو شعاع السرعة النسبية للنقطة (P).

$\vec{v}_{R'/R} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$ هو شعاع سرعة المعلم المتحرك (R') بالنسبة للمعلم الثابت (R)

$$\vec{v}_{abs} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{R'/R} \qquad (4.26)$$

Example 4.7

A point $P(1,1,1)$ in the reference frame $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, which rotates around $\vec{k'}$ at the speed $\vec{\omega} = \omega\vec{k'}$ (Fig. 4.20) the coordinates of O' in $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ are $(2,4,3)$.

1 . Expressed the vector $\vec{\omega}$ in the reference frame $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2 . Express the position vector $\overrightarrow{OP}$ in the reference frame $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3 . Calculate the absolute speed directly from the $\overrightarrow{OP}$ expression.

4 . Check it out using the relationship (4.26)

مثال 7.4

نقطة $P(1,1,1)$ في المعلم $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$، الذي يدور حول $(\vec{k'})$ بالسرعة $(\vec{\omega} = \omega\vec{k'})$ (الشكل 20.4) إحداثيات النقطة (O') في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي $(2,4,3)$.

1. عبر عن الشعاع $(\vec{\omega})$ في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. عبر عن شعاع الموضع $(\overrightarrow{OP})$ في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3. أحسب شعاع السرعة المطلقة مباشرة من عبارة $(\overrightarrow{OP})$ السابقة.

4. تحقق من ذلك باستعمال العلاقة (26.4).

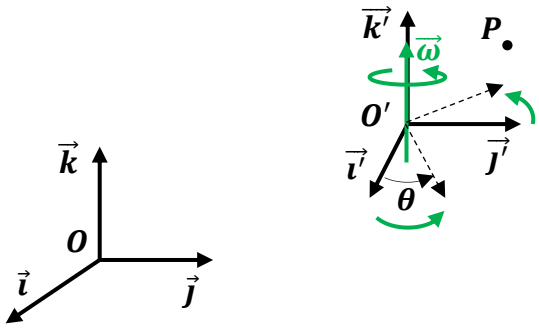


Fig. 4.19	الشكل 19.4

Solution	الحل
1. The expression of $\vec{\omega}$ in the reference frame $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. **The reference $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ rotates around $\vec{k'}$ which is $\parallel \vec{k}$ so we can write**	**1. التعبير عن الشعاع $(\vec{\omega})$ في المعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.** **المعلم $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ يدور حول $(\vec{k'})$ الذي يوازي $(\vec{k})$، مما يسمح لنا بكتابة:**

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

2. The expression of position vector $\overrightarrow{OP}$ in the reference frame $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.	**2. التعبير عن شعاع الموضع $(\overrightarrow{OP})$ في المعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$		$\overrightarrow{OO'} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$
$\overrightarrow{O'P} = \vec{\imath'} + \vec{\jmath'} + \vec{k'}$	$\begin{cases} \vec{\imath'} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath'} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k'} = \vec{k} \end{cases}$	$\theta = \omega t$
$\overrightarrow{OP} = (2 + cos\omega t - sin\omega t)\vec{\imath} + (4 + sin\omega t + cos\omega t)\vec{\jmath} + 4\vec{k}$		

3. Calculation of the absolute speed directly from the $\overrightarrow{OP}$ expression.	**3. حساب شعاع السرعة المطلقة مباشرة من عبارة $(\overrightarrow{OP})$.**

$\vec{v}_{abs} = \dfrac{d(\overrightarrow{OP})}{dt}$	$\vec{v}_{abs} = \omega(-(sin\omega t + cos\omega t)\vec{\imath} + (cos\omega t - sin\omega t)\vec{\jmath})$

4. Verification using the relationship (26.4).	**4. التحقق من ذلك باستعمال العلاقة (26.4).**

$\vec{v}_{abs} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{R'/R}$	$\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{0}$	$\vec{v}_{rel} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'P}}{dt}\right)_{R'}$
$\overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_{rel} = \vec{0}$	$\vec{v}_{R'/R} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$
$\vec{v}_{abs} = \omega\vec{k'} \wedge \overrightarrow{O'P}$	$\vec{v}_{abs} = \omega\vec{k'} \wedge \left(\vec{\imath'} + \vec{\jmath'} + \vec{k'}\right)$	$\vec{v}_{abs} = \omega\left(-\vec{\imath'} + \vec{\jmath'}\right)$
$\vec{v}_{abs} = \omega(-(sin\omega t + cos\omega t)\vec{\imath} + (cos\omega t - sin\omega t)\vec{\jmath})$		

Actually we found the same as the previous result.	**فعلا وجدنا نفس النتيجة السابقة.**

4.3.8.2 Acceleration vector in a moving axis system

We obtain the absolute acceleration of the particle P by differentiating the equation (4.26):

2.3.8.4 شعاع التسارع في معلم متحرك

نحصل على عبارة التسارع المطلق باشتقاق المعادلة (26.4) بالنسبة للزمن:

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'P}}{dt^2}\right)_{R'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) \qquad (4.27)$$

The terms of the equation (4 27) are :

حدود المعادلة (4.27) هي

The absolute acceleration of the point P, or the acceleration of the point P in the fixed reference frame R.

التسارع المطلق للنقطة (P)، أو تسارع النقطة (P) في المعلم الثابت (R).

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = \vec{a}_{abs}$$

The acceleration of the point O' with respect to O.

تسارع النقطة (O') بالنسبة للنقطة (O).

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

The relative acceleration of the point P, or the acceleration of the point P in the moving reference frame R'.

التسارع النسبي للنقطة (P)، أو تسارع النقطة (P) في المعلم المتحرك (R').

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{O'P}(t)}{dt^2}\right)_{R'} = \vec{a}_{rel}$$

The linear acceleration.

التسارع الخطي.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{a}_{lin}$$

The angular acceleration.

تسارع الزاوي.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$$

The Coriolis acceleration.

تسارع Coriolis.

$$2\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'P}}{dt} = \vec{a}_{Cor}$$

The centripetal acceleration. | **التسارع الجاذب.**

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = \vec{a}_{cpt}$$

We call the sum of the last three terms, the acceleration of the reference frame R' with respect to R and we note it. | **نسمي مجموع الثلاث حدود الأخيرة بتسارع المعلم المتحرك (R') بالنسبة للمعلم الثابت (R).**

$$\vec{a}_{R'/R}$$

Example 4.8

A system of axis $R'(O', \vec{\imath'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ rotates with respect to a system of fixed axis $R(O, \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ of the same origin $O' \equiv O$. At any instant t, the angular velocity of the reference frame R' with respect to R is given by:

مثال 8.4

معلم متحرك $R'(O', \vec{\imath'}, \vec{j'}, \vec{k'})$، يدور بالنسبة لمعلم ثابت $R(O, \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ و يشترك معه في المبدأ $(O' \equiv O)$. في لحظة كيفية (t)، تُعطى سرعة دوران (R') بالنسبة للمعلم (R) بالعلاقة الزمنية التالية:

$$\vec{\omega}(t) = 2t\vec{\imath} - t^2\vec{j} + (2t+4)\vec{k}$$

The position vector of a particle P with respect to R' is given by: | **شعاع موضع نقطة متحركة (P) بالنسبة للمعلم (R') يُعطى بالعلاقة التالية:**

$$\overrightarrow{O'P}(t) = (t^2+1)\vec{\imath} - 6t\vec{j} + 4t^3\vec{k}$$

Find at the instant $t = 1$:
1 . The relative speed
2 . The speed of the reference R' with respect to R
3 . The absolute speed
4 . The relative acceleration
5 . The angular acceleration
6 . The linear acceleration
7 . Coriolis acceleration
8 . The centripetal acceleration
9 . The acceleration of $R'$with respect to R.

أوجد عند اللحظة $(t = 1)$:
1. السرعة النسبية
2. سرعة المعلم (R') بالنسبة للمعلم (R).
3. السرعة المطلقة.
4. التسارع النسبي.
5. التسارع الزاوي.
6. التسارع الخطي.
7.تسارع Coriolis.
8. التسارع الجاذب.
9. تسارع المعلم (R') بالنسبة للمعلم (R)

Solution | **الحل**

1. The relative speed: | **1. السرعة النسبية:**

$\vec{v}_{rel}(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt}\right)_{R'}$	$\vec{v}_{rel}(t) = 2t\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12t^2\vec{k}$
$\vec{v}_{rel}(1) = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12\vec{k}$	

2. The speed of the reference R' with respect to R: | **2. سرعة المعلم (R') بالنسبة للمعلم (R):**

$\vec{v}(t)_{R'/R} = \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{O'P}(t)$	$\vec{v}(1)_{R'/R} = \vec{\omega}(1) \wedge \overrightarrow{O'P}(1)$
$\vec{v}(1)_{R'/R} = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 6\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right)$	$\vec{v}(1)_{R'/R} = 32\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 10\vec{k}$

3. The absolute speed: | **3. السرعة المطلقة:**

$\vec{v}_{abs}(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_{R}$	$\vec{v}_{abs}(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}(t)$
$\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \quad (O' \equiv O)$	$\vec{v}_{abs}(1) = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12\vec{k} + 32\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 10\vec{k}$
$\vec{v}_{abs}(1) = 34\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$	

4. The relative acceleration: | **4. التسارع النسبي:**

$\vec{a}_{rel}(t) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'P}(t)}{dt^2}\right)_{R'}$	$\vec{a}_{rel}(t) = 2\vec{\imath} + 24t\vec{k}$	$\vec{a}_{rel}(1) = 2\vec{\imath} + 24\vec{k}$

5. The angular acceleration: | **5. التسارع الزاوي.:**

$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$	$\vec{\alpha}(t) = 2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + 2\vec{k}$	$\vec{\alpha}(1) = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

6. The linear acceleration: | **6. التسارع الخطي:**

$\vec{a}_{lin}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P}(t)$	$\vec{a}_{lin}(t) = \left(2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \wedge \left((t^2+1)\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath} + 4t^3\vec{k}\right)$
$\vec{a}_{lin}(1) = \left(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right)$	$\vec{\gamma}_{lin}(1) = 4\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 8\vec{k}$

7. Coriolis acceleration: | **7. سارع Coriolis:**

$\vec{a}_{Cor}(t) = 2\vec{\omega}(t) \wedge \frac{d\overrightarrow{O'P}(t)}{dt}$	$\vec{a}_{Cor}(t) = 2\left(2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \wedge \left(2t\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12t^2\vec{k}\right)$
$\vec{a}_{Cor}(1) = 2\left(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 12\vec{k}\right)$	$\vec{a}_{Cor}(1) = 48\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} - 20\vec{k}$

8. The centripetal acceleration: | **8. التسارع الجاذب:**

$\vec{a}_{cpt}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \left(\vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{O'P}(t)\right)$
$\vec{a}_{cpt}(t) = \left(2t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath} + (2t+4)\vec{k}\right) \wedge \left(\left(2t\vec{\imath} - t^2\vec{\jmath} + (2t+4)\vec{k}\right) \wedge \left((t^2+1)\vec{\imath} - 6t\vec{\jmath} + 4t^3\vec{k}\right)\right)$
$\vec{a}_{cpt}(1) = \left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 6\vec{k}\right)\left(\left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 6\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right)\right)$
$\vec{a}_{cpt}(1) = -14\vec{\imath} + 212\vec{\jmath} + 40\vec{k}$

9. The acceleration of R' with respect to R: | **9. تسارع المعلم (R') بالنسبة للمعلم (R):**

$\vec{a}_{R'/R}(t) = \vec{\gamma}_{lin}(t) + \vec{\gamma}_{Cor}(t) + \vec{\gamma}_{cpt}(t)$
$\vec{a}_{R'/R}(1) = 4\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 8\vec{k} + 48\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} - 20\vec{k} - 14\vec{\imath} + 212\vec{\jmath} + 40\vec{k}$
$\vec{a}_{R'/R}(1) = 38\vec{\imath} + 184\vec{\jmath} + 12\vec{k}$

4.4 Resolved exercises

4.4 تمارين محلولة

Exercise 4.4.1

The end B of a ramp is 5 m from the fixed point A when the driver begins to retract the ramp with a constant radial acceleration of $\ddot{r} = -1\ m/s^2$ and lowers it with a constant angular acceleration $\ddot{\theta} = -0.5\ rad/s^2$ (Fig. 4.20). At $t = 2\ s$, determine :

1 . The speed of point B.

2 . The acceleration of point B.

3 . The radius of curvature of the trajectory.

التمرين 1.4.4

النهاية العلوية (B) لذراع رافعة يبعد عن النقطة (A) الثابتة في أسفلها بمسافة $(5\ m)$ عند الحظة التي بدأ السائق بتنزيلها قطريا بتسارع $(\ddot{r} = -1\ m/s^2)$ و عرضيا بتسارع زاويٍ $(\ddot{\theta} = -0.5\ rad/s^2)$ (الشكل 20.4).

أوجد عند اللحظة $(t = 2\ s)$:

1. سرعة النقطة (B).

2. تسارع النقطة (B).

3. نصف قطر انحناء المسار.

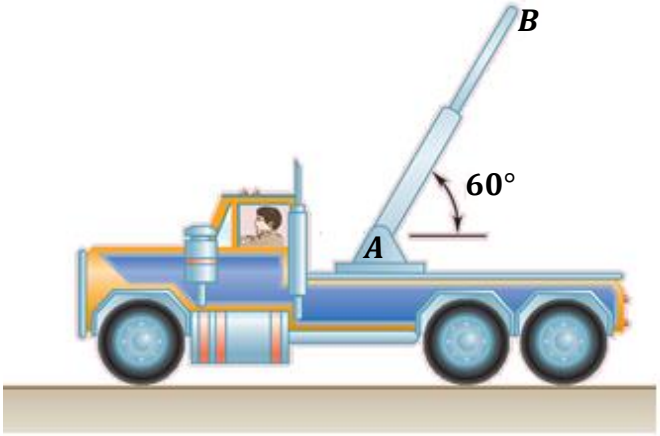


Fig. 4.20 | **الشكل 20.4**

Solution

الحل

By using the polar coordinates:

باستعمال الإحداثيات القطبية:

1. The speed of point B:

1. سرعة النقطة (B):

$$\vec{v}_B = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_B = (\ddot{r}t)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}\ddot{r}t^2\right)(\ddot{\theta}t)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_B = (\ddot{r}t)\vec{u}_r + \frac{1}{2}(\ddot{r}\ddot{\theta}t^3)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_B(t) = (-t)\vec{u}_r + \frac{1}{4}(t^3)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}_B(2) = -2\vec{u}_r + 2\vec{u}_\theta$$

2. The acceleration of point B: | **2. تسارع النقطة (B):**

$$\vec{a}_B = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_B = \left(\ddot{r} - \left(\frac{1}{2}\ddot{r}t^2\right)(\ddot{\theta}t)^2\right)\vec{u}_r + \left(\left(\frac{1}{2}\ddot{r}t^2\right)\ddot{\theta} + 2(\ddot{r}t)(\ddot{\theta}t)\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_B(t) = \ddot{r}\left((1 - \ddot{\theta}^2t^4)\vec{u}_r + \frac{5}{2}\ddot{\theta}t^2\vec{u}_\theta\right) \qquad \vec{a}_B(2) = 3\vec{u}_r + 5\vec{u}_\theta$$

3. The radius of curvature: | **3. نصف قطر انحناء المسار:**

$$R = \frac{\|\vec{v}_B(t)\|^2}{\|\vec{a}_{NB}\|} \qquad \|\vec{a}_{NB}\| = \sqrt{\|\vec{a}_B\|^2 - \|\vec{a}_{BT}\|^2} \qquad \|\vec{a}_{BT}\| = \frac{d\|\vec{v}_B(t)\|}{dt}$$

$$\|\vec{v}_B(t)\| = \sqrt{t^2 + \frac{1}{16}t^6} \qquad \frac{d\|\vec{v}_B(t)\|}{dt} = \frac{t + \frac{3}{16}t^5}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{16}t^6}}$$

$$\frac{d\|\vec{v}_B(2)\|}{dt} = \sqrt{8} \qquad \|\vec{a}_{NB}\| = \sqrt{34 - 8}$$

$$\|\vec{a}_{NB}\| = \sqrt{26}\ m/s^2 \qquad R = \frac{8}{\sqrt{26}} \qquad R = 1.568\ m$$

Exercise 4.4.2

In the illustrated engine system (Fig. 4.21), $l = 160\ mm$ and $b = 60\ mm$. Knowing that the crank AB rotates at a constant angular speed of $1000\ rpm$ in the clockwise direction. For $\theta = 0$ and $\theta = 90°$, determine: the angular velocity of the connecting rod BD and the speed of the piston P.

التمرين 2.4.4

في النظام الميكانيكي الموضح في (الشكل 21.4)، ($l =$ $160\ mm$) و($b = 60\ mm$). علما أن الساعد (AB) يدور بسرعة زاوية ثابتة قيمتها $(1000\ rpm)$ في اتجاه عقارب الساعة. عين من أجل $(\theta = 0)$ و $(\theta = 90°)$: السرعة الزاوية لذراع الوصل (BD) و كذا سرعة المكبس (P).

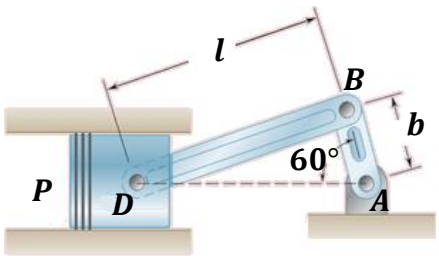


Fig. 4.21 | **الشكل 21.4**

Solution	الحل
By applying the velocity distribution relationship between D and B and then between B and A :	بيطبيق علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (D) و (B) ثم بين النقطتين (B) و(A):

$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{DB} \wedge \overrightarrow{BD}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$	+	$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{DB} \wedge \overrightarrow{BD}$

The point A being fixed, so:	النقطة () ساكنة، يعني:
$\vec{v}_A = \vec{0}$	$\vec{v}_D = \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{DB} \wedge \overrightarrow{BD}$

The movement takes place in the plane, so:	الحركة تتم في المستوي، إذن :
$: \vec{\omega}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix}$	$\vec{\omega}_{DB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{DB} \end{pmatrix}$
$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b\sin\theta \\ b\cos\theta \\ \omega_{DB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{DB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b\sin\theta \\ \sqrt{l^2 - (b\sin\theta)^2} \\ \omega_{DB} \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{Dy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{AB} b\cos\theta \\ \omega_{AB} b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_{DB}\sqrt{l^2 - (b\sin\theta)^2} \\ \omega_{DB} b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$	
$\omega_{DB} = -\dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (b\sin\theta)^2}}\omega_{AB}$	$v_{Dy} = \omega_{AB} b\sin\theta \left(1 - \dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (b\sin\theta)^2}}\right)$

Numerical application:	تطبيق عددي:

$\theta = 0$	$\omega_{DB} = -\dfrac{b}{l}\omega_{AB}$	$\omega_{DB} = 39.27\ rad/s$	$v_{Dy} = 0$
$\theta = 90°$	$\omega_{DB} = 0$	$v_{Dy} = \omega_{AB} b$	$v_{Dy} = 6.28\ m/s$

Exercise 4.4.3	التمرين 3.4.4
The rod AB can slide freely on the ground and the inclined plane (Fig. 4.22). At the instant shown, the angular velocity of the rod is $4.2\ rad/s$ in the counterclockwise direction. Determine the speeds of the two ends A and B of the rod.	ساق (AB) يمكنها الإنزلاق بحرية على الأرض و على مستوٍ مائل (الشكل 22.4). في اللحظة والوضعية المبينة، تكون السرعة الزاوية للساق $(4.2\ rad/s)$ عكس اتجاه عقارب الساعة. عين سرعتي النهايتين (A) و(B) للساق.

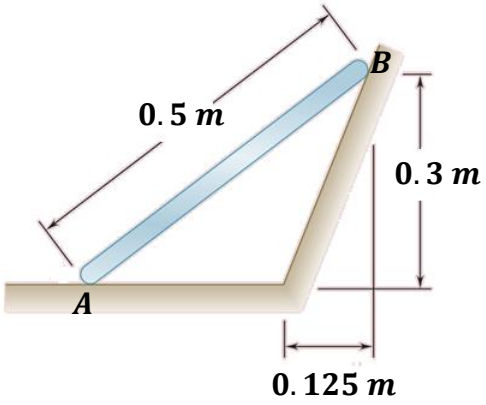


Fig. 4.22	الشكل 22.4

Solution	الحل
Determination of the speeds of the ends A and B of the rod :	تعيين سرعة النهايتين (A) و (B) للساق :
By applying the velocity distribution relationship between B and A :	باستعمال علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (B) و(A):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

According to (Fig. 4.23) and using the Pythagorean theorem:	من خلال (الشكل 23.4) و باستغلال نظرية فيثاغورس:

$$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The components of $\vec{v}_B$ verify the following equality:	مركبتا شعاع السرعة $(\vec{v}_B)$ تحققان العلاقة التالية:
$\dfrac{v_{By}}{v_{Bx}} = \dfrac{0.3}{0.125}$	$v_{By} = 2.4 v_{Bx}$

$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ 2.4v_{Bx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ax} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.26 \\ 1.68 \\ 0 \end{pmatrix}$	$v_{Bx} = 0.7\ m/s$
	$v_{By} = 1.68\ m/s$
	$v_{Ax} = 1.96\ m/s$
$\vec{v}_A \begin{pmatrix} 1.96 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m/s$	$\vec{v}_B \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.68 \\ 0 \end{pmatrix} m/s$

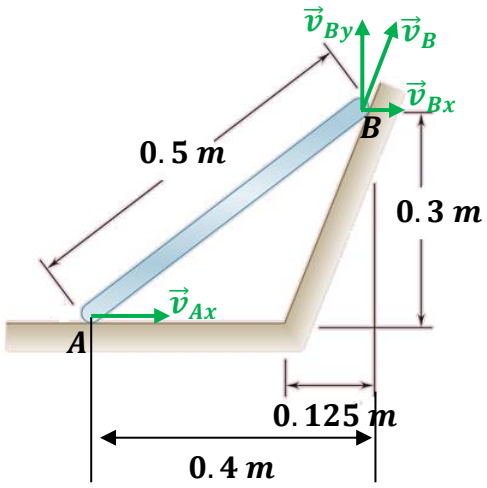


Fig. 4.23	الشكل 23.4

Exercise 4.4.4	**التمرين 4.4.4**
The plate shown in (Fig. 4.24) moves in the plane xOy. Knowing that : $v_{Ax} = 0.25\ m/s$, $v_{By} = -0.45\ m/s$ and $v_{Cx} = -0.5\ m/s$. Determine :	**الصفيحة المبينة في (الشكل 24.4)تتحرك في المستوي (xOy). علما أن : $(v_{Ax} = 0.25\ m/s)$، $(v_{By} = -0.45\ m/s)$ و $(v_{Cx} = -0.5\ m/s)$.**

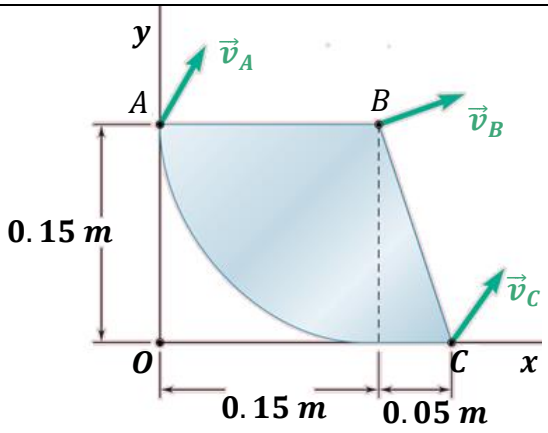


Fig. 4.24	الشكل 24.4

1 . The angular velocity of the plate. **2 . The speeds of points A, B and C.**	**1. السرعة الزاوية للصفيحة** **2. سرعة كل من النقاط (A)، (B) و(C).**
Solution	**الحل**
1 . The angular velocity of the plate:	**1. السرعة الزاوية للصفيحة:**
By applying the velocity distribution relationship between A and C :	**باستعمال علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (A) و(C):**

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

The rotation of the plate is around Oz so the rotation speed vector will have the expression:	**بما أن الصفيحة تدور حول المحور (Oz)، فإن لشعاع سرعة الدوران مركبة واحدة و يعبر عنه:**

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -0.5 \\ v_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.15 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.5 \\ v_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.15\omega \\ 0.2\omega \\ 0 \end{pmatrix}$
$\omega = -5\ rad/s$	$v_{Cy} = v_{Ay} - 1$

By applying the velocity distribution relationship between A and B :	**باستعمال علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (A) و(B):**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ -0.45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_{Bx} \\ -0.45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_{Bx} = 0.25\ m/s$	$v_{Ay} = 0.3\ m/s$	$v_{Cy} = -0.7\ m/s$
$\vec{v}_A \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix} m/s$	$\vec{v}_B \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.45 \\ 0 \end{pmatrix} m/s$	$\vec{v}_C \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.7 \\ 0 \end{pmatrix} m/s$

Exercise 4.4.5	**التمرين 5.4.4**
In an oil pump platform (Fig. 4.25), the link AB causes the beam BCE to oscillate when the axis OA of the crank turns. Knowing that OA has a radius of $0.6\ m$ and a constant clockwise angular velocity	**في إحدى محطات ضخ النفط (الشكل 25.4)، الذراع (AB) يتسبب في اهتزاز عارضة الحمولة (BCE) عندا يدور الساعد (OA). علما أن طول (OA) هو $(0.6\ m)$ و يدور**

of 20 rpm, determine at the indicated instant:

1. The speed of the point D.
2. Its acceleration.

بسرعة زاوية ثابتة قيمتها (20 rpm) في نفس اتجاه عقارب الساعة. عين في الوضعية المبينة:

1. سرعة النقطة (D).
2. تسارعها

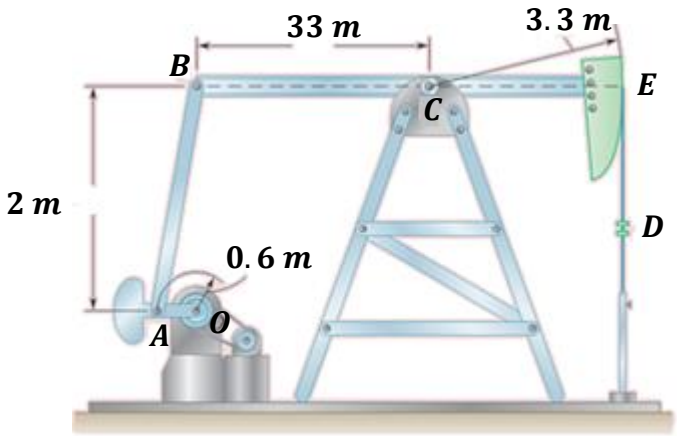


Fig. 4.25	الشكل 25.4

Solution

الحل

1 . The speed of point D:

1. سرعة النقطة (D):

The system consists of a crank OA which rotates with an angular velocity $\vec{\omega}_{OA}$ constant, therefore its angular acceleration is zero $\vec{\alpha}_{OA} = \vec{0}$, a link AB $(\vec{\omega}_{AB}, \vec{\alpha}_{AB})$ and a beam BE $(\vec{\omega}_{BE}, \vec{\alpha}_{BE})$. The points O and C are stationary, that is to say :

الجملة مشكلة من ساعد (OA) يدور بسرعة زاوية ثابتة $(\vec{\omega}_{OA})$، و عليه يكون تسارعه الزاوي معدوما $(\vec{\alpha}_{OA} = \vec{0})$، و ذراع الاتصال AB $(\vec{\omega}_{AB}, \vec{\alpha}_{AB})$ و عارضة الحمولة BE $(\vec{\omega}_{BE}, \vec{\alpha}_{BE})$. النقطتان (O) و(C) ساكنتان، أي أن:

$\vec{v}_O = \vec{0}$	$\vec{v}_C = \vec{0}$	$\vec{a}_O = \vec{0}$	$\vec{a}_C = \vec{0}$

By applying the velocity distribution relationship between O and A then A and B then B and C :

بتطبيق علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (O) و (A) ثم بين النقطتين (A) و (B) و أيضا بين النقطتين (B) و(C):

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$	+	$\vec{\omega}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{BE} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BE} \wedge \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BE} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\omega_{AB} \\ 0.6\omega_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\omega_{BE} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_{AB} = 0$$

$$\omega_{BE} = -4\ tour/mn$$

$$\omega_{BE} = -0.4186\ rad/s$$

At the instant considered, the speed of the point D is the same as that of the point E and has only one component along the axis Oy. By applying again the field relationship of the velocities between E and C:

في اللحظة المعتبرة، سرعة النقطة (D) هي نفسها سرعة النقطة (E) و لديهما فقط مركبة واحدة لكل منهما وفق المحور (Oy). بتطبيق علاقة حقل السرعات مرة أخرى بين النقطتين (E) و(C):

$$\vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{BE} \wedge \overrightarrow{CE}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.4186 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.3816 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. The acceleration of the point D:

2. تسارع النقطة (D) :

By applying the acceleration distribution relationship between O and A then A and B then B and C:

بتطبيق علاقة توزيع التسارعات بين النقطتين (O) و (A) ثم بين النقطتين (A) و (B) و أيضا بين النقطتين (B) و(C):

$$\begin{matrix} \vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA} - \omega_{OA}^2 \overrightarrow{OA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BE} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BE}^2 \overrightarrow{BC} \end{matrix} + -\omega_{OA}^2 \overrightarrow{OA} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\alpha}_{BE} \wedge \overrightarrow{BC} - \omega_{BE}^2 \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2.63 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BE} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5256 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.63 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha_{AB} \\ 0.6\alpha_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3\alpha_{BE} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5256 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{AB} = 1.0521\ rad/s^2$$

$$\alpha_{BE} = -0.21042\ rad/s^2$$

At the instant considered, the acceleration of the point D has only one component along the axis Oy, which is the same as the component a_{Ey}. By applying again the field relation of the accelerations between E and C:

في اللحظة المبينة، تسارع النقطة (D) له مركبة واحدة فقط وفق المحور (Oy)، و التي هي نفسها مركبة تسارع النقطة (a_{Ey}). بتطبيق علاقة حقل التسارعات مرة أخرى بين (E) و (C) :

$$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{BE} \wedge \overrightarrow{CE} - \omega_{BE}^2 \overrightarrow{CE}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Ex} \\ a_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.21042 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5782 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Ex} \\ a_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6943 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5782 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{Ex} = 0.5782\ m/s^2$$

$$a_{Ey} = -0.6943\ m/s^2$$

Finally:

و أخيرا :

$$\vec{a}_D \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6943 \\ 0 \end{pmatrix} m/s^2$$

Exercise 4.4.6

The rod AB is connected by ball joints to the collar A and to the disk whose center C and radius $R = 16\ cm$ At its tip B. Knowing that the disk C rotates counterclockwise at the constant speed $\omega_0 = 3\ rad/s$ in the plane xOz, determine the speed of the collar A for the indicated position (Fig. 4.26).

التمرين 6.4.4

الساق (AB) متصلة بتمفصل كروي مع طوق أسطواني عند طرفها (A) و مع قرص مركزه (C) و نصف قطره $(R = 16\ cm)$ عند طرفها (B). القرص يدور عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية قدرها $(\omega_0 = 3\ rad/s)$ في المستوي (xOz). عين سرعة الطوق (A) من أجل الوضعية المبينة في (الشكل 26.4)

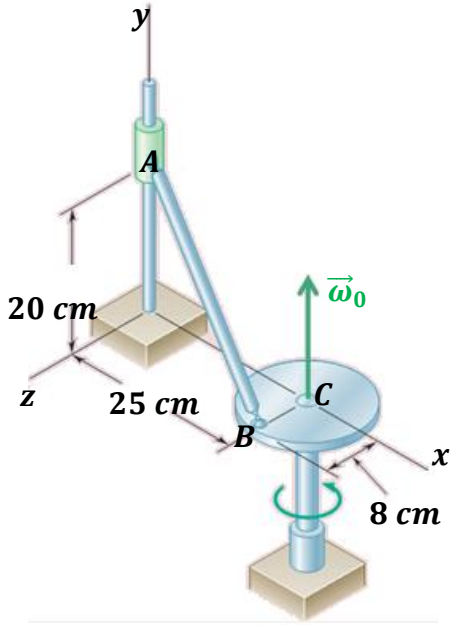


Fig. 4.26 | **الشكل 26.4**

Solution

According to the relationship of the velocity field between A and B and then between B and C (center of the disk):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{BA}$$

With:

$$\vec{\omega}_{AB} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}$$

Let's sum term by term and knowing that the speed of the point C is zero:

$$\vec{v}_C = \vec{0}$$

At the indicated instant, the point A is directed along Oy downwards, therefore:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -25 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$8\omega_y + 20\omega_z = 24 \ \ldots(1)$$

$$8\omega_x - 25\omega_z = v_{Ay} \ \ldots(2)$$

$$20\omega_x + 25\omega_y = 0 \ \ldots(3)$$

Exercise 4.4.7

The rod BC has a length of $42\ cm$ and is connected by a ball joint to the collar B and by a connection to a clevis of the collar C (Fig. 4.27). Knowing that the collar B moves towards A at a constant speed of $19.5\ cm/s$, determine at the indicated instant :

1 . The angular velocity of the rod BC.

2 . The speed of the collar C.

الحل

انطلاقا من تطبيق علاقة حقل السرعات بين (A) و (B) ثم بين (B) و (C) مركز القرص :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{CB}$$

مع :

$$\vec{\omega}_0 = 3\vec{\jmath}$$

لنجمع السرعتين طرفا لطرف، آخذين بعين الاعتبار أن سرعة النقطة (C) معدومة:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_0 \wedge \overrightarrow{CB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{BA}$$

في اللحظة المبينة، النقطة (A) تتجه نزولا وفق المحور (Oy) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8\omega_y - 20\omega_z \\ -25\omega_z + 8\omega_x \\ 20\omega_x + 25\omega_y \end{pmatrix}$$

$$(1) \times 25 + (2) \times 20 - (3) \times 8$$

$$v_{Ay} = -30\ cm/s$$

$$\vec{v}_A \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} cm/s$$

التمرين 7.4.4

ساق (BC) طولها $(42\ cm)$، متصلة بواسطة تمحور كروي بالطوق (B) و بتمحور اسطواني عمودي على الطوق (C) (الشكل 27.4). علما أن الطوق (B) يتحرك باتجاه النقطة (A) بسرعة ثابتة قيمتها $(19.5\ cm/s)$، عين عند اللحظة الموضحة :

1. السرعة الزاوية للساق (BC).

2. سرعة الطوق (C).

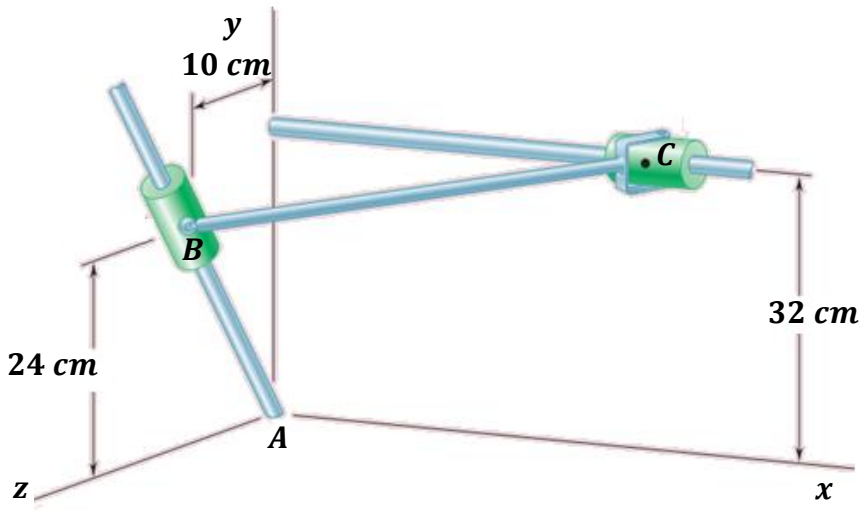


Fig. 4.27	الشكل 27.4

Solution	الحل
1 . The angular velocity of the rod BC :	1. السرعة الزاوية للساق (BC) :
Applying the velocity field relationship between B and C :	لنطبق علاقة حقل السرعات بين (B) و (C) :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge \overrightarrow{BC}$$

such as:	بحيث:

$$\vec{\omega}_{BC} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

At the indicated time, point B is heading towards point A, so:	في اللحظة المبينة، النقطة (B) تتجه نحو النقطة (A) :

$$\vec{v}_B \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{By} \\ -v_{Bz} \end{pmatrix}$$

With:	مع :

$v_B = \sqrt{(2.4)^2 v_{Bz}^2 + v_{Bz}^2}$	$v_B = \sqrt{v_{By}^2 + v_{Bz}^2}$	$v_{By} = \frac{24}{10} v_{Bz}$
$v_{Bz} = \frac{v_B}{2.6}$	$v_B = 2.6 v_{Bz}$	$v_B = v_{Bz}\sqrt{(2.4)^2 + 1}$

$v_{Bz} = \frac{19.5}{2.6}$	$v_{Bz} = 7.5\ cm/s$	$v_{By} = 18\ cm/s$	$\vec{v}_B \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ -7.5 \end{pmatrix} cm/s$
$\overrightarrow{BC} = x\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 10\vec{k}\ cm$	$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{x^2 + 8^2 + 10^2}$	$x = \sqrt{\|\overrightarrow{BC}\|^2 - 8^2 - 10^2}$	
$x = \sqrt{42^2 - 8^2 - 10^2}$	$x = 40\ cm$		

The point C moves along the axis Ox, so :	النقطة (C) تتحرك وفق المحور (Ox)، إذن :

$$\vec{v}_C = v_{Cx}\vec{\imath}$$

$$\begin{pmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ -7.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 40 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -18 \\ -7.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10\omega_y - 8\omega_z \\ 40\omega_z + 10\omega_x \\ 8\omega_x - 40\omega_y \end{pmatrix}$$

$$0\omega_y + 8\omega_z = v_{Cx} \ \dots(1)$$

$$10\omega_x + 40\omega_z = 18 \ \dots(2)$$

$$8\omega_x - 40\omega_y = 7.5 \ \dots(3)$$

We have obtained three equations with four unknowns. We will look for a fourth from the position indicated in (Fig. 4.28). Indeed, the vector $\vec{\omega}_{BC}$ is perpendicular to the vector $\overrightarrow{DC}$.	تحصلنا على ثلاثة معادلات باربعة مجاهيل. لنبحث عن معادلة رابعة من خلال الوضعية الموضحة في (الشكل 28.4). في الواقع الشعاع $(\vec{\omega}_{BC})$ يكون عموديا على الشعاع $(\overrightarrow{DC})$.

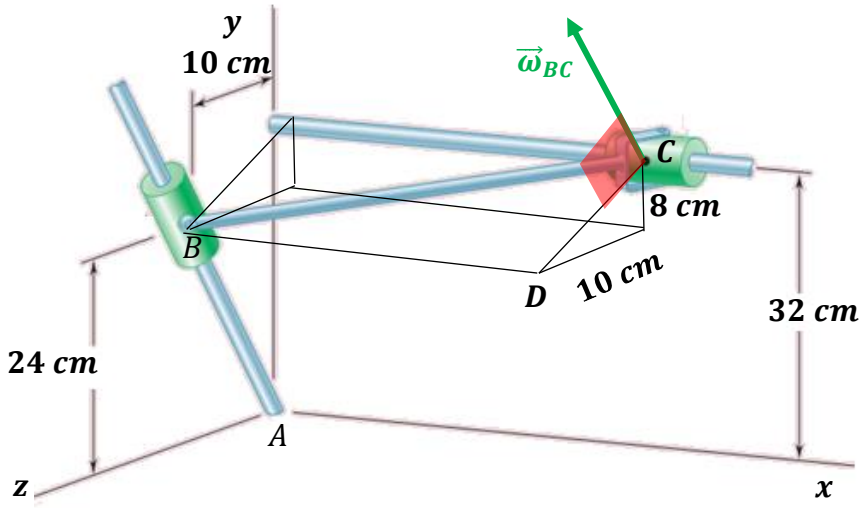


Fig. 4.28	الشكل 28.4

$\overrightarrow{DC} = 8\vec{\jmath} - 10\vec{k}$	$\vec{\omega}_{BC}.\overrightarrow{DC} = 0$	$(\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}).(8\vec{\jmath} - 10\vec{k}) = 0$

$$8\omega_y = 10\omega_z \ \ldots(4)$$

Let's replace (4) in (2) :	لنعوض (4) في (2) :

$10\omega_x + 32\omega_y = 18 \ \ldots(5)$ $8\omega_x - 40\omega_y = 7.5 \ \ldots(6)$	$10 \times (5) + 8 \times (6) \quad \Leftrightarrow 164\omega_x = 240$

$\omega_x = 1.634 \ rad/s$ $\omega_y = 0.1052 \ rad/s$ $\omega_z = 0.0841 \ rad/s$	$\vec{\omega}_{BC} = \begin{pmatrix} 1.634 \\ 0.1052 \\ 0.0841 \end{pmatrix}$

$1) \times 25 + (2) \times 20 - (3) \times 8 \Leftrightarrow 20v_{Ay} + 600 = 0$	$v_{Ay} = -30 \ cm/s$

$$\vec{v}_A \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} cm/s$$

Exercise 4.4.8	التمرين 8.4.4
The bar OA has a length of $l = 4\,m$, it rotates counterclockwise with an angular velocity of $\omega = 1.8\,rad/s$ and an angular acceleration of $\alpha = 6\,rad/s^2$, its position is marked by the angle θ (Fig. 4.29). Determine the speeds and accelerations of points A, B and G for $\theta = 30°$.	عارضة (OA) طولها $(l = 4\,m)$، تدور في اتجاه معاكس لعقارب الساعة بسرعة زاوية قيمتها $(\omega = 1.8\,rad/s)$ و تسارع زاوي قدره $(\alpha = 6\,rad/s^2)$، تُحدد و ضعيتها بالزاوية (θ) (الشكل 29.4). عين سرعات و تسارعات النقاط (A)، (B)و (G) من أجل $(\theta = 30°)$.

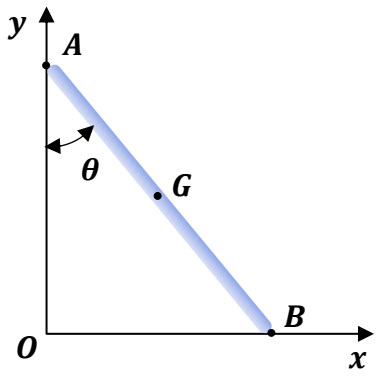


Fig. 4.29	الشكل 29.4

Solution	الحل
• **The speeds :**	• **السرعات :**
Applying the velocity field relationship between B and C :	**لنُطبق علاقة حقل السرعات بين (B) و (C):**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Point A moves along Oy, while point B moves along Ox, their speeds and accelerations are respectively:	**النقطة () تتحرك وفق ()، بينما النقطة () تتحرك وفق ()، سرعتيهما و تسارعيهما كما يلي:**

$\vec{v}_A = v_{Ay}\vec{j}$	$\vec{a}_A = a_{Ay}\vec{j}$	$\vec{v}_B = v_{Bx}\vec{i}$	$\vec{a}_B = a_{By}\vec{j}$
$\overrightarrow{AB} = lsin\theta\vec{i} - lcos\theta\vec{j}$	$\vec{\omega} = 1.8\vec{k}\ rad/s$	$\vec{\alpha} = 6\,\vec{k}\ rad/s^2$	
$v_{Bx}\vec{i} = v_{Ay}\vec{j} + 3.6\vec{k} \wedge (\vec{i} - 1.732\vec{j})$		$v_{Bx}\vec{i} = 6.228\vec{i} + (v_{Ay} + 3.6)\vec{j}$	
$v_{Bx} = 6.228\ m/s$		$v_{Ay} = -3.6\ m/s$	

To calculate the speed of the point G, we must apply the relationship of the speeds between G and A or B.	**لحساب سرعة النقطة (G)، نطبق علاقة توزيع السرعات بين النقطتين (G) و إحدى النقطتين (A) أو (B).**

$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}$		$\vec{v}_G = -3.6\vec{j} + 1.8\vec{k} \wedge (\vec{i} - 1.732\vec{j})$	
$\vec{v}_G = 3.114\vec{i} - 1.8\vec{j}$	$\vec{v}_A \begin{pmatrix} 0 \\ -3.6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_B \begin{pmatrix} 6.228 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_G \begin{pmatrix} 3.114 \\ -1.8 \\ 0 \end{pmatrix}$

• **The accelerations :**	**:**
By applying the acceleration distribution relationship between A and B :	**بتطبيق علاقة توزيع التسارعات بين (A) و (B):**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Bx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3.464 \\ 0 \end{pmatrix} - 3.24 \begin{pmatrix} 2 \\ -3.464 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Bx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20.784 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.48 \\ -11.223 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{Ay} = -23.223\ rad/s^2$$

$$\gamma_{Bx} = 14.304\ rad/s^2$$

To calculate the acceleration of the point G, we must apply the relationship of the accelerations between G and A or B.

لحساب تسارع النقطة (G)، نطبق علاقة توزيع التسارعات بين النقطتين (G) و إحدى النقطتين (A) أو (B).

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AG} - \omega^2 \overrightarrow{AG}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1.732 \\ 0 \end{pmatrix} - 3.24 \begin{pmatrix} 1 \\ -1.732 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -23.223 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10.392 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.24 \\ -5.6115 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.152 \\ -11.6115 \\ 0 \end{pmatrix} \ rad/s^2$$

Exercise 4.4.9

التمرين 9.4.4

The bar AB has a length of $l = 4\ m$ and it moves in the xOy plane. The speed of point A is $\vec{v}_A = 8\vec{\imath}\ m/s$ and point B moves parallel to direction AB (Fig. 4.30).
Determine the speed of B using :
1 . The speed distribution relationship.
2 . The instantaneous center of rotation of the bar.

ساق (AB) طولها $(l = 4\ m)$ تتحرك في المستوي (xOy). سرعة الطرف (A) هي $(\vec{v}_A = 8\vec{\imath}\ m/s)$، والطرف (B) يتحرك وفق منحى (AB) (الشكل 30.4).
عين سرعة النقطة (B) باستعمال:
1. علاقة توزيع السرعات.
2. المركز الآني لدوران الساق.

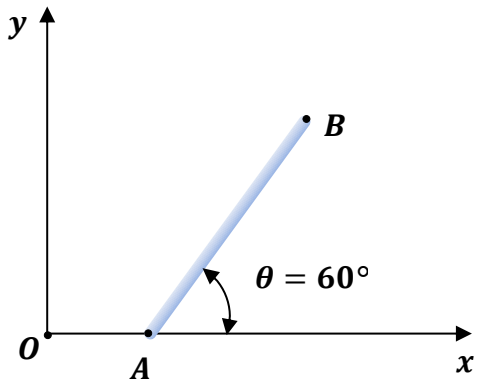


Fig. 4.30

الشكل 30.4

Solution

الحل

Determination of the speed of B by :

تعيين سرعة النقطة (B) باستعمال:

1 . The velocity distribution relationship: | **1. علاقة توزيع السرعات:**

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$	$\vec{v}_B = 8\vec{\imath} + \omega\vec{k} \wedge (2\vec{\imath} + 2\sqrt{3}\vec{\jmath})$

$$\vec{v}_B = (8 - 2\sqrt{3}\omega)\vec{\imath} + 2\omega\vec{\jmath}$$

Since $\vec{v}_B$ and $\overrightarrow{AB}$ have the same direction, we can write : | **بما أن $(\vec{v}_B)$ و $(\overrightarrow{AB})$ لهما نفس المنحى يمكننا كتابة:**

$\vec{v}_B = \|\vec{v}_B\| \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$	$\vec{v}_B = \|\vec{v}_B\| \dfrac{2\vec{\imath} + 2\sqrt{3}\vec{\jmath}}{4}$	$\vec{v}_B = \dfrac{\|\vec{v}_B\|}{2}\vec{\imath} + \dfrac{\sqrt{3}\|\vec{v}_B\|}{2}\vec{\jmath}$

By equalization we obtain : | **بالمقارنة طرفا بطرف نجد:**

$\dfrac{\|\vec{v}_B\|}{2} = 8 - 2\sqrt{3}\omega$	$\dfrac{\sqrt{3}\|\vec{v}_B\|}{2} = 2\omega$	$\|\vec{v}_B\| = 4\ m/s$	$\omega = \sqrt{3}\ rad/s$

Finally the speed of point B is : | **وأخيرا سرعة النقطة (B) هي :**

$$\vec{v}_B = 2\vec{\imath} + 2\sqrt{3}\vec{\jmath}\ \ m/s$$

2 . The instantaneous center of rotation method I : | **2. المركز الآني للدوران(I):**

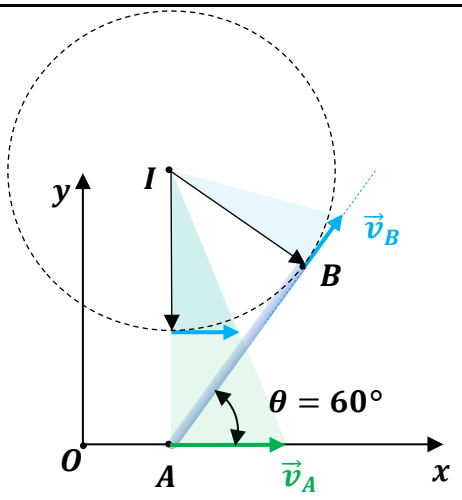


Fig. 4.31 | **الشكل 31.4**

Recall that the instantaneous center of rotation I is the point of intersection of the lines normal to the velocity vectors. The tracing of these lines from the velocity vectors of the points A and B, | **للتذكير، المركز الآني للدوران هو النقطة (I) التي يتقاطع عندها المستقيمات العمودية على أشعة السرعات. نقوم بتحديد مكان (I) برسم المستقيمين العموديين على**

allows us to locate this point I and to determine $\|\vec{v}_B\|$ (Fig. 4.31).

شعاعي السرعتين عند (A) و (B) ثم نحدد طويلة السرعة $(\|\vec{v}_B\|)$ (الشكل 31.4).

Exercise 4.4.10

An arm OA of length L rotates about the vertical axis Oz with a constant speed $\vec{\omega}_1$. A disk D of radius R is attached to the arm so that its center coincides with point A. The arm and the disk are located in the same plane. The disk rotates around A with a constant speed $\vec{\omega}_2$ (Fig. 4.32). Determine:

1 . The speed of the point P located directly above A.

2 . The acceleration of P.

3 . The angular velocity and the angular acceleration of the disk.

التمرين 10.4.4

ذراع (OA) طولها (L) تدور حول المحور الشاقولي (Oz) بسرعة زاوية ثابتة $(\vec{\omega}_1)$. قرص (D) نصف قطره (R) متصل بالذراع بحيث ينطبق مركزه على النقطة (A). الذراع و القرص يقعان في نفس المستوي. القرص يدور حول (A) بسرعة دوران ثابتة $(\vec{\omega}_2)$ (الشكل 32.4). عين:

1. سرعة النقطة (P) من محيط القرص والتي تقع رأسا فوق النقطة (A).
2. تسارع النقطة (P).
3. السرعة الزاية و التسارع الزاوي للقرص.

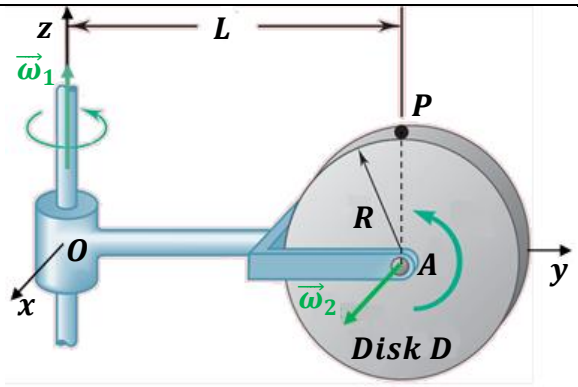


Fig. 4.32 | الشكل 32.4

Solution

الحل

1 . The speed of the point P:
By replacing O' with A in the relation (4.26)

1. سرعة النقطة (P):
باستبدال (O') في العلاقة (26.4) بـ (A) تصبح :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AP}(t)}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}(t)$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_R = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OA}(t) + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AP}(t) + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}(t)$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_R = \omega_1\vec{k}\wedge L\vec{j} + \omega_2\vec{i}\wedge R\vec{k} + \omega_1\vec{k}\wedge R\vec{k} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt}\right)_R = -L\omega_1\vec{i} - R\omega_2\vec{j}$$

2. The acceleration of P : | **2. تسارع النقطة (P):**

By deriving the relation of the speed: | **باشتقاق علاقة السرعة:**

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{AP}}{dt^2}\right)_{R'} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\wedge\overrightarrow{AP} + 2\vec{\omega}_1\wedge\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} + \vec{\omega}_1\wedge\left(\vec{\omega}_1\wedge\overrightarrow{AP}\right)$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = -\omega_1^2\overrightarrow{OA} - \omega_2^2\overrightarrow{AP} + 2\omega_1\vec{k}\wedge\left(\omega_2\vec{i}\wedge\overrightarrow{AP}(t)\right) + \omega_1\vec{k}\wedge\left(\omega_1\vec{k}\wedge R\vec{k}\right)$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = -L\omega_1^2\vec{j} - R\omega_2^2\vec{k} + 2\omega_1\vec{k}\wedge\left(\omega_2\vec{i}\wedge R\vec{k}\right) + \omega_1\vec{k}\wedge\left(\omega_1\vec{k}\wedge R\vec{k}\right)$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = -L\omega_1^2\vec{j} - R\omega_2^2\vec{k} + 2\omega_1\omega_2 R\vec{i} \qquad \left.\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_R = 2\omega_1\omega_2 R\vec{i} - L\omega_1^2\vec{j} - R\omega_2^2\vec{k}$$

3. The angular velocity and the angular acceleration of the disk : | **3. السرعة الزاوية و التسارع الزاوي للقرص:**

The angular velocity of the disk is the composition of the two angular velocities $\vec{\omega}_1$ and $\vec{\omega}_2$: | **السرعة الزاوية للقرص هي محصلة أو تركيب السرعتين الزاويتن $(\vec{\omega}_1)$ و $(\vec{\omega}_2)$:**

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \qquad \vec{\omega} = \omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k}$$

We obtain the angular acceleration of the disk, by deriving its angular velocity, that is : | **نحصل على التسارع الزاوي للقرص، باشتقاق سرعته الزاوية، أي:**

$$\vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R \qquad \vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_R \qquad \vec{\alpha} = \left.\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_R + \left.\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_R$$

$\vec{\omega}_1$ does not undergo any variation in the fixed reference frame R, so: | **$(\vec{\omega}_1)$ لا يطرأ عليه أي تغير في المعلم الثابت (R) و عليه فإن:**

$$\left.\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_R = \vec{0}$$

On the other hand $\vec{\omega}_2$ varies in R, then its derivative will be : | **من جهة أخرى $(\vec{\omega}_2)$ يتغير في المعلم (R)، و منه اشتقاقه يكون:**

$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$	$\vec{\omega} = \omega_2\vec{\imath} + \omega_1\vec{k}$
$\vec{\omega}_2$ **is invariant in** R'**, that is to say :**	**الشعاع** $(\vec{\omega}_2)$ **ثابت في المعلم** (R')**، مما يعني أن:**

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{R'} = \vec{0}$$

Finally :	**و أخيرا نجد:**

$\vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$	$\vec{\alpha} = \omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\vec{\imath}$	$\vec{\alpha} = \omega_1\omega_2\vec{\jmath}$

4.5 Additional exercises | 5.4 تمارين إضافية

Exercise 4.5.1 | التمرين 1.5.4

The three-dimensional motion of a particle is defined by the position vector :

تحدد حركة نقطة في الفضاء بشعاع الموضع :

$$\vec{r}(t) = (Rt\cos\omega t)\vec{i} + ct\vec{j} + (Rt\sin\omega t)\vec{k}$$

Determine :
1. The amplitude of the particle's velocity,
2. The amplitude of its acceleration,
3. The radius ρ of its curvature at time $t = 0$.

عين:
1. طويلة شعاع السرعة لهذه النقطة.
2. طويلة شعاع تسارعها.
3. نصف قطر انحناء مسارها (ρ) عند اللحظة ($t = 0$).

Answer:

1. $\|\vec{v}\|(t) = \sqrt{R^2(1+\omega^2t^2) + c^2}$
2. $\|\vec{a}\|(t) = R\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}$
3. $\rho = \dfrac{R^2 + c^2}{2R\omega}$

الجواب:

1. $\|\vec{v}\|(t) = \sqrt{R^2(1+\omega^2t^2) + c^2}$
2. $\|\vec{a}\|(t) = R\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}$
3. $\rho = \dfrac{R^2 + c^2}{2R\omega}$

Exercise 4.5.2 | التمرين 2.5.4

The oscillation of the rod OA around the point O is indicated by the angle $\theta = \frac{3}{\pi}(\sin \pi t)$. The collar B slides along the rod so that its distance relative to O is $r = 15\,(1 - e^{-2t})$ (Fig. 4.33). When $t = 1\,s$, determine :
1. The speed of the collar.
2. The acceleration of the collar.
3. The acceleration of the collar relative to the rod.

تهتز الساق (OA) في المستوي الشاقولي حول النقطة (O)، يحدد موضعها بالزاوية ($\theta = \frac{3}{\pi}(\sin \pi t)$). الطوق ($B$) ينزلق وفق الساق، حيث المسافة بينه و بين النقطة (O) هي ($r = 15\,(1 - e^{-2t})$) (الشكل 33.4). عند اللحظة ($t = 1\,s$)، حدد:
1. سرعة الطوق.
2. تسارع الطوق
3. التسارع النسبي للطوق بالنسبة للساق.

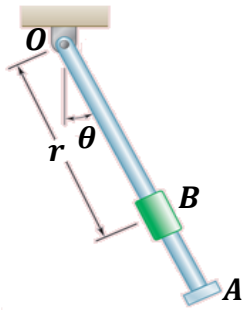


Fig. 4.33 | الشكل 33.4

Answer:	1.	$\vec{v}(1) = 4.06\vec{u}_r - 12.97\vec{u}_\theta \; m/s$	.1	الجواب:
	2.	$\vec{a}(1) = -124.75\vec{u}_r - 24.35\vec{u}_\theta \; m/s^2$	.2	
	3.	$\ddot{r}(1) = -8.12 \; m/s^2$	.3	

Exercise 4.5.3	التمرين 3.5.4
The rod AB of length $l = 30\,cm$ is connected by ball joints to the collars A and B, which slide along the two rods Oz and CD as illustrated in (Fig. 4.34). Knowing that the collar B is moving towards the point D at a constant speed of 5 cm/s, determine the speed of the collar A.	ساق (AB) طولها $(l = 30\,cm)$ متصلة بتمحور كروي بالطوقين الأسطوانيين (A) و (B)، اللذين ينزلقان وفق الساقين (Oz) و (CD) الموضحين في (الشكل 34.4). علما أن الطوق (B) يتحرك باتجاه النقطة (D) بسرعة ثابتة قيمتها $(5\;cm/s)$، حدد سرعة الطوق (A).

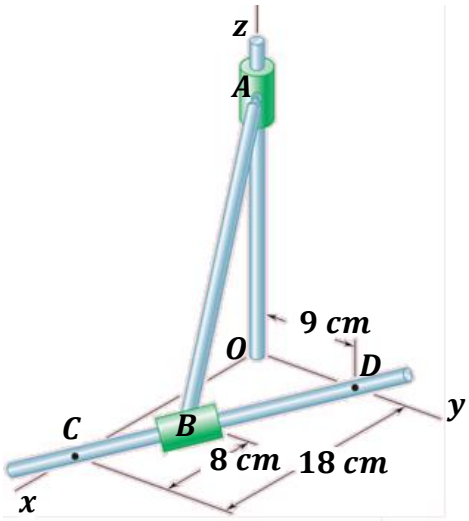


Fig. 4.34	الشكل 34.4

Answer:	$\vec{v}_A = 35.777\,\vec{k}\;cm/s$	الجواب:

Exercise 4.5.4	التمرين 4.5.4
The point A of the bar AB moves with a speed $\|\|\vec{v}_A\|\| = 8\;m/s$ in the direction : $0.966\vec{\imath} - 0.259\vec{\jmath}$ and B in the direction $0.766\vec{\imath} + 0.643\vec{\jmath}$ (Fig. 4.35). 1. What are the coordinates of the instantaneous center of rotation of the bar?	تتحرك النقطة (A) من الساق (AB) بسرعة قيمتها $(\|\|\vec{v}_A\|\| = 8\;m/s)$ في الإتجاه $(0.966\vec{\imath} - 0.259\vec{\jmath})$، بينما تتحرك النقطة (B) في الإتجاه $(+0.766\vec{\imath} - 0.643\vec{\jmath})$ (الشكل 35.4). 1. ما هي إحداثيات المركز اللآني للدوران لهذه الساق؟

2. What is its angular velocity? 3. What is the speed of point B?	2. ما هي سرعتها الزاوية؟ 3. ما هي سرعة النقطة (B)؟

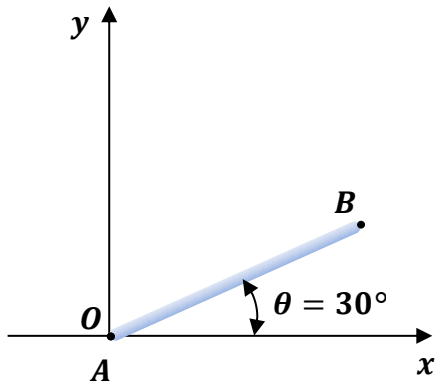


Fig. 4.35	الشكل 35.4

Answer:	1.	$I(0.62\,,\quad 2.32\,,\quad 0)$	.1	الجواب:
	2.	$\vec{\omega} = 3.33\vec{k}$	.2	
	3.	$\vec{v}_B = 4.39\vec{\imath} + 3.69\vec{\jmath}$	.3	

Exercise 4.5.5	التمرين 5.5.4
The rectangular plate of the (Fig. 4.36), rotates at the constant speed $\vec{\omega}_2 = 12\,\vec{j}\,rad/s$ with respect to the arm AE, which itself rotates at the constant speed $\vec{\omega}_1 = 9\,\vec{\imath}\,rad/s$ around the axis Ox. For the indicated position, determine the speeds and the accelerations of the points B, C and D of the plate.	صفيحة مستطيلة (الشكل 36.4) تدور بسرعة ثابتة $(\vec{\omega}_2 = 12\,\vec{j}\,rad/s)$ حول الذراع (AE) و التي هي أيضا تدور بسرعة ثابتة $(\vec{\omega}_1 = 9\,\vec{\imath}\,rad/s)$ حول المحور (Ox). انطلاقا من الوضعية المبينة، حدد سرعات و تسارعات نقاط الصفيحة (B)، (C) و (D).

Answer:	$\vec{v}_B = 162\vec{\imath} - 121.5\vec{k}\ m/s$	$\vec{a}_B = -3037.5\vec{k}\ m/s^2$	الجواب:
	$\vec{v}_C = 162\vec{\imath} - 121.5\vec{\jmath} - 108\vec{k}\ m/s$ $\vec{a}_C = -1296\vec{\imath} + 1944\vec{\jmath} - 3040\vec{k}\ m/s^2$		
	$\vec{v}_D = -108\vec{k}\ m/s$	$\vec{a}_D = -1296\vec{\imath} + 1944\vec{\jmath}\ m/s^2$	

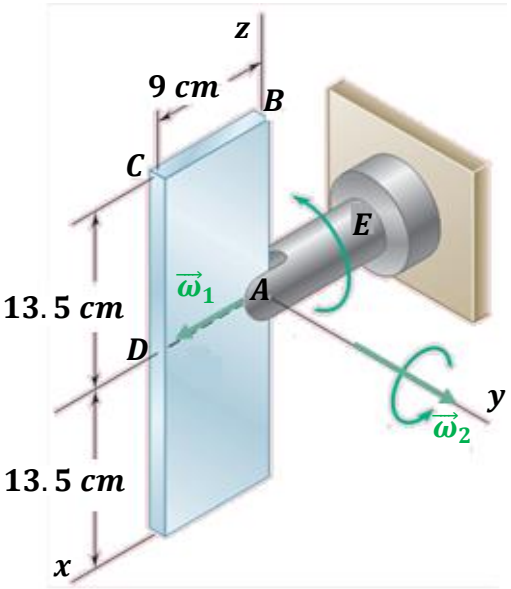


Fig. 2.24	الشكل 38.3

الفصل 5
هندسية الكتلة

Chapter 5
Mass geometry

5.1 Introduction

In this Chapter, we will practice determining the centres of mass and moments of inertia of two-dimensional objects such as flat plates. However, the same ideas also apply to three-dimensional objects. The most general situations require the use of multiple integrations for analysis, but we can often use symmetry considerations to simplify the calculations.

1.5 مقدمة

في هذا الفصل، سنتدرب على إيجاد مراكز الكتل وعزوم العطالة للأجسام ثنائية الأبعاد مثل الألواح المسطحة. والطرق الحسابية التي سنتبعها، تنطبق أيضا على الأجسام ثلاثية الأبعاد .تتطلب الأشكال الأكثر عمومية استخدام عمليات تكامل متعددة للتحليل، ولكن يمكننا غالبًا استخدام اعتبارات التناظر لتبسيط العمليات الحسابية .

5.2 Mass of a material system

We call a system of material points or more simply a material system all together finite (discrete) or not (continuous) of material points.

2.5 كتلة جملة مادية

نسمي جملة نقاط مادية أو ببساطة جملة مادية كل مجموعة من النقاط المادية سوآءا كانت محدودة العدد (منتهية) أو غير محدودة (مستمر).

5.2.1 Discreet system

It is a system made up of a limited number n of material points of mass m_i. The total mass of this system is the sum of all the masses of the material points which constitute it.

1.2.5 الجملة المنتهية

هو جملة تتكون من عدد محدود من النقاط المادية، كتلة كل منها m_i. الكتلة الكلية لهذا النظام هي مجموع كتل النقاط المادية التي تتكون منها.

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (5.1)$$

5.2.2 Continuous system

It is a system made up of an infinity of identical material points, each having an elementary mass dm. These systems are distinguished according to the distribution of points in:

2.2.5 الجملة المستمرة (غير المنتهية)

هي جملة تتكون من عدد غير منته من النقاط المادية المتماثلة، تتميز كل منها بكتلة عنصرية dm. تصنف هذه الجمل حسب توزيع النقاط ضمنها إلى:

5.2.2.1 Linear distribution

The mass is distributed on a line with a linear density λ (Fig. 5.1.1), its totality is given by:

1.2.2.5 التوزيع الخطي

تتوزع الكتلة على شكل خطي كثافته λ (الشكل 1.1.5)، يمكن تجميع هذه الكتل حسب العلاقة التالية.

$$M = \int_l dm = \int_l \lambda dl \qquad (5.2)$$

5.2.2.2 Area distribution

The mass is distributed over a surface with a surface density σ (Fig. 5.1.2), its totality is given by:

2.2.2.5 التوزيع السطحي

تتوزع الكتلة على شكل سطحي كثافته σ (الشكل 2.1.5)، يمكن تجميع هذه الكتل حسب العلاقة التالية:

$$M = \iint_s dm = \iint_s \sigma ds \qquad (5.3)$$

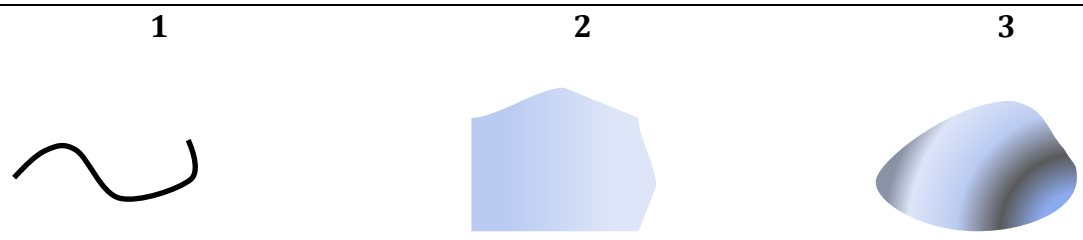
5.2.2.3 Volume distribution

The mass is distributed over a volume with a volume density ρ (Fig. 5.1.3), its totality is given by:

3.2.2.5 التوزيع الحجمي

تتوزع الكتلة على شكل حجمي كثافته ρ (الشكل 3.1.5)، يمكن تجميع هذه الكتل حسب العلاقة التالية:

$$M = \iiint_v dm = \iiint_v \rho dv \qquad (5.4)$$



الشكل 1.5: التزويع الكتلي 1. الخطي، 2. السطحي، 3. الحجمي

Fig. 5.1: Mass distribution 1) linear, 2) surface, 3) volume

5.3 Center of mass

Each mass distribution of material system is characterized by a point G called the center of mass, that provides global information on the situation of the system. The center of mass can be considered as a local average that represents the system.

3.5 مركز الكتلة

يتميز كل توزيع كتلي لجملة مادية بنقطة G تسمى مركز الكتلة التي توفر معلومات شاملة عن حالة الجملة. يمكن اعتبار مركز الكتلة كمتوسط موضعي يمثل الجملة المادية.

5.3.1 Discrete system

Each material point in this system is characterized by mass m_i and occupies a position $P_i(x_i, y_i, z_i)$ in the Cartesian frame. The center of mass G of this system is:

1.3.5 الجملة المنتهية

كل نقطة مادية في هذه الجملة تتميز بكتلة m_i ومحددة بموضعها P_i في المعلم الكارتيزي. مركز الكتلة G لهذه الجملة هو:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (5.5)$$

5.3.2 Continuous system

2.3.5 الجملة المستمرة

5.3.2.1 Linear

1.2.3.5 الخطية

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_l \overrightarrow{OP} dm}{\int_l dm} \qquad (5.6)$$

5.3.2.2 Surface

2.2.3.5 السطحية

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iint_s \overrightarrow{OP} dm}{\iint_s dm} \qquad (5.7)$$

5.3.2.3 Volumetric

3.2.3.5 الحجمية

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_v \overrightarrow{OP} dm}{\iiint_v dm} \qquad (5.8)$$

Example 5.1

Find the center of mass G of a solid in the form of a quarter circle with radius R and linear density λ (Fig. 5.2).

مثال 1.5

أوجد مركز الكتلة G لصلب خطي يشكل ربع دائرة قطرها R وكثافته الكتلية الخطية λ (الشكل 2.5).

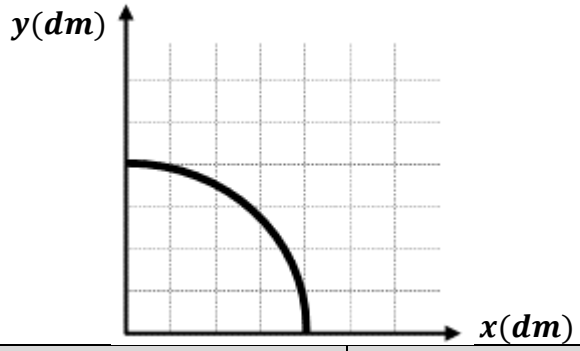


Fig. 5.2	الشكل 2.5

Solution

The solid S is symmetrical with respect to the first bisector $y = x$, therefore its center of mass G is located on this line, that is to say $(x_G = y_G)$
Using the polar coordinates (Fig. 3).

الحل

الجسم الصلب (S) متناظر بالنسبة للمنصف الأول الذي معادلته $(y = x)$، لذا يقع مركز كتلته (G) على هذا المستقيم وعليه ينتج $(x_G = y_G)$.
باستعمال الإحداثيات القطبية (الشكل 3)

$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OP} dm}{\int dm}$	$y_G = x_G$	$x_G = \frac{\int x dm}{\int dm}$
$x_G = \frac{\lambda \int x dl}{\lambda \int dl}$	$x_G = \frac{\int x dl}{\int dl}$	$x_G = \frac{\int R cos\theta . R d\theta}{\int R d\theta}$
$x_G = \frac{R \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}$		$x_G = \frac{2R}{\pi}$

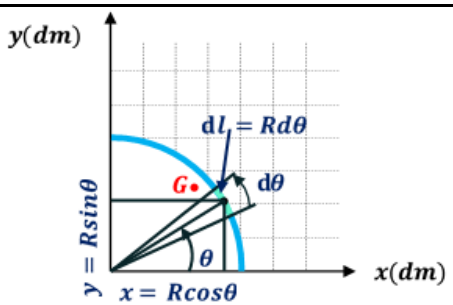


Fig. 5.3	الشكل 3.5

5.3.3 GULDIN's Theorems

5.3.3.1 Theorem 1

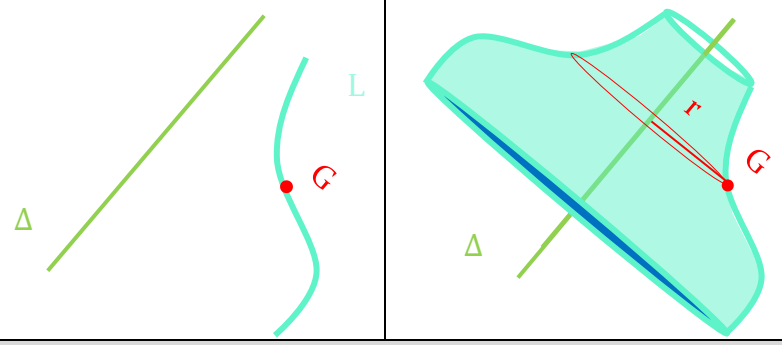
The area S of a surface resulting from the rotation of a linear solid body is equal to the length L of the body multiplied by the circular perimeter drawn by its center G during the generation of the surface (Fig.5.4).

3.3.5 نظريتا GULDIN

1.3.3.2 النظرية 1

المساحة (S) لسطح ناتج عن دوران جسم صلب خطي يساوي الطول (L) للجسم مضروبًا في المحيط الدائري الذي يرسمه مركزه (G) أثناء توليد السطح (الشكل 4.5)

$$S = L \times 2\pi r \qquad (5.9)$$



الشكل 4.5 : تدوير جسم صلب خطي حول محور Δ

Fig. 5.4: Rotation of a linear solid body around the axis Δ

5.3.3.2 Theorem 2

The Volume V resulting from the rotation of a surface solid body is equal to the area S of this body multiplied by the circular perimeter drawn by its center G during the generation of this volume (Fig. 5.5).

2.3.3.5 النظرية 2

الحجم (V) الناتج عن دوران جسم صلب سطحي يساوي المساحة (S) لهذا الجسم مضروبة في المحيط الدائري الذي يرسمه مركزه (G) أثناء توليد هذا الحجم (الشكل 5.5).

$$V = S \times 2\pi r \qquad (5.10)$$

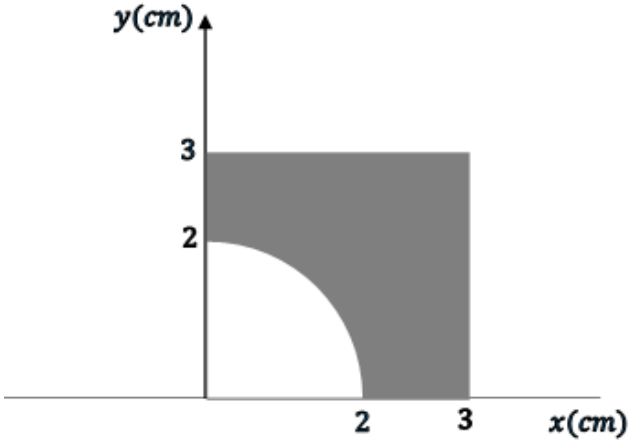
الشكل 5.5 : تدوير جسم صلب سطحي حول محور Δ
Fig. 5.5: Rotation of a surface solid body around the axis Δ

Example 5.2

Find the center of mass G of the plate shown in (Fig. 5.6).

مثال 2.5

أوجد مركز الكتلة (G) للصفيحة الموضحة في (الشكل 6.5).



الشكل 6.5	Fig. 5.6

Solution

The plate has an axis of symmetry that is the first bisector whose equation is $y = x$, so its center of mass G is located on this line, we use this property to calculate only x_G by rotating the plate around the axis Oy. The volume that results from this rotation is a hollow cylinder with a Hemisphere (fig. 5.7)

الحل

للصفيحة محور تناظر هو المنصف الأول الذي معادلته $(y = x)$، لذا يقع مركز كتلتها (G) على هذا المستقيم، نستغل هذه الخاصية لكي نحسب فقط (x_G) وذلك بتدوير الصفيحة حول المحور (Oy). الحجم الذي ينتج عن هذا الدوران هو أسطوانة مجوفة بنصف كرة (الشكل. 7.5)

$$x_G = \frac{\text{Volume of revolution around } Oy}{2\pi \times \text{Surface of the plate}}$$

$$x_G = \frac{\text{Volume of a cylinder} - \text{volume of a half sphere}}{2\pi \times (\text{Surface of a square} - \text{surface of a quarter of a disk})}$$

$x_G = \dfrac{\pi 3^2 \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi 2^3}{2\pi\left(3^2 - \frac{1}{4}\pi 2^2\right)}$	$x_G = 1,85$	$y_G = 1.85$

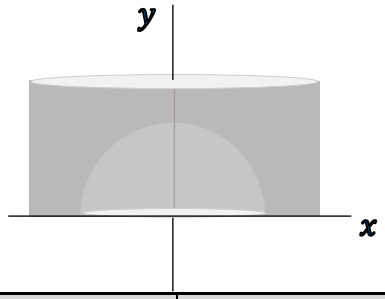


Fig. 5.7	الشكل 7.5

5.4 Moment of inertia

It is a geometric quantity that imposes itself during the rotational movements of physical bodies. It is often denoted by I or J, and it physically represents the difficulty that opposes or faces the rotation of the material system.

4.5 عزم العطالة

هو كمية هندسية تفرض نفسها أثناء الحركات الدورانية للجمل المادية. غالبًا ما يرمز له بـ (I) أو (J)، وهو يمثل فيزيائيا الصعوبة التي تعارض أو تواجه دوران الجملة المادية.

5.4.1 Case of a material point

Let P be a material point of mass m and coordinates (x, y, z) in a Cartesian reference frame, its main moments of inertia are defined by:

1.4.5 حالة نقطة مادية

لتكن (P) نقطة مادية كتلتها (m) وإحداثياتها في معلم كارتيزي هي (x, y, z)، نعرف عزوم عطالتها الرئيسية كما يلي:

$$I_{xx} = m(y^2 + z^2) \quad (5.11)$$

$$I_{yy} = m(x^2 + z^2) \quad (5.12)$$

$$I_{zz} = m(x^2 + y^2) \quad (5.13)$$

The index ii indicates that the component of the rotation vector and the component of the angular momentum vector are on the same Cartesian axis.

الدليل (ii) يفيد أن مركبة شعاع الدوران ومركبة شعاع العزم الحركي تقعان على نفس المحور الكارتيزي.

The inertia products are also defined by:

كما نعرف نواتج عزوم عطالتها كما يلي:

$$I_{yz} = -myz = I_{zy} \quad (5.14)$$

$$I_{xz} = -mxz = I_{zx} \quad (5.15)$$

$$I_{xy} = -mxy = I_{yx} \quad (5.16)$$

The index ij indicates that the component of the rotation vector and the component of the angular momentum vector are not on the same Cartesian axis.

الدليل (ij) يفيد أن مركبة شعاع الدوران ومركبة شعاع العزم الحركي لا تقعان على نفس المحور الكارتيزي.

The previous six moments of inertia represent what is called the inertia tensor of the hardware system S with respect to the Cartesian reference frame $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, which takes the form of a symmetrical matrix.

تمثل عزوم العطالة الست السالفة الذكر عناصر ما يسمى بممتد العطالة للجملة المادية (S) المنسوب للمعلم الكارتيزي $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ والذي يأخذ شكل مصفوفة تناظرية.

$$I_R(S) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

It is also possible to calculate the polar moment I_O of a hardware system which defines as the moment with respect to the origin O of the Cartesian reference frame.

يمكننا أيضا حساب عزم العطالة القطبي (I_O) لجملة مادية والمعرف بأنه عزم العطالة بالنسبة للنقطة (O) مبدأ المعلم الكارتيزي.

$$I_O(S) = m(x^2 + y^2 + z^2) \quad (5.18)$$

Example 5.3

Calculate the inertia tensor I_R and the polar moment I_O of the material point of mass $m = 5\ Kg$ and coordinates $(1, 2, 3)$ in the Cartesian reference frame $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

مثال 3.5

أحسب ممتد العطالة (I_R) وعزم العطالة القطبي (I_O) للنقطة المادية التي كتلتها $(m = 5Kg)$ وإحداثياتها $(1, 2, 3)$ في المعلم الكارتيزي $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Solution

- **Inertia tensor (I_R):**

الحل

- **ممتد العطالة(I_R):**

$I_{xx} = m(y^2 + z^2)$ $I_{xx} = 5(2^2 + 3^2)$ $I_{xx} = 65\ Kg.m^2$	$I_{yz} = -myz$ $I_{yz} = -5 \times 2 \times 3$ $I_{yz} = -30\ Kg.m^2$	$I_R = \begin{pmatrix} 65 & -10 & -15 \\ -10 & 50 & -30 \\ -15 & -30 & 25 \end{pmatrix} Kg.m^2$
$I_{yy} = m(x^2 + z^2)$ $I_{yy} = 5(1^2 + 3^2)$ $I_{yy} = 50\ Kg.m^2$	$I_{xz} = -mxz$ $I_{xz} = -5 \times 1 \times 3$ $I_{xz} = -15\ Kg.m^2$	
$I_{zz} = m(x^2 + y^2)$ $I_{zz} = 5(1^2 + 2^2)$ $I_{zz} = 25\ Kg.m^2$	$I_{xy} = -mxy$ $I_{xy} = 5 \times 1 \times 2$ $I_{xy} = -10\ Kg.m^2$	

- **Polar moment I_O**

- **عزم العطالة القطبي (I_O):**

$I_O = m(x^2 + y^2 + z^2)$	$I_O = 5(1^2 + 2^2 + 3^2)$	$I_O = 70\ Kg.m^2$

It can be noticed that:

يمكن ملاحظة أن:

$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2m(x^2 + y^2 + z^2)$		$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_O$
$I_O = \frac{I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2}$	$I_O = \frac{65 + 50 + 25}{2}$	$I_O = 70\ Kg.m^2$

5.4.2 Discrete system

It comprises a limited number n of material points. Each point of mass m_i occupies a position P_i with coordinates (x_i, y_i, z_i). The main moments of inertia of this system are:

2.4.5 حالة جملة مادية منتهية

تشمل عددا محدودا (n) من النقاط المادية. كل منها كتلتها (m_i) وإحداثيات موضعها في معلم كارتيزي هي $P_i(x_i, y_i, z_i)$، نعرف عزوم عطالتها الرئيسية كما يلي:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) \quad (5.19)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) \quad (5.20)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \quad (5.21)$$

These inertia products are written:

نواتج عطالتها تكتب كالتالي:

$$I_{yz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = I_{zy} \quad (5.22)$$

$$I_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = I_{zx} \quad (5.23)$$

$$I_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = I_{yx} \quad (5.24)$$

Example 5.4

Calculate the inertia tensor I_R and the polar moment I_O of the system constituted by three material points of masses 3, 5 and 2 kg located respectively at the coordinates $(-1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$ and $(-2, 2, 1)$ in the Cartesian reference frame $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

مثال 4.5

أحسب ممتد العطالة (I_R) وعزم العطالة القطبي (I_O) للجملة المشكلة من ثلاث نقاط مادية كتلها 3، 2 و 5 Kg وإحداثياتها $(-1, 0, 1)$، $(2, 1, 3)$ و $(-2, 2, 1)$ على الترتيب في المعلم الكارتيزي $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Solution

- **Inertia tensor I_R**

الحل

- **ممتد العطالة (I_R):**

$I_{xx} = \sum_{i=1}^{3} m_i(y_i^2 + z_i^2)$	$I_{xx} = m_1(y_1^2 + z_1^2) + m_2(y_2^2 + z_2^2) + m_3(y_3^2 + z_3^2)$
$I_{xx} = 3(0^2 + 1^2) + 5(1^2 + 3^2) + 2(2^2 + 1^2)$	$I_{xx} = 63\ Kg.m^2$

$I_{yy} = \sum_{i=1}^{3} m_i(x_i^2 + z_i^2)$	$I_{yy} = m_1(x_1^2 + z_1^2) + m_2(x_2^2 + z_2^2) + m_3(x_3^2 + z_3^2)$
$I_{yy} = 3((-1)^2 + 1^2) + 5(2^2 + 3^2) + 2((-2)^2 + 1^2)$	$I_{yy} = 81\ Kg.m^2$

$I_{zz} = \sum_{i=1}^{3} m_i(x_i^2 + y_i^2)$	$I_{zz} = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + m_3(x_3^2 + y_3^2)$
$I_{zz} = 3((-1)^2 + 0^2) + 5(2^2 + 1^2) + 2((-2)^2 + 2^2)$	$I_{zz} = 44\ Kg.m^2$

$I_{yz} = -\sum_{i=1}^{3} m_i y_i z_i$	$I_{yz} = -(m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 + m_3 y_3 z_3)$
$I_{yz} = -(3 \times 0 \times 1 + 5 \times 1 \times 3 + 2 \times 2 \times 1)$	$I_{yz} = -19\ kg.m^2$

$I_{xz} = -\sum_{i=1}^{3} m_i x_i z_i$	$I_{xz} = -(m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + m_3 x_3 z_3)$
$I_{xz} = -(3 \times (-1) \times 1 + 5 \times 2 \times 3 + 2 \times (-2) \times 1)$	$I_{xz} = -23\ kg.m^2$

$I_{xy} = -\sum_{i=1}^{3} m_i x_i y_i$	$I_{xy} = -(m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3)$
$I_{xy} = -(3 \times (-1) \times 0 + 5 \times 2 \times 1 + 2 \times (-2) \times 2)$	$I_{xy} = -2\ kg.m^2$

We arrange these results in a matrix to form inertia tensor I_R	نرتب هذه النتائج في مصفوفة لنشكل ممتد العطالة (I_R):

$$I_R = \begin{pmatrix} 63 & -2 & -23 \\ -2 & 81 & -19 \\ -23 & -19 & 44 \end{pmatrix} kg.m^2$$

Polar moment I_O | **العزم العطالة القطبي (I_O):**

$$I_O = \sum_{i=1}^{3} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_O = 3((-1)^2 + 0^2 + 1^2) + 5(2^2 + 1^2 + 3^2) + 2((-2)^2 + 2^2 + 1^2)$$

$$I_O = 94\ Kg.m^2$$

We can also verify that: | **بإمكاننا أيضا التحقق من أن:**

$$I_O = \frac{I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} \qquad I_O = \frac{63 + 81 + 44}{2} \qquad I_O = 94\ Kg.m^2$$

5.4.3 Continuous material system | 3.4.5 جملة مادية مستمرة

5.4.3.1 Linear | 1.3.4.5 خطية

In this case the mass distribution is linear with density λ, and each element fraction is characterized by its position (x, y, z), its mass dm and its length dl, so that:

في هذه الحالة يكون توزيع الكتلة خطيا بكثافة (λ)، ويتميز كل جزء عنصري بموضعه (x, y, z)، كتلته (dm) وطوله (dl)، بحيث:

$$dm = \lambda dl \qquad (5.25)$$

$$I_{xx} = \int_l (y^2 + z^2)dm \qquad I_{yy} = \int_l (x^2 + z^2)dm \qquad I_{zz} = \int_l (x^2 + y^2)dm \qquad (5.26)$$

$$I_{yz} = -\int_l yzdm \qquad I_{xz} = -\int_l xzdm \qquad I_{xy} = -\int_l xydm \qquad (5.27)$$

5.4.3.2 Surface distribution | 2.3.4.5 سطحية

In this case the mass distribution is surface with density σ, and each element fraction is characterized by its position (x, y, z), its mass dm and area ds, so that:

في هذه الحالة يكون توزيع الكتلة سطحيا بكثافة (σ)، ويتميز كل جزء عنصري بموضعه (x, y, z)، كتلته (dm) ومساحة (ds)، بحيث:

$$dm = \sigma ds \tag{5.28}$$

$$I_{xx} = \iint_s (y^2 + z^2)dm \qquad I_{yy} = \iint_s (x^2 + z^2)dm \qquad I_{zz} = \iint_s (x^2 + y^2)dm \tag{5.29}$$

$$I_{yz} = -\iint_s yzdm \qquad I_{xz} = -\iint_s xzdm \qquad I_{xy} = -\iint_s xydm \tag{5.30}$$

5.4.3.3 Volumetric distribution

In this case the mass distribution is volumetric with density ρ, and each element fraction is characterized by its position (x, y, z), its mass dm and its volume dv, so that:

3.3.4.5 حجمية

في هذه الحالة يكون توزيع الكتلة حجميا بكثافة (ρ)، ويتميز كل جزء عنصري بموضعه (x, y, z)، كتلته (dm) وحجمه (dv)، بحيث:

$$dm = \rho dv \tag{5.31}$$

$$I_{xx} = \iiint_v (y^2 + z^2)dm \qquad I_{yy} = \iiint_v (x^2 + z^2)dm \qquad I_{zz} = \iiint_v (x^2 + y^2)dm \tag{5.32}$$

$$I_{yz} = -\iiint_v yzdm \qquad I_{xz} = -\iiint_v xzdm \qquad I_{xy} = -\iiint_v xydm \tag{5.33}$$

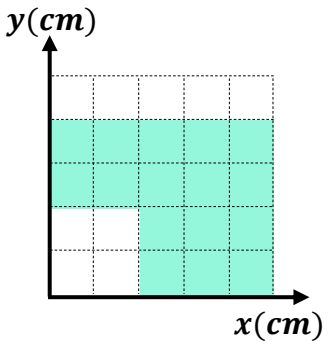
Example 5.5

Calculate the inertia Tensor I_R and the Polar Inertia moment I_O of the plate shown in (Fig. 5.8. 1), which has a mass density $\sigma = 6\ g/cm^2$.

مثال 5.5

أحسب ممتد العطالة (I_R) وعزم العطالة القطبي (I_O) للصفيحة الموضحة في (الشكل 8.5. 1) والتي تتميز بكثافة كتلية $\sigma = 6\ g/cm^2$.

1



2

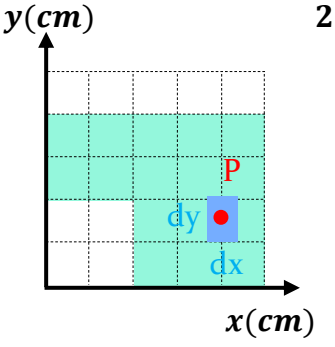


Fig. 5.8	الشكل 8.5

Solution

The solid S in this case is a plate in the plane xOy, so $z = 0$, proceeding from the elemental rectangle centered at the point $P(x, y, 0)$) whose area is $ds = dxdy$ (Fig. 5.8. 2) and using relations (28), (29) and (30) we can write the following:

الحل

الجسم الصلب (S) في هذه الحالة هو صفيحة في المستوي (xOy)، إذن $(z = 0)$، انطلاقا من المستطيل العنصري الممركز عند النقطة $P(x, y, 0)$ والذي مساحته $(ds = dxdy)$ (الشكل 8.5. 2) وباستعمال العلاقات (28)، (29) و (30) نستطيع كتابة ما يلي:

$I_{xx} = \sigma \iint_s y^2 dxy$	$I_{yy} = \sigma \iint_s x^2 dxy$	$I_{zz} = \sigma \iint_s (x^2 + y^2) dxdy$
$I_{yz} = -\iint_s yzdm = 0$	$I_{xz} = -\iint_s xzdm = 0$	$I_{xy} = -\sigma \iint_s xydxy$

So, we just need to calculate only three elements of the inertia tensor I_R:

إذن، يكفينا فقط حساب ثلاثة عناصر من ممتد العطالة (I_R)

$$I_{xx} = 6\left[\int_0^2 dx \int_2^4 y^2 dy + \int_2^5 dx \int_0^4 y^2 dy\right] \qquad I_{xx} = 6\left[2 \times \frac{56}{3} + 3 \times \frac{64}{3}\right]$$

$$I_{xx} = 608\ g.cm^2$$

$$I_{yy} = 6\left[\int_0^2 x^2 dx \int_2^4 dy + \int_2^5 x^2 dx \int_0^4 dy\right] \qquad I_{yy} = 6\left[\frac{8}{3} \times 2 + \frac{117}{3} \times 4\right]$$

$$I_{yy} = 968\ g.cm^2$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \qquad I_{zz} = 1576\ g.cm^2$$

$$I_{xy} = -6\left[\int_0^2 xdx \int_2^4 ydy + \int_2^5 xdx \int_0^4 ydy\right] \qquad I_{xy} = -6\left[\frac{4}{2} \times \frac{12}{2} + \frac{21}{2} \times \frac{16}{2}\right]$$

$$I_{xy} = -576\ g.cm^2$$

Finally, we present the tensor I_R | **أخيرا يمكننا كتابة ممتد العطالة (I_R) للصفيحة**

$$I_R = \begin{pmatrix} 608 & -576 & 0 \\ -576 & 968 & 0 \\ 0 & 0 & 1576 \end{pmatrix} g.cm^2$$

Polar moment I_O | **العزم العطالة القطبي (I_O):**

$I_O = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dm$	$I_O = \sigma \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$

$$I_O = 6\left[\int_0^2 x^2dx \int_2^4 dy + \int_2^5 x^2dx \int_0^4 dy + \int_0^2 dx \int_2^4 y^2dy + \int_2^5 dx \int_0^4 y^2dy\right]$$

$I_O = 6\left[\frac{8}{3} \times 2 + \frac{117}{3} \times 4 + 2 \times \frac{56}{3} + 3 \times \frac{64}{3}\right]$	$I_O = 1576\ g.cm^2$

5.4.4 Influence of symmetry on the inertia tensor

If a solid has a symmetry in its shape with respect to the axes of the reference frame $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, the number of non-zero elements independent of the inertia tensor will be reduced.

4.4.5 تأثير التناظر على ممتد العطالة

إذا تميز الجسم الصلب بتناظر في شكله بالنسبة لمحور أو كثر من محاور المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، فإن ذلك يؤدي إلى نقصان عدد عناصر ممتد العطالة غير المعدومة والمستقلة عن بعضها.

5.4.4.1 Plane of symmetry

If one of the three main planes represent a plane of symmetry of a solid, the inertia products on the other two planes are zero.

1.4.4.5 تناظر بالنسبة لمستوي

إذا كان أحد المستويات الرئيسية الثلاث يمثل مستوي تناظر للجسم الصلب، فإن نواتج العطالة بالنسبة للمستويين الأخرين تكون معدومة.

If the plane (xOy) has a plane of symmetry, then: | **إذا كان المستوي (xOy) يمثل مستوي تناظر فإن:**

$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

If the plane (xOz) has a plane of symmetry, then:	إذا كان المستوي (xOz) يمثل مستوي تناظر فإن:

$I_{xy} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

If the plane (yOz) has a plane of symmetry, then:	إذا كان المستوي (yOz) يمثل مستوي تناظر فإن:

$I_{xy} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$

It can be seen that if the solid admits more than one principal plane of symmetry, the three inertia products are all zero.	نستخلص مما سبق أنه إذا كان للجسم الصلب أكثر من مستوي تناظر رئيسي، فإن نواتج العطالة الثلاث تكون معدومة.

$I_{xy} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

5.4.4.2 Axis of symmetry

If one of the three main axes represent an axis of symmetry of a solid, the inertia products on the two main planes formed by this axis and the other two axes are zero.

2.4.4.5 تناظر بالنسبة لمحور

إذا كان أحد المحاور الرئيسية الثلاث يمثل محور تناظر للجسم الصلب، فإن نواتج العطالة بالنسبة للمستويين الرئيسيين اللذين يشكلهما هذا المحور مع المحورين الآخرين تكون معدومة.

If the Ox axis is an axis of symmetry, then:	إذا كان المحور (Ox) يمثل محور تناظر فإن:

$I_{xy} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$

If the Oy axis is an axis of symmetry, then:	إذا كان المحور (Oy) يمثل محور تناظر فإن:

$I_{xy} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

If the Oz axis is an axis of symmetry, then: | **إذا كان المحور (Oz) يمثل محور تناظر فإن:**

$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

It can be seen that if the solid admits more than one principal axis of symmetry, the three inertia products are all zero. | **نستخلص مما سبق أنه إذا كان للجسم الصلب أكثر من محور تناظر رئيسي، فإن نواتج العطالة الثلاث تكون معدومة.**

$I_{xy} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$

5.4.4.3 Symmetry of revolution

In the case of solids having an axis of revolution such as a cylinder (Fig. 5.9.1), a cone (Fig. 5.8.2)

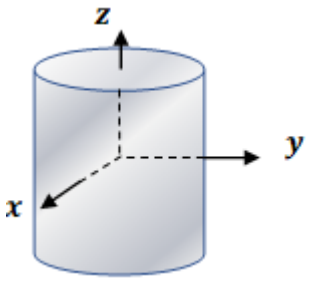
3.4.4.5 تناظر محوري ثوراني

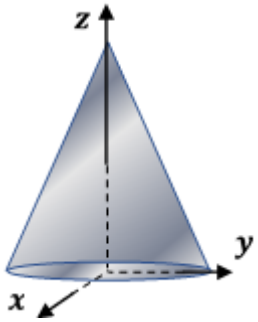
في حالة الأجسام الصلبة التي تتميز بمحور ثوران مثل الأسطوانة (الشكل 1.9.5)، المخروط (الشكل 2.9.5)،

The mass is distributed symmetrically around this axis. If we assume, for example, that this axis is Oz (Fig. 9) the planes xOz and yOz present main planes of symmetry and consequently all the inertia products will be zero.

تكون الكتلة موزعة بصفة تناظرية حول هذا المحور. فإذا كان هذا المحور هو المحور (Oz) مثلا (الشكل. 9)، فإن المستويين الرئيسيين (xOz) و (yOz) يمثلان مستويي تناظر وبالتالي فإن جميع عناصر نواتج العطالة تكون معدومة.

$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{xy} = 0$





الشكل 9.5 : جسم صلب يتميز بمحور ثوراني (Oz)

Fig. 5.9: Solids of revolution of Oz axis

5.4.4.4 Spherical symmetry

In the case of solid bodies characterized by a spherical shape centred on O, whether they are filled or hollow (fig. 10) all the main axes and planes of the reference $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ are symmetry elements corresponding to the sphere, and the three axes have the same roles, which makes all the main elements of inertia equal and all the elements of the products of inertia are zero.

4.4.4.5 التناظر الكروي

في حالة الأجسام الصلبة التي تتميز بشكل كروي مركزه (O) سوآءا كانت مملوءة أم مجوفة (الشكل. 10) تكون كل المحاور والمستويات الرئيسية للمعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ عناصر تناظر للكرة، وتكون المحاور الثلاث متماثلة الأدوار، مما يجعل جميع عناصر العطالة الرئيسية متساوية وجميع عناصر نواتج العطالة معدومة.

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$	$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{xy} = 0$

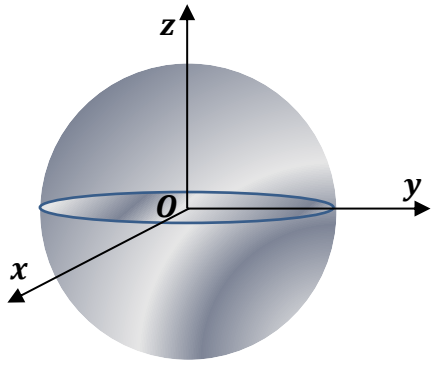


Fig. 5.10 Spherical symmetry

الشكل 10.5: تناظر كروي

Example 5.6

In the case of a spherical solid, find a relationship between I_O the moment of inertia with respect to O and one of the main moments of inertia.

مثال 6.5

في حالة الجسم الصلب الكروي، أوجد علاقة بين عزم العطالة (I_O) بالنسبة للمبدأ (O) وأحد عزوم العطالة الرئيسية.

Solution

In a spherical symmetry, whether hollow or full, we have:

الحل

في حالة التناظر الكروي سوآء كانت الكرة مجوفة كانت أم مملوءة فإن:

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$	$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{xy} = 0$

The moment of inertia with respect to O is:

عزم العطالة بالنسبة للنقطة (O) هو:

$$I_O = \begin{cases} \iint_s (x^2 + y^2 + z^2)dm \\ \iiint_v (x^2 + y^2 + z^2)dm \end{cases}$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \begin{cases} \iint_s (y^2 + z^2)dm + \iint_s (x^2 + z^2)dm + \iint_s (x^2 + y^2)dm \\ \iiint_v (y^2 + z^2)dm + \iiint_v (x^2 + z^2)dm + \iiint_v (x^2 + y^2)dm \end{cases}$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \begin{cases} 2\iint_s (x^2 + y^2 + z^2)dm \\ 2\iiint_{Vs} (x^2 + y^2 + z^2)dm \end{cases} \qquad I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_O$$

We have:

نعلم أن:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

So, we can write:

إذن، نستطيع أن نكتب:

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3\begin{cases} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{cases}$$

Finally: | **وأخيرا:**

$$3\begin{cases} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \end{cases} = 2I_O$$

5.5 Solid plan

In the case of planar solids, one of the coordinates of the element dm is zero. If for example the solid is in the (xOy) plane, then:

5.5 الجسم الصلب المستوي

في حالة الأجسام الصلبة الأجسام الصلبة المستوية، إحدى إحداثيات العنصر (dm) تكون معدومة. فمثلا إذا كان الجسم الصلب واقعا في المستوي (xOy) فإن:

$$z = 0$$

We immediately deduce that: | **لنستنتج مباشرة أنه:**

$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$

$I_{zz} = \iint_S (x^2 + y^2)dm$	$I_{yy} = \iint_S x^2 dm$	$I_{xx} = \iint_S y^2 dm$

By noticing that: | **مع الملاحظة أنه:**

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{zz} = \iint_S x^2 dm + \iint_S y^2 dm$

5.6 Main axes of inertia

Let be a non-diagonal inertia matrix of a solid S with respect to a reference $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

6.5 المحاور الرئيسية للعطالة

لتكن مصفوفة غير قطرية والتي تمثل ممتد العطالة لجسم صلب (S) بالنسبة لمعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

There are at least a basic orthographic of the same origin O noted $R_1(O,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$, called the main base of inertia at point O, and in what directions $(O\vec{\imath}_1, O\vec{\jmath}_1, O\vec{k}_1)$ are the principal directions of inertia and the inertia matrix in this basis is a diagonal matrix. The elements of this diagonal are called the main moments of inertia. The inertia matrix in the base $R_1(O,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$ would be written:

توجد على الأقل قاعدة متعامدة ومتجانسة مبدأها (O) هي $R_1(O,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$، تسمى بالقاعدة الرئيسية للعطالة وتكون محاورها $(O\vec{\imath}_1, O\vec{\jmath}_1, O\vec{k}_1)$ هي المحاور الرئيسية للعطالة، وتكون مصفوفة العطالة بالنسبة لهذه القاعدة قطرية. عناصر قطر المصفوفة تسمى بالعزوم الرئيسية للعطالة. ويكون شكل مصفوفة العطالة في هذه القاعدة $R_1(O,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$ كما يلي:

$$I_{R_1} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

To find the main moments of inertia and their directions, we must diagonalize the matrix:

من أجل إيجاد عزوم العطالة الرئيسية ومحاورها، يجب علينا أقطرة المصفوفة:

$$I_R = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

That is, solving the system of equations:

أي أنه يجب حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{pmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\imath}_1 \\ \vec{\jmath}_2 \\ \vec{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(5.34)}$$

This system admits a solution if the determinant of the matrix is zero:

هذه الجملة تقبل حلا إذا كان محدد المصفوفة التالية معدوما أي:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.35)$$

Example 5.7

An undeformable solid S located in the plane xOy consists of four particles with masses $m_1 = m_3 = 3kg$ and $m_2 = m_4 = 2kg$, At the points A, B, C and D vertices of a square with center O respectively (Fig. 5.11).

1. Calculate I_R the inertia tensor relative to the base $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2. Are the directions $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ main? Justify.

3. Deduct without calculating a base $R_1(O, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ in which the vectors $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ present the main directions of inertia.

مثال 7.5

جسم صلب (S) غير قابل للتشوه، يقع في المستوي (xOy)، يتشكل من أربع كتل نقطية $(m_1 = m_3 = 3kg)$ و $(m_2 = m_4 = 2kg)$

تتواجد على رؤوس مربع $(A$ و B، C و $D)$ على الترتيب، مركزه (O) (الشكل 11.5).

1. أوجد (I_R) ممتد العطالة بالنسبة للقاعدة $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2. هل الاتجاهات $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ رئيسية؟ علل.

3. استنتج دون حساب قاعدة $R_1(O, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ تمثل أشعتها $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ اتجاهات رئيسية لعزوم عطالة الجملة.

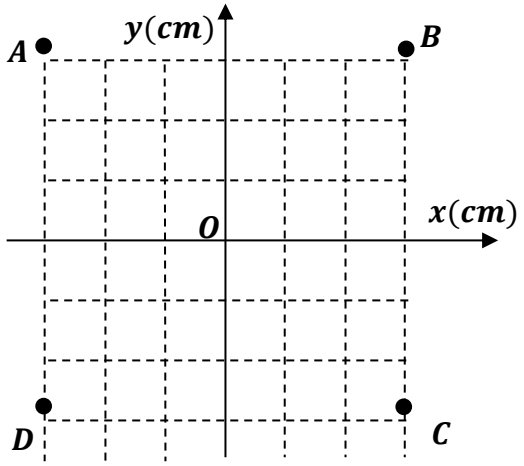


Fig. 5.11 | **الشكل 11.5**

Solution

1. Calculation of the tensor I_R

الحل

1. حساب (I_R)

$I_{xx} = m_1y_1^2 + m_2y_2^2 + m_3y_3^2 + m_4y_4^2$	$I_{xx} = 3 \times 3^2 + 2 \times 3^2 + 3(-3)^2 + 2(-3)^2$
$I_{xx} = 90\ Kgcm^2$	

$I_{yy} = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2 + m_4x_4^2$	$I_{yy} = 3 \times (-3)^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^2 + 2(-3)^2$
$I_{yy} = 90\ Kgcm^2$	

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{zz} = 180\ Kgcm^2$

$$I_{xy} = -(m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + m_3x_3y_3 + m_4x_4y_4)$$

$$I_{xy} = -\big(3 \times (-3) \times 3 + 2 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times (-3) + 2 \times (-3) \times (-3)\big)$$

$$I_{xy} = 18\ Kgcm^2$$

$$I_R = \begin{pmatrix} 90 & 18 & 0 \\ 18 & 90 & 0 \\ 0 & I_{yz} & 180 \end{pmatrix} Kgcm^2$$

2. The Matrix is not diagonal, then the base is not principal.

2. المصفوفة ليست قطرية، إذن فالقاعدة ليست رئيسية.

3. Determination of a main base.

If we rotate the coordinate system around the axis Oz at an angle of 45°, the system in this new coordinate system accepts two planes of symmetry $(O, \vec{\imath}_1, \vec{k}_1)$ and $(O, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$, which cancels out all the products of inertia, and the base $(O, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ will be primary. The new vectors $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ according to the old ones $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ are:

3. إيجاد قاعدة رئيسية.

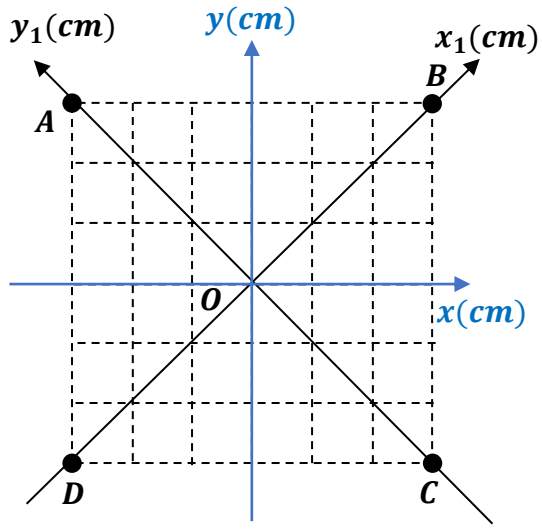
إذا قمنا بتدوير المعلم $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ حول المحور (Oz) بزاوية قدرها $45°$، فإن الجملة في هذا المعلم الجديد تقبل مستويي تناظر هما $(O, \vec{\imath}_1, \vec{k}_1)$ و $(O, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ الشيء الذي يعدم جميع عناصر نواتج العطالة، وعليه تكون القاعدة $(O, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ رئيسية. والاتجاهات الجديدة $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ بدلالة الاتجاهات القديمة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ تكون:

If the rotation is reverse clockwise (Fig. 5.12.1)
If the rotation is clockwise (Fig. 5.12.2)

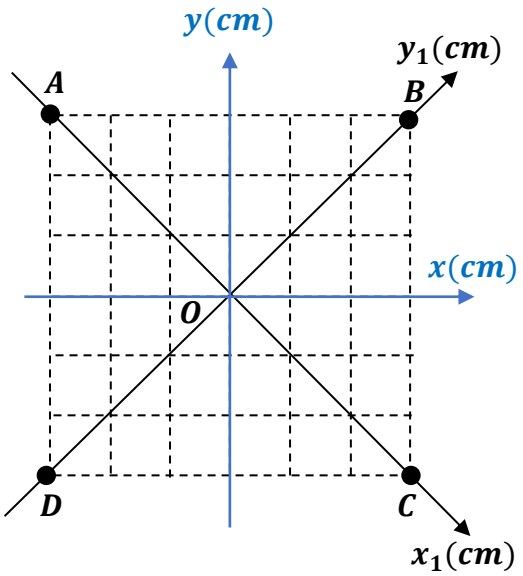
إذا كان الدوران عكس عقارب الساعة (الشكل 1.12.5)
إذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة (الشكل 2.12.5)

Reverse clockwise	عكس عقارب الساعة	Clockwise	باتجاه عقارب الساعة
$\begin{cases} \vec{\imath}_1 = 0.707\vec{\imath} + 0.707\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath}_1 = -0.707\vec{\imath} + 0.707\vec{\jmath} \\ \vec{k}_1 = \vec{k} \end{cases}$		$\begin{cases} \vec{\imath}_1 = 0.707\vec{\imath} - 0.707\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath}_1 = 0.707\vec{\imath} + 0.707\vec{\jmath} \\ \vec{k}_1 = \vec{k} \end{cases}$	

1



2



الشكل 12.5 : 1. دوران باتجاه عقارب الساعة، 2. دوران عكس عقارب الساعة

Fig. 5.12: 1. Reverse clockwise rotation, 2. Clockwise rotation

5.7 Huygens Theorem

7.5 نظرية Huygens

By knowing the inertia tensor at the center of mass $G(x_G, y_G, z_G)$ of the solid S in the base $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$; then we can determine the inertia tensor at the point O in the same base by the relation:

بمعرفتنا لممتد العطالة بالنسبة لمركز الكتلة $G(x_G, y_G, z_G)$ لجسم صلب (S) في القاعدة $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ يمكننا تعيين ممتد العطالة لهذا الجسم الصلب بالنسبة للمبدأ (O) في نفس القاعدة بالعلاقة التالية:

$$I_{O/R}(S) = I_{G/R}(S) + J_{OG/R}(S) \qquad (5.36)$$

Where	حيث:

$$J_{OG/R}(S) = m\begin{pmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & (x_G^2 + z_G^2) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & (x_G^2 + y_G^2) \end{pmatrix} \qquad (5.37)$$

Example 5.8	**مثال 8.5**
Determine the moment of inertia at the point O of a homogeneous rod with a linear mass density λ=5 Kg/m, (Fig. 13).	عين ممتد العطالة بالنسبة إلى (O) لساق متجانسة كتلتها الخطية $\lambda = 5\ Kg/m$ (الشكل 13).

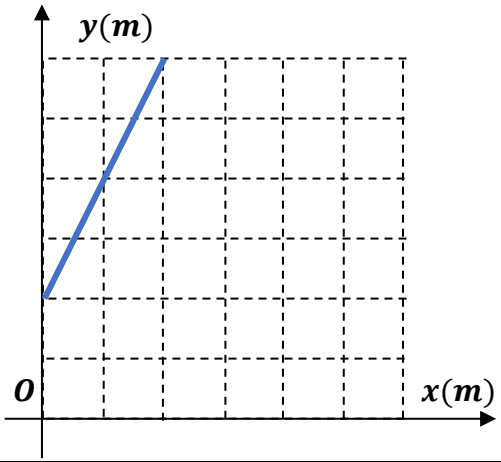


Fig. 5.13	الشكل 13.5

Solution	**الحل**
The rod is located in the xOy plane, so $z = 0$ that is to say:	بما أن الساق تتواجد في المستوي (xOy)، إذن $(z = 0)$ وعليه تكون:

$I_{Gyz} = 0$	$I_{Gxz} = 0$

Its center is $G(1, 4, 0)$ and its length:	مركز كتلة الساق هو $G(1, 4, 0)$ وطولها:

$l = \sqrt{2^2 + 4^2}$	$l = 2\sqrt{5}\ m$

Its mass is:	كتلتها:

$m = \lambda l$	$m = 10\sqrt{5}\ Kg$

Its position in the xOy plane realises: | **موضعها في المستوي (xOy) يحقق المعادلة:**

$$y = 2x + 2$$

$dm = \lambda dl$	$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$	$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
$dl = \sqrt{1 + 2^2}dx$	$dl = \sqrt{5}dx$	$dm = \lambda\sqrt{5}dx$

$I_{Gxx} = \int y^2 dm$	$I_{Gxx} = 5\sqrt{5}\int_0^2 (2x+2)^2 dx$
$I_{Gxx} = \frac{5\sqrt{5}}{6}[(2x+2)^3]_0^2$	$I_{Gxx} = \frac{520\sqrt{5}}{3}$

$I_{Gyy} = \int x^2 dm$	$I_{Gyy} = 5\sqrt{5}\int_0^2 x^2 dx$
$I_{Gyy} = \frac{5\sqrt{5}}{3}[x^3]_0^2$	$I_{Gyy} = \frac{40\sqrt{5}}{3}$

$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$	$I_{Gzz} = \frac{520\sqrt{5}}{3} + \frac{40\sqrt{5}}{3}$	$I_{Gzz} = \frac{560\sqrt{5}}{3}$

$I_{Gxy} = -\int xydm$	$I_{Gxy} = -5\sqrt{5}\int_0^2 x(2x+2)dx$
$I_{Gxy} = -5\sqrt{5}\left[\frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_0^2$	$I_{Gxy} = -\frac{20\sqrt{5}}{3}$

$$I_{G/R} = \frac{20\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} 26 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}\ Kg.m^2$$

The inertia tensor with respect to O is: | **يكون ممتد العطالة بالنسبة للنقطة (O) هو:**

$$I_{O/R} = I_{G/R} + J_{OG/R}$$

$$I_{O/R} = \frac{20\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} 26 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} + 10\sqrt{5}\begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$I_{O/R} = \frac{10\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} 100 & -14 & 0 \\ -14 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 107 \end{pmatrix} \; Kg.m^2$$

5.8 Moment of inertia of a solid with respect to an axis $\Delta(O, \vec{u})$

The moment of inertia of a solid S with respect to an axis Δ passing through the point O and of unit vector $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ is equal to the doubly contracted product of the inertia tensor $I_{O/R}$ by the unit vector $\vec{u}$.

8.5 عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور $\Delta(O, \vec{u})$

يحسب عزم عطالة جسم صلب (S) بالنسبة لمحور (Δ) مار من المبدأ (O) وشعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ بالجداء المصفوفي المزدوج بين ممتد عطالة الجسم بالنسبة إلى $(I_{O/R})$ وشعاع الوحدة $(\vec{u})$.

$$I_\Delta = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) I_{O/R} \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \qquad (5.38)$$

Example 5.9

Homogeneous solid S of straight parallelepipedal shape and of dimension (a, b, c) centred at O (Fig. 5.14). Calculate its moment of inertia with respect to $\Delta\left(O, \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

مثال 9.5

جسم صلب متجانس (S) له شكل متوازي الأوجه القائم، أبعاده (a, b, c) ومركزه (O) (الشكل 14.5). أحسب ممتد عطالته بالنسبة للمحور $\Delta\left(O, \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

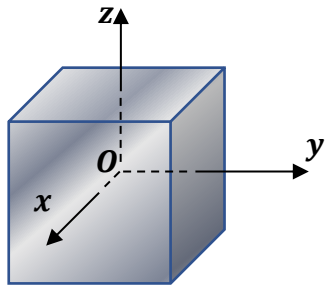


Fig. 14	الشكل 14.5

Solution

The three axes Ox، Oy and Oz are axes of symmetry with respect to the solid S, consequently all the inertia products are zero and the inertia tensor is diagonal:

الحل

بما أن المحاور الثلاث (Ox، Oy و Oz) هي محاور تناظر بالنسبة للجسم الصلب (S)، فإن جميع عناصر نواتج العطالة معدومة، ويكون ممتد العطالة في هذه الحالة قطريا.

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)dm \qquad I_{xx} = \rho \iiint (y^2 + z^2)dv$$

$$I_{xx} = \frac{m}{abc} \iiint (y^2 + z^2)dxdydz \qquad I_{xx} = \frac{m}{abc}\left(\iiint y^2\, dxdydz + \iiint z^2 dxdydz\right)$$

$$I_{xx} = \frac{m}{abc}\left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz\right) \qquad I_{xx} = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

In the same way we find:

بنفس الطريقة نجد:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2) \qquad I_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

The inertia tensor with respect to O:

يكون ممتد العطالة بالنسبة للنقطة (O):

$$I_{O/R} = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

To calculate the inertia tensor with respect to the straight line Δ, the relation (38) applies

لحساب ممتد العطالة بالنسبة للمستقيم (Δ)، نطبق العلاقة (38)

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{12} m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2) \\ (a^2 + c^2) \\ (a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{6} m (a^2 + b^2 + c^2)$$

5.9 Solved exercises

9.5 تمارين محلولة

Exercise 5.9.1

An undeformable solid (S) located in the plane (xOy) consists of three particles with masses $(m_1 = 4kg)$ and $(m_2 = m_3 = 3kg)$, (Fig. 5.15).

1 - Discuss the symmetry of the solid (S).

2 - In what does this symmetry help us when calculating its center of mass and its inertia tensor?

3 - Calculate its center of mass (G).

4 - Calculate its inertia tensor (I_R).

التمرين 1.9.5

جسم صلب (S) غير قابل للتشوه، يقع في المستوي (xOy)، يتشكل من ثلاث كتل نقطية $(m_1 = 4kg)$، $(m_2 = m_3 = 3kg)$ (الشكل 15.5).

1 – ناقش تناظر الجسم الصلب (S)

2 – في ماذا يفيدنا هذا التناظر عند حساب مركز كتلته وممتد عطالته؟

3 – أحسب مركز كتلته (G)

4 – أحسب ممتد عطالته (I_R)

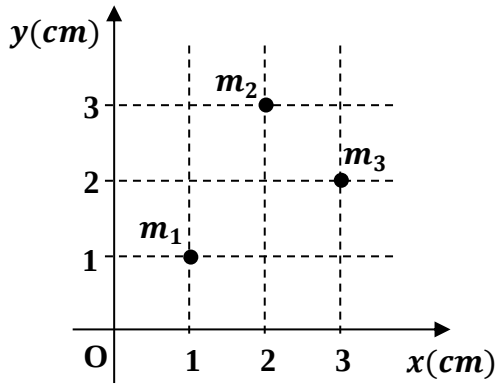


Fig. 5.15

الشكل 15.5

Solution

1 – It is clear from the (Fig. 5.15) that the solid (S) admits the first bisector of the plane (xOy) as axis of symmetry whose equation is:

الحل

1 – يظهر جليا من خلال (الشكل. 15.5) أن الجسم الصلب (S) يقبل المنصف الأول للمستوي (xOy) كمحور تناظر والذي معادلته:

$$y = x$$

2 – We conclude from this symmetry that the center of mass of the solid S is located on the axis of symmetry, which imposes a similar situation between the two axes (Ox) and (Oy), and accordingly we can write:	**2– نستنتج من خاصية التناظر هذه أن مركز الكتلة للجسم الصلب (S) يقع على محور التناظر الذي يفرض تماثلا بين المحورين (Ox) و (Oy) وعليه يمكن أن نستفيد بما يلي:**

$y_G = x_G$	$I_{yy} = I_{xx}$

3 – **Calculation of the center of mass G.**	**3 – حساب مركز الكتلة (G).**

$x_G = \frac{\sum_1^3 m_i x_i}{\sum_1^3 m_i}$	$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$	$x_G = \frac{4 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3}{4 + 3 + 3}$
$x_G = 1.9\ cm$		$y_G = 1.9\ cm$

4 – **Calculation of the inertia tensor I_R.**	**4 – حساب ممتد العطالة (I_R).**

Since all the material points are in the xOy plane then:	**بما أن كل النقاط المادية تقع في المستوي (xOy) فإن:**

$z_i = 0$	$I_{xz} = 0$	$I_{yz} = 0$

$I_{xx} = m_1y_1^2 + m_2y_2^2 + m_3y_3^2$		$I_{xx} = 4 \times 1^2 + 3 \times 3^2 + 3(2)^2$	
$I_{xx} = 43\ Kgcm^2$	$I_{yy} = I_{xx}$	$I_{yy} = 43\ Kgcm^2$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$
$I_{zz} = 86\ Kgcm^2$		$I_{xy} = -(m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + m_3x_3y_3)$	
$I_{xy} = -(4 \times 1 \times 1 + 3 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 \times 2)$			
$I_{xy} = -40\ Kgcm^2$		$I_R = \begin{pmatrix} 43 & -40 & 0 \\ -40 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 86 \end{pmatrix}$	

Exercise 5.9.2

1 - Find the center (G) of the solid S of uniform linear mass (λ) of the (Fig. 5.16) by considering it:

a - a discrete system.

b - a continuous system

c - Using GULDIN's theorem.

2 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the solid (S).

3 - Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the line $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

التمرين 2.9.5

1 – أوجد مركز الكتلة (G) للجسم الصلب (S) ذو الكثافة الخطية المنتظمة (λ) الموضح في (الشكل. 16.5) معتبرا إياه:

أ – جملة منتهية.

ب – جملة مستمرة.

ج – مستعملا نظرية GULDIN.

2 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S).

3 – أحسب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

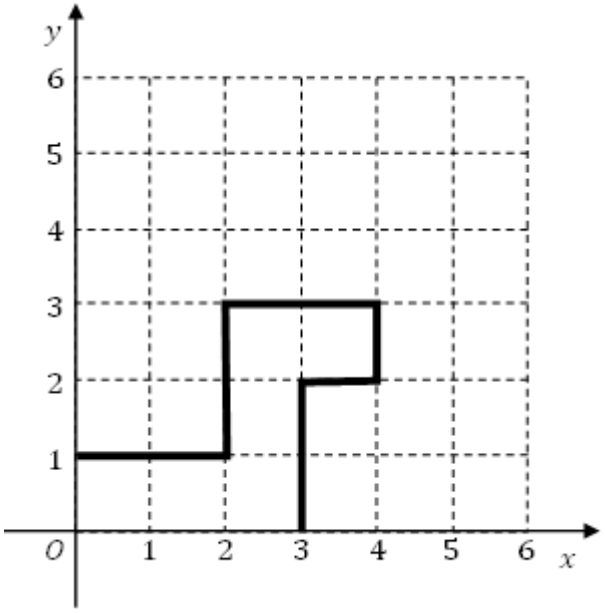


Fig. 5.16 | **الشكل 16.5**

Solution

1.a – Calculation of the center of mass (G) by considering (S) as a discrete system:

الحل

1.أ – حساب مركز الكتلة (G) باعتبار (S) جملة منتهية:

In this case, the solid (S) is formed by six segments (S_i) each of length (l_i) and center (G_i) (Fig. 5.17)

في هذه الحالة يعتبر الجسم الصلب (S) مكونا من ستة قضبان (S_i) لكل منها طوله (l_i) ومركزه (G_i) (الشكل. 17.5)

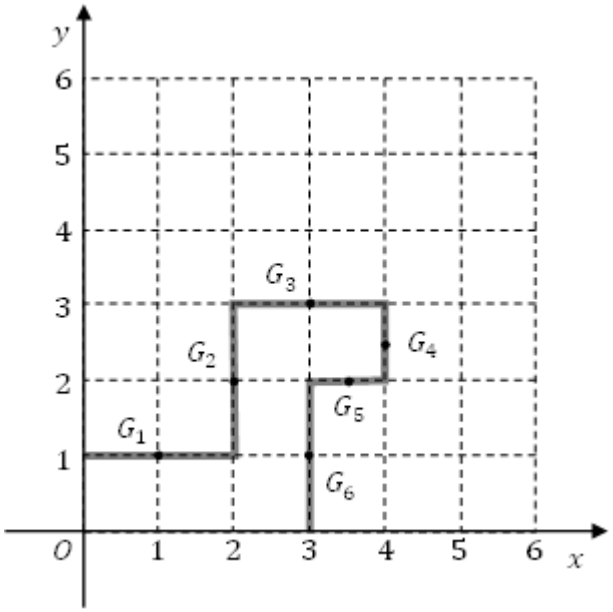


Fig. 5.17	الشكل 17.5

$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^6 m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_1^6 m_i}$	$m_i = \lambda l_i$	$\overrightarrow{OG} = \frac{\lambda \sum_1^6 l_i \overrightarrow{OG_i}}{\lambda \sum_1^6 l_i}$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_1^6 l_i} \begin{pmatrix} \sum_1^6 l_i x_i \\ \sum_1^6 l_i y_i \\ 0 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2\times1+2\times2+2\times3+1\times4+1\times3.5+2\times3 \\ 2\times1+2\times2+2\times3+1\times2.5+1\times2+2\times1 \\ 0 \end{pmatrix}$			$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 2.55 \\ 1.85 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.b – Calculation of the center of mass (G) by considering (S) as a continuous system:

1. ب – حساب مركز الكتلة (G) باعتبار (S) جملة مستمرة:

في هذه الحالة تكون الأجزاء العنصرية (dm, dl) إما موازية لمحور الفواصل $(dl = dx)$ أو موازية لمحور التراتيب $(dl = dy)$ (الشكل. 18.5)

In this case, the elementary segments (dm, dl) are either parallel to (Ox) $(dl = dx)$ or parallel to (Oy) $(dl = dy)$ (Fig. 5.18).

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_l \overrightarrow{OP} dm}{\int_l dm} \qquad dm = \lambda dl \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\lambda \int_l \overrightarrow{OP} dl}{\lambda \int_l dl}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_l \overrightarrow{OP} dl}{\int_l dl} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{10}\left(\int_l x dl\,\vec{i} + \int_l y dl\,\vec{j} + 0\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \int_{l_1} x dl + \int_{l_2} x dl + \int_{l_3} x dl + \int_{l_4} x dl + \int_{l_5} x dl + \int_{l_6} x dl \\ \int_{l_1} y dl + \int_{l_2} y dl + \int_{l_3} y dl + \int_{l_4} y dl + \int_{l_5} y dl + \int_{l_6} y dl \\ 0 \end{pmatrix}$$

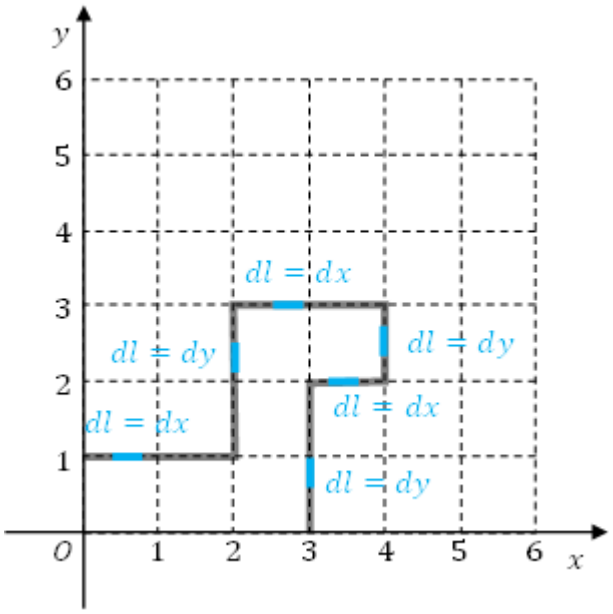


Fig. 5.18 | **الشكل 18.5**

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \int_0^2 x\,dx + \int_1^3 2\,dy + \int_2^4 x\,dx + \int_2^3 4\,dy + \int_3^4 x\,dx + \int_0^2 3\,dy \\ \int_0^2 dx + \int_1^3 y\,dy + \int_2^4 3\,dx + \int_2^3 y\,dy + \int_3^4 2\,dx + \int_0^2 y\,dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [2y]_1^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 + [4y]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 + [3y]_0^2 \\ [x]_0^2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 + [3x]_2^4 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^3 + [2x]_3^4 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2+4+6+4+3.5+6 \\ 2+4+6+2.5+2+2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 2.55 \\ 1.85 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.c – Calculation of the center (G) by GULDIN's theorem:

To calculate (x_G), the solid (S) is rotated about the axis (Oy), which results in either a disk or a perforated disk or a cylinder (Fig. 5.19 a), the total area of these generated surfaces is:

1.ج – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال نظرية GULDIN:

لكي نحسب (x_G) تقوم بتدوير الجسم الصلب (S) حول المحور (Oy) لينتج من جراء هذا التدوير إما قرص أو قرص مثقوب أو أسطوانة (الشكل. 19.5 a)، المساحة الإجمالية للسطوح الناتجة هي:

$$s_{Oy} = \pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 2 + (\pi \times 4^2 - \pi \times 2^2) + 2\pi \times 4 \times 1 + (\pi \times 4^2 - \pi \times 3^2) + 2\pi \times 3 \times 2$$

$$s_{Oy} = 51\pi$$

We apply the GULDIN relation:

نطبق علاقة GULDIN:

$$x_G = \frac{s_{Oy}}{2\pi l} \qquad x_G = \frac{51\pi}{2\pi \times 10} \qquad x_G = 2.55$$

Similarly, to calculate (y_G), the rods are rotated about the axis (Ox), which results in the shapes of the (Fig. 5.5 b), their total surface is:

ولكي نحسب (y_G) تقوم بتدوير القضبان حول المحور (Ox) لينتج من جراء هذا التدوير السطوح الموضحة في (الشكل. 5.5 b)، والذي مساحته:

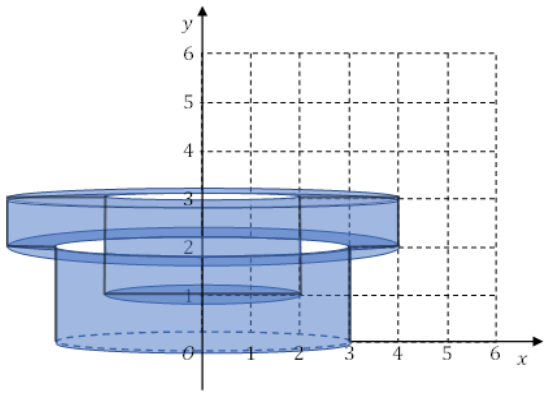
$$s_{Ox} = 2\pi \times 1 \times 2 + (\pi \times 3^2 - \pi \times 1^2) + 2\pi \times 3 \times 2 + (\pi \times 3^2 - \pi \times 2^2) + 2\pi \times 2 \times 1 + \pi \times 2^2$$

$$s_{Ox} = 37\pi$$

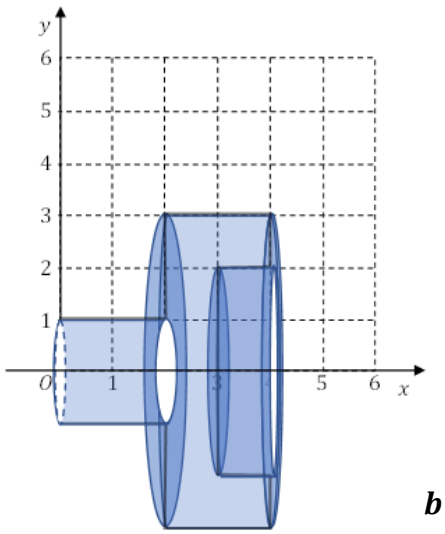
We apply the GULDIN relation:

نطبق علاقة GULDIN:

$$y_G = \frac{s_{Ox}}{2\pi l} \qquad y_G = \frac{37\pi}{2\pi \times 10} \qquad y_G = 1.85$$



a



b

Fig. 5.19 | الشكل 19.5

2 – Calculation of the inertia tensor

2 – حساب ممتد العطالة

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

The solid S is in the plane xOy so:	الجسم الصلب (S) يقع في المستوي (xOy) إذن:

$z=0$	$I_{yz}=-\lambda\int yzdm$	$I_{yz}=0$
	$I_{xz}=-\lambda\int xzdm$	$I_{yz}=0$
$I_{xx}=\int_l (y^2+z^2)dm$		$I_{xx}=\lambda\int_l y^2dl$
$I_{xx}=\lambda\left(\int_0^2 dx+\int_1^3 y^2dy+\int_2^4 3^2dx+\int_2^3 y^2dy+\int_3^4 2^2dx+\int_0^2 y^2dy\right)$		
$I_{xx}=\lambda\left([x]_0^2+\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3+9[x]_2^4+\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^3+4[x]_3^4+\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2\right)$		
$I_{xx}=\lambda\left(2+\frac{26}{3}+18+\frac{19}{3}+4+\frac{8}{3}\right)$		$I_{xx}=\frac{125}{3}\lambda$
$I_{yy}=\int_l (x^2+z^2)dm$		$I_{yy}=\lambda\int_l x^2dl$
$I_{yy}=\lambda\left(\int_0^2 x^2dx+\int_1^3 2^2dy+\int_2^4 x^2dx+\int_2^3 4^2dy+\int_3^4 x^2dx+\int_0^2 3^2dy\right)$		
$I_{yy}=\lambda\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+4[y]_1^3+\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4+16[y]_2^3+\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4+9[y]_0^2\right)$		
$I_{yy}=\lambda\left(\frac{8}{3}+8+\frac{56}{3}+16+\frac{37}{3}+18\right)$		$I_{yy}=\frac{227}{3}\lambda$

$I_{xy}=-\int xydm$	$I_{xy}=-\lambda\int_l xydl$
$I_{xy}=-\lambda\left(\int_0^2 xdx+\int_1^3 2ydy+\int_2^4 3xdx+\int_2^3 4ydy+\int_3^4 2xdx+\int_0^2 3ydy\right)$	
$I_{yy}=-\lambda\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3+3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4+4\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^3+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4+3\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2\right)$	

$I_{yy} = -\lambda(2+8+18+10+7+6)$	$I_{yy} = -51\lambda$

$I_{zz} = \int_l (x^2+y^2)dm$	$I_{zz} = \lambda\int_l (x^2+y^2)dl$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

$I_{zz} = \frac{125}{3}\lambda + \frac{227}{3}\lambda$	$I_{zz} = \frac{352}{3}\lambda$

$$I_{O/R} = \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix} 125 & -153 & 0 \\ -153 & 227 & 0 \\ 0 & 0 & 352 \end{pmatrix}$$

Knowing that:	**علما أن:**

$\lambda = \frac{m}{l}$	$\lambda = \frac{m}{10}$	$I_{O/R} = \frac{m}{30}\begin{pmatrix} 125 & -153 & 0 \\ -153 & 227 & 0 \\ 0 & 0 & 352 \end{pmatrix}$

3 – Calculation of the inertia of S with respect to $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.	**3– حساب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.**

$$I_{\Delta} = \frac{m}{30}(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 125 & -153 & 0 \\ -153 & 227 & 0 \\ 0 & 0 & 352 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$I_{\Delta} = \frac{m}{30}(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}-28\\74\\0\end{pmatrix}$	$I_{\Delta} = \frac{23}{15}m$

Exercise 5.9.3	**التمرين 3.9.5**
1. Find by an integral calculation and then by GULDIN's theorem the center (G) of the solid (S) of uniform linear mass (λ) of the (Fig. 5.20).	**1 . أوجد بالحساب بطريقة التكامل ثم باستعمال نظرية GULDIN مركز الكتلة (G) للجسم الصلب (S) ذو الكثافة الخطية المنتظمة (λ) الموضح في (الشكل. 20.5).**

2 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the solid.
3 - Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the line $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

2 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S).

3 – أحسب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

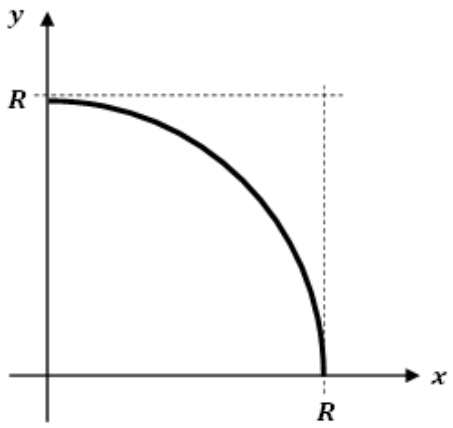


Fig. 5.20	الشكل 20.5

Solution
1.a – Calculation of the center (G) by the integral.
An elementary part of the solid of length dl is delimited, its center (x, y) which forms an angle (θ) with the axis (Ox) and it delimits an elementary angle $(d\theta)$ (Fig. 5.21)

الحل
1.أ – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال التكامل.
نحدد جزءا عنصريا من الجسم الصلب طوله (dl) ومركزه (x, y) وزاويته بالنسبة للمحور (Ox) هي (θ) ويحصر زاوية عنصرية $(d\theta)$ (الشكل. 21.5).

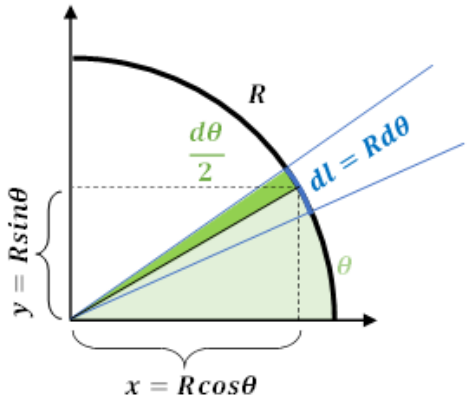


Fig. 5.21	الشكل 21.5

$x_G = \frac{\int_l xdm}{\int_l dm}$	$x_G = \frac{\lambda \int_l xdl}{\lambda \int_l dl}$	$x_G = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} Rcos\theta Rd\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} Rd\theta}$	$x_G = \frac{R[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}$
$x_G = \frac{2R}{\pi}$			

بما أن الجسم الصلب (S) يقبل المنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ كمحور تناظر، فإن مركز كتلته (G) يقع على هذا المستقيم ومنه:

Since the rigid body (S) accepts the first bisector with the equation $(y = x)$ as the axis of symmetry, its center of mass (G) lies on this line and from it:

$$y_G = \frac{2R}{\pi} \qquad y_G = x_G$$

1.ب – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال نظرية GULDIN:

لكي نحسب (x_G) نقوم بتدوير الجسم الصلب (S) الذي يمثل ربع دائرة مركزها (O) ونصف قطرها (R) حول المحور (Oy) لينتج من جراء هذا التدوير نصف سطح كرة (الشكل. 22.5 a) ، مساحته

1.b – Calculation of the center (G) by GULDIN's theorem:

To calculate (x_G), we rotate the solid (S) which has the shape of a quarter circle of center (O) and radius (R) around the axis (Oy), which results in a half sphere (Fig. 5.22 a), its surface is:

$$s_{Oy} = 2\pi R^2$$

نطبق علاقة GULDIN:

We apply the GULDIN relation:

$x_G = \frac{2R}{\pi}$	$x_G = \frac{2\pi R^2}{2\pi\left(\frac{2\pi R}{4}\right)}$	$x_G = \frac{s_{Oy}}{2\pi l}$

ولكي نحسب (y_G) تقوم بتدوير الصفيحة حول المحور (Ox) لينتج من جراء هذا التدوير نصف سطح كرة (الشكل. 22.5 b) ، مساحته:

Similarly, to calculate (y_G), the plate is rotated about the axis (Ox), which results in a half sphere (Fig. 5.22 b), its surface is:

$$s_{Ox} = 2\pi R^2$$

We apply the GULDIN relation: | نطبق علاقة GULDIN:

$y_G = \frac{s_{Ox}}{2\pi l}$	$y_G = \frac{2\pi R^2}{2\pi\left(\frac{2\pi R}{4}\right)}$	$y_G = \frac{2R}{\pi}$

We also had to deduce from the symmetry of the solid body (S) for the first bisector of equation $(y = x)$ that $(y_G = x_G)$. | كما كان لنا أن نعتمد أيضا على تناظر الجسم الصلب (S) بالنسبة للمنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ ونستنتج أن $(y_G = x_G)$.

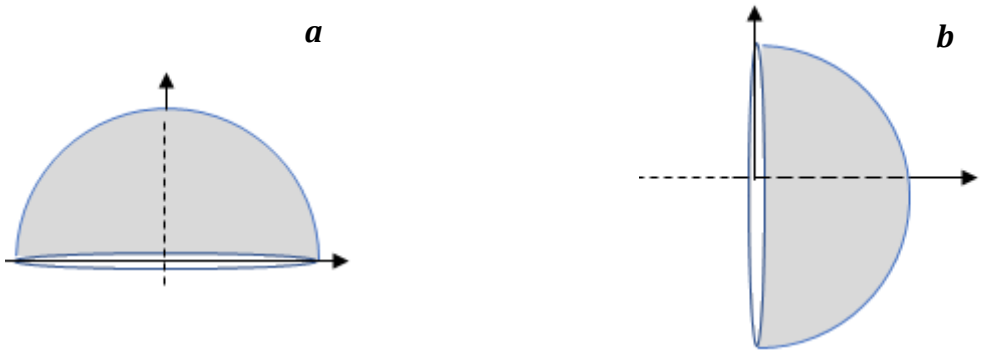


Fig. 5.22 | الشكل 22.5

2 – Calculation of the inertia tensor | 2 – حساب ممتد العطالة

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

The solid (S) is in the plane (xOy) so: | الجسم الصلب (S) يقع في المستوي (xOy) إذن:

$z = 0$	$I_{yz} = -\lambda \int yzdm$	$I_{yz} = 0$
	$I_{xz} = -\lambda \int xzdm$	$I_{yz} = 0$
$I_{xx} = \int_l (y^2 + z^2)dm$		$I_{xx} = \lambda \int_l y^2 dl$

$I_{xx} = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rsin\theta)^2 Rd\theta$	$I_{xx} = \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^2 d\theta$
$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos2\theta) d\theta$	$I_{xx} = \frac{\pi \lambda R^3}{4}$

$I_{yy} = \int_l (x^2 + z^2) dm$	$I_{yy} = \lambda \int_l x^2 dl$
$I_{yy} = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rcos\theta)^2 Rd\theta$	$I_{yy} = \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 d\theta$
$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2\theta) d\theta$	$I_{yy} = \frac{\pi \lambda R^3}{4}$

Depending on the symmetry of the Solid (S) with respect to the first bisector with equation $(y = x)$, we can also conclude that:

يمكننا أيضا هنا اعتمادا على تناظر الجسم الصلب (S) بالنسبة للمنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ استنتاج أن:

$$I_{yy} = I_{xx}$$

$I_{zz} = \int_l (x^2 + y^2) dm$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{zz} = \frac{\pi \lambda R^3}{2}$

$I_{xy} = -\int_l xydm$	$I_{xy} = -\lambda \int_l xydl$
$I_{xy} = -\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rcos\theta)(Rsin\theta) Rd\theta$	$I_{xy} = -\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)(sin\theta) d\theta$
$I_{xy} = \frac{\lambda R^3}{2} [(cos\theta)^2]_0^{\frac{\pi}{2}}$	$I_{xy} = -\frac{\lambda R^3}{2}$

$$I_{O/R} = \frac{\lambda R^3}{4} \begin{pmatrix} \pi & -2 & 0 \\ -2 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$

Knowing that:	علما أن:

$\lambda = \frac{m}{l}$	$\lambda = \frac{m}{\frac{2\pi R}{4}}$	$\lambda = \frac{2m}{\pi R}$

$$I_{O/R} = \frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\pi} & 0 \\ \frac{-2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3 – Calculation of The Inertia (S) for the first bisector $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.	3– حساب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$I_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\pi} & 0 \\ \frac{-2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$I_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1-\frac{2}{\pi} \\ 1-\frac{2}{\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$	$I_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}\left(2-\frac{4}{\pi}\right)$

Exercise 5.9.4	التمرين 4.9.5
A solid (S), consisting of three quarters of circles (S_1), (S_2) and (S_3) with radii $(R_1 = \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{4}R_3)$ in the (xOy) plane, have the same uniform linear mass density (λ) (Fig. 5.23). 1 - Find a relationship between their masses (M_1), (M_2) and (M_3). 2 - Discuss the symmetry of (S).	جسم صلب (S)، متكون من ثلاثة أرباع دوائر (S_1)، (S_2) و (S_3) أنصاف أقطارها $(R_1 = \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{4}R_3)$ في المستوي (xOy)، لها نفس الكثافة الكتلية الخطية المنتظمة (λ) (الشكل. 23.5). 1 – أوجد علاقة بين الكتل (M_1)، (M_2) و (M_3). 2 – ناقش تناظر الجسم الصلب (S).

3 - What is the interest that we can have from this symmetry?

4 - Knowing that $(x_{G_i} = \frac{2R_i}{\pi})$, find $G(x_G, y_G)$ the center of mass of (S) as a function of (R_1)

5 - If the surface area of a sphere of radius (R) is $(4\pi R^2)$, then find $G(x_G, y_G)$ by applying GULDIN's theorem.

6- knowing that the inertia tensor of a solid body is $(I_S = I_{S1} + I_{S2} + I_{S3})$ and that $(I_{xx_i} = \frac{1}{2}M_i R_i^2)$ and $(I_{xy_i} = -\frac{1}{\pi}M_i R_i^2)$, Find (I_S) in terms of (M_1) and (R_1).

3 – بماذا يفيدنا هذا التناظر؟

4 – علما أن $(x_{G_i} = \frac{2R_i}{\pi})$، أوجد $G(x_G, y_G)$ مركز كتلة (S) بدلالة (R_1).

5 – إذا كانت مساحة سطح كرة نصف قطرها (R) هي $(4\pi R^2)$، فأوجد $G(x_G, y_G)$ بتطبيق نظرية GULDIN.

6 – علما أن ممتد عطالة الجسم الصلب هو $(I_S = I_{S1} + I_{S2} + I_{S3})$ وأن $(I_{xx_i} = \frac{1}{2}M_i R_i^2)$ و $(I_{xy_i} = -\frac{1}{\pi}M_i R_i^2)$، أوجد (I_S) بدلالة (M_1) و (R_1).

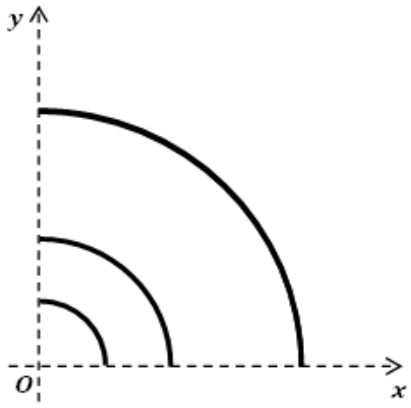


Fig. 5.23	الشكل 23.5

Solution

1 – The relationship between the masses (M_1), (M_2) and (M_3)

الحل

1 - العلاقة بين الكتل (M_1)، (M_2) و (M_3).

$\lambda = \frac{M_1}{L_1} = \frac{M_2}{L_2} = \frac{M_3}{L_3}$	$\frac{M_1}{\frac{1}{4}(2\pi R_1)} = \frac{M_2}{\frac{1}{4}(2\pi R_2)} = \frac{M_3}{\frac{1}{4}(2\pi R_3)}$

$\frac{M_1}{R_1} = \frac{M_2}{R_2} = \frac{M_3}{R_3}$	$\frac{M_1}{R_1} = \frac{M_2}{2R_1} = \frac{M_3}{4R_1}$	$M_1 = \frac{1}{2} M_2 = \frac{1}{4} M_3$

2 - The Solid S admits the first bisector of the plane (xOy) of equation $(y = x)$ as an axis of symmetry.

2 – يقبل الجسم الصلب (S) المنصف الأول للمستوي (xOy) ذو المعادلة $(y = x)$ كمحور تناظر.

3 - This symmetry allows us to write:

3 – نستغل هذا التناظر فيما يلي:

$y_G = x_G$	$I_{yy} = I_{xx}$

4 - Calculation of the center of mass directly

4 – حساب مركز العطالة بالطريقة المباشرة

$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{G_i} m_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$	$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{G_i} \lambda l_i}{\sum_{i=1}^{3} \lambda m_i}$	$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{G_i} l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i}$

$x_G = \frac{x_{G_1} l_1 + x_{G_2} l_2 + x_{G_3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3}$	$x_G = \frac{\frac{2}{\pi} R_1 \frac{2\pi R_1}{4} + \frac{2}{\pi} R_2 \frac{2\pi R_2}{4} + \frac{2}{\pi} R_3 \frac{2\pi R_3}{4}}{\frac{2\pi R_1}{4} + \frac{2\pi R_2}{4} + \frac{2\pi R_3}{4}}$

$x_G = \frac{\frac{2}{\pi} R_1^2 + \frac{2}{\pi} R_2^2 + \frac{2}{\pi} R_3^2}{R_1 + R_2 + R_3}$	$x_G = \frac{2}{\pi}\left(\frac{R_1^2 + 4R_1^2 + 16R_1^2}{R_1 + 2R_1 + 4R_1}\right)$	$x_G = \frac{6}{\pi} R_1$	$G(\frac{6}{\pi} R_1, \frac{6}{\pi} R_1)$

5 - Calculation of the center of mass by the GULDIN method.
The solid S is rotated about the axis (Oy) to obtain a semi-spherical surface (Fig. 5.24)

5 – حساب مركز الكتلة بطريقة GULDIN.
نقوم بتدوير الجسم الصلب حول المحور (Oy) فنحصل على ثلاث سطوح على شكل أنصاف كرات (الشكل.24.5).

$x_G = \frac{S_{/y}}{2\pi L}$	$x_G = \frac{S_{1/y} + S_{2/y} + S_{3/y}}{2\pi(L_1 + L_1 + L_1)}$

$x_G = \dfrac{2\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)}{2\pi\left(\frac{2\pi}{4}R_1 + \frac{2\pi}{4}R_2 + \frac{2\pi}{4}R_3\right)}$	$x_G = \dfrac{6}{\pi}R_1$	$(\dfrac{6}{\pi}R_1, \dfrac{6}{\pi}R_1)$

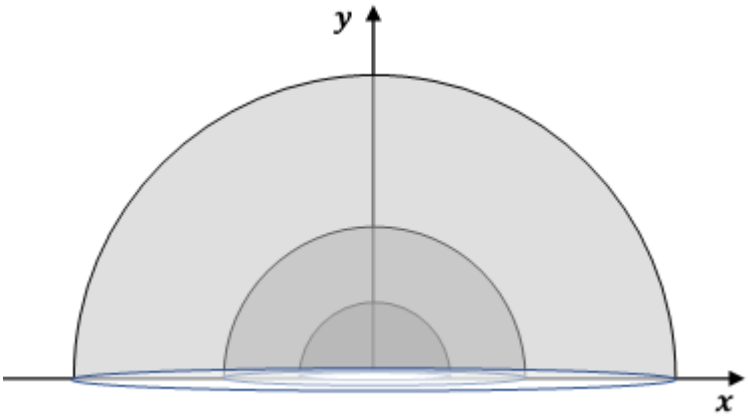


Fig. 5.24	**الشكل 24.5**

6- Calculation of the inertia tensor $(I_{O/R})$) of the solid (S)	**6 – حساب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S)**

$$I_{O/R} = \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & 0 \\ I_{yx_i} & I_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz_i} \end{pmatrix}$$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} I_{xx_i} & \sum_{i=1}^{3} I_{xy_i} & 0 \\ \sum_{i=1}^{3} I_{yx_i} & \sum_{i=1}^{3} I_{yy_i} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{3} I_{zz_i} \end{pmatrix}$$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2) & -\frac{1}{\pi}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2) & 0 \\ -\frac{1}{\pi}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2) & \frac{1}{2}(M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & (M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2) \end{pmatrix}$$

$$I_{O/R} = (M_1R_1^2 + M_2R_2^2 + M_3R_3^2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{O/R} = 73M_1R_1^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

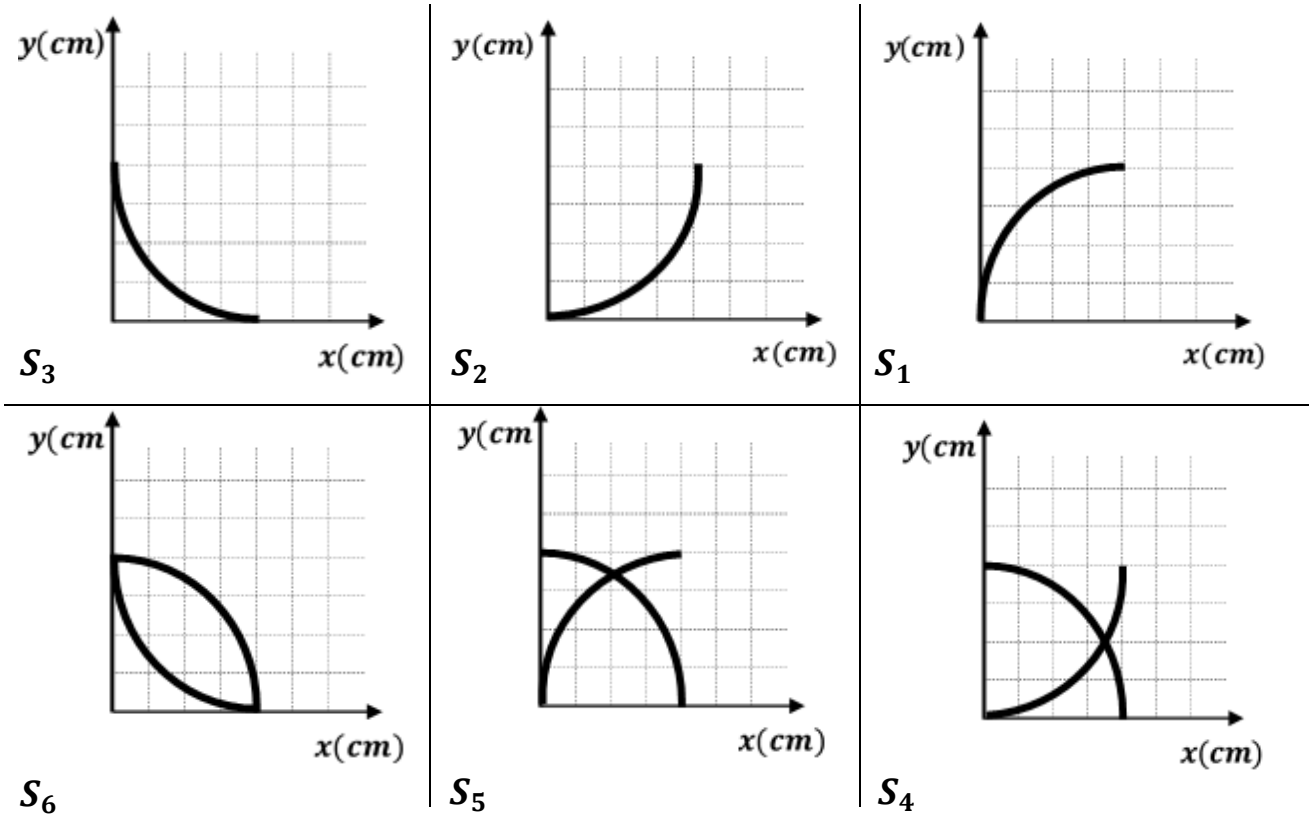
$$I_{O/R} = M_1R_1^2(1+8+64)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

التمرين 5.9.5

استخدم نتيجة السؤال 1 من التمرين 3 لإيجاد مراكز كتل الأجسام الصلبة الموضح في (الشكل. 25.5).

Exercise 5.9.5

Use the result of question 1 of exercise 3 to find the centres of mass of the solid bodies shown in (Fig. 5.25).



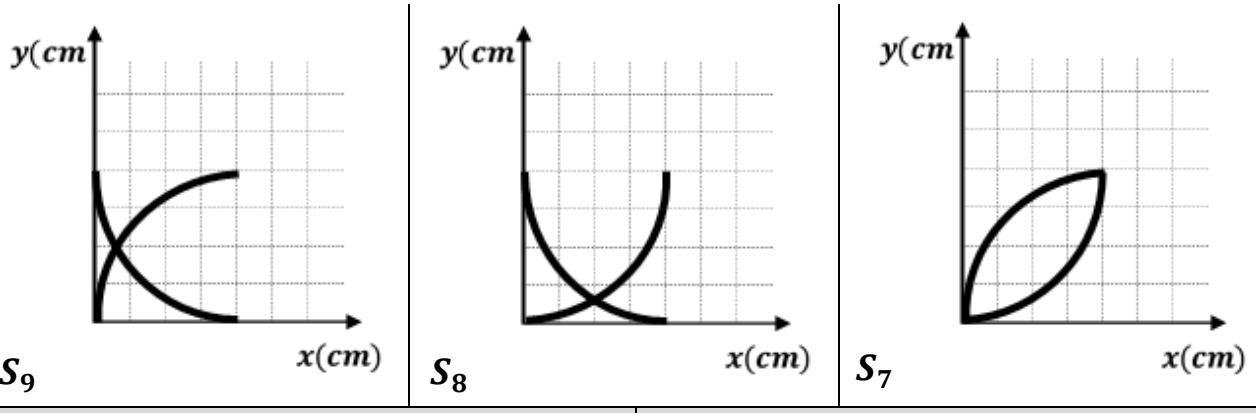


Fig. 5.25	الشكل 25.5

Solution

The result of Question 1 of the second exercise was:

الحل

كانت نتيجة السؤال 1 من التمرين الثاني هي:

$$G\left(\frac{2R}{\pi},\frac{2R}{\pi}\right)$$

Therefore, the centers of the masses of the solids will be according to the following table:

وعليه تكون مراكز كتل الأجسام الصلبة حسب الجدول التالي:

S_1	$G\left(R-\frac{2R}{\pi},\frac{2R}{\pi}\right)$	$G\left(\frac{(\pi-2)R}{\pi},\frac{2R}{\pi}\right)$
S_2	$G\left(\frac{2R}{\pi},R-\frac{2R}{\pi}\right)$	$G\left(\frac{2R}{\pi},\frac{(\pi-2)R}{\pi}\right)$
S_3	$G\left(R-\frac{2R}{\pi},R-\frac{2R}{\pi}\right)$	$G\left(\frac{(\pi-2)R}{\pi},\frac{(\pi-2)R}{\pi}\right)$
S_4	$G\left(\frac{\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2},\frac{R-\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{2R}{\pi},\frac{R}{2}\right)$

S_5	$G\left(\frac{\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}, \frac{\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{R}{2}, \frac{2R}{\pi}\right)$
S_6	$G\left(\frac{\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}, \frac{\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$
S_7	$G\left(\frac{R-\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2}, \frac{\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$
S_8	$G\left(\frac{R-\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2}, \frac{R-\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{R}{2}, \frac{(\pi-2)R}{\pi}\right)$
S_9	$G\left(\frac{R-\frac{2R}{\pi}+R-\frac{2R}{\pi}}{2}, \frac{R-\frac{2R}{\pi}+\frac{2R}{\pi}}{2}\right)$	$G\left(\frac{(\pi-2)R}{\pi}, \frac{R}{2}\right)$

Exercise 5.9.6

A solid S is constituted by three linear segments of the same mass density λ (Fig. 5.26).

1. Express its mass M as a function of λ and R.

2. Calculate its center of mass by considering it:

a) a discrete system.

b) a continuous system.

3. Apply GULDIN's 1st theorem to calculate each of the surfaces generated by the rotation of (S) around the (Oy) axis and the $(x = 3R)$ axis

4. Calculate its inertia tensor (I_R) as a function of (M) and (R).

التمرين 6.9.5

جسم الصلب (S) مؤلف من ثلاث أجزاء خطية لها نفس الكثافة الكتلية (λ) كما هوموضح في (الشكل. 26.5).

1. عبر عن كتلته (M) بدلالة (λ) و (R).

2. أحسب مركز كتلته معتبرا إياه:

أ) جملة منتهية.

ب) جملة مستمرة

3. بتطبيق نظرية GULDIN الأولى، أحسب مساحة سطح كل من الشكلين الناتجين عن تدوير الجسم الصلب (S) حول المحور (Oy) والمحور $(x = 3R)$.

4. أحسب ممتد عطالته (I_R) بدلالة (M) و (R).

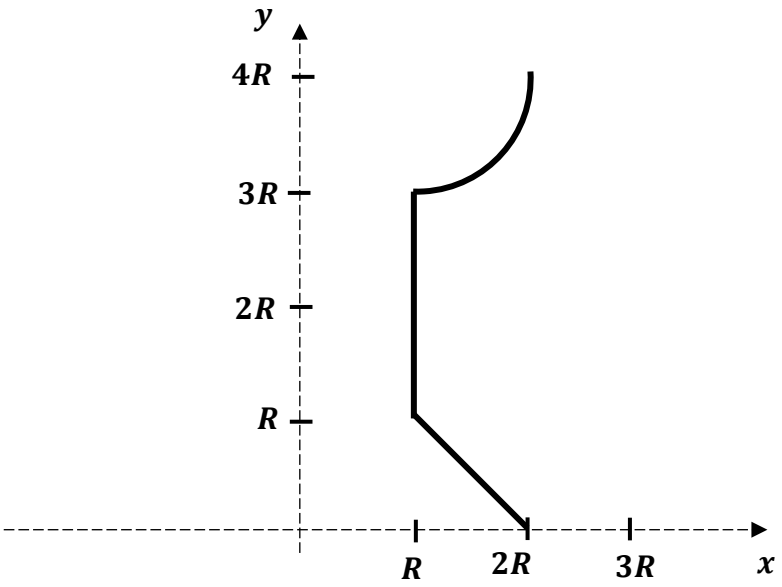


Fig. 5.26	الشكل 26.5

Solution

1 - The expression of (M) the mass of the solid (S) as a function of (λ) and (R).

If we assume that the oblique part of the bottom is (S_1) of mass and length (l_1, m_1) the vertical part of the middle is (S_2) (l_2, m_2) and the curved part of the top is (S_3) (l_3, m_3), the mass (M) of the solid will be:

الحل

1 – التعبير عن (M) كتلة الجسم الصلب (S) بدلالة (λ) و (R).

إذا اعتبرنا الجزء السفلي المائل هو (S_1) كتلته وطوله (l_1, m_1) والجزء الأوسط الشاقولي هو (S_2) (l_2, m_2) والجزء العلوي المقوس هو (S_3) (l_3, m_3)، فإن كتلة الجسم الصلب (M) هي:

$M = m_1 + m_2 + m_3$	$M = \lambda l_1 + \lambda l_2 + \lambda l_3$	$M = \lambda(l_1 + l_2 + l_3)$
$M = \lambda\left(\sqrt{2}R + 2R + \frac{\pi}{2}R\right)$	$M = \left(\sqrt{2} + 2 + \frac{\pi}{2}\right)\lambda R$	

2 - Calculation of the center of mass of (S):

a) By considering it as a discrete system consisting of three segments whose centers of mass are known and which are presented in the following table:

2 – حساب مركز كتلة (S) :

أ) باعتباره جملة منتهية متكونة من ثلاث أجزاء مراكز كتلها معروفة كما هي في الجدول أدناه:

S_1	S_2	S_3
$G\left(\frac{3R}{2}, \frac{R}{2}\right)$	$G(R, 2R)$	$G\left(R + \frac{2R}{\pi}, 4R - \frac{2R}{\pi}\right)$

Applying the relation of the center of mass of a continuous material system, the center of mass of S will be:

بتطبيق علاقة مركز الكتلة لجملة مادية منتهية، يكون مركز كتلة (S)

$$G\left(\frac{\sum_1^3 x_i m_i}{\sum_1^3 m_i}, \frac{\sum_1^3 y_i m_i}{\sum_1^3 m_i}\right)$$

Since they have the same linear density λ:

بما أن لهم نفس الكتلة الخطية (λ) فإن:

$$m_i = \lambda l_i$$

The center of mass of S becomes:

يصبح مركز كتلة (S):

$$G\left(\frac{x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3}{l_1 + l_2 + l_3}\right)$$

$$G\left(\frac{\frac{3R}{2} \times \sqrt{2}R + R \times 2R + \frac{(\pi+2)R}{\pi} \times \frac{\pi R}{2}}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{\pi R}{2}}, \frac{\frac{R}{2} \times \sqrt{2}R + 2R \times 2R + \frac{(4\pi-2)R}{\pi} \times \frac{\pi R}{2}}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{\pi R}{2}}\right)$$

$$G\left(\frac{3\sqrt{2} + 6 + \pi}{2\sqrt{2} + 4 + \pi}, \frac{\sqrt{2} + 6 + 4\pi}{2\sqrt{2} + 4 + \pi}\right) R$$

b) Considering it a continuous system. We use the descriptions of the (Fig. 5.27)

ب) باعتباره جملة مستمرة.
نستخدم التفاصيل الموضحة في (الشكل. 27.5)

$x_G = \frac{\int_l x dm}{\int_l dm}$	$x_G = \frac{\int_l x\lambda dl}{\int_l \lambda dl}$	$x_G = \frac{\int_l x dl}{l}$

$$x_G = \frac{\sqrt{2}\int_0^R(-y+2R)dy + R\int_R^{3R}dy + R\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R+Rsin\theta)d\theta}{l}$$

$$x_G = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}(-y+2R)^2]_0^R + R(y)]_R^{3R} + R(R\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - R(Rcos\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{1}{2}\pi R}$$

$$x_G = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}R^2 + 2R^2 + \frac{\pi}{2}R^2 + R^2}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{1}{2}\pi R}$$

$$x_G = \frac{3\sqrt{2}+6+\pi}{2\sqrt{2}+4+\pi}R$$

$$y_G = \frac{\int_l ydm}{\int_l dm}$$

$$y_G = \frac{\int_l y\lambda dl}{\int_l \lambda dl}$$

$$y_G = \frac{\int_l ydl}{l}$$

$$y_G = \frac{\sqrt{2}\int_0^R ydy + \int_R^{3R} ydy + R\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4R - Rcos\theta)d\theta}{l}$$

$$y_G = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}y^2]_0^R + \frac{1}{2}y^2]_R^{3R} + 4R^2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - R^2sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{1}{2}\pi R}$$

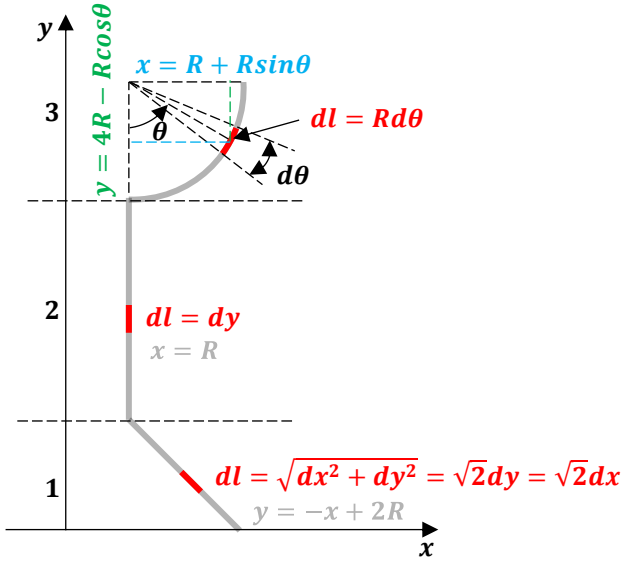


Fig. 5.27	الشكل 27.5

$$y_G = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}R^2 + 4R^2 + 2\pi R^2 - R^2}{\sqrt{2}R + 2R + \frac{1}{2}\pi R}$$

$$y_G = \frac{\sqrt{2} + 6 + 4\pi}{2\sqrt{2} + 4 + \pi}R$$

3 - Calculation of the surfaces generated by the rotation of (S) around the axis (Oy) and the axis $(x = 3R)$ by applying the 1st theorem of GULDIN.

When the solid (S) is rotated about the axis (Oy), the shape of the (Fig. 5.28 a) is obtained, its surface is:

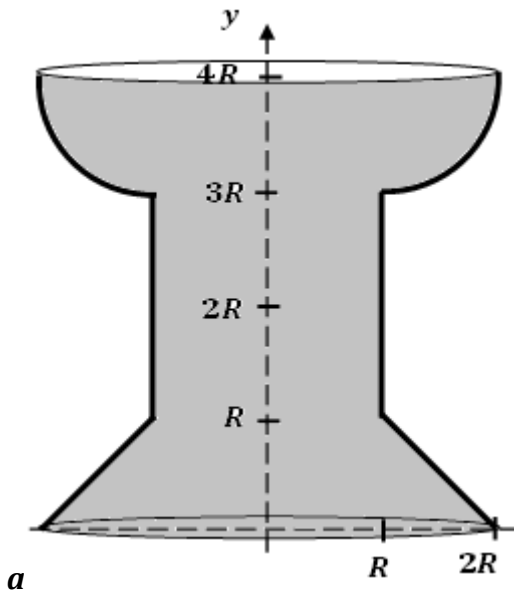
4 – حساب مساحة كل من السطحين الناتجين عن تدوير الجسم الصلب (S) حول المحور (Oy) و المحور $(x = 3R)$ بتطبيق نظرية GULDIN الأولى.

عند تدوير الجسم الصلب (S) حول المحور (Oy) نحصل على الشكل الموضح في (الشكل. 28.5 a) ، مساحة سطحه:

$$s = 2\pi l x_G$$

$$s = 2\pi\left(\sqrt{2}R + 2R + \frac{\pi R}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2} + 6 + \pi}{2\sqrt{2} + 4 + \pi}\right)R$$

$$s = \pi\left(3\sqrt{2} + 6 + \pi\right)R^2$$



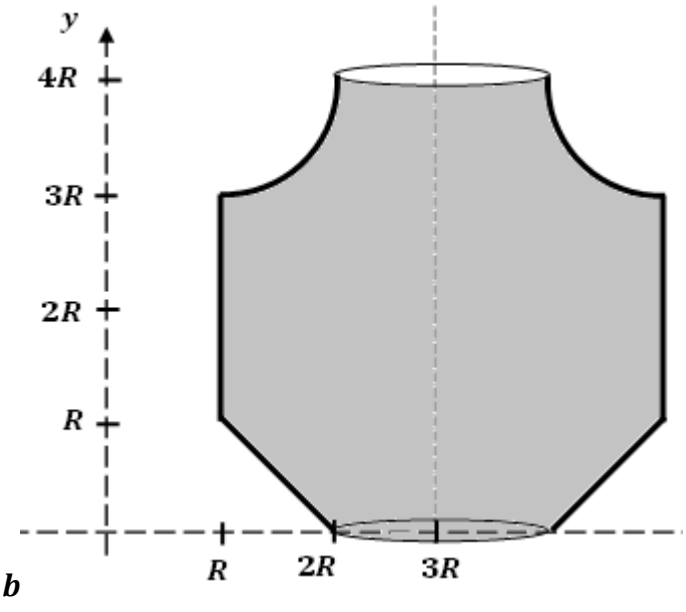


Fig. 5.28 | **الشكل 28.5**

When the solid (S) is rotated about the axis $(x = 3R)$, the shape of the (Fig. 5.28 b) is obtained, its surface is:

عند تدوير الجسم الصلب (S) حول المحور $(x = 3R)$ نحصل على الشكل الموضح في (الشكل. 28.5 b) ، مساحة سطحه:

$$s = 2\pi l(3R - x_G)$$

$$s = 2\pi\left(\sqrt{2}R + 2R + \frac{\pi R}{2}\right)\left(3R - \frac{3\sqrt{2} + 6 + \pi}{2\sqrt{2} + 4 + \pi}\right)R$$

$$s = \pi\left(3\sqrt{2} + 6 + 2\pi\right)R^2$$

4 - Calculation inertia tensor (I_R) :

The solid is located in the (xOy) plane, so

5 – حساب ممتد العطالة (I_R):

الجسم الصلب يقع في المستوي (xOy)، إذن:

$z = 0$	$I_{yz} = 0\ ;\ \ I_{xz} = 0$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$
$I_{xx} = \int_l y^2 dm$	$I_{xx} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R y^2 dy + \lambda\int_R^{3R} y^2 dy + \lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4 - cos\theta)^2 d\theta$	
$I_{xx} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R y^2 dy + \lambda\int_R^{3R} y^2 dy + 16\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 8\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta + \lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta d\theta$		
$cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2\theta$		
$I_{xx} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R y^2 dy + \lambda\int_R^{3R} y^2 dy + 16\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 8\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\theta d\theta$		
$I_{xx} = \lambda\sqrt{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^R + \lambda\left[\frac{y^3}{3}\right]_R^{3R} + 16\lambda R^3[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - 8\lambda R^3[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\lambda R^3[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\lambda R^3\left[\frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$		
$I_{xx} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} + \frac{33}{4}\pi\right)\lambda R^3$	$I_{xx} = \frac{1}{6}\frac{\left(4\sqrt{2} + 8 + 99\pi\right)}{\left(2\sqrt{2} + 4 + \pi\right)}MR^2$	

$I_{yy} = \int_l x^2 dm$	$I_{yy} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R (-y+2R)^2 dy + \lambda R^2 \int_R^{3R} dy + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\theta)^2 d\theta$

$$I_{yy} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R (-y+2R)^2 dy + \lambda R^2 \int_R^{3R} dy + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\theta d\theta$$

$$sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2\theta$$

$$I_{yy} = \lambda\sqrt{2}\int_0^R (-y+2R)^2 dy + \lambda R^2 \int_R^{3R} dy + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta + \frac{1}{2}\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{2}\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\theta d\theta$$

$$I_{yy} = -\lambda\sqrt{2}\left[\frac{(-y+2R)^3}{3}\right]_0^R + \lambda R^2 [y]_R^{3R} + \lambda R^3 [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\lambda R^3 [cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\lambda R^3 [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\lambda R^3 \left[\frac{cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$I_{yy} = \left(\frac{7\sqrt{2}}{3} + \frac{9}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)\lambda R^3$	$I_{yy} = \frac{1}{6}\frac{\left(28\sqrt{2}+54+9\pi\right)}{\left(2\sqrt{2}+4+\pi\right)} MR^2$

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{yy} = \frac{1}{6}\frac{\left(32\sqrt{2}+62+118\pi\right)}{\left(2\sqrt{2}+4+\pi\right)} MR^2$

$$I_{xy} = -\int_l xydm$$

$$I_{xy} = -\lambda\sqrt{2}\int_0^R (-y+2R)ydy - \lambda R\int_R^{3R} ydy - \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sin\theta)(4-cos\theta)d\theta$$

$$I_{xy} = -\lambda\sqrt{2}\int_0^R (-y+2R)ydy - \lambda R\int_R^{3R} ydy - 4\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 4\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta + \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta cos\theta d\theta$$

$$sin\theta cos\theta = \frac{1}{2}sin2\theta$$

$$I_{xy} = -\lambda\sqrt{2}\int_0^R(-y+2R)ydy - \lambda R\int_R^{3R} ydy - 4\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta - 4\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin\theta d\theta + \lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\lambda R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin2\theta d\theta$$

$$I_{xy} = -\lambda\sqrt{2}\left[-\frac{1}{3}y^3 + Ry^2\right]_0^R - \lambda R\left[\frac{1}{2}y^2\right]_R^{3R} - 4\lambda R^3[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\lambda R^3[cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \lambda R^3[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\lambda R^3\left[\frac{cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{xy} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{13}{2} - 2\pi\right)\lambda R^3$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{3}\frac{\left(4\sqrt{2}+26+12\pi\right)}{\left(2\sqrt{2}+4+\pi\right)}MR^2$$

$$I_R = \frac{1}{6\left(2\sqrt{2}+4+\pi\right)}\begin{pmatrix} \left(4\sqrt{2}+8+99\pi\right) & -\left(8\sqrt{2}+52+24\pi\right) & 0 \\ -\left(8\sqrt{2}+52+24\pi\right) & \left(28\sqrt{2}+54+9\pi\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(32\sqrt{2}+62+118\pi\right) \end{pmatrix}MR^2$$

$$I_R = \begin{pmatrix} 5.427 & -2.318 & 0 \\ -2.318 & 2.037 & 0 \\ 0 & 0 & 7.464 \end{pmatrix}MR^2$$

Exercise 5.9.7

A linear solid (S), in the form of an incomplete circle with center (O) and radius (R) (Fig. 5.29)
1 - Discuss its elements of symmetry.
2 - Determine the center of mass of the solid.
3 - By applying GULDIN's first theorem, Calculate the areas of the surfaces generated by the rotation of (S) around (Δ) and (Δ').
4 - Calculate its inertia tensor (I_R) with respect to the reference $R(O,x,y,z)$.

التمرين 7.9.5

جسم صلب خطي (S)، على شكل دائرة غير كاملة مركزها (O) ونصف قطرها (R) (الشكل. 29.5).

1 – ناقش عناصر تناظره.

2 – حدد مركز الكتلة لهذا الجسم

3 – بتطبيق نظرية GULDIN الأولى، أحسب مساحة السطحين الناتجين عن دوران (S) حول (Δ) و (Δ')

4 – أحسب ممتد عطالته (I_R) بالنسبة للمعلم $R(O,x,y,z)$.

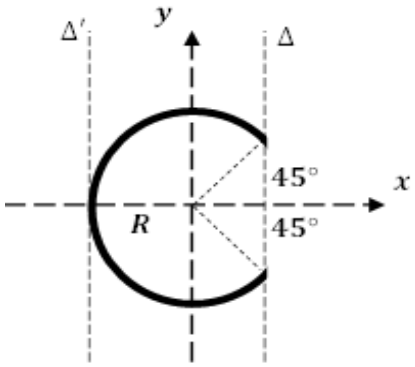


Fig. 5.29	الشكل 29.5

Solution

1 - The Solid (S) is symmetrical with respect to the axis (Ox) and to the plane (xOz), therefore its center of mass is located on this axis and its inertia tensor is diagonal, that is to say all the inertia products are zero.

الحل

1 – الجسم الصلب (S) متناظر بالنسبة للمحور (Ox) وبالنسبة للمستوي (xOz)، لذا فإن مركز كتلته يقع على المحور (Ox) وممتد عطالته قطري أي أن جميع عناصر نواتج العطالة معدومة.

$$y_G = 0$$

$$I_{yz} = 0 \qquad I_{xz} = 0 \qquad I_{xy} = 0$$

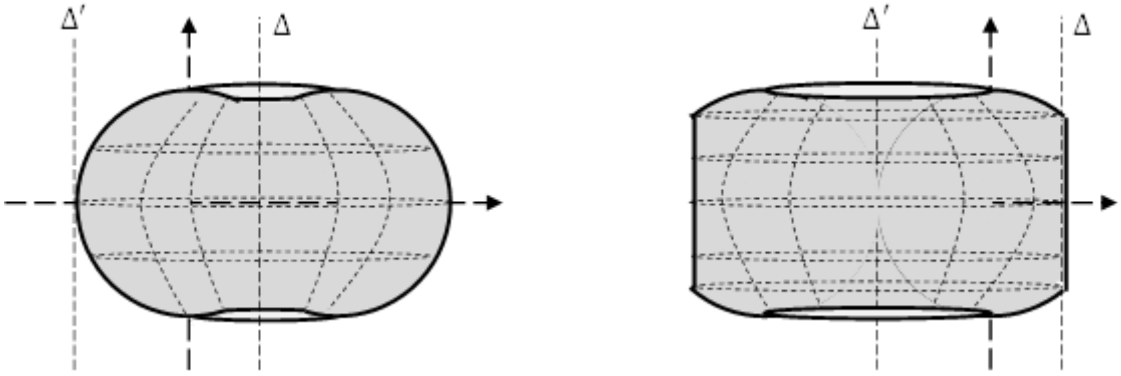
2- Determination of the center of mass

2 – تحديد مركز الكتلة

$x_G = \dfrac{\int_l x dm}{\int_l dm}$	$x = R\cos\theta$	$dm = \lambda dl \ , dl = Rd\theta$
$x_G = \dfrac{\lambda R^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos\theta d\theta}{\lambda R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\theta}$	$x_G = \dfrac{R[\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}}{[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}}$	$G\left(-\dfrac{2\sqrt{2}R}{3\pi}, 0\right)$

3- Calculation of the areas of the two surfaces

3 – حساب مساحة السطحين



a **b**

Fig. 5.30	**الشكل 30.5**

When we rotate the solid (S) around the line (Δ), we obtain the area (S_Δ) of the (Fig. 5.30 a), and if we rotate it around (Δ') we obtain the area $(S_{\Delta'})$ (Fig. 5.30 b), their surfaces:

عند تدوير الجسم (S) حول المحور (Δ) ينتج السطح (S_Δ) الموضح في (الشكل. 30.5 a) وعند تدويره حول المحور (Δ') ينتج السطح $(S_{\Delta'})$ (الشكل. 30.5 b)، مساحة كل منهما:

$S_\Delta = 2\pi l r_\Delta$	$S_{\Delta'} = 2\pi l r_{\Delta'}$
$S_\Delta = 2\pi\left(\frac{6\pi}{4}R\right)\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3\pi}+\frac{\sqrt{2}R}{2}\right)$	$S_{\Delta'} = 2\pi\left(\frac{6\pi}{4}R\right)\left(R-\frac{2\sqrt{2}R}{3\pi}\right)$
$S_\Delta = \left(2\sqrt{2}+\frac{3}{2}\pi\sqrt{2}\right)\pi R^2$	$S_{\Delta'} = \left(3\pi-2\sqrt{2}\right)\pi R^2$

The (Fig. 5.40) shows:

(r_Δ) is the distance between (G) and (Δ)

$(r_{\Delta'})$ is the distance between (G) and (Δ')

(l) is the length of the solid (S)

(الشكل. 40.5) يوضح ما يلي:

(r_Δ) هي المسافة بين (G) و (Δ).

$(r_{\Delta'})$ هي المسافة بين (G) و(Δ').

(l) هو طول الجسم الصلب (S)

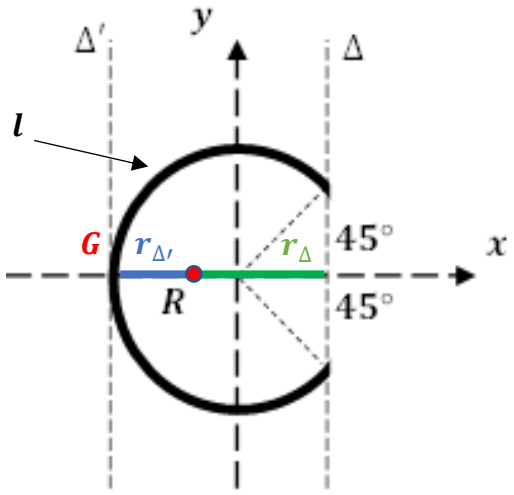


Fig. 5.40	الشكل 40.5

4 - Calculation of the inertia tensor (I_R)

4 – حساب ممتد العطالة (I_R)

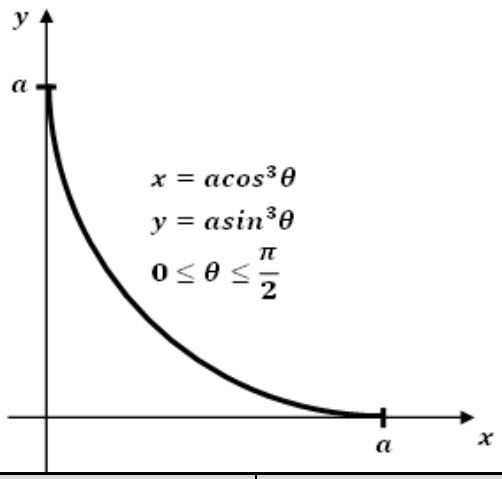
$I_{xx} = \int_l y^2 dm$	$y = R\sin\theta, \quad dm = \lambda dl \quad , dl = Rd\theta$
$I_{xx} = \lambda R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (\sin\theta)^2 d\theta$	$I_{xx} = \lambda R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$
$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos 2\theta\right)$	$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2}\left([\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} - \frac{1}{2}[\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right)$
$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$	$I_{xx} = mR^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\pi}\right)$

$I_{yy} = \int_l x^2 dm$	$x = R\cos\theta, \quad dm = \lambda dl \quad , dl = Rd\theta$
$I_{yy} = \lambda R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (\cos\theta)^2 d\theta$	$I_{yy} = \lambda R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$
$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos 2\theta\right)$	$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2}\left([\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \frac{1}{2}[\sin 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right)$

$I_{yy} = mR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi}\right)$	$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - 1\right)$
$I_{zz} = mR^2$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

$$I_R = mR^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{3\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

التمرين 8.9.5	Exercise 5.9.8
جسم صلب خطي منحن (S) يتميز بالخصائص الموضحة في (الشكل. 41.5).	**A curved linear solid (S), characterized by the factors presented in the (Fig. 5.41)**
1. ناقش تناظره.	**1. Discuss its symmetry.**
2. حدد مركز الكتلة لهذا الجسم.	**2. Determine its center of mass.**
3. بتطبيق نظرية GULDIN الأولى، أحسب مساحة السطحين الناتجين عن دوران (S) حول المحورين (Oy) و $(x = a)$.	**3. By applying GULDIN's first theorem, Calculate the areas of the surfaces generated by the rotation of (S) around the axes (Oy) and $(x = a)$.**
4. أحسب ممتد عطالته (I_R) بالنسبة للمعلم $R(O, x, y, z)$.	**4. Calculate its inertia tensor (I_R) with respect to the reference $R(O, x, y, z)$.**



الشكل 41.5	Fig. 5.41

Solution

1 - The Solid (S) is symmetrical with respect to the first bisector of equation $(y = x)$, Therefore its center of mass (G) is located on this axis and therefore $(x_G = y_G)$ and $(I_{xx} = I_{yy})$.

الحل

1 – الجسم الصلب (S) متناظر بالنسبة للمنصف الأول الذي معادلته $(y = x)$، لذا فإن مركز كتلته (G) يقع على هذا المحور وبالتالي فإن $(x_G = y_G)$ و $(I_{xx} = I_{yy})$.

And since it is located in the (xOy) plane, therefore $(z = 0)$ and consequently the inertia products (I_{yz}) and (I_{xz}) are zero.

ونظرا لوجوده في المستوي (xOy) فإن $(z = 0)$ وعليه تنعدم نواتج العطالة (I_{yz}) و (I_{xz}).

$$x_G = y_G$$

$$I_{yz} = 0 \qquad I_{xz} = 0 \qquad I_{xx} = I_{yy} \qquad I_{zz} = 2I_{xx}$$

2- Determination of the center of mass

2 – تحديد مركز الكتلة

$x_G = \dfrac{\int_l xdm}{\int_l dm}$	$x = acos^3\theta$ $y = asin^3\theta$	$dx = -3acos^2\theta sin\theta$ $dy = 3asin^2\theta cos\theta$
$dm = \lambda dl$	$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$	$dl = 3asin\theta cos\theta$
$x_G = \dfrac{\lambda 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta sin\theta d\theta}{\lambda 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sin\theta d\theta}$	$x_G = \dfrac{-a\left[\dfrac{cos^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{-\left[\dfrac{cos^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}$	$x_G = \dfrac{2}{5}a$ $y_G = \dfrac{2}{5}a$

3- Calculation of the areas of the surfaces

When we rotate the solid (S) around the line Oy, we obtain the area (S_{Oy}) of the (Fig. 5.42 a), and if we rotate it around the line $(x = a)$ we obtain the area $(S_{x=a})$ (Fig. 5.42 b), their surfaces:

3 – حساب مساحة السطحين

عند تدوير الجسم (S) حول المحور (Oy) ينتج السطح (S_{Oy}) الموضح في (الشكل. 42.5 a) وعند تدويره حول المحور $(x = a)$ ينتج السطح $(S_{x=a})$ (الشكل. 42.5 b) ، مساحة كل منهما:

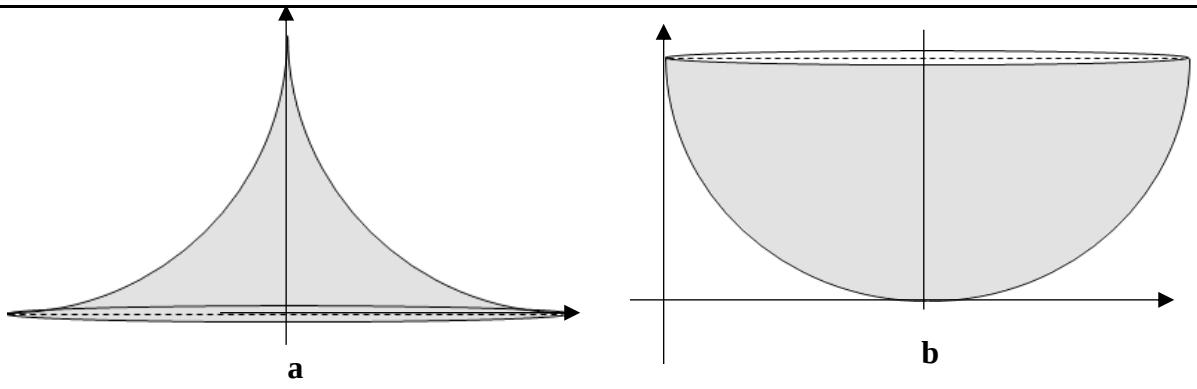


Fig. 5.42	الشكل 42.5

$S_{Oy} = 2\pi l x_G$	$S_{x=a} = 2\pi l(a - x_G)$
$S_{Oy} = 2\pi\left(\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{2}{5}a\right)$	$S_{x=a} = 2\pi\left(\frac{3}{2}a\right)\left(a - \frac{2}{5}a\right)$
$S_{Oy} = \frac{6}{5}\pi a^2$	$S_{x=a} = \frac{9}{5}\pi a^2$

The (Fig. 5.43) shows:	(الشكل. 43.5) يوضح ما يلي:
(x_G) is the distance between (G) and (Oy).	(x_G) هي المسافة بين (G) و (Oy).
$(a - x_G)$ is the distance between (G) and $(x = a)$	$(a - x_G)$ هي المسافة بين (G) و$(x = a)$.
(l) is the length of the solid (S)	(l) هو طول الجسم الصلب (S)

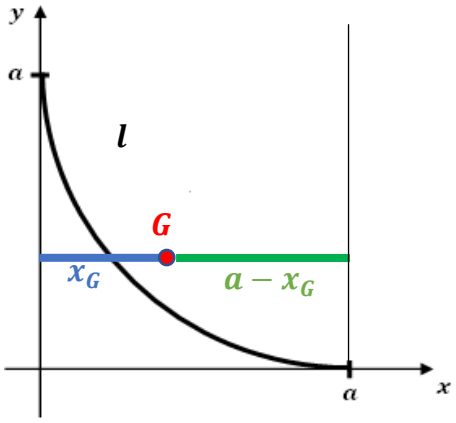


Fig. 5.43	الشكل 43.5

4 - Calculation of the inertia tensor (I_R)

4 – حساب ممتد العطالة (I_R)

$I_{xx} = \int_l y^2 dm$	$y = asin^3\theta$ $dm = \lambda dl \quad , dl = 3asin\theta cos\theta d\theta$
$I_{xx} = 3\lambda a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^7 cos\theta d\theta$	$I_{xx} = \frac{3}{8}\lambda a^3 [(sin\theta)^8]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$I_{xx} = \frac{3}{8}\lambda a^3$	$I_{xx} = \frac{3}{4} ma^2$

$I_{yy} = \frac{3}{4} ma^2$	$I_{zz} = \frac{3}{2} ma^2$

$I_{xy} = -\int_l xydm$	$x = a(cos\theta)^3$	$y = a(sin\theta)^3$
$dm = \lambda dl$	$dl = 3asin\theta cos\theta d\theta$	
$I_{xy} = -3\lambda a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^4 (cos\theta)^4 d\theta$	$I_{xy} = -\frac{3}{16}\lambda a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin2\theta)^4 d\theta$	
$I_{xy} = -\frac{3}{8} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - cos4\theta}{2}\right)^2 d\theta$		
$I_{xy} = -\frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2cos4\theta + (cos4\theta)^2) d\theta$		
$I_{xy} = -\frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{3}{16} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4\theta d\theta - \frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos4\theta)^2 d\theta$		
$I_{xy} = -\frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{3}{16} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4\theta d\theta - \frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + cos8\theta}{2}\right) d\theta$		
$I_{xy} = -\frac{3}{32} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{3}{16} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4\theta d\theta - \frac{3}{64} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{3}{64} ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos8\theta d\theta$		

$$I_{xy} = -\frac{3}{32}ma^2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16}ma^2\left[\frac{1}{4}sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{64}ma^2[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{16}ma^2\left[\frac{1}{8}sin8\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{xy} = -\frac{9}{128}Ma^2$$

$$I_R = \frac{3}{2}ma^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{64} & 0 \\ -\frac{3}{64} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 5.9.9

A curved linear solid S, characterized by the parameters presented in the (Fig. 5.44)

1 - Find k as a function of (a).

2 - Find its length (l) as a function of a.

3 - Determine (x_G) the abscissa of (G) its center of mass.

4 - By applying GULDIN's first theorem, Calculate the areas of the surfaces generated by the rotation of the solid (S) around the axes (Oy) and $(x = a)$.

5 - Calculate its main moments of inertia with respect to the reference $R(O, x, y, z)$.

التمرين 9.9.5

جسم صلب خطي منحن (S) يتميز بالخصائص الموضحة في (الشكل. 44.5).

1 – أوجد (k) بدلالة (a).

2 – أوجد طوله (l) بدلالة (a).

3 – حدد (x_G) فاصلة (G) مركز الكتلة لهذا الجسم.

4 – بتطبيق نظرية GULDIN الأولى، أحسب مساحة السطحين الناتجين عن دوران (S) حول المحورين (Oy) و $(x = a)$.

5 – أحسب عناصر عطالته الرئيسية بالنسبة للمعلم $R(O, x, y, z)$.

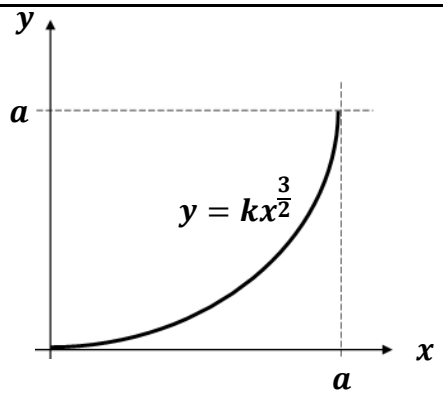


Fig. 5.44	الشكل 44.5

Solution

1 - finding (k) as a function of (a).

الحل

1 – إيجاد (k) بدلالة (a).

$y = kx^{\frac{3}{2}}$	$x = a, y = a$	$k = \frac{a}{a^{\frac{3}{2}}}$
$k = \frac{1}{\sqrt{a}}$		$y = \frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}}$

2. finding the length (l) of the solid (S) as a function of (a).

2 . إيجاد الطول (l) للجسم الصلب (S) بدلالة (a).

$l = \int_l dl$	$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$	$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{1}{2}}$	$dl = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\, dx$	$l = \int_0^a \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\, dx$
$l = \int_0^a \left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$	$l = \left[\frac{4a}{9}\frac{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$	$l = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$
$l = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4a}a\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$	$l = \frac{8a}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$	$l = \frac{(13\sqrt{13} - 8)}{27} a$
$l = 1.44a$		

3- Determination of (x_G):

3 – تحديد (x_G) فاصلة مركز الكتلة

$x_G = \frac{\int_l x dm}{\int_l dm}$	$dm = \lambda dl$	$dl = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\, dx$
$x_G = \frac{\lambda \int_0^a x\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\, dx}{\lambda l}$		$x_G = \frac{1}{l}\int_0^a x\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\, dx$

Using the integral by part: | **باستعمال التكامل بالتجزئة:**

$u = x$ $du = dx$	$dv = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)}\,dx$	$v = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}}$

$$x_G = \frac{8a}{27l}\left(\left[\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a x - \int_0^a \left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}} dx\right)$$

$$x_G = \frac{8a}{27l}\left(\left[\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a x - \frac{\frac{4a}{9}\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$x_G = \frac{8a}{9l}\left(\left[\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{3}{2}} x\right]_0^a - \frac{8a}{45}\left[\left(1 + \frac{9}{4a}x\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^a\right)$$

$$x_G = \frac{4a}{27l}\left(\left[\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} a\right] - \frac{8a}{45}\left[\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{5}{2}} - 1\right]\right)$$

$$x_G = \frac{8a}{27l}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}a - \frac{8a}{45}\left(\frac{169\sqrt{13} - 32}{32}\right)\right)$$

$x_G = \frac{a^2}{27l}\left(13\sqrt{13} - \frac{2}{45}\left(169\sqrt{13} - 32\right)\right)$	$x_G = \frac{a^2}{1215l}\left(247\sqrt{13} + 64\right)$
$x_G = \frac{\left(247\sqrt{13} + 64\right)}{45\left(13\sqrt{13} - 8\right)}a$	$x_G = 0.5457a$

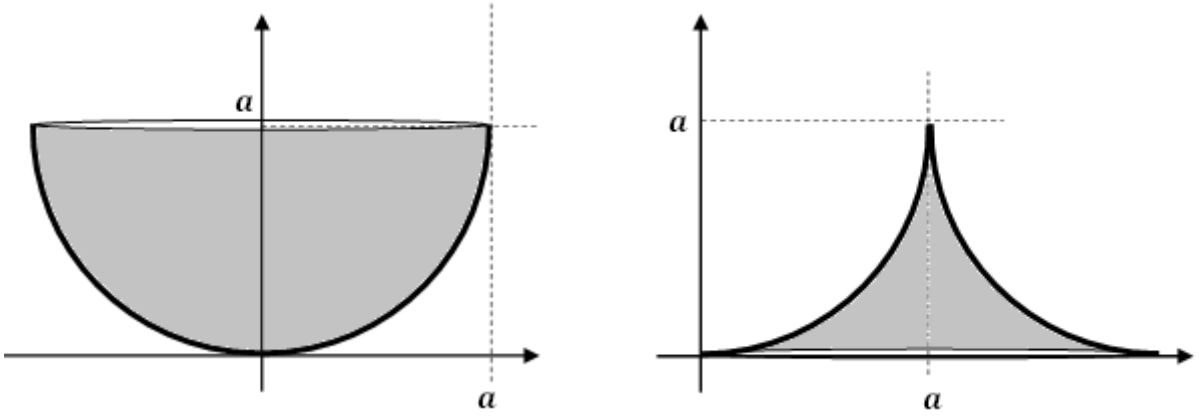
3- Calculation of the areas of the surfaces

When we rotate the solid (S) around (Oy), we obtain the area (S_{Oy}) of the (Fig. 5.45 a), and if we rotate it around the line $(x = a)$ we obtain the area $(S_{x=a})$ (Fig. 5.45 b), their surfaces:

3 – حساب مساحة السطحين

عند تدوير الجسم (S) حول المحور (Oy) ينتج السطح (S_{Oy}) الموضح في (الشكل. 45.5 a) وعند تدويره حول المحور $(x = a)$ ينتج السطح $(S_{x=a})$ (الشكل. 45.5 b)، مساحة كل منهما:

$S_{Oy} = 2\pi l x_G$	$S_{x=a} = 2\pi l(a - x_G)$
$S_{Oy} = 2\pi(1.44a)(0.54a)$	$S_{x=a} = 2\pi(1.44a)(a - 0.54a)$
$S_{Oy} = 4.88a^2$	$S_{x=a} = 4.16a^2$



a **b**

Fig. 5.45	الشكل 45.5

The (Fig. 5.46) shows:

(x_G) is the distance between (G) and (Oy)
$(a - x_G)$ is the distance between (G) and the line $(x = a)$
(l) is the length of the solid (S)

(الشكل. 46.5) يوضح ما يلي:

(x_G) هي المسافة بين (G) و (Oy).

$(a - x_G)$ هي المسافة بين (G) والمستقيم $(x = a)$.

(l) هو طول الجسم الصلب (S)

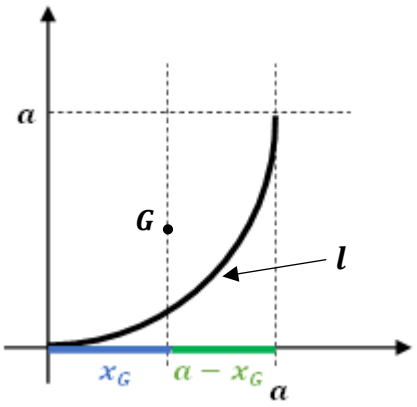


Fig. 5.46	الشكل 46.5

4 - Calculation of the main moments of inertia.

4 – حساب عزوم العطالة الرئيسية.

Since the solid (S) is located in the (xOy) plane so $(z = 0)$ and consequently:

نظرا لوجود الجسم الصلب (S) في المستوي (xOy) فإن $(z = 0)$ وعليه:

$$I_{xx} = \int_l y^2 dm \qquad I_{yy} = \int_l x^2 dm \qquad I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

$I_{xx} = \int_l y^2 dm$	$y = \frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}}$	$dm = \lambda dl$
$dl = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a} x\right)} dx$	$I_{xx} = \frac{\lambda}{a} \int_0^a x^3 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a} x\right)} dx$	

Using the integral by part three successive times we find:

باستعمال التكامل بالتجزئة ثلاث مرات متتالية نجد:

$I_{xx} = \frac{\lambda}{a} \frac{\left(8192 + 236951\sqrt{13}\right)}{2066715} a^4$	$I_{xx} = 0.4173 \lambda a^3$
$I_{xx} = 0.4173 \lambda a^3 \times \frac{1.44}{1.44}$	$I_{xx} = 0.29 m a^2$

$I_{yy} = \int_l x^2 dm$	$y = \frac{1}{\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}}$	$dm = \lambda dl$
$dl = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a} x\right)} dx$	$I_{yy} = \lambda \int_0^a x^2 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4a} x\right)} dx$	

Using the integral by part two successive times we find:

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين متتاليتين نجد:

$I_{yy} = \lambda \frac{\left(11843\sqrt{13} - 1024\right)}{76545} a^3$	$I_{yy} = 0.5444 \lambda a^3$

$I_{yy} = 0.5444\lambda a^3 \times \frac{1.44}{1.44}$	$I_{yy} = 0.37ma^2$
$I_{zz} = 0.66ma^2$	

Exercise 5.9.10	التمرين 10.9.5
1 - Verify by an integral calculation and then by GULDIN's theorem that the center G of the solid (G) of the (Fig. 5.47) is $G\ (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$. **2 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the solid (S) of uniform surface mass (σ).**	**1 - تحقق بالحساب بطريقة التكامل ثم باستعمال نظرية GULDIN أن مركز الكتلة (G) للجسم الصلب (S) الموضح في (الشكل. 47.5) هو $G\ (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$.** **2 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S) ذو الكثافة السطحية المنتظمة (σ) .**

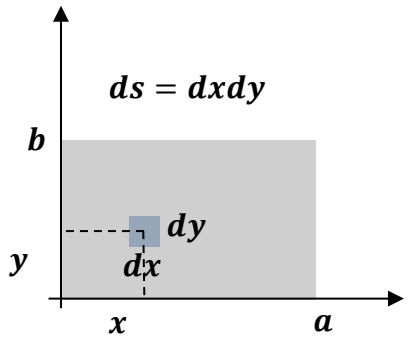


Fig. 5.47	الشكل 47.5

Solution	الحل
1.a - Calculation of the center G by the integral:	**1.أ – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال التكامل:**

$x_G = \frac{\iint_s xdm}{\iint_s dm}$	$x_G = \frac{\sigma \iint_s xds}{\sigma \iint_s ds}$	$y_G = \frac{\iint_s ydm}{\iint_s dm}$	$y_G = \frac{\sigma \iint_s yds}{\sigma \iint_s ds}$
$x_G = \frac{\int_0^a xdx \int_0^b dy}{s}$	$x_G = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a [y]_0^b}{ab}$	$y_G = \frac{\int_0^a dx \int_0^b ydy}{s}$	$y_G = \frac{[x]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b}{ab}$

$y_G = \frac{b}{2}$	$x_G = \frac{a}{2}$

1.ب – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال نظرية GULDIN:	**1.b - Calculation of the center (G) by GULDIN's theorem:**

لكي نحسب (x_G) تقوم بتدوير الصفيحة حول المحور (Oy) لتنتج من جراء هذا التدوير أسطوانة نصف قطرها (a) وارتفاعها (b) (الشكل. 48.5 a)، حجمها:	**To calculate (x_G), the plate is rotated about the axis (Oy), to produce a cylinder of radius (a) and height (b) (Fig. 5.48 a), its volume is:**

$$V_{Oy} = \pi a^2 b$$

نطبق علاقة GULDIN:	**We apply the GULDIN relation:**

$x_G = \frac{a}{2}$	$x_G = \frac{\pi a^2 b}{2\pi ab}$	$x_G = \frac{V_{Oy}}{2\pi s}$

ولكي نحسب (y_G) تقوم بتدوير الصفيحة حول المحور (Ox) لتنتج من جراء هذا التدوير أسطوانة نصف قطرها (b) وارتفاعها (a) (الشكل. 48.5 b)، حجمها:	**Similarly, to calculate (y_G), the plate is rotated about the axis Ox, to produce a cylinder of radius b and height a (Fig. 5.48 b), its volume is:**

$$V_{Ox} = \pi ab^2$$

نطبق علاقة GULDIN:	**We apply the GULDIN relation:**

$y_G = \frac{b}{2}$	$y_G = \frac{\pi ab^2}{2\pi ab}$	$y_G = \frac{V_{Ox}}{2\pi s}$

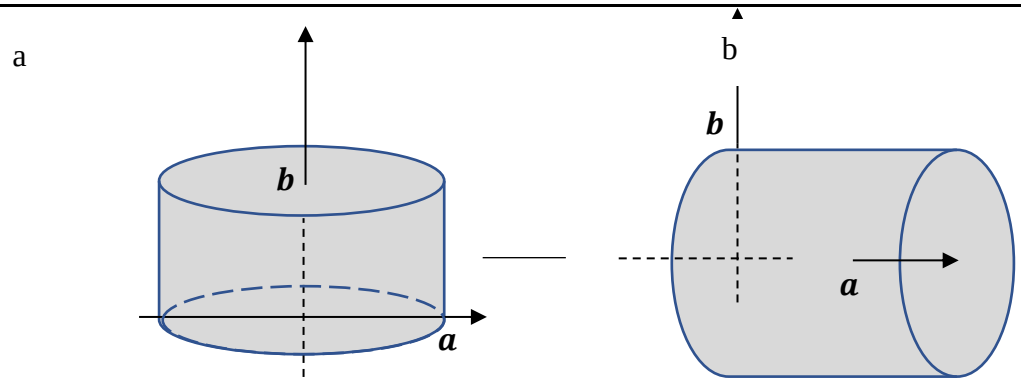


Fig. 5.48	الشكل 48.5

2 - Calculation of the inertia tensor. | **2 – حساب ممتد العطالة.**

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$I_{xx} = \iint y^2 dm$	$I_{xx} = \sigma \iint y^2 dxdy$	$I_{xx} = \sigma \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy$
$I_{xx} = \sigma \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy$	$I_{xx} = \sigma a \frac{b^3}{3}$	$I_{xx} = 80\ kg.m^2$

$I_{yy} = \sigma \iint x^2 dxdy$	$I_{yy} = \sigma \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy$	$I_{yy} = \sigma \frac{a^3}{3} b$
$I_{yy} = 500\ kg.m^2$		
$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{zz} = 580\ kg.m^2$	

$I_{xy} = -\sigma \iint xydxdy$	$I_{xy} = -\sigma \int_0^a xdx \int_0^b ydy$	$I_{xy} = \sigma \frac{a^2 b^2}{4}$
$I_{xy} = -150\ kg.m^2$		

$I_{yz} = -\sigma \iint yzdydz$		$I_{xz} = -\sigma \iint xzdxdz$
$z = 0$	$I_{yz} = 0$	$I_{yz} = 0$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} 80 & -150 & 0 \\ -150 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 580 \end{pmatrix} Kg.m^2$$

Exercise 5.9.11

1. Find by an integral calculation and then by GULDIN's theorem the center (G) of the solid (S) of the (Fig. 40).

2. Present the shape generated by the rotation of (S) around the equation axis $(x = R)$.

3. Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the solid (S) of uniform surface mass λ.

Numerical application:

$(a = 2b = 4\ m)$ and $(\lambda = 6\ kg/m^2)$.

4. Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the line $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

التمرين 11.9.5

1. أوجد بالحساب بطريقة التكامل ثم باستعمال نظرية GULDIN مركز الكتلة (G) للجسم الصلب (S) الموضح في (الشكل. 40).

2. أنجز الشكل الذي ينتج من دوران (S) حول المحور الذي معادلته $(x = R)$ واحسب حجمه.

3. أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S) ذو الكثافة الخطية المنتظمة (λ).

تطبيق عددي:

$(a = 2b = 4\ m)$ و $(\lambda = 6\ kg/m^2)$

4. أحسب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

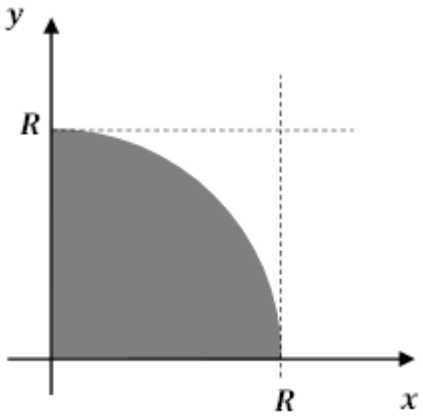


Fig. 5.49	الشكل 49.5

Solution

1.a - Calculation of the center (G) by the integral.

An elementary part of the solid of area length (dl) is delimited, its center (x, y) which forms an angle (θ) with the axis (Ox) and it delimits an elementary angle $(d\theta)$ (Fig. 41)

الحل

1.أ – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال التكامل.

نحدد جزءا عنصريا من الجسم الصلب مساحته (ds) ومركزه (x, y) وزاويته بالنسبة للمحور (Ox) هي (θ) ويحصر زاوية عنصرية $(d\theta)$ (الشكل. 41)

$x_G = \frac{\iint_s xdm}{\iint_s dm}$	$x_G = \frac{\sigma \iint_s xds}{\sigma \iint_s ds}$	$x_G = \frac{\iint_s rcos\theta rd\theta dr}{\iint_s rd\theta dr}$
$x_G = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta}{\int_0^R rdr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}$	$x_G = \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}}$	$x_G = \frac{4R}{3\pi}$

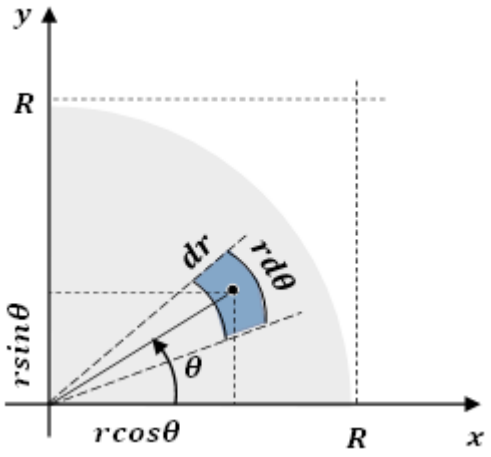


Fig. 5.50	الشكل 50.5

Since the solid (S) admits the bisector line of equation $(y = x)$, then its center of mass (G) is located on this line, and from is done:

بما أن الجسم الصلب (S) يقبل المنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ فإن مركز كتلته (G) يقع على هذا المستقيم ومنه:

$y_G = x_G$	$y_G = \frac{4R}{3\pi}$

1.b - Calculation of the center (G) by GULDIN's theorem:

To calculate (x_G), we rotate the solid (S) which has the shape of a quarter disk of center (O) and radius (R) around the axis (Oy), which results in a half sphere (Fig. 5.51 a), its volume is:

1.ب – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال نظرية GULDIN:

لكي نحسب (x_G) تقوم بتدوير الجسم الصلب (S) الذي يمثل ربع قرص مركزه (O) ونصف قطرها (R) حول المحور (Oy) لينتج من جراء هذا التدوير نصف كرة (الشكل. 51.5 a)، حجمها

$$v_{Oy} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

We apply the GULDIN relation:

نطبق علاقة GULDIN:

$$x_G = \frac{v_{Oy}}{2\pi s} \qquad x_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)} \qquad x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Similarly, to calculate (y_G), the plate is rotated about the axis (Ox), which results in a half sphere (Fig. 5.51 b), its volume is:

ولكي نحسب (y_G) تقوم بتدوير الصفيحة حول المحور (Ox) لينتج من جراء هذا التدوير نصف كرة (الشكل. 51.5 b)، حجمها

$$v_{Ox} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

We apply the GULDIN relation:

نطبق علاقة GULDIN:

$$y_G = \frac{v_{Ox}}{2\pi s} \qquad y_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)} \qquad y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

We also had to deduce from the symmetry of the solid body (S) for the first bisector of equation $(y = x)$ that $(y_G = x_G)$.

كما كان لنا أن نعتمد أيضا على تناظر الجسم الصلب (S) بالنسبة للمنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ ونستنتج أن $(y_G = x_G)$.

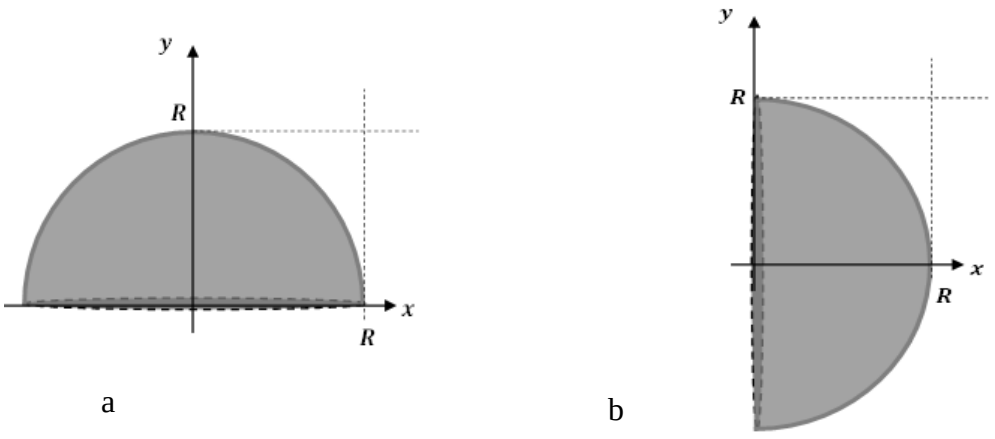


Fig. 5.51	الشكل 51.5

2 - Presentation of the shape generated by the rotation of (S) around the equation axis $(x = R)$ and calculation of its volume.
By rotating (S) around the axis of equation $(x = R)$ we obtain the form of the (Fig. 5.52) and to prime GULDIN's second theorem its volume is:

2 – إنجاز الشكل الذي ينتج من دوران (S) حول المحور الذي معادلته $(x = R)$ وحساب حجمه.
عند تدوير الجسم الصلب (S) حول المحور الذي معادلته $(x = R)$ ينتج (الشكل. 52.5) وبحسب نظرية GLDIN الثانية يكون حجمه:

$$v_{x=R} = 2\pi s(R - x_G)$$

$$v_{x=R} = 2\pi\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)\left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)$$

$$v_{x=R} = \left(\frac{3\pi^2 - 4\pi}{6}\right)R^3$$

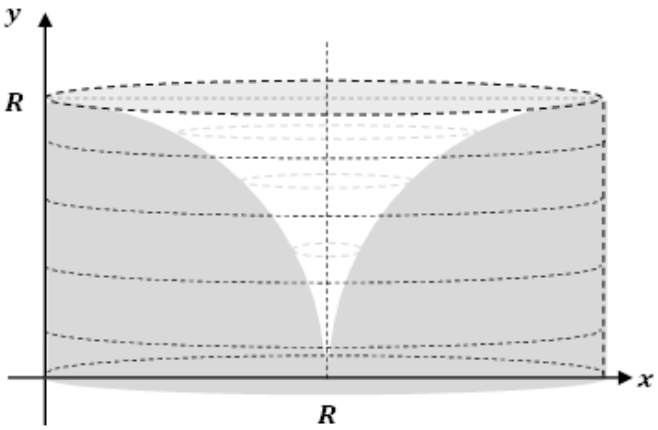


Fig. 5.52	الشكل 52.5

2 - Calculation of the inertia tensor | **2 – حساب ممتد العطالة**

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

The solid S is in the plane (xOy) so: | **الجسم الصلب (S) يقع في المستوي (xOy) إذن:**

$z = 0$	$I_{yz} = -\lambda \int yzdm$	$I_{yz} = 0$
	$I_{xz} = -\lambda \int xzdm$	$I_{yz} = 0$

$I_{xx} = \int_l (y^2 + z^2)dm$	$I_{xx} = \lambda \int_l y^2 dl$
$I_{xx} = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rsin\theta)^2 Rd\theta$	$I_{xx} = \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^2 d\theta$
$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos2\theta)d\theta$	$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\theta d\theta \right)$
$I_{xx} = \frac{\lambda R^3}{2} \left([\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$	$I_{xx} = \frac{\pi \lambda R^3}{4}$

$I_{yy} = \int_l (x^2 + z^2)dm$	$I_{yy} = \lambda \int_l x^2 dl$
$I_{yy} = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rcos\theta)^2 Rd\theta$	$I_{yy} = \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 d\theta$
$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2\theta)d\theta$	$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\theta d\theta \right)$
$I_{yy} = \frac{\lambda R^3}{2} \left([\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$	$I_{yy} = \frac{\pi \lambda R^3}{4}$

We can also here, based on the symmetry of the solid S with respect to the first bisector of equation $(y = x)$, conclude that:

يمكننا أيضا هنا اعتمادا على تناظر الجسم الصلب (S) بالنسبة للمنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$ استنتاج أن:

$$I_{yy} = I_{xx}$$

$I_{zz} = \int_l (x^2 + y^2)dm$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$
$I_{xy} = -\int_l xydm$	$I_{xy} = -\lambda \int_l xydl$
$I_{xy} = -\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Rcos\theta)(Rsin\theta)Rd\theta$	$I_{xy} = -\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)(sin\theta)d\theta$
$I_{xy} = \frac{\lambda R^3}{2}[(cos\theta)^2]_0^{\frac{\pi}{2}}$	$I_{xy} = -\frac{\lambda R^3}{2}$
$I_{O/R} = \frac{\lambda R^3}{4}\begin{pmatrix} \pi & -2 & 0 \\ -2 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}$	

Knowing that:

علما أن:

$\lambda = \frac{m}{l}$	$\lambda = \frac{m}{\frac{2\pi R}{4}}$	$\lambda = \frac{2m}{\pi R}$
$I_{O/R} = \frac{mR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\pi} & 0 \\ \frac{-2}{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$		

3 - Calculation of the moment of inertia of S with respect to $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

3- حساب عزم عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$I_{\Delta}=\frac{mR^2}{2}(1\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}1 & \frac{-2}{\pi} & 0\\ \frac{-2}{\pi} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta}=\frac{mR^2}{2}(1\quad 1\quad 0)\begin{pmatrix}1-\frac{2}{\pi}\\ 1-\frac{2}{\pi}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$I_{\Delta}=\frac{mR^2}{2}\left(2-\frac{4}{\pi}\right)$$

Exercise 5.9.12

1 - Find by an integral calculation and then by GULDIN's theorem the center (G) of the solid (S) of the (Fig. 5.53).

2 - Present the shape generated by the rotation of (S) around the axis $(x=R)$.

3 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the solid (S) of uniform surface mass (σ).
Numerical application:
$(R=12\ cm)$ and $(\sigma=6\ kg/m^2)$.

4 - Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the line $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

التمرين 12.9.5

1 – أوجد بالحساب بطريقة التكامل مركز الكتلة (G) للصفيحة الصلبة (S) الموضحة في (الشكل. 53.5).

2 – أنجز الشكل الذي ينتج من دوران (S) حول المحورين (Ox) و (Oy) ثم احسب حجميهما مستعملا علاقة GULDIN.

3 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للجسم الصلب (S) ذو الكثافة السطحية المنتظمة (σ).

تطبيق عددي: $(R=12\ cm)$ و $(\sigma=6\ kg/m^2)$

4 – أحسب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

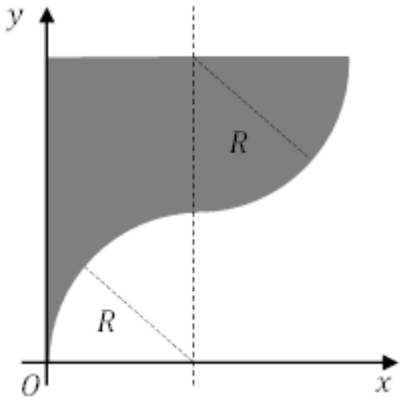


Fig. 5.53 | **الشكل 53.5**

Solution

1 - Calculation of the center (G) by the integral.

The plate can be considered as a rectangle of dimensions $(R \times 2R)$ of which a quarter of a disk of radius (R) is taken from its bottom and fixed on its side, as illustrated in (Fig. 5.55).

الحل

1 – حساب مركز الكتلة (G) باستعمال التكامل.

يمكن اعتبار الصفيحة مستطيلا أبعاده $(R \times 2R)$ انتزع من اسفلها ربع قرص نصف قطره (R) وألصق بجانبها كما هو موضح في (الشكل. 55.5).

Fig. 5.54	الشكل 54.5

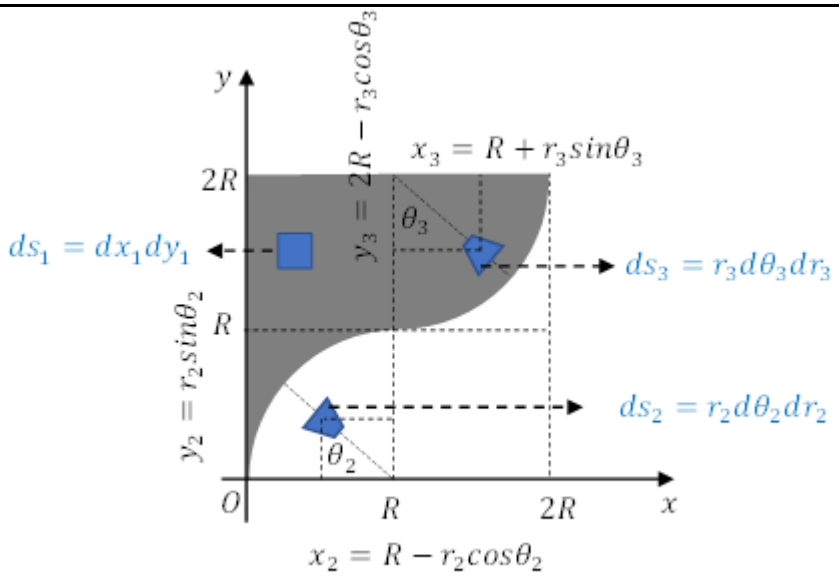


Fig. 5.55	الشكل 55.5

An elementary part is delimited in each fragment of the plate of area (ds), and center (x, y) (Fig. 46)	**نحدد سطحا عنصريا في كل جزء من الصفيحة مساحته (ds) ومركزه (x, y) (الشكل. 46)**

$x_G = \frac{\iint_s xdm}{\iint_s dm}$	$x_G = \frac{\sigma \iint_s xds}{\sigma \iint_s ds}$	$x_G = \frac{\iint_s xds}{s}$

$$x_G = \frac{\iint_{s_1} x_1 ds_1 - \iint_{s_2} x_2 ds_2 + \iint_{s_3} x_3 ds_3}{s_1 - s_2 + s_3}$$

$$x_G = \frac{\iint_{s_1} x_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (R - r_2 cos\theta_2) r_2 dr_2 d\theta_2 + \iint_{s_3} (R + r_3 sin\theta_3) r_3 dr_3 d\theta_3}{2R^2}$$

$$x_G = \frac{1}{2R^2}\left(\iint_s x_1 dx_1 dy_1 - R\iint_{s_2} r_2 dr_2 d\theta_2 + \iint r_2^2 cos\theta_2 dr_2 d\theta_2 + R\iint r_3 dr_3 d\theta_3 + \iint r_3^2 sin\theta_3\, dr_3 d\theta_3\right)$$

$$x_G = \frac{1}{2R^2}\left(\int_0^R x_1 dx_1 \int_0^{2R} dy_1 - R\int_0^R r_2 dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_2 + \int_0^R r_2^2 dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_2\, d\theta_2 + R\int_0^R r_3 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_3 + \int_0^R r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_3 d\theta_3\right)$$

$$x_G = \frac{R^3 - \frac{\pi R^3}{4} + \frac{R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{4} + \frac{R^3}{3}}{2R^2}$$

$x_G = \frac{5}{6}R$	$x_G = 10\ cm$

$y_G = \frac{\iint_s ydm}{\iint_s dm}$	$y_G = \frac{\sigma \iint_s yds}{\sigma \iint_s ds}$	$y_G = \frac{\iint_s yds}{s}$

$$y_G = \frac{\iint_{s_1} y_1 ds_1 - \iint_{s_2} y_2 ds_2 + \iint_{s_3} y_3 ds_3}{s_1 - s_2 + s_3}$$

$$y_G = \frac{\iint_{s_1} y_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} r_2 sin\theta_2 r_2 dr_2 d\theta_2 + \iint_{s_3} (2R - r_3 cos\theta_3) r_3 dr_3 d\theta_3}{2R^2}$$

$$y_G = \frac{\iint_s y_1 dx_1 dy_1 - \iint r_2^2 sin\theta_2 dr_2 d\theta_2 + 2R \iint r_3 dr_3 d\theta_3 - \iint r_3^2 cos\theta_3 \, dr_3 d\theta_3}{2R^2}$$

$$y_G = \frac{1}{2R^2}\left(\int_0^R dx_1 \int_0^{2R} y_1 dy_1 - \int_0^R r_2^2 dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_2 \, d\theta_2 + 2R \int_0^R r_3 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_3 - \int_0^R r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_3 d\theta_3\right)$$

$$y_G = \frac{2R^3 - \frac{R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{2} - \frac{R^3}{3}}{2R^2}$$

$y_G = \frac{8+3\pi}{12}R$	$y_G = 17.42\ cm$

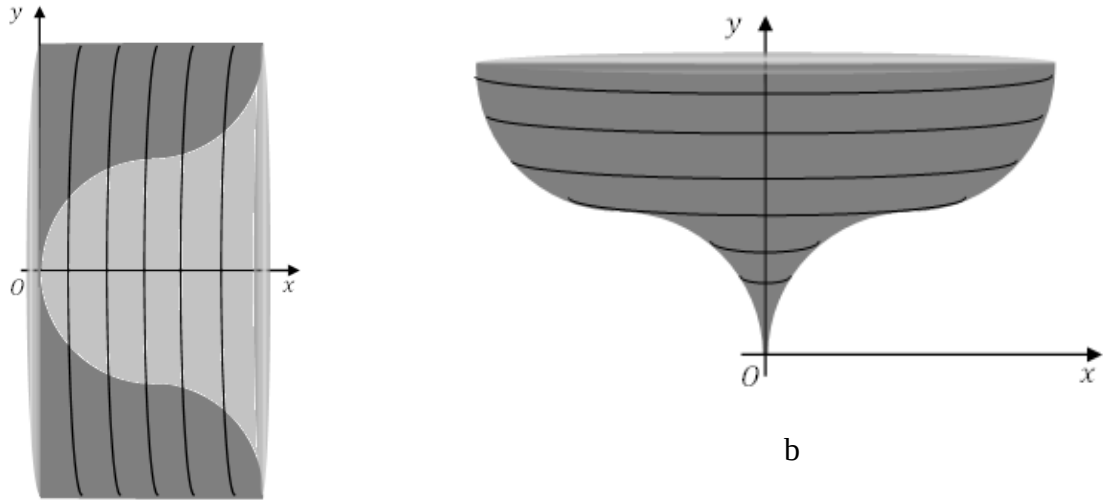
2- The shape generated by the rotation of the plate around (Ox) and (Oy).

The rotation of the plate around (Ox) generates the shape of the (Fig. 5.56 a), while its rotation around (Oy) generates the shape of the (Fig. 5.56 b). Their volumes are:

2 – الشكل الذي يتولد من تدوير الصفيحة حول المحورين (Ox) و (Oy).

تدوير الصفيحة حول (Ox) يولد (الشكل. 56.5 a)، بينما تدويرها حول (Oy) فيولد (الشكل. 56.5 b). حجما الشكلان هما:

$v_{Ox} = 2\pi s y_G$	$v_{Oy} = 2\pi s x_G$
$v_{Ox} = 2\pi(2R^2)\frac{8+3\pi}{12}R$	$v_{Oy} = 2\pi(2R^2)\frac{5}{6}R$
$v_{Ox} = \pi\frac{8+3\pi}{3}R^3$	$v_{Oy} = \frac{10}{3}R^3$
$v_{Ox} = 31531.13\ cm^3$	$v_{Oy} = 5760\ cm^3$



a b

Fig. 5.56	الشكل 56.5

3 - Calculation of the inertia tensor	3 – حساب ممتد العطالة

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

The solid S is in the plane (xOy) so:	الجسم الصلب (S) يقع في المستوي (xOy) إذن:

$z = 0$	$I_{yz} = -\iint_s yzdm$	$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = -\iint_s xzdm$	$I_{xz} = 0$

$I_{xx} = \iint_s (y^2 + z^2)dm$	$I_{xx} = \iint_s y^2 dm$
$I_{yy} = \iint_s (x^2 + z^2)dm$	$I_{yy} = \iint_s x^2 dm$
$I_{zz} = \iint_s (x^2 + y^2)dm$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

$$I_{xx} = \iint_s y^2 dm$$	$$I_{xx} = \sigma \iint_s y^2 ds$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\iint_s y_1^2 ds_1 - \iint_s y_2^2 ds_2 + \iint_s y_3^2 ds_3 \right)$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\iint_s y_1^2 dx_1 dy_1 - \iint_s (r_2 sin\theta_2)^2 r_2 dr_2 d\theta_2 + \iint_s (2R - r_3 cos\theta_3)^2 r_3 dr_3 d\theta_3 \right)$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\int_0^R dx_1 \int_0^{2R} y_1^2 dy_1 - \int_0^R r_2^3 \, dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_2{}^2 d\theta_2 + 4R^2 \int_0^R r_3 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_3 \right.$$
$$\left. - 4R \int_0^R r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_3 d\theta_3 + \int_0^R r_3^3 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_3{}^2 \, d\theta_3 \right)$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\frac{8R^4}{3} - \frac{R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_2{}^2 d\theta_2 + \pi R^4 - \frac{4R^4}{3} + \frac{R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_3{}^2 \, d\theta_3 \right)$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\frac{4}{3} + \pi \right) R^4$$	$$I_{xx} = 6 \left(\frac{4}{3} + \pi \right) (0.12)^4$$	$$I_{xx} = 5.56 \times 10^{-3} \, Kg.m^2$$

$$I_{yy} = \iint_s x^2 dm$$	$$I_{yy} = \sigma \iint_s x^2 ds$$

$$I_{yy} = \sigma \left(\iint_s x_1^2 ds_1 - \iint_s x_2^2 ds_2 + \iint_s x_3^2 ds_3 \right)$$

$$I_{yy} = \sigma \left(\iint_s x_1^2 dx_1 dy_1 - \iint_s (R - r_2 cos\theta_2)^2 r_2 dr_2 d\theta_2 \right.$$
$$\left. + \iint_s (R + r_3 sin\theta_3)^2 r_3 dr_3 d\theta_3 \right)$$

$$I_{yy} = \sigma \left(\int_0^R x_1^2 dx_1 \int_0^{2R} dy_1 - R^2 \int_0^R r_2 \, dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_2 + 2R \int_0^R r_2^2 dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_2 d\theta_2 \right.$$
$$- \int_0^R r_2^3 dr_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta_2)^2 d\theta_2 + R^2 \int_0^R r_3 \, dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_3$$
$$\left. + 2R \int_0^R r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_3 d\theta_3 + \int_0^R r_3^3 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta_3)^2 d\theta_3 \right)$$

$$I_{yy} = \sigma\left(\frac{2R^4}{3} - \frac{\pi R^4}{4} + \frac{2R^4}{3} - \frac{\pi R^4}{16} + \frac{\pi R^4}{4} + \frac{2R^4}{3} + \frac{\pi R^4}{16}\right)$$

$I_{yy} = 2\sigma R^4$	$I_{yy} = 2 \times 6 \times (0.12)^4$	$I_{yy} = 2.48 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$$I_{zz} = 8.04 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$$

$I_{xy} = -\iint_s xydm$	$I_{xy} = -\sigma \iint_s xyds$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_s x_1y_1ds_1 - \iint_s x_2y_2ds_2 + \iint_s x_3y_3ds_3\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_s x_1y_1dx_1dy_1 - \iint_s (R - r_2cos\theta_2)(r_2sin\theta_2)r_2dr_2d\theta_2 + \iint_s (R + r_3sin\theta_3)(2R - r_3cos\theta_3)r_3dr_3d\theta_3\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\int_0^R x_1dx_1\int_0^{2R} y_1dy_1 - R\int_0^R r_2^2\,dr_2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_2d\theta_2 + \int_0^R r_2^3dr_2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_2sin\theta_2d\theta_2 + 2R^2\int_0^R r_3dr_3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_3 - R\int_0^R r_3^2\,dr_3\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta_3d\theta_3 + 2R\int_0^R r_3^2dr_3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_3d\theta_3 - \int_0^R r_3^3dr_3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta_3cos\theta_3d\theta_3\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(R^4 - \frac{R^4}{3} + \frac{R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{2} - \frac{R^4}{3} + \frac{2R^4}{3} - \frac{R^4}{8}\right)$$

$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{3\pi + 10}{6}\right)R^4$	$I_{xy} = -(3\pi + 10) \times (0.12)^4$

$$I_{xy} = -4.02 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} 2.48 & -4.02 & 0 \\ -4.02 & 5.56 & 0 \\ 0 & 0 & 8.04 \end{pmatrix} 10^{-3}\ Kg.m^2$$

4 - Calculation of inertia of (S) with respect to a $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 – حساب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$I_\Delta = (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2.48 & -4.02 & 0 \\ -4.02 & 5.56 & 0 \\ 0 & 0 & 8.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

$$I_\Delta = (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1.54 \\ 1.54 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

$$I_\Delta = 0$$

Exercise 5.9.13

1 - Discuss the symmetry of the plate (S) of the (Fig. 5.57).

2 - Find by an integral calculation its center of mass (G).

3 - Present the shape generated by the rotation of (S) around the axes (Ox) and (Oy) and calculate their volumes using GULDIN's theorem.

4 - Prove that the volume of a sphere of radius (R) is $(v = \frac{4\pi}{3} R^3)$.

5 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the plate (S) with uniform mass per unit area (σ).

6 - Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the first bisector $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Numerical application:

$(R = 75\ cm)$ and $(\sigma = 10\ kg/m^2)$.

التمرين 13.9.5

1 – ناقش تناظر الصفيحة (S) الموضحة في (الشكل. 57.5).

2 – أوجد بالحساب بطريقة التكامل مركز كتلتها (G).

3 – أنجز الشكل الذي ينتج من دوران (S) حول المحورين (Ox) و (Oy) ثم احسب حجميهما مستعملا علاقة GULDIN.

4 – أثبت أن حجم كرة نصف قطرها (R) هو $(v = \frac{4\pi}{3} R^3)$

5 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للصفيحة (S) ذات الكثافة السطحية المنتظمة (σ).

6 – أحسب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

تطبيق عددي:

$(R = 75\ cm)$ و $(\sigma = 10\ kg/m^2)$

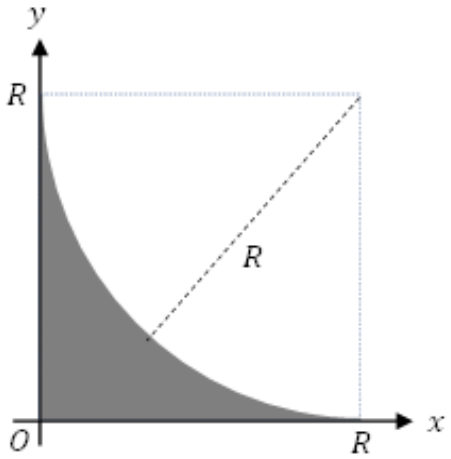


Fig. 5.57	الشكل 57.5

Solution

1 - discussion of the symmetry of the plate.

The plate is located in the (xOy) plane, that is to say $(z = 0)$. It is symmetrical with respect to the first bisector of equation $(y = x)$, which allows us to write:

الحل

1 – مناقشة تناظر الصفيحة.

الصفيحة تقع في المستوي (xOy) أي أن $(z = 0)$ وهي متناظرة بالنسبة للمنصف الأول ذو المعادلة $(y = x)$، وعليه يتحقق ما يلي:

$y_G = x_G$	$I_{yy} = I_{xx}$	$I_{zz} = 2I_{xx}$
$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = 0$	

The plate can be considered as a square with a side R from which a quarter of a disk with a radius R has been taken (Fig. 5.58).

يمكن اعتبار الصفيحة مربعا ضلعه (R)، انتزع منه ربع قرص نصف قطره (R) كما هو موضح في (الشكل. 58.5).

Fig. 5.58	الشكل 58.5

2 - Determination of the center of mass of the plate by the integral method.

2 – إيجاد مركز كتلة الصفيحة بطريقة التكامل.

An elementary part is delimited in each fragment of the plate of area (ds), and center (x, y) (Fig. 5.59)

نحدد سطحا عنصريا في كل جزء من الصفيحة مساحته (ds) ومركزه (x, y) (الشكل. 59.5)

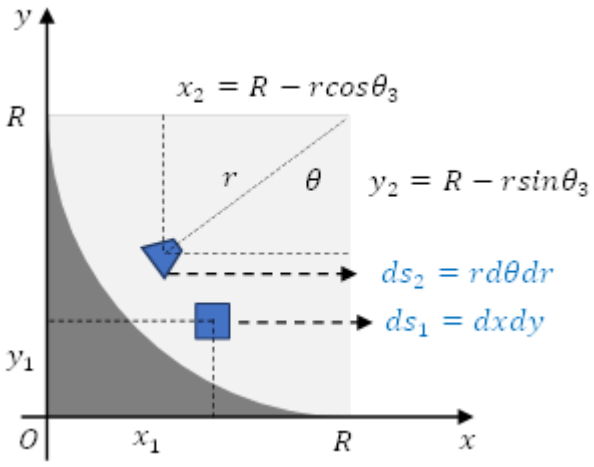


Fig. 5.59	الشكل 59.5

$x_G = \frac{\iint_s xdm}{\iint_s dm}$	$x_G = \frac{\sigma \iint_s xds}{\sigma \iint_s ds}$	$x_G = \frac{\iint_s xds}{s}$
$x_G = \frac{\iint_{s_1} x_1 ds_1 - \iint_{s_2} x_2 ds_2}{s_1 - s_2}$		

$$x_G = \frac{\iint_{s_1} x_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (R - r\cos\theta) r dr d\theta}{R^2 - \frac{\pi R^2}{4}}$$

$$x_G = \frac{\iint_{s} x_1 dx_1 dy_1 - R\iint_{s_2} r dr d\theta + \iint_{s_2} r^2 \cos\theta dr d\theta}{\left(\frac{4-\pi}{4}\right) R^2}$$

$$x_G = \frac{\int_0^R x_1 dx_1 \int_0^R dy_1 - R\int_0^R r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta}{\left(\frac{4-\pi}{4}\right) R^2}$$

$$x_G = \frac{\frac{R^3}{2} - \frac{\pi R^3}{4} + \frac{R^3}{3}}{\left(\frac{4-\pi}{4}\right) R^2}$$

$x_G = \frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi} R$	$x_G = 16.75\ cm$

$y_G = \frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi} R$	$y_G = 16.75\ cm$

3 – إثبات قانون حجم الكرة.

3- Proof of the law for the volume of a sphere.

بتدوير الصفيحة حول المحور $(x = R)$ يتولد (الشكل. 60.5)، الذي هو عبارة عن نصف كرة. بتطبيق علاقة GULDIN يكون حجمها:

The rotation of the plate about $(x = R)$ generates the shape of the (Fig. 5.60), which is a half sphere. Its volume according to GULDIN's relation is:

$v_{(x=R)} = v_{cylindre} - \frac{1}{2} v_{sphère}$	$v_{cylindre} - \frac{1}{2} v_{sphère} = 2\pi s(R - x_G)$

$$v_{sphère} = 2v_{cylindre} - 4\pi s(R - x_G)$$

$$v_{sphère} = 2\pi R^3 - 4\pi \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)\left(R - \frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi} R\right)$$

$$v_{sphère} = \left(2\pi - 4\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi}\right)\right) R^3$$

$$v_{sphère} = \left(2\pi - 4\pi\left(\frac{4-\pi}{4}\right)\left(\frac{2}{12-3\pi}\right)\right)R^3$$
$$v_{sphère} = \left(2\pi - 4\pi\left(\frac{4-\pi}{4}\right)\left(\frac{2}{3(4-\pi)}\right)\right)R^3$$
$$v_{sphère} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\pi R^3$$ $$v_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

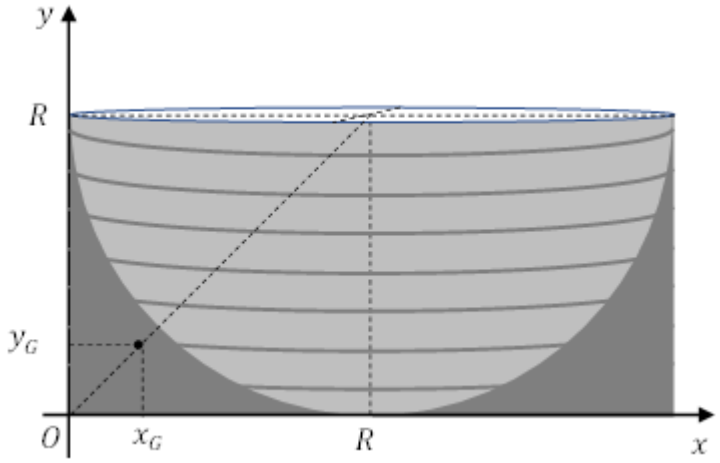


Fig. 5.60	الشكل 60.5

4- The shape generated by the rotation of the plate about the axis (Ox) and (Oy).

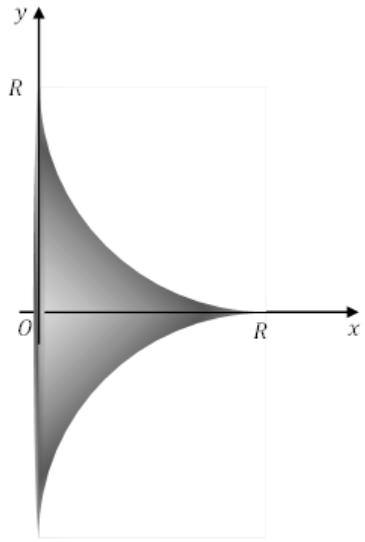
4 – الشكل الذي يتولد من تدوير الصفيحة حول المحورين (Ox) و (Oy).

The rotation of the plate around (Ox) generates the shape of the (Fig. 52 a), while its rotation around (Oy) generates the shape of the (Fig. 5.61 b). Their volumes are:

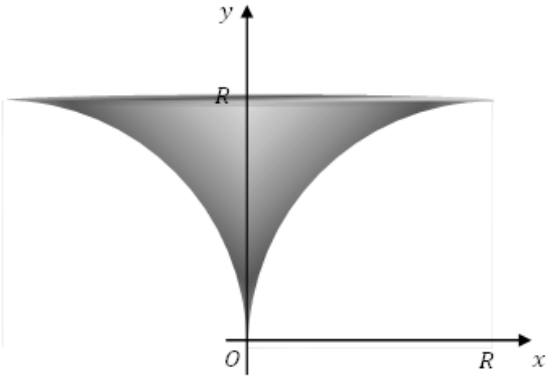
تدوير الصفيحة حول (Ox) يولد (الشكل. 61.5 a) ، بينما تدويرها حول (Oy) فيولد (الشكل. 61.5 b). حجما الشكلان هما:

$$v_{Ox} = 2\pi s y_G$$	$$v_{Oy} = 2\pi s x_G$$
$$v_{Ox} = 2\pi\left(\frac{4-\pi}{4}\right)R^2\frac{10-3\pi}{12-3\pi}R$$	$$v_{Oy} = 2\pi\left(\frac{4-\pi}{4}\right)R^2\frac{10-3\pi}{12-3\pi}R$$
$$v_{Ox} = \pi\frac{10-3\pi}{6}R^3$$	$$v_{Oy} = \pi\frac{10-3\pi}{6}R^3$$

$v_{Ox} = 127062.65\ cm^3$	$v_{Oy} = 127062.65\ cm^3$



a



b

Fig. 5.61	الشكل 61.5

5 - Calculation of the inertia tensor $(I_{O/R})$. | **5 – حساب ممتد العطالة $(I_{O/R})$.**

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$I_{xx} = \iint_s y^2 dm$	$I_{xx} = \sigma \iint_s y^2 ds$

$$I_{xx} = \sigma \left(\iint_{s_1} y_1^2 ds_1 - \iint_{s_2} y_2^2 ds_2 \right)$$

$$I_{xx} = \sigma \left(\iint_{s_1} y_1^2 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (R - r sin\theta)^2 r dr d\theta \right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(\int_0^R dx_1 \int_0^R y_1^2 dy_1 - R^2 \int_0^R r dr d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2R \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^2 d\theta\right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(\frac{R^4}{3} - \frac{\pi R^4}{4} + \frac{2R^4}{3} - \frac{\pi R^4}{16}\right)$$

$I_{xx} = \sigma\left(\frac{16-5\pi}{16}\right)R^4$	$I_{xx} = 10\left(\frac{16-5\pi}{16}\right)(0.75)^4$	$I_{xx} = 57.75 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$I_{yy} = I_{xx}$	$I_{yy} = 57.75 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$
$I_{zz} = 2I_{xx}$	$I_{zz} = 115.5 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$I_{xy} = -\iint_s xydm$	$I_{xy} = -\sigma \iint_s xyds$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_{s_1} x_1 y_1 ds_1 - \iint_{s_2} x_2 y_2 ds_2\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_{s_1} x_1 y_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (R - rsin\theta)(R - rcos\theta) r dr d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\int_0^R x_1 dx_1 \int_0^R y_1 dy_1 - R^2 \int_0^R r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + R \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta + R \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta cos\theta d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{R^4}{4} - \frac{\pi R^4}{4} + \frac{R^4}{3} + \frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{8}\right)$$

$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{19-6\pi}{24}\right)R^4$	$I_{xy} = -19.83 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} 57.75 & -19.83 & 0 \\ -19.83 & 57.75 & 0 \\ 0 & 0 & 115.5 \end{pmatrix} 10^{-3}\ Kg.m^2$$

6 – حساب عطالة (S) بالنسبة للمنصف الأول $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

6 - Calculation of inertia of S with respect to $\Delta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$I_{\Delta} = (1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 57.75 & -19.83 & 0 \\ -19.83 & 57.75 & 0 \\ 0 & 0 & 115.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} 10^{-3}$$

$$I_{\Delta} = (1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 37.92 \\ 37.92 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

$$I_{\Delta} = 75.84 \times 10^{-3}\ Kg.m^2$$

التمرين 14.9.5

1 – ناقش تناظر الصفيحة (S) الموضحة في (الشكل. 62.5).

2 – أوجد عبارة القطع المكافئ $(y = f(x))$ الذي يمثل الحد العلوي للصفيحة.

تطبيق عددي: $(d = R \ , \ h = 2R)$

3 – أحسب (s) مساحة الصفيحة.

4 – عين إحداثيات مركز الكتلة (G) لهذه الصفيحة بطريقة التجميع المستمر.

5 – أنجز الشكلين الذين ينتجان من دوران (S) حول المحور (Ox) و (Oy) ثم احسب حجميهما مستعملا علاقة GULDIN.

6 – أحسب ممتد العطالة $(I_{O/R})$ للصفيحة (S) ذات الكثافة السطحية المنتظمة (σ).

7 – أحسب عطالة (S) بالنسبة للمستقيم $(x = 2R)$

تطبيق عددي: $(R = 75\ cm)$ و $(\sigma = 10\ kg/m^2)$

Exercise 5.9.14

1 - Discuss the symmetry of the plate S of the (Fig. 5.62).

2 - Find the expression of the parabola $y = f(x)$ which presents the upper limit of the plate.
Numerical application: $(d = R\ , h = 2R)$

3 - Calculate s the surface of the plate.

4 - Determine the coordinates of the center of mass (G) of this plate by integration.

5 - Present the two shapes generated by the rotation of the plate around the axis (Ox) and (Oy) then calculate their volumes using GULDIN's theorem.

6 - Calculate the inertia tensor $(I_{O/R})$ of the plate(S) with uniform mass per unit area (σ).

7 - Calculate the moment of inertia of the solid (S) with respect to the line $(x = 2R)$
Digital application:
$(R = 10\ cm)$ and $(\sigma = 10\ kg/m^2)$.

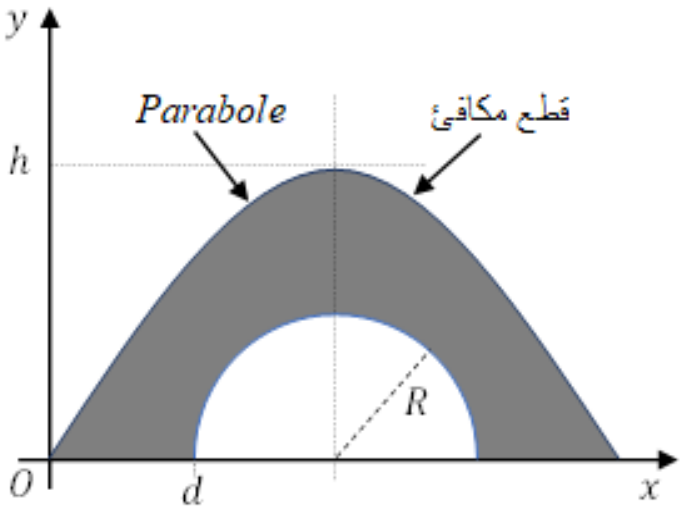


Fig. 5.62	الشكل 62.5

Solution

1 - discussion of the symmetry of the plate.

The plate is located in the plane (xOy), that is, $(z = 0)$ and is symmetrical to the line $(x = d + R)$, so the following is achieved:

الحل

1 – مناقشة تناظر الصفيحة.

الصفيحة تقع في المستوي (xOy) أي أن $(z = 0)$ وهي متناظرة بالنسبة للمستقيم $(x = d + R)$، وعليه يتحقق ما يلي:

$x_G = D + R$	$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$	$I_{yz} = 0$	$I_{xz} = 0$

2- The expression of the parabola $(y = f(x))$.

2 – إيجاد عبارة القطع المكافئ $(y = f(x))$.

The general expression of the parable is:

العبارة العامة للقطع مكافئ هي:

$y = ax^2 + bx + c$	$x = 0, \quad y = 0$	$c = 0$
$x = 2(d + R), \quad y = 0$	$0 = 4a(d + R)^2 + 2b(d + R)$	$0 = 2a(d + R) + b$
$x = d + R, \quad y = h$	$h = a(d + R)^2 + b(d + R)$	$-2h = 2a(d + R)^2$

$a = -\dfrac{h}{(d+R)^2}$	$b = \dfrac{2h}{d+R}$
$y = -\dfrac{h}{(d+R)^2}x^2 + \dfrac{2h}{d+R}x$	$y = -\dfrac{1}{2R}x^2 + 2x$

3- Calculation of the surface of the plate. The plate can be considered as a surface delimited from above by a parabola, from which a half-disk of radius R is subtracted (Fig. 5.63).

3 – حساب مساحة الصفيحة.

يمكن اعتبار الصفيحة سطحا محدودا من الأعلى بقطع مكافئ، انتزع منه نصف قرص نصف قطره (R) كما هو موضح في (الشكل. 63.5).

$s = s_{parabolique} - s_{demi\ disque}$	$s = \iint_{s_1} ds_1 - \dfrac{\pi R^2}{2}$
$s = \iint_{s_1} dx_1 dy_1 - \dfrac{\pi R^2}{2}$	$s = \int_0^{4R}\left(\int_0^{f(x_1)} dy_1\right)dx_1 - \dfrac{\pi R^2}{2}$
$s = \int_0^{4R} f(x_1)dx_1 - \dfrac{\pi R^2}{2}$	$s = \int_0^{4R}(-\dfrac{1}{2R}x_1^2 + 2x_1)dx_1 - \dfrac{\pi R^2}{2}$
$s = -\dfrac{1}{2R}\left[\dfrac{x_1^3}{3}\right]_0^{4R} + 2\left[\dfrac{x_1^2}{2}\right]_0^{4R} - \dfrac{\pi R^2}{2}$	$s = \dfrac{32-3\pi}{6}R^2$

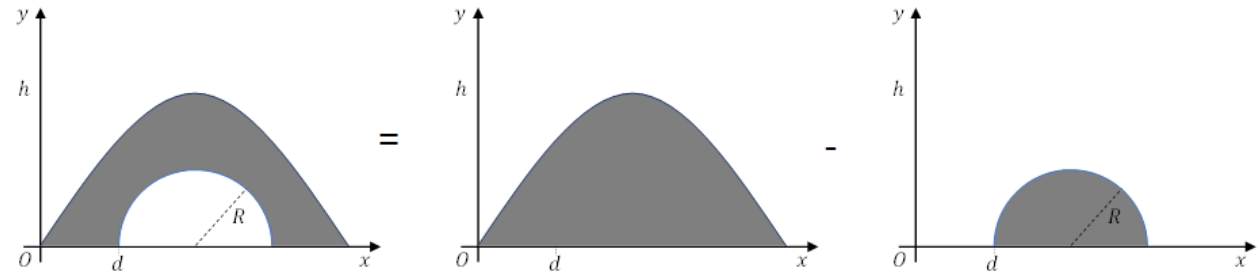


Fig. 5.63	الشكل 63.5

4 - Determination of the center of mass of the plate by the integral method.

4 – إيجاد مركز كتلة الصفيحة بطريقة التكامل.

An elementary part is delimited in each fragment of the plate of area (ds), and center (x, y) (Fig. 5.64)

نحدد سطحا عنصريا في كل جزء من الصفيحة مساحته (ds) ومركزه (x, y) (الشكل. 64.5)

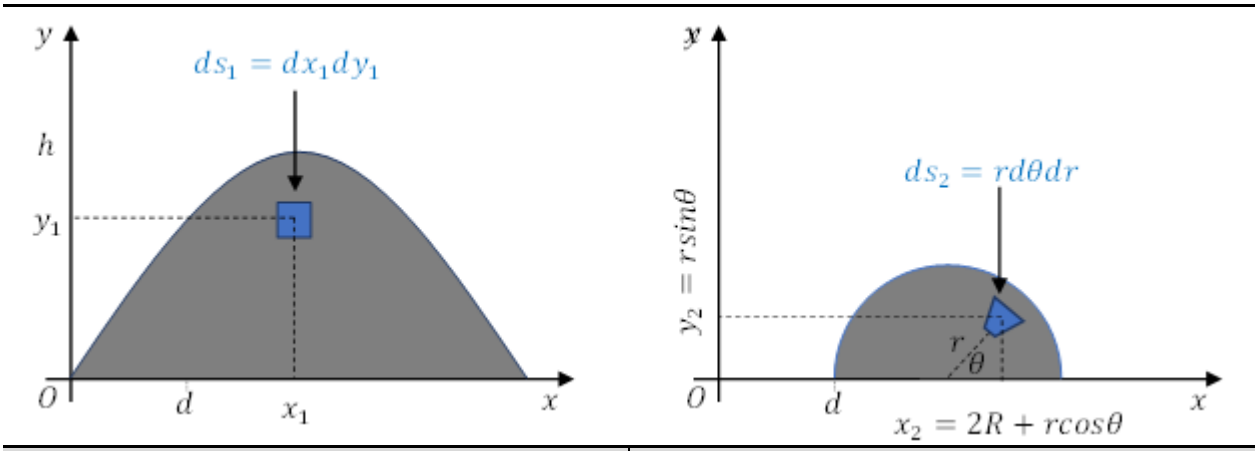


Fig. 5.64	الشكل 64.5

$x_G = d + R$	$x_G = 2R$	$y_G = \frac{\iint_s y ds}{s}$
$y_G = \frac{\iint_{s_1} y_1 ds_1 - \iint_{s_2} y_2 ds_2}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$	$y_G = \frac{\iint_{s_1} y_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (rsin\theta) r dr d\theta}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$	
$y_G = \frac{\int_0^{4R} \left(\int_0^{f(x_1)} y_1 dy_1 \right) dx_1 - \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} sin\theta d\theta}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$		
$y_G = \frac{\int_0^{4R} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2R} x_1^2 + 2x_1 \right)^2 dx_1 - \frac{2}{3} R^3}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$		
$y_G = \frac{\frac{1}{8R^2} \int_0^{4R} x_1^4 dx_1 - \frac{1}{R} \int_0^{4R} x_1^3 dx_1 + 2 \int_0^{4R} x_1^2 dx_1 - \frac{2}{3} R^3}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$		
$y_G = \frac{\frac{1}{8R^2} \left[\frac{x_1^5}{5} \right]_0^{4R} - \frac{1}{R} \left[\frac{x_1^4}{4} \right]_0^{4R} + 2 \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^{4R} - \frac{2}{3} R^3}{\frac{32-3\pi}{6} R^2}$		

$y_G = \dfrac{\frac{128}{5} - 64 + \frac{128}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{32-3\pi}{6}R^2} R^3$	$y_G = \dfrac{\frac{54}{15}}{\frac{32-3\pi}{6}} R$
$y_G = \dfrac{108}{96-9\pi} R$	$y_G = 1.59R$

5- Presentation of the shapes generated by the rotation of the plate around Ox and Oy and calculation of their volumes.

5 – إنجاز الشكلين المتولدين عن دوران الصفيحة حول المحور (Ox) و (Oy) و حساب حجمه.

The rotation of the plate around (Ox) generates the shape of the (Fig. 5.65). Its volume according to GULDIN's relation is

بتدوير الصفيحة حول المحور (Ox) يتولد (الشكل. 65.5). بتطبيق علاقة GULDIN يكون حجمه:

$v_{Ox} = 2\pi s y_G$	$v_{Ox} = 2\pi \left(\frac{32-3\pi}{6}R^2\right)\left(\frac{108}{96-9\pi}R\right)$	$v_{Ox} = 12\pi R^3$

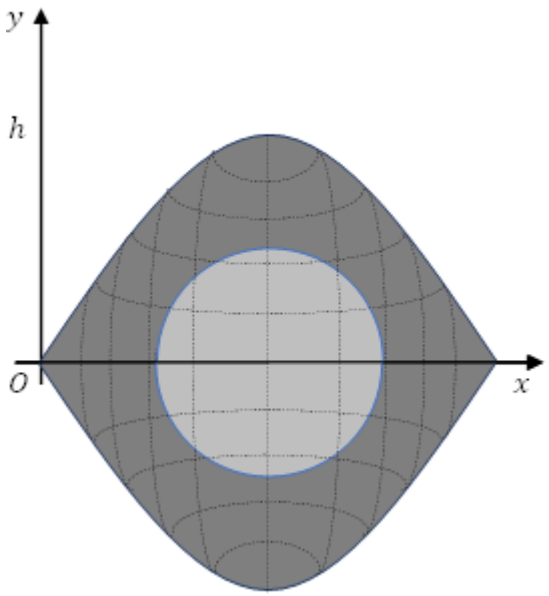


Fig. 5.65	**الشكل 65.5**

The rotation of the plate around (Ox) generates the shape of the (Fig. 56). Its volume according to GULDIN's relation is:

بتدوير الصفيحة حول المحور (Oy) يتولد (الشكل. 57). بتطبيق علاقة GULDIN يكون حجمه:

$v_{Oy} = 2\pi s x_G$	$v_{Oy} = 2\pi\left(\frac{32-3\pi}{6}R^2\right)(2R)$	$v_{Ox} = \frac{2}{3}\pi(32-3\pi)R^3$

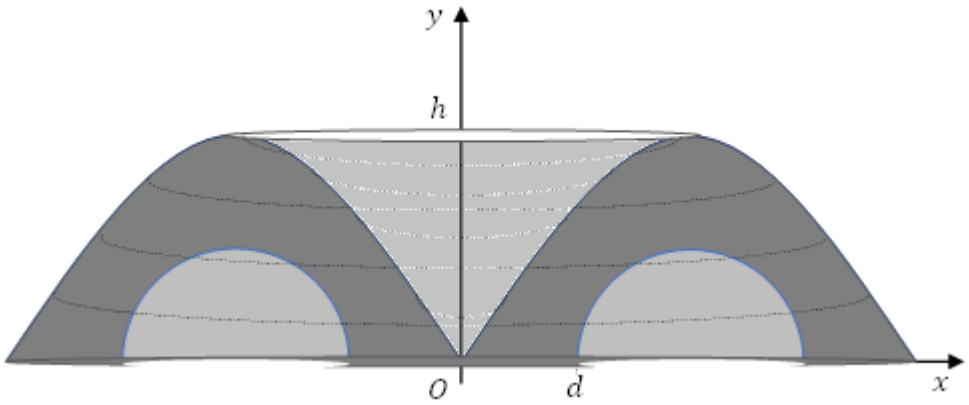


Fig. 5.66	الشكل 66.5

6 - Calculation of the inertia tensor $(I_{O/R})$.

6 – حساب ممتد العطالة $(I_{O/R})$.

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$I_{xx} = \iint_s y^2 dm$	$I_{xx} = \sigma \iint_s y^2 ds$

$$I_{xx} = \sigma\left(\iint_{s_1} y_1^2 ds_1 - \iint_{s_2} y_2^2 ds_2\right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(\iint_{s_1} y_1^2 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (r\sin\theta)^2 r dr d\theta\right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(\int_0^{4R}\left(\int_0^{f(x_1)} y_1^2 dy_1\right)dx_1 - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi} (\sin\theta)^2 d\theta\right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(\frac{1}{3}\int_0^{4R}\left(-\frac{1}{2R}x_1^2 + 2x_1\right)^3 dx_1 - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi}(sin\theta)^2 d\theta\right)$$

$$I_{xx} = \sigma\left(-\frac{2048}{21} + \frac{1024}{3} - \frac{2048}{5} + \frac{512}{3} - \frac{\pi}{8}\right)R^4$$

$I_{xx} = \sigma\left(\frac{512}{105} - \frac{\pi}{8}\right)R^4$	$I_{xx} = (0.75)^4$	$I_{xx} = \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$I_{yy} = \iint_s x^2 dm$	$I_{yy} = \sigma\iint_s x^2 ds$

$$I_{yy} = \sigma\left(\iint_{s_1} x_1^2 ds_1 - \iint_{s_2} x_2^2 ds_2\right)$$

$$I_{yy} = \sigma\left(\iint_{s_1} x_1^2 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (2R + rsin\theta)^2 r dr d\theta\right)$$

$$I_{yy} = \sigma\left(\int_0^{4R}\left(\int_0^{f(x_1)} dy_1\right)x_1^2\, dx_1 - 4R^2\int_0^R r dr\int_0^{\pi} d\theta - 4R\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr\int_0^{\pi}(sin\theta)^2 d\theta\right)$$

$$I_{yy} = \sigma\left(\int_0^{4R}\left(-\frac{1}{2R}x_1^2 + 2x_1\right)x_1^2 dx_1 - 2\pi R^4 - \frac{8}{3}R^4 - \frac{\pi R^4}{8}\right)$$

$$I_{yy} = \sigma\left(-\frac{512}{5} + 128 - 2\pi - \frac{8}{3} - \frac{\pi}{8}\right)R^4$$

$I_{yy} = \sigma\left(\frac{344}{15} - \frac{17\pi}{8}\right)R^4$	$I_{yy} = (0.75)^4$	$I_{yy} = \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$I_{zz} = I_{yy} + I_{xx}$	$I_{zz} = \sigma\left(\frac{584}{21} - \frac{9\pi}{4}\right)R^4$

$I_{xy} = -\iint_s xydm$	$I_{xy} = -\sigma \iint_s xyds$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_{s_1} x_1 y_1 ds_1 - \iint_{s_2} x_2 y_2 ds_2\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\iint_{s_1} x_1 y_1 dx_1 dy_1 - \iint_{s_2} (2R + rcos\theta)(rsin\theta) r dr d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\int_0^{4R}\left(\int_0^{f(x_1)} y_1 dy_1\right) x_1 dx_1 - 2R\int_0^R r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sin\theta d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{1}{2}\int_0^{4R} (f(x_1))^2 x_1 dx_1 - 2R\int_0^R r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sin\theta d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{1}{2}\int_0^{4R} \left(-\frac{1}{2R}x_1^2 + 2x_1\right)^2 x_1 dx_1 - 2R\int_0^R r^2\, dr \int_0^{\pi} sin\theta d\theta - \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi} cos\theta sin\theta d\theta\right)$$

$$I_{xy} = -\sigma\left(\frac{256}{3} - \frac{1024}{5} + 128 - \frac{4}{3}\right) R^4$$

$I_{xy} = -108\sigma R^4$	$I_{xy} = - \times 10^{-3}\ Kg.m^2$

$$I_{O/R} = \begin{pmatrix} 57.75 & -19.83 & 0 \\ -19.83 & 57.75 & 0 \\ 0 & 0 & 115.5 \end{pmatrix} 10^{-3}\ Kg.m^2$$

7 - Calculation of inertia of S with respect to the straight line $\Delta(x = 2R)$.	**7 – حساب عطالة (S) بالنسبة للمستقيم $\Delta(x = 2R)$.**
We apply the HUYGENS theorem	**نطبق نظرية HUYGENS**

$x_G \in \Delta$	$\Delta \parallel Oy$	$I_{yy} = I_\Delta + m(2R)^2$
$I_\Delta = I_{yy} - 4mR^2$	$I_\Delta = \sigma\left(\frac{344}{15} - \frac{17\pi}{8}\right)R^4 - 4\sigma s R^2$	
$I_\Delta = \sigma\left(\frac{344}{15} - \frac{17\pi}{8}\right)R^4 - 4\sigma\frac{32-3\pi}{6}R^4$		
$I_\Delta = \sigma\left(\frac{24}{15} - \frac{\pi}{8}\right)R^4$		

5.10 Additional exercises

10.5 تمارين إضافية

Exercise 5.10.1

Determine the moment of inertia of the shaded region of mass M, shown in (Fig. 5.67) withrespect to each of the coordinate axes.

التمرين 1.10.5

حدد عزم القصور الذاتي للمنطقة المظللة ذات الكتلة (M)، كما هو موضح في (الشكل. 5.67) وذلك بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

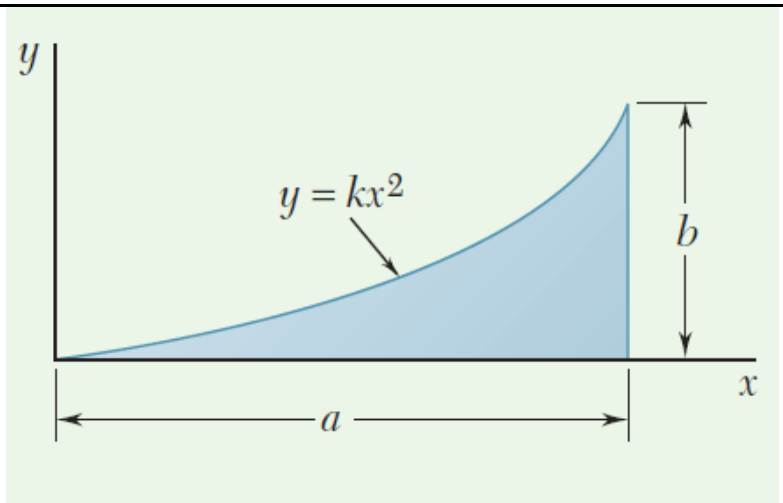


Fig. 5.67 | **الشكل 67.5**

Answer: / **الجواب:**

$$I_{xx} = \frac{Mb^2}{7}$$

$$I_{yy} = \frac{3Ma^2}{5}$$

Exercise 5.10.2

Determine the moment of inertia of the shaded region of mass M, shown in (Fig. 5.68) withrespect to each of the coordinate axes.

التمرين 2.10.5

حدد عزم القصور الذاتي للمنطقة المظللة ذات الكتلة (M)، كما هو موضح في (الشكل. 5.68) وذلك بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

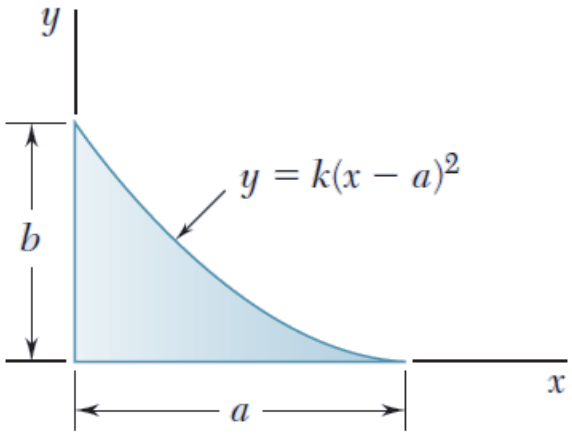


Fig. 5.68	الشكل 68.5

Answer:	$I_{xx} = \frac{Mb^2}{7}$	الجواب:
	$I_{yy} = \frac{Ma^2}{10}$	

Exercise 5.10.3	التمرين 3.10.5
Determine the moment of inertia of the shaded region of mass M, shown in (Fig. 5.69) withrespect to each of the coordinate axes.	حدد عزم القصور الذاتي للمنطقة المظللة ذات الكتلة (M)، كما هو موضح في (الشكل. 5.69) وذلك بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

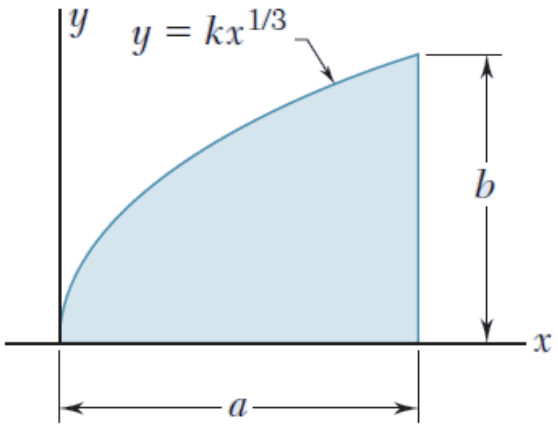


Fig. 5.69	الشكل 69.5

Answer:	$I_{xx} = \frac{2Mb^2}{9}$	الجواب:
	$I_{yy} = \frac{4Ma^2}{10}$	

Exercise 5.10.4	التمرين 4.10.5
Determine the moment of inertia of the shaded region of mass M, shown in (Fig. 5.70) withrespect to each of the coordinate axes.	حدد عزم القصور الذاتي للمنطقة المظللة ذات الكتلة (M)، كما هو موضح في (الشكل. 5.70) وذلك بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

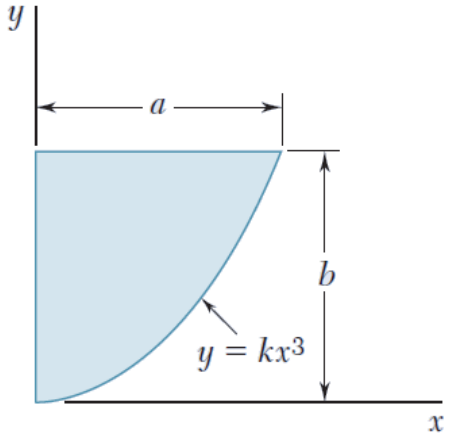


Fig. 5.70	الشكل 70.5

Answer:	$I_{xx} = \frac{4Mb^2}{10}$	الجواب:
	$I_{yy} = \frac{Ma^2}{8}$	

Exercise 5.10.5	التمرين 5.10.5
Determine the moment of inertia of the shaded region of mass M, shown in (Fig. 5.71) withrespect to each of the coordinate axes.	حدد عزم القصور الذاتي للمنطقة المظللة ذات الكتلة (M)، كما هو موضح في (الشكل. 5.71) وذلك بالنسبة لمحاور الإحداثيات.

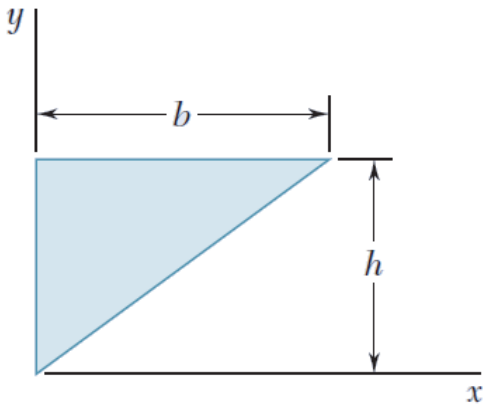


Fig. 5.71	الشكل 71.5

Answer:	$\boldsymbol{I_{xx} = \frac{Mh^2}{2}}$	**الجواب:**
	$\boldsymbol{I_{yy} = \frac{Mb^2}{6}}$	

Bibliographic references | المراجع الببليوغرافية

- **S. Targ *Eléments de mécanique rationnelle* Edition Mir Moscou.**
- **Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., Elliot R. Eisenberg, George H. Staab *Vector Mechanics for Engineers, Statics.* McGraw-Hill 640.**
- **Sylvie Pommier, Yves Berthaud *Mécanique générale: Cours et exercices corrigés* DUNOD 280.**
- **Christian Gruber, Willy Benoit *Mécanique générale* Presses polytechniques et universitaires romandes 751.**
- **Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell, Elliot R. Eisenberg *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*, 9th Edition McGraw-Hill 1359.**
- **Tahar HANI *Mécanique générale – Exercices et problèmes résolus avec rappels de cours.* Offices des publications universitaires 386.**
- **KESSOUL. Amar, DAHMANI. Krimo *Mécanique rationnelle – cours et Exercices.* Offices des publications universitaires 239.**
- **Rabah. HAOUI *Mécanique rationnelle –Exercices et problèmes avec solution.* Offices des publications universitaires 151.**
- **YAGOUBI. W, *Mécanique rationnelle – cours et Exercices corrigés.* Offices des publications universitaires 212.**
- **Murray R. Spiegel *Théorie et applications de la mécanique générale* McGraw-Hill 368.**
- **Jean-Louis Fanchon *Guide de mécanique* BERTI Editions 552.**
- **Appell P. *Traité de mécanique rationnelle équilibre et mouvements de milieux continus* Gauthier-Villars 562.**
- **Ali. KADI *Mécanique rationnelle cours et Exercices résolus***

..\..\Downloads\1mecanique_rationnelle_book.pdf