

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Têlidji Laghouat



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de Licence

Domaine : Mathématiques et informatique (MI)

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques

Thème

Méthode de séparation des variables pour l'équation de Laplace à trois dimension

Présenté par :

M^{elle} Remila Nihad et M^{elle} Serkhad Meriem

Soutenu le : 07 juin 2014.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r RAHMOUNE</i> Abdelaziz	M.A.A, Université de Laghouat
Rapporteur :	<i>D^r NOURI</i> Brahim	M.C.B, Université de Laghouat
Examineur :	<i>M^r RAHMOUNE</i> Abita	M.A.A, Université de Laghouat

Année universitaire 2013/2014

Remerciements

Ce projet a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur NOUIRI Brahim, Maître de conférences à l'université de Laghouat. Je tien à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Mes remerciements s'adressent a Monsieur Lagraa Nacereddine chef de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce projet.

Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce projet.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.

Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes parents(Mimouna et Mohamed). Tout les membres de ma famille mes chères frères : Nasser,Abdelkader, Lakhder,Attia, Mohamed, Bachir et Boulerbah. Mes chouchous A tous (tes) mes amis (es). A tous mes professeures du département de math et inf . Tous (tes) mes amis (es) de la promotion de mathématiques. A tous mes professeurs du département de Mathématiques et Informatique.

MERIEM.S

Avec l'aide de Dieu,

je voudrais dédier ce modeste de travail.

A ma très chère mère « Lalia » et mon très cher père « Khaled » qui m'ont tant soutenu et encouragé pendant tout de ma période d'étude.

A mon frère : Houssam

A ma Sœur : Soumia Petit frère Maroine A ma très chère copine Meriem A ma très chère amie Iness zahret lislam

A tous membres des Familles (mes oncles, mes tentes et leurs enfants, surtout mon grand père et ma grande mère Sans oublier toute la section de 3^{me} année licence 2013/2014.

NIHAD IMANE.R

Résumé

Dans ce projet, nous avons présenté la méthode de séparation des variables pour l'équation de Laplace à trois dimensions. Notre projet se décompose en trois chapitres :

- ☞ Chapitre 1 : Équation de Laplace en coordonnées cartésienne,
- ☞ Chapitre 2 : Équation de Laplace en coordonnées cylindriques,
- ☞ Chapitre 3 : Équation de Laplace en coordonnées sphériques.

Table des matières

1	Équation de Laplace en coordonnées Cartésiennes	3
1.1	Équation de Laplace dans un cube	3
2	Équation de Laplace en coordonnées cylindriques	8
2.1	La méthode de Frobenius	8
2.2	Équation de Bessel	9
2.3	Équation de Laplace en coordonnées cylindriques	12
2.4	Résolution par séparation des variables	14
3	Équation de Laplace en coordonnées sphériques	16
3.1	Équation de Legendre :	16
3.2	Conversion entre systèmes cartésien et sphérique :	17
3.3	Équation de Laplace en coordonnées sphériques	18

Introduction

En analyse vectorielle, l'équation de Laplace est une "équation aux dérivées partielles elliptique" du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien et mathématicien **Pierre-Simon de Laplace**(1749-1827). Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne.

L'équation de Laplace apparait dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et mécanique quantique. Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les *fonctions harmoniques*.

La technique de séparation de variables consiste à accepter que toute fonction représentant un potentiel solution de l'équation de Laplace peut s'écrire comme un produit de fonctions dépendant chacune d'une seule coordonnée. On arrive alors à transformer l'équation de Laplace (dérivées partielles) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires, dont la solution est censée être plus aisée. Il est évident que cette technique dépend fortement du système de coordonnées considéré.

Notre objective dans ce projet est la résolution de l'équation de Laplace à trois dimensions par la méthode de séparation des variables. Notre projet se décompose en trois chapitres.

- ☞ Chapitre 1 : Équation de Laplace en coordonnées cartésienne,
- ☞ Chapitre 2 : Équation de Laplace en coordonnées cylindriques,
- ☞ Chapitre 3 : Équation de Laplace en coordonnées sphériques.

Chapitre 1

Équation de Laplace en coordonnées Cartésiennes

1.1 Équation de Laplace dans un cube

On considère le problème de Laplace dans un cube $\Omega =]0, a[^3, a > 0$, et $\varphi_i, i = 1 \dots 6$ sont des fonctions de C^2 , et avec conditions aux limites de Dirichlet non homogène suivant :

Problème. (P) Trouver : $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$
$$\begin{cases} u(0, y, z) = \varphi_1(y, z) & \text{et } u(a, y, z) = \varphi_2(y, z), (y, z) \in [0, a], \\ u(x, 0, z) = \varphi_3(x, z) & \text{et } u(x, a, z) = \varphi_4(x, z), (x, z) \in [0, a], \\ u(x, y, 0) = \varphi_5(x, y) & \text{et } u(x, y, a) = \varphi_6(x, y), (x, y) \in [0, a]. \end{cases}$$

Le problème (P) peut être décomposé en 6 sous problèmes comme suit :

Problème 1.1. Trouver : $u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} u_1(0, y, z) = \varphi_1(y, z) & \text{et } u_1(a, y, z) = 0, (y, z) \in [0, a], \\ u_1(x, 0, z) = 0 & \text{et } u_1(x, a, z) = 0, (x, z) \in [0, a], \\ u_1(x, y, 0) = 0 & \text{et } u_1(x, y, a) = 0, (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Problème 1.2. Trouver : $u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} u_2(0, y, z) = 0 & \text{et } u_2(a, y, z) = \varphi_2(y, z), (y, z) \in [0, a], \\ u_2(x, 0, z) = 0 & \text{et } u_2(x, a, z) = 0, (x, z) \in [0, a], \\ u_2(x, y, 0) = 0 & \text{et } u_2(x, y, a) = 0, (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \tag{1.4}$$

Problème 1.3. Trouver : $u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} u_3(0, y, z) = 0 & \text{et } u_3(a, y, z) = 0, (y, z) \in [0, a], \\ u_3(x, 0, z) = \varphi_3(x, z) & \text{et } u_3(x, a, z) = 0, (x, z) \in [0, a], \\ u_3(x, y, 0) = 0 & \text{et } u_3(x, y, a) = 0, (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \quad (1.6)$$

Problème 1.4. Trouver : $u_4 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} u_4(0, y, z) = 0 & \text{et } u_4(a, y, z) = 0, (y, z) \in [0, a], \\ u_4(x, 0, z) = 0 & \text{et } u_4(x, a, z) = \varphi_4(x, z), (x, z) \in [0, a], \\ u_4(x, y, 0) = 0 & \text{et } u_4(x, y, a) = 0, (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \quad (1.8)$$

Problème 1.5. Trouver : $u_5 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_5}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} u_5(0, y, z) = 0 & \text{et } u_5(a, y, z) = 0, (y, z) \in [0, a], \\ u_5(x, 0, z) = 0 & \text{et } u_5(x, a, z) = 0, (x, z) \in [0, a], \\ u_5(x, y, 0) = \varphi_5(x, y) & \text{et } u_5(x, y, a) = 0, (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \quad (1.10)$$

Problème 1.6. Trouver : $u_6 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 u_6}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_6}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_6}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} u_6(0, y, z) = 0 & \text{et } u_6(a, y, z) = 0, (y, z) \in [0, a], \\ u_6(x, 0, z) = 0 & \text{et } u_6(x, a, z) = 0, (x, z) \in [0, a], \\ u_6(x, y, 0) = 0 & \text{et } u_6(x, y, a) = \varphi_6(x, y), (x, y) \in [0, a]. \end{cases} \quad (1.12)$$

Si u_1, u_2, \dots, u_6 sont solutions des problèmes (1.1), ..., (1.6), alors il facile de montre que :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$

Nous allons illustrer la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème (1.1), donc la résolution de ce problème comporte trois étapes :

Étape 1 : Séparation des variables.

Posons :

$$u_1(x, y, z) = H(x) F(y) G(z) \quad (1.13)$$

où F, H et G sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, a]$.

En substituant (1.13) dans (1.1) et en divisant par $u_1(x, y, z)$, on a :

$$\frac{F''(X)}{F(X)} + \frac{H''(y)}{H(y)} + \frac{G''(z)}{G(z)} = 0$$

Donc, nous avons :

$$\frac{F''(X)}{F(X)} = \gamma^2, \frac{H''(y)}{H(y)} = -\mu^2, \frac{G''(z)}{G(z)} = -\eta^2 \text{ avec } \gamma^2 = \eta^2 + \mu^2$$

On obtient ainsi trois équations différentielles ordinaires suivantes :

$$F''(x) - \gamma^2 F(x) = 0 \quad (1.14)$$

$$H''(y) + \mu^2 H(y) = 0 \quad (1.15)$$

$$G''(z) + \eta^2 G(z) = 0 \quad (1.16)$$

où γ, μ et η sont à déterminer au moyen des conditions aux limites (1.2).

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres

On résout (1.14), (1.15) et (1.16) tel que $u_1 = F \cdot H \cdot G$ satisfasse (1.2) :

$$\begin{aligned} u_1(a, y, z) = F(a) H(Y) G(z) = 0 &\Rightarrow F(a) = 0 \\ \begin{cases} u_1(x, 0, z) = F(x) H(0) G(z) = 0 \Rightarrow H(0) = 0 \\ u_1(x, a, z) = F(x) H(a) G(z) = 0 \Rightarrow H(a) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u_1(x, y, 0) = F(x) H(Y) G(0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0 \\ u_1(x, y, a) = F(x) H(Y) G(a) = 0 \Rightarrow G(a) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème (1.1), il faut résoudre les trois problèmes suivants :

$$\begin{cases} F''(x) - \gamma^2 F(x) = 0 \\ F(a) = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} H''(y) + \mu^2 H(y) = 0 \\ H(0) = H(a) = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} G''(z) + \eta^2 G(z) = 0 \\ G(0) = G(a) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

1. La solution générale de problème (1.18) est donnée par :

$$H(y) = A \cos(\mu y) + B \sin(\mu y)$$

Alors, on a :

$$H(0) = A = 0$$

$$H(a) = B \sin(\mu a) = 0 \Rightarrow \mu a = \pi n \Rightarrow \mu_n = \frac{\pi n}{a}, n \in \mathbb{N}^*$$

Alors, la solution de (1.18) est

$$H_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n}{a} y\right), n \in \mathbb{N}^*$$

2. De la même manière, la solution générale de problème (1.19) est donnée par :

$$G_m(z) = \sin\left(\frac{\pi m}{a}z\right), \quad m \in \mathbb{N}^*$$

3. La solution générale de problème (1.17) est donnée par :

$$F(x) = ce^{\gamma x} + de^{-\gamma x}$$

Donc, on a :

$$F(a) = 0 \Rightarrow Ce^{(\gamma a)} + De^{(-\gamma a)} = 0 \Rightarrow D = -Ce^{(2\gamma a)}$$

Alors, la solution de (1.17) est :

$$\begin{aligned} F_{n,m}(x) &= Ce^{\gamma x} - Ce^{2\gamma a}e^{-\gamma x} \\ &= 2Ce^{(\gamma a)} \sinh[\gamma(x-a)] \\ &= 2Ce^{\gamma a} \sinh\left[\frac{\pi}{a}(x-a)\sqrt{n^2+m^2}\right] \end{aligned}$$

Donc les fonctions simples non nulles, qu'on appellera fonctions propres :

$$U_{n,m}(x, y, z) = A_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi m}{a}z\right) \sinh\left[\frac{\pi}{a}(x-a)\sqrt{n^2+m^2}\right], \quad n, m \in \mathbb{N}^* \quad (1.20)$$

sont des solutions de problème (1.1). Dans ce cas, les nombres $\gamma_{n,m} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}$ seront appelés valeurs propres du problème (1.1).

Nous avons la définition générale suivante.

Définition 1.7. On appelle valeurs propres les nombres $\gamma_{n,m}$ pour lesquelles un problème du type (1.1) admet les solutions non nulles $u_{n,m}(x, y, z)$, appelées fonctions propres. L'ensemble de valeurs propres $\{\gamma_{n,m} / n, m \in \mathbb{N}^*\}$ s'appelle le spectre.

Les fonctions propres et les valeurs propres varient de problème en problème, c'est-à-dire elle sont propres à un problème donné.

Étape 3 : Superposition des fonctions propres.

Donc, la solution générale de problème (1.1) est donnée par :

$$u_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) \sinh\left[\left(\frac{\pi x}{a} - \pi\right)\sqrt{n^2+m^2}\right] \quad (1.21)$$

Pour déterminer les coefficient $A_{n,m}$, on pose dans (1.21) $x = 0$, on trouve :

$$\varphi_1(y, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} A_{n,m} \sinh\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right)$$

Ceci est le développement en termes de la fonction suivante :

$$\varphi_{n,m}(y, z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right)$$

de la fonction $\varphi_{n,m}(y, z)$ c'est à-dire sa série de Fourier "sinus" en dimension 2.

On peut montrer que $\{\varphi_{n,m} : m, n \in \mathbb{N}\}$ forme un système orthogonal complet dans $L^2([0, a] \times [0, a], R)$. Donc, pour $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}$ fixé, φ_i sont de class C^2 et intégrable, Avec théorème de Fubini, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a \varphi(n_0, m_0) \varphi(n, m) &= \int_0^a \int_0^a \sin\left(\frac{n_0\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) dydz \\ &= \int_0^a \sin\left(\frac{n_0\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) dz \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n_0\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_0 \\ \frac{a^2}{4} & \text{si } n = n_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

et

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq m_0 \\ \frac{a^2}{4} & \text{si } m = m_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Alors, on a :

$$A_{n,m} = \frac{4}{a^2 \sinh(\pi\sqrt{n^2 + m^2})} \int_0^a \int_0^a \varphi_1(y, z) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}z\right) dydz \quad (1.24)$$

Chapitre 2

Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Dans ce chapitre, on applique la méthode de séparation des variables de façon semblable comme Chapitre 1 avec l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques.

Avant de commencer de la méthode, on va donner la méthode de **Frobenius** pour résoudre l'équation Bessel.

2.1 La méthode de Frobenius

Théorème 2.1. *Soit l'équation différentielle du type de Fuchs :*

$$y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0, \quad (2.1)$$

où les fonctions $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sont analytiques sur $] -R, R[$.

Si r_1 et r_2 ($r_1 \geq r_2$) sont les racines de l'équation déterminante appelée aussi équation indicelle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0, \quad (2.2)$$

alors (2.1) admet toujours une solution de la forme :

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{m=0}^{+\infty} c_m x^m, \quad c_0 \neq 0. \quad (2.3)$$

Le rayon de convergence de (2.3) est au moins égal à R .

La forme de la deuxième solution dépend de la différence $r_1 - r_2$. On distingue trois cas.

Cas 1 : Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$, alors

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{m=0}^{+\infty} c_m^* x^m, \quad c_0^* \neq 0; \quad (2.4)$$

Cas 2 : Si $r_1 = r_2$, alors

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x) + x^{r_2} \sum_{m=1}^{+\infty} A_m x^m, \quad x > 0, \quad A_1 \neq 0; \quad (2.5)$$

Cas 3 : Si $r_1 - r_2 = p \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$y_2(x) = k y_1(x) \ln(x) + x^{r_2} \sum_{m=0}^{+\infty} C_m x^m, \quad x > 0, \quad C_0 \neq 0. \quad (2.6)$$

La solution dans le 1^{er} cas et dans le 3^e cas, si le terme logarithmique est absent ($k = 0$), s'obtient par la méthode de **Frobenius** proprement dite. La solution dans les cas 2 et 3, où apparaît le logarithme, s'obtient par la méthode des séries généralisées.

Définition 2.2. On dit que l'équation (2.1), aux coefficients $a(x)$ et $b(x)$ analytiques au voisinage de $x = 0$, admet le point singulier régulier $x = 0$.

2.2 Équation de Bessel

On résout l'équation de Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.7)$$

par la méthode de **Frobenius**. Si l'on récrit cette équation sous forme standard

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} y = 0,$$

on voit que

$$\begin{aligned} a(x) = 1 &\implies a_0 = 1, \\ b(x) = x^2 - \nu^2 &\implies b_0 = -\nu^2. \end{aligned}$$

et que $a(x)$ et $b(x)$ sont analytiques partout. Dans ce cas, l'équation indicelle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0,$$

devient

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

Pour fixer les idées, prenons

$$\nu \geq 0,$$

Alors $r_1 = \nu$ ou $r_2 = -\nu$.

Pour obtenir la première solution, posons

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m x^{m+\nu},$$

dans (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} (m + \nu)(m + \nu - 1) c_m x^{m+\nu} + \sum_{m=0}^{+\infty} (m + \nu) c_m x^{m+\nu} \\ + \sum_{m=0}^{+\infty} c_m x^{m+\nu+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{+\infty} c_m x^{m+\nu} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de chacune des puissances de x est nul parce que le second membre est identiquement nul.

Le coefficient de x^ν : on obtient l'équation indicelle :

$$[\nu(\nu - 1) + \nu - \nu^2] c_0 = 0$$

Donc

$$0c_0 = 0 \Rightarrow c_0 \text{ est indéterminé on dterminant que les constant sont nulle par recurrence.}$$

Le coefficient de $x^{\nu+1}$:

$$(\nu + 1)\nu c_1 + (\nu + 1)c_1 - \nu^2 c_1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(\nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2) c_1 = (2\nu + 1) c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Le coefficient de $x^{\nu+s}$:

$$(s + \nu)(s + \nu - 1) c_s + (s + \nu) c_s + c_{s-2} - \nu^2 c_s = 0, \quad s \geq 2$$

qui devient

$$(s + 2\nu) s c_s + c_{s-2} = 0;$$

donc $c_{2m+1} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-2}}{4m(m + \nu)}, \quad m \in \mathbb{N}^*. \quad (2.8)$$

Pour normaliser les coefficients c_s , introduisons la fonction gamma :

$$\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

Définition 2.3. La fonction gamma est définie par l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (2.9)$$

si $\alpha > 0$, et par la relation

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} \quad (2.10)$$

si $\alpha < 0$ et $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$

Cette fonction prolonge aux nombres réels, et même complexes, la factorielle $n!$ qui n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.4. *La fonction gamma satisfait la relation de récurrence :*

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}_-^*. \quad (2.11)$$

Démonstration : Il suffit de considérer le cas $\alpha > 0$. On substitue $\alpha + 1$ par α dans (2.9) et l'on intègre par partie :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} t^\alpha \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Lorsque α est un entier positif n , $\Gamma(n + 1)$ se réduit à la factorielle $(n + 1)!$.

Maintenant, on normalise les coefficients (2.8). Puisque c_0 est indéterminé, posons

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

Alors

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2(\nu + 1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} 1! \Gamma(\nu + 2)}, \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{1}{2^{4+\nu} 2! \Gamma(\nu + 3)}, \end{aligned}$$

et, en général,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (2.12)$$

Donc

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}. \quad (2.13)$$

C'est la fonction de Bessel de 1^{er} espèce d'ordre ν . La série converge pour tout x puisqu'on a supposé que $\nu \geq 0$.

Pour $\nu = n \in \mathbb{N}$, la série (2.13) devient

$$J_\nu(x) = x^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n + m)!}. \quad (2.14)$$

Pour $r_2 = -\nu < 0$ pas un entier, la série (2.13) devient

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m - \nu + 1)} \quad (2.15)$$

Théorème 2.5. *La solution générale de (2.7), pour $\nu \notin \mathbb{Z}$, est :*

$$y(x) = k_1 J_\nu(x) + k_2 J_{-\nu}(x). \quad (2.16)$$

Démonstration : Puisque ν apparaît au carré dans l'équation différentielle (2.7), alors $J_{-\nu}$ est aussi une solution de (2.7). Si $\nu \notin \mathbb{N}$,

$$\frac{J_\nu(x)}{J_{-\nu}(x)} \neq \text{constante}$$

$J_{-\nu} \neq \text{constante } J_\nu$

donc, dans ce cas J_ν et $J_{-\nu}$ sont linéairement indépendantes.

Théorème 2.6. *Si $\nu = n \in \mathbb{N}$, alors*

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

c'est-à-dire J_n et J_{-n} sont linéairement dépendantes.

Démonstration : Par la représentation de $J_{-n}(x)$ en série, on a :

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-n} m! (m-n)!} \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! (m-n)!} \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0, \quad \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0, \dots, \frac{1}{\Gamma(-n+1)} = 0.$$

Par la substitution

$$s = m - n, \quad m = s + n,$$

dans la dernière série, on a :

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{s+n} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n+s)! s!} = (-1)^n J_n(x).$$

2.3 Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Avec le changement des variables en coordonnées cylindriques suivant :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

L'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.18)$$

deviennent une équation de Laplace en coordonnées cylindriques comme suit.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial h} \quad (2.21)$$

D'après (2.19), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ &\quad - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

D'après (2.20), on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &+ \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.18), on obtient l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.22)$$

2.4 Résolution par séparation des variables

Par la méthode de séparation des variables, on va chercher la solution sous forme suivante :

$$U(r, \theta, z) = F(r) G(\theta) H(z).$$

En remplaçant ce produit dans l'équation (2.18), on obtient :

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} + \frac{H''}{H} = 0.$$

Cette équation conduit aux trois équations différentielles suivantes :

$$H'' + \gamma^2 H = 0, \quad (2.23)$$

$$G'' + \nu^2 G = 0 \quad (2.24)$$

et

$$F'' + \frac{1}{r} F' + \left(\gamma^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0. \quad (2.25)$$

Soient les conditions aux limites de Dirichlet suivants :

$$u(r, \theta, 0) = u(r, \vartheta, L) = 0, \forall r \in [0, R], \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad (2.26)$$

$$u(R, \theta, z) = 0, \theta \in [0, 2\pi], \forall z \in [0, L]. \quad (2.27)$$

Donc, de (2.26), on a :

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= F(r) G(\theta) H(0) = 0 \Rightarrow H(0) = 0, \\ u(r, \theta, L) &= F(r) G(\theta) H(L) = 0 \Rightarrow H(L) = 0, \end{aligned}$$

et

$$u(R, \theta, z) = F(R)G(\theta)H(z) = 0 \Rightarrow G(\theta) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

alors, la solution générale de l'équation (2.23) est donnée par :

$$H(z) = A \cos(\gamma z) + B \sin(\gamma z)$$

$$H(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

et

$$H(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\gamma L) = 0 \Rightarrow \gamma_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^*$$

Alors, $H_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

De la même façon on trouve la solution générale de l'équation (2.24) par :

$$G_m(\theta) = B_m^* \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right), m \in \mathbb{N}^*.$$

La solution de l'équation (2.25) est la fonction de **Bessel** de première espèce :

$$F(r) = J_\nu(\gamma r).$$

Donc, la solution particulière est :

$$u_{n,m}(r, \theta, z) = C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right) J_{m/2}\left(\frac{n\pi r}{L}\right), C_{n,m} = B_n B_m^*.$$

Par superposition des solutions, la solution général de l'équation de Laplace (2.22) est donnée par :

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right) J_{m/2}\left(\frac{n\pi r}{L}\right). \quad (2.28)$$

Chapitre 3

Équation de Laplace en coordonnées sphériques

Pour l'étude des champs gravitationnel et magnétique on est amené à résoudre l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, Les solutions de cette équation sont des fonctions sphériques appelées harmoniques sphériques globales. On introduit sur la surface de la sphère, une base de fonctions sphériques sur laquelle on peut décomposer judicieusement tout champ scalaire.

3.1 Équation de Legendre :

L'équation de Legendre est l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0 \quad (3.1)$$

où l est un nombre réel. Elle intervient très souvent lors de l'étude de phénomènes physiques comme la conduction de la chaleur, notamment lorsqu'on écrit l'équation en coordonnées polaires. Une bonne façon de résoudre cette équation différentielle est de rechercher les solutions développables en séries entières en 0, en écrivant

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (3.2)$$

On obtient alors la formule de récurrence :

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

La solution générale est de la forme :

$$Y = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+2) \dots (l-2)] [(l+1)(l+3) \dots (l+2n-1)]}{(2n)!} x^{2n} \right) + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(l-2n+2) \dots (l-3)(l-1)] [(l+2)(l+4) \dots (l+2n)]}{(2n)!} x^{2n+1} \right) (2n+1)! \quad (3.3)$$

Cette série converge pour $|x| < 1$. Mais du fait du lien entre l'équation et les coordonnées polaires, x représente souvent $\cos(t)$, et on a besoin que x puisse prendre les valeurs $+1$ et -1 . Lorsque l est entier c'est possible : en effet, si l est pair, la série suivant a_0 ne comporte que des termes nuls à partir d'un certain rang, et se réduit donc à un polynôme. Si l est impair, la même chose se produit pour la série suivant a_1 . On peut ensuite ajuster a_0 ou a_1 pour que $y(1) = 1$. On trouve alors la famille des polynômes de Legendre dont les premiers éléments sont donnés par :

$$\begin{aligned}l_0(x) &= 1 \\l_1(x) &= x \\l_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\l_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\l_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\l_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\end{aligned}$$

L_n est donc l'unique solution y de l'équation différentielle (avec $l = n$) définie en 1 et -1 et satisfaisant $y(1) = 1$.

Définition 3.1. L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0$$

est connue sous le nom d'équation de Legendre . Ses solutions sont appelées "fonctions de Legendre". Si n est nul ou entier positif, ces fonctions sont appelées "polynômes de Legendre".

3.2 Conversion entre systèmes cartésien et sphérique :

A partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , on peut obtenir les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) grâce aux relations suivants :

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) \\ \theta &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Inversement, on a les relations suivants :

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi\end{aligned}$$

3.3 Équation de Laplace en coordonnées sphériques

Définition 3.2. Avec le changement des variables suivant :

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (3.4)$$

où $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

Soit à résoudre l'équation $\Delta v = 0$ qui s'écrit en coordonnées sphérique :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.5)$$

On cherche une solution de cette équation par séparation de variable :
 $u(r, \theta, \varphi) = f(r) F(\theta, \varphi)$ ou $F(\theta, \varphi)$ est une fonction dépendant de θ et φ .

En substituant dans (3.5) on obtient :

$$\frac{F}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{f}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{f}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = - \frac{1}{F \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Le membre de droite ne dépend que de (θ, φ) et le membre de gauche de r :
chaque membre doit être constant. D'où le système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = cste f \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -cste F \end{cases} \quad (3.6)$$

La première équation de ce système s'écrit :

$$\left(r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} \right) + 2r \frac{df}{dr} = cste f$$

Posons $cste = \alpha(\alpha + 1)$

La solution est de la forme :

$$f = cr^\alpha + \frac{D}{r^{\alpha+1}} \quad (3.7)$$

La deuxième équation du système (3.6) s'écrit :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \alpha(\alpha + 1) F \quad (3.8)$$

On introduit parfois un opérateur noté. qui est un opérateur hermitien dans l' espace des fonctions sphériques. (ℓ^2 est l'opérateur moment cinétique de la mécanique quantique.)

(3.8) est une équation aux valeurs propres $\ell^2 = \alpha(\alpha + 1)F$ ou F est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha(\alpha + 1)$.

Cherchons des solutions de ℓ^2 par séparation des variables :

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= A(\theta)B(\varphi). \\ B(\varphi) \left[\frac{d^2 A}{d\theta^2} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{dA}{d\theta} \right] + \frac{A(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 B}{d\varphi^2} \\ &= -\alpha(\alpha + 1)A(\theta)B(\varphi). \end{aligned}$$

ou encore :

$$\frac{\sin^2 \theta}{A} \left[\frac{d^2 A}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dA}{d\theta} \right] + \alpha(\alpha + 1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{B} \frac{d^2 B}{d\varphi^2} = m^2$$

D'ou le système

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 \theta}{A} \left[\frac{d^2 A}{d\theta^2} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{dA}{d\theta} \right] + \alpha(\alpha + 1) \sin^2 \theta - m^2 = 0 \\ \frac{d^2 B}{d\varphi^2} + m^2 B = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La solution de la deuxième équation de (3.9) est :

$$B(\varphi) = B_1 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi \quad (3.10)$$

La première équation de (3.9) peut s'écrire :

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 A}{d\theta^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{dA}{d\theta} + [\alpha(\alpha + 1) \sin^2 \theta - m^2]A = 0 \quad (3.11)$$

Posons

$$\cos \theta \frac{dA}{d\theta} = -\frac{dA}{du} \sin \theta; \quad \frac{d^2 A}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{dA}{du} + \sin^2 \theta \frac{d^2 A}{du^2}$$

L'équation de (3.11) devient :

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u^2) \frac{dA}{du} \right] + \left[\alpha(\alpha + 1) - \frac{m^2}{1 - u^2} \right] A = 0 \quad (3.12)$$

Pour α non entier, on obtient des solutions qui tendent vers l'infini quand $u \rightarrow -1$, les seules solutions physiquement admissibles sont donc celles pour lesquelles $\alpha = n \in \mathbb{N}$, cette équation différentielle a pour solutions les polynômes de Legendre associés définis par, avec

$$|m| \leq n :$$

$$P_n^m(u) = \frac{1}{2^n n!} (1 - u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{du^{n+m}} (u^2 - 1)^n \quad (3.13)$$

P_n^m et P_n^{-m} sont 2 fonctions propres correspondant à la même valeur propre $n(n+1)$, mais en réalité, ils sont proportionnels. On a en effet la relation :

$$P_n^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{n+m!} P_n^m(u)$$

Posons

$$Y_n^{mc}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi); Y_n^{ms}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi)$$

Les Y_n^{mc} et Y_n^{ms} sont les fonctions propres de ℓ^2 associés à la valeur propre $n(n+1)$. pour n fixé, il y a $(2n+1)$ fonctions Y_n^{mc} [Y_n^{ms}].

En combinant (3.7)(3.10) et (3.13), on obtient une solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques :

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(cr^n + \frac{d}{r^{n+1}} \right) \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\varphi + b_n^m \sin \varphi) P_n^m(\cos \theta) \quad (3.14)$$

Bibliographie

- [1] G. Jobert J. Coulomb. *Traité de géophysique interne*. Masson, Paris, 1975.
- [2] V. Smirnov. *Cours de mathématiques supérieures, T2*. Mir, Moscou, 1970.
- [3] R. Spiegel Y. Murray. *Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites*. Série Schaum, Ediscience, 1980.