الـــجمهـــورية الجـــــــــزائرية الديمـــــــــقراطـــية الشـــــــعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة عمار ثليجي – الأغواط -
كليـة التكنولوجيا
قسم العلوم التقنية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji – Laghouat
Faculté de Technologie
Département des sciences techniques

دروس

المقياس : رياضيات2

السداسي الثاني

مستوى السنة الأولى

جذع مشترك علوم و تقنيات

إعداد الأستاذ : مصبـاح قــدور

جامعة عمار ثليجي بالأغواط K.mosbah@lagh-univ.dz

السنة الجامعية: 2025-2024

الفهرس العام

مقدمة.....ص04

الفصل الأول: المصفوفات و المحددات ص05

1-1. المصفوفات (تعريفات و عمليات) ص06

2-1. المصفوفات و التطبيقات الخطية.....ص28

1-2-1. المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي.....ص28

2-2-1. التطبيق الخطي المرافق بمصفوفة.....ص29

3-1. مصفوفة العبور ص36

4-1. رتبة مصفوفة.....ص42

5-1. المحددات.....ص48

1-5-1. تطبيقات لحساب المحددات.....ص55

الفصل الثاني: حل جمل المعادلات الخطية.....ص61

1-2. مفاهيم عامة ص62

2-2. دراسة مجموعة الحلول.....ص63

3-2. طرق حل جمل المعادلات الخطية ص64

1-3-2. حل جمل معادلات خطية ذات "n" معادلة و "n" مجهول.....ص64

1-1-3-2. طريقة كـرامـر.....ص64

2-1-3-2. طريقة مقلوب مصفوفة.....ص65

3-1-3-2. طريقة غـوص.....ص68

2-3-2. حل جمل معادلات خطية ذات "n" معادلة و "m" مجهول.....ص70

1-2-3-2. طريقة تحويل الجملة لـكـرامـر.....ص70

2-3-2-2. طريقة تحويل غوص.....ص78

الفصل الثالث: التكاملات.....ص81

1-3. قابلية التكامل بمفهوم ريمان ص83

2-3. التكامل الغير محدود ض87

3-3. التكامل المحدود ص89

4-3. طرق حساب التكامل.....ص90

5-3. تكامل الدوال الناطقة.....ص93

6-3. تكامل الدوال المثلثية و الأسية.....ص104

الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية.....ص112

1-4. المعادلات التفاضلية العادية ص113

2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.....ص113

1-2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة.....ص114

2-2-4. المعادلات التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى.....ص115

3-2-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى ص118

4-2-4. المعادلات التفاضلية لبرنولي.....ص124

5-2-4. المعادلات التفاضلية لـريكـاتي ص126

3-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.....ص128

قائمة مراجع ص143

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم و الصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين وبعد:

تتضمن هذه المطبوعة دروسا لمقياس مقرر رياضيات2 وفق مفردات عرض التكوين وهي مخصصة لطلاب السنة الاولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا وهي عبارة على دروس وعدة امثلة وتمارين محلولة بطرق وبراهين جديدة ومختلفة لحل العديد من المسائل ، كما يجد الطالب الجامعي تلخيصا لاهم التعاريف والنظريات الواجب معرفتها حتى يتسنى له فهم واستيعاب هذه المادة. و تركت للطالب ذي المستوى الجيد حل بعض التمارين ، و لتتاح له الفرصة لمقارنة نتائجه مع الحلول المعروضة و بعدة طرق في بعض الاحيان.

إن هذه المطبوعة و كأي نتاج علمي لا تخلو من النواقص و الهفوات ، وكل أملنا أن تسهم في تطوير العمل البيداغوجي والبحث العلمي و إثراء معلومات طلبتنا الاعزاء.

و الله الموفق.

الدكتور: مصبـــاح قـــدور.

الفصل الأول:

المصفوفات و المحددات

1-1. المصفوفات:

تعريف: ليكن IK حقلا و ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، m ، نأخذ جميع المقادير السلمية a_{ij} من الحقل IK حيث:

$i = 1,2,3,...,m$ و $j = 1,2,3,...,\mathrm{n}$ و لنشكل الجدول التالي: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

نسمي هذا الجدول **مصفوفة** و نرمز لها أحيانا بالرمز $A = (a_{ij})$ و العناصر a_{ij} تسمى عوامل المصفوفة، و تسمى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول سطرا و تسمى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عمودا و نقول عندئذ أن المصفوفة A هي ذات m سطر و n عمود و نقول كذلك أن المصفوفة A من الدرجة (أو الصنف) $m \times n$.

أو إذا كتبنا $A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ بحيث $1 \le i \le m$ تسمى أسطر A و بالتالي فإن i يرمز الى السطر الموجود فيه العنصر a_{ij} ،

و إذا كتبنا كذلك $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}$ بحيث $1 \le j \le n$ تسمى أعمدة A و بالتالي فإن j يرمز الى السطر الموجود فيه العنصر a_{ij}.

تساوي مصفوفتين: لتكن A و B مصفوفتين من نفس الصنف او النمط $m \times n$، نقول أن المصفوفتين A و B متساويتين إذا كانت عناصرهما (عواملهما) فيما بينهما متساوية على الترتيب أي: $a_{ij} = b_{ij}$ بحيث: $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ و نكتب : $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

مثال: لتكن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} +10 & +3 \\ +2 & +5 \\ +6 & -3 \end{pmatrix}_{(3,2)}$ و $B = \begin{pmatrix} 2x^2 + x & +3 \\ x & +5 \\ +6 & 2x-7 \end{pmatrix}_{(3,2)}$. عين قيمة x حتى تتساوى المصفوفتين A و B.

- الحل: لاحظ اولا ان المصفوفتين A و B من نفس الصنف او النمط $(3,2)$. و ثانيا ان تكون العناصر (عواملهما) فيما بينهما متساوية على الترتيب. اي تحقق المعادلات التالية في ان واحد: $\begin{cases} 2x^2 + x = +10 \ldots\ldots(1) \\ x = +2 \quad \ldots\ldots(2) \\ 2x - 7 = -3 \quad \ldots\ldots(3) \end{cases}$. وبحل هذه المعادلات نجد ان: قيمة x هي : $x = +2$.

المصفوفة الصفرية: نسمي مصفوفة صفرية (أو معدومة)، المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار و نرمز لها بالرمز 0 و نكتب : $0=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

ملاحظة: المصفوفة الصفرية مصفوفة تناظرية و ضد تناظرية في ان واحد.

فضاء المصفوفات من نفس الصنف: ليكن IK حقلا و $m,n\in\mathbb{N}^*$ ، نرمز لمجموعة المصفوفات من الصنف $m\times n$ بالرمز $M_{m\times n}(IK)$ و نعرف في $M_{m\times n}(IK)$ مايلي:

ا. الجمع: لتكن $A,B\in M_{m\times n}(IK)$. نعرف جمع او طرح مصفوفتين اذا وفقط اذا كانا من نفس الصنف او النمط وجمع او طرح العناصر(عواملهما) فيما بينهما على الترتيب ونكتب:

$$A+B=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}+\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

مثال: لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & +2 & 0\\ -2 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ ، $B=\begin{pmatrix}+3 & +4 & +2\\ +1 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ من نفس النمط $(2,3)$ و بالتالي:

$$(i)\ A+B=\begin{pmatrix}-1 & +2 & 0\\ -2 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}+\begin{pmatrix}+3 & +4 & +2\\ +1 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)+(+3) & (+2)+(+4) & (0)+(+2)\\ (-2)+(+1) & (0)+(0) & (+1)+(+1)\end{pmatrix}_{(2,3)}=\begin{pmatrix}+2 & +6 & +2\\ -1 & 0 & +2\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$$

$$(ii)\ A-B=\begin{pmatrix}-1 & +2 & 0\\ -2 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}-\begin{pmatrix}+3 & +4 & +2\\ +1 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)-(+3) & (+2)-(+4) & (0)-(+2)\\ (-2)-(+1) & (0)-(0) & (+1)-(+1)\end{pmatrix}_{(2,3)}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$$.

ب. جداء مصفوفة بعدد حقيقي: لتكن $A\in M_{m\times n}(IK)$ و $\alpha\in\mathbb{R}$. نعرف جداء مصفوفة A بالعدد الحقيقي α المصفوفة:

$$\alpha.A=A.\alpha=\alpha.\left(\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\right)=\begin{pmatrix}\alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} & \cdots & \alpha.a_{1n}\\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} & \cdots & \alpha.a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha.a_{m1} & \alpha.a_{m2} & \cdots & \alpha.a_{mn}\end{pmatrix}.$$

مثال: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+2 & -2 & +6\\ -2 & 0 & +4\\ +4 & 0 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ و $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}$، لدينا:

$$\alpha.A=\left(-\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+2 & -2 & +6\\ -2 & 0 & +4\\ +4 & 0 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-1 & +1 & -3\\ +1 & 0 & -2\\ -2 & 0 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

خواص:

1. $\forall A,B\in M_{m\times n}(IK):\ A+B=B+A$.
2. $\forall A,B,C\in M_{m\times n}(IK):\ (A+B)+C=A+(B+C)$.
3. $\forall A\in M_{m\times n}(IK),\exists!0\in M_{m\times n}(IK):\ A+0=0+A=A$.
4. $\forall A\in M_{m\times n}(IK),\exists!(-A)\in M_{m\times n}(IK):\ \begin{cases}A+(-A)=0\\ et\\ (-A)+A=0\end{cases}$.

و منه نستنتج أن: $\left(M_{m\times n}(IK),+\right)$ زمرة تبديلية.

5. $\forall A\in M_{m\times n}(IK):\ A\times 1_{IK}=1_{IK}\times A=A$.
6. $\forall A,B\in M_{m\times n}(IK),\ \forall\alpha\in IK:\ \alpha\times(A+B)=\alpha\times A+\alpha\times B$.
7. $\forall A\in M_{m\times n}(IK),\ \forall\alpha,\beta\in IK:\ (\alpha+\beta)\times A=\alpha\times A+\beta\times A$.
8. $\forall A\in M_{m\times n}(IK),\ \forall\alpha,\beta\in IK:\ (\alpha\times\beta)\times A=\alpha\times(\beta\times A)$.

و منه نستنتج أن: $\left(M_{m\times n}(IK),+,\times\right)$ فضاء شعاعي على الحقل IK.

جداء أو ضرب المصفوفات: ليكن $A=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)\in IK^n$ و ليكن كذلك $B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in IK^n$

نعرف ان: $A\times B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\left(a_1\times b_1+a_2\times b_2+a_3\times b_3+...+a_n\times b_n\right)\in IK$.

تعريف: لتكن $B\in M_{l\times k}(IK)$ و $A\in M_{m\times n}(IK)$. يكون جـداء المصفوفتين $A_{(m,n)}\times B_{(l,\mathrm{k})}$ محقق إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة "n" المصفوفة الاولى A يساوي عدد أسطر "l" المصفوفة الثانية B .

اي ان: ($A_{(m,n)}\times B_{(l,\mathrm{k})}$ محقق) $\Leftrightarrow \left[n\overset{?}{=}l\right]$.

ملاحظات:

1 . لا يمكن إجراء الجداء $A\times B$ إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية B .

2. إذا كان $B\in M_{l\times k}(IK)$ و $A\in M_{m\times l}(IK)$ فإن: $A\times B\in M_{m\times k}(IK)$.

3. جـداء المصفوفات ليس تبديلي عموما في مجموعة المصفوفات. اي ان: $A\times B\neq B\times A$.

4. إذا كان: $0\in M_{l\times k}(IK)$ و $A\in M_{m\times l}(IK)$ و $B\in M_{k\times t}(IK)$ فإن: $A\times 0=0$ و $0\times B=0$.

أمثلة: 1 . لتكن $A=\begin{pmatrix}+1 & 0\\+2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ و $B=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\+3 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$.

- نلاحظ أن عدد أعمدة "2" المصفوفة A تساوي عدد أسطر "2" المصفوفة B إذن:

نستطيع حساب $(A\times B)_{(2,3)}$:

$$A.B=\begin{pmatrix}+1 & 0\\+2 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\+3 & +1 & 0\end{pmatrix}$$

$$.=\begin{pmatrix}(+1).(+1)+(0).(+3) & (+1).(+2)+(0).(+1) & (+1).(+1)+(0).(0)\\(+2).(+1)+(+3).(+3) & (+2).(+2)+(+3).(+1) & (+2).(+1)+(+3).(0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\+11 & +7 & +2\end{pmatrix}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$$

اي ان: $A\,.\,B=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\+11 & +7 & +2\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$.

- المصفوفة $(B.A)$ غيـر معرفة لأن عدد أعمدة "3" المصفوفة B لا يساوي عدد أسطر"2" المصفوفة A .و بالتالي لا يمكن حساب الجداء $(B.A)$.

2 . لتكن $B=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ و $A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ فإن:

$$A.B=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}.\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}(+1).(+1)+(+2).(+1) & (+1).(+2)+(+2).(+3)\\ (0).(+1)+(+3).(+1) & (0).(+2)+(+3).(+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3 & +8\\ +3 & +9\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

$$B.A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}.\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}(+1).(+1)+(+2).(0) & (+1).(+2)+(+2).(+3)\\ (+1).(+1)+(+3).(0) & (+1).(+2)+(+3).(+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1 & +8\\ +1 & +11\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

- لاحظ ان: $B.A=\begin{pmatrix}+1 & +8\\ +1 & +11\end{pmatrix}_{(2,2)}\neq A.B=\begin{pmatrix}+3 & +8\\ +3 & +9\end{pmatrix}_{(2,2)}$. و بالتالي الجـداء ليس تبديلي عموما في مجموعة المصفوفات.

3 . لتكن $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}\in M_{(3,2)}(\mathbb{R})$ و $A=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\ 0 & +3 & +4\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ فإن:

$$A.0=A=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\ 0 & +3 & +4\end{pmatrix}_{(2,3)}.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}(+1).(0)+(+2).(0)+(+1).(0) & (+1).(0)+(+2).(0)+(+1).(0)\\ (0).(0)+(+3).(0)+(+4).(0) & (0).(0)+(+3).(0)+(+4).(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

اي ان: $A.0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{(2,2)}=0_{\mathbb{R}^2}$.

تمرين:

نعتبر المصفوفات الحقيقية التالية: $C=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}$ ، $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$H=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}$ ، $G=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}$ ، $F=\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}$ ، $E=\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\end{pmatrix}$ ، $D=\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}$.

- احسب كل المجاميع و الجداءات الممكنة.

- الحل: ا) <u>المجاميع الممكنة</u>:

$$i)\ B_{(2,3)}+H_{(2,3)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+7 & 0 & +4\\ 0 & +3 & +6\end{pmatrix}_{(2,3)} .$$

$$ii)\ C_{(3,3)}+F_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2 & -2 & +3\\ -1 & +1 & +2\\ +2 & 0 & +4\end{pmatrix}_{(3,3)} .$$

ب) <u>الجداءات الممكنة</u>:

$$1)\ A_{(2,2)}.B_{(2,3)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}=0_{(2,3)} .$$

$$2)\ A_{(2,2)}.H_{(2,3)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0_{(2,3)} .$$

$$3)\ B_{(2,3)}.C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+11 & -12 & +22\\ +5 & 0 & +11\end{pmatrix}_{(2,3)} .$$

$$4)\ B_{(2,3)}.D_{(3,1)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2\\ -1\end{pmatrix}_{(2,1)} .$$

$$5)\ B_{(2,3)}.F_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,3)}=B_{(2,3)} .$$

$$.6)\ B_{(2,3)}.G_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+6 & +4\\ +5 & -3\end{pmatrix}_{(2,2)}$$

$$.7)\ G_{(3,2)}.B_{(2,3)}=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+6 & 0 & +5\\ +12 & -2 & +4\\ +6 & -2 & -1\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

لاحظ ان: $B.G\neq G.B$.

$$.8)\ B_{(2,3)}.F_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+6 & -1 & +2\\ 0 & +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,3)}=B_{(2,3)}$$

$$.9)\ C_{(3,3)}.D_{(3,1)}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -3\\ -1\end{pmatrix}_{(3,1)}$$

$$.10)\ C_{(3,3)}.F_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}=C_{(3,3)}$$

$$.11)\ C_{(3,3)}.G_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ +1 & -3\\ +5 & -1\end{pmatrix}_{(3,2)}$$

$$.12)\ D_{(3,1)}.E_{(1,3)}=\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +4\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

لاحظ ان: $D.E\neq E.D$ .13) $E_{(1,3)}.D_{(3,1)}=\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}_{(1,1)}$.

$$.14)\ E_{(1,3)}.C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3 & 0 & +8\end{pmatrix}_{(1,3)}$$

$$.15)\ E_{(1,3)}.G_{(3,2)}=\begin{pmatrix}0 & +1 & +2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+4 & -2\end{pmatrix}_{(1,2)}$$

$$.16)\ G_{(3,2)}.H_{(2,3)}=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1 & +3 & +5\\ +2 & +2 & +4\\ +1 & -1 & -1\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

$$.17)\ H_{(2,3)}.G_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\\ +1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+5 & -1\\ +7 & -3\end{pmatrix}_{(2,2)}$$

لاحظ ان: $G.H\neq H.G$.

$$.18)\ H_{(2,3)}.C_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & -2 & +3\\ -1 & 0 & +2\\ +2 & 0 & +3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+4 & -2 & +11\\ +4 & 0 & +13\end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$.19)\ H_{(2,3)}.D_{(3,1)}=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +2\\ 0 & +2 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1\\ +2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1\\ +1\end{pmatrix}_{(2,1)}$$

منقول مصفوفة: لتكن المصفوفة $A\in M_{m\times n}(IK)$ ، نسمي منقول مصفوفة A و نرمز لها بالرمز A^t المصفوفة التي نحصل عليها بجعل الأسطر المصفوفة A أعمدة و الأعمدة المصفوفة A اسطر.

اي ان: اذا كانت $A\in M_{m\times n}(IK)$ فإن: $A^t\in M_{n\times m}(IK)$.

مثال: لتكن المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +4\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +3\\ +4 & +5 & +6\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

و بالتالي: $.i)\ A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +4\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\Leftrightarrow A^t=\begin{pmatrix}+1 & +3\\ +2 & +4\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$.ii)\ B=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +3\\ +4 & +5 & +6\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})\Leftrightarrow B^t=\begin{pmatrix}+1 & +4\\ +2 & +5\\ +3 & +6\end{pmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

خواص منقول مصفوفة:

1. $\forall A\in M_{m\times n}(IK):\ \left(A^t\right)^t=A$.
2. $\forall A,B\in M_{m\times n}(IK):\ (A\pm B)^t=A^t\pm B^t$.
3. $\forall A,B\in M_{m\times n}(IK):\ A=B\Leftrightarrow A^t=B^t$.

4 . $\forall A \in M_{m\times p}(IK), \forall B \in M_{p\times n}(IK): \ (A.B)^t = B^t . A^t$.

5 . $\forall A \in M_{m\times n}(IK), \forall \alpha \in IK: \ (\alpha . A)^t = \alpha . A^t$.

أمثلة:

1 . لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ يكون لدينا: $A^t = \begin{pmatrix} -1 & +3 \\ +2 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. وبالتالي:

$$\left(A^t\right)^t = \left(\begin{pmatrix} -1 & +3 \\ +2 & -4 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} = A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

2 . لتكن المصفوفتين $B = \begin{pmatrix} +2 & -2 & +3 \\ +5 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} \in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ و $A = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ +3 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} \in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$.

$$i)\ A+B = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ +3 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} + \begin{pmatrix} +2 & -2 & +3 \\ +5 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} +3 & 0 & +4 \\ +8 & +2 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

يكون لدينا:

$$\Rightarrow \left(A+B\right)^t = \begin{pmatrix} +3 & +8 \\ 0 & +2 \\ +4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(3,2)}(\mathbb{R}).$$

$$ii)\ A^t = \begin{pmatrix} +1 & +3 \\ +2 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}_{(3,2)}, \ B^t = \begin{pmatrix} +2 & +5 \\ -2 & +1 \\ +3 & 0 \end{pmatrix}_{(3,2)}$$

$$\Rightarrow A^t + B^t = \begin{pmatrix} +3 & +8 \\ 0 & +2 \\ +4 & 0 \end{pmatrix} = \left(A+B\right)^t \in M_{(3,2)}(\mathbb{R}).$$

وبنفس الكيفية بالنسبة لعملية الطرح:

$$iii)\ A+B = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ +3 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} - \begin{pmatrix} +2 & -2 & +3 \\ +5 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} -1 & +4 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$\Rightarrow \left(A-B\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ +4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(3,2)}(\mathbb{R}).$$

$$iiii)\ A^t=\begin{pmatrix}+1 & +3\\ +2 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}\ ,\ B^t=\begin{pmatrix}+2 & +5\\ -2 & +1\\ +3 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}$$

.

$$\Rightarrow A^t-B^t=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ +4 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}=(A-B)^t\in M_{(3,2)}(\mathbb{R}).$$

3 . لتكن المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}+1 & -1 & +2\\ -2 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ و $B=\begin{pmatrix}+1 & -1\\ +1 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}\in M_{(3,2)}(\mathbb{R})$.

لدينا ان:

$$i)\ A.B=\begin{pmatrix}+1 & -1 & +2\\ -2 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\begin{pmatrix}+1 & -1\\ +1 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+2 & -2\\ -1 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$$

.

$$\Rightarrow (A.B)^t=\begin{pmatrix}+2 & -2\\ -1 & +3\end{pmatrix}^t_{(2,2)}=\begin{pmatrix}+2 & -1\\ -2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}.....(1)$$

$$ii)\ A=\begin{pmatrix}+1 & -1 & +2\\ -2 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}+1 & -2\\ -1 & +1\\ +2 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}\in M_{(3,2)}(\mathbb{R})\ ,$$

$$B=\begin{pmatrix}+1 & -1\\ +1 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})\ .$$

$$\Rightarrow B^t.A^t=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}.\begin{pmatrix}+1 & -2\\ -1 & +1\\ +2 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+2 & -1\\ -2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{(2,2)}(\mathbb{R}).....(2)$$

من (1) و (2) نجد ان: $(A.B)^t=B^t.A^t$.

4 . لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+2 & -2 & +6\\ -2 & 0 & +4\\ +4 & 0 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ و $\alpha=\left(-\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{R}$ ، لدينا:

$$A=\begin{pmatrix}+2 & -2 & +6\\ -2 & 0 & +4\\ +4 & 0 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}+2 & -2 & +4\\ -2 & 0 & 0\\ +6 & +4 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

$$i)\ \alpha\ .\ A=\left(-\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+2 & -2 & +6\\ -2 & 0 & +4\\ +4 & 0 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-1 & +1 & -3\\ +1 & 0 & -2\\ -2 & 0 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

.

$$\Rightarrow (\alpha.A)^t=\begin{pmatrix}-1 & +1 & -3\\ +1 & 0 & -2\\ -2 & 0 & +3\end{pmatrix}^t_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-1 & +1 & -2\\ +1 & 0 & 0\\ -3 & -2 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).....(1)$$

$$.\ ii)\ \alpha.A^t=\left(-\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+2 & -2 & +4\\ -2 & 0 & 0\\ +6 & +4 & -6\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-1 & +1 & -2\\ +1 & 0 & 0\\ -3 & -2 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).....(2)$$

من (1) و (2) نجد ان: $(\alpha\ .\ A)^t = \alpha\ .\ A^t$.

المصفوفات المربعة: نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة مربعــة إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها . و نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بـ: $M_n(IK)$, où : $M_{n\times n}(IK)$.و نكتب:

$$A\in M_n(IK) \Rightarrow A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} .$$

مثال: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +3 & -4\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ مصفوفة مربعة من الصنف او النمط 2×2 على الحقل $\mathbb{R}$.

القطر الرئيسي لمصفوفة مربعة: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\in M_n(IK)$

فإن: العوامل او القيم $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & a_{22} & \cdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ تسمى الـقـطـر الرئيسي للمصفوفة A.

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} +1 & -2 & +4 \\ -2 & -3 & +1 \\ +2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. القطر الرئيسي للمصفوفة A هو: $\begin{pmatrix} +1 & & \\ & -3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

أثر مصفوفة: لتكن المصفوفة <u>المربعة</u> $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(IK)$.

نسمي أثر المصفوفة A هو <u>العدد الحقيقي</u> او <u>العدد المركب</u> و نرمز له بالرمز: $Trace(A)$ و هو مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A و نكتب:

$$Trace(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (a_{11}+a_{22}+a_{33}+....+a_{nn}) \in IK=\mathbb{R}, où : \mathbb{C}.$$

مثال: إذا كانت $A=\begin{pmatrix} +1 & -2 & +4 \\ -2 & -3 & +1 \\ +2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ فإن:

$$Trace(A)=\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = (a_{11}+a_{22}+a_{33}) = (+1)+(-3)+(-1) = (-3) \in IK=\mathbb{R}.$$

خواص أثر مصفوفة:

1. $\forall A \in M_n(IK):\ Trace(A^t) = Trace(A)$.
2. $\forall A,B \in M_n(IK):\ Trace(A \pm B) = Trace(A) \pm Trace(B)$.
3. $\forall A,B \in M_n(IK):\ Trace(A\,.\,B) = Trace(B\,.\,A)$.

4 . $\forall A \in M_n(IK)\ ,\ \forall \alpha \in IK :\ \ Trace(\alpha\ .\ A) = \alpha\ .\ Trace(A)$.

المصفوفة القطرية: نقول عن مصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(IK)$ أنها قطرية

إذا تحقق: $\forall i \neq j :\ \ a_{ij} = 0$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(IK), \forall i \neq j :\ \ a_{ij} = 0$

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ، المصفوفة A تسمى مصفوفة قطرية.

المصفوفة المثلثية: نقول عن المصفوفة المربعة $A \in M_n(IK)$ أنها **مثلثية علوية** إذا كانت عناصرها التي تقع تحت القطر الرئيسي أصفار. أي: $\forall i > j :\ a_{ij} = 0$. و نكتب:

$$. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ...0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(IK)$$

و نقول عن المصفوفة المربعة $A \in M_n(IK)$ أنها **مثلثية سفلية** إذا كانت عناصرها التي تقع فوق القطر الرئيسي أصفار. أي: $\forall\ j > i :\ a_{ij} = 0$. و نكتب:

$$. A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & & 0 \\ a_{41} & a_{42}.....a_{44} & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(IK)$$

المصفوفة الحيادية او الوحدة: هي كل مصفوفة مربعة $A \in M_n(IK)$ و نرمز لها بـ :

I_n تحقق : $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ +1 & , i = j \end{cases}$. ونكتب:

$$I_n = \begin{pmatrix} +1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & +1 & 0... & 0 \\ 0 & 0 & +1...0... & 0 \\ 0 & .... & 0.....+1...0 & 0 \\ 0 & .... & 0.....+1 & 0 \\ 0 & 0.... & ....0....0.....0 & +1 \end{pmatrix}$$

(n يمثل عدد الاسطر و الاعمدة) .

مثال:

- مصفوفة الحيادية او الوحدة في الفضاء $\mathbb{R}^2$ هي: $I_2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix}$.

- مصفوفة الحيادية الوحدة في الفضاء $\mathbb{R}^3$ هي: $I_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix}$.

المصفوفة السلمية: هي كل مصفوفة $A \in M_n(IK)$ تحقق: $a_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \alpha & , i = j \end{cases}$. إذن:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & 0... & 0 \\ 0 & 0 & \alpha...0... & 0 \\ 0 & .... & 0.....\alpha...0 & 0 \\ 0 & .... & 0.....\alpha & 0 \\ 0 & 0.... & ....0....0.....0 & \alpha \end{pmatrix}, \forall \alpha \in IK$$

- إذا كان: $\alpha = +1$ فإن: $A = I_n$ و إذا كان: $\alpha = 0$ فإن: $A = 0$.

المصفوفة التناظرية (أو المتماثلة): لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_n(IK)$.

تكون A مصفوفة تناظرية إذا تحقق: $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = 1,2,3,...,n, \forall j = 1,2,3,...,n$. اي: $A^t \overset{?}{=} A$.

(اي عناصر المصفوفة A تكون متناظرة بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي لها).

أمثلة: 1 . المصفوفة الحيادية او الوحدة I_n مصفوفة متناظرة و كذلك المصفوفة الصفرية $0_{\mathbb{R}^n}$.

2 . المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +4\\ -2 & -3 & +1\\ +4 & +1 & -1\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة لان:

$$A^t=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +4\\ -2 & -3 & +1\\ +4 & +1 & -1\end{pmatrix}^t_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1 & -2 & +4\\ -2 & -3 & +1\\ +4 & +1 & -1\end{pmatrix}_{(3,3)}=A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

المصفوفة ضد تنـاظرية (أو المتخالفة): لتكن المصفوفة المربعة $A\in M_n(IK)$.

تكون A مصفوفة ضد تنـاظـرية إذا تحقق: $\forall i=1,2,3,...,n, \forall j=1,2,3,...,n$, $a_{ij}=-a_{ji}$. اي:

$A^t \overset{?}{=} -A$. (اي عناصر المصفوفة A تكون متعاكسة في الاشارة بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي الصفرية لها). اي ان: $\left(\forall i=1,2,3,...,n \ , \ i=j\Rightarrow\left(a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii}=0\Rightarrow a_{ii}=0\right)\right)$.

أمثلة: 1. المصفوفة الصفرية $0_{\mathbb{R}^n}$ هي مصفوفة ضد تناظرية.

2 . المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0 & +2 & -4\\ -2 & 0 & -1\\ +4 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. ضد تناظرية لان:

$$A^t=\begin{pmatrix}0 & +2 & -4\\ -2 & 0 & -1\\ +4 & +1 & 0\end{pmatrix}^t_{(3,3)}=\begin{pmatrix}0 & -2 & +4\\ +2 & 0 & +1\\ -4 & -1 & 0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & +2 & -4\\ -2 & 0 & -1\\ +4 & +1 & 0\end{pmatrix}=-A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad .$$

تمرين: لتكن المصفوفة المربعة $A\in M_n(IK)$ ، بين ان: $A=B+C$ بحيث: $B\in M_n(IK)$ مصفوفة تناظرية ($B^t=B$) و $C\in M_n(IK)$ مصفوفة ضد تناظرية ($C^t=-C$).

الحل: إيجاد المصفوفتين C و B بحيث: $A=B+C....(1)$ و منه:

$A^t=(B+C)^t=B^t+C^t=B+(-C)=B-C \Rightarrow A^t=B-C....(2)$. وبحل الجملة التالية:

$$(*):\begin{cases}A=B+C.....(1)\\ A^t=B-C....(2)\end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} (A+A^t)=2.B\Rightarrow B=\frac{1}{2}(A+A^t)....(3)$$ و كذلك:

$(*)$: $\begin{cases} A = B + C \ldots..(1) \\ A^t = B - C \ldots.(2) \end{cases}$ $\overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} \left(A - A^t\right) = 2.C \Rightarrow C = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \ldots.(4)$ و التالي:

* المصفوفة تناظرية ($B^t = B$) تحسب بالعبارة: $B = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) \ldots.(3)$.

** المصفوفة ضد تناظرية ($C^t = -C$) تحسب بالعبارة: $C = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \ldots.(4)$.

مثال تطبيقي : لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +3 \\ +4 & +5 & +6 \\ +7 & +8 & +9 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ، اوجد المصفوفتين

$B \in M_n(IK)$ مصفوفة تناظرية ($B^t = B$) و $C \in M_n(IK)$ مصفوفة ضد تناظرية ($C^t = -C$)

بحيث: $A = B + C$. **الحل:** إيجاد المصفوفتين C و B بحيث: $A = B + C \ldots.(1)$ و منه:

* المصفوفة تناظرية ($B^t = B$) تحسب بالعبارة: $B = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) \ldots.(3)$. اي ان:

$$B = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} +1 & +2 & +3 \\ +4 & +5 & +6 \\ +7 & +8 & +9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 & +4 & +7 \\ +2 & +5 & +8 \\ +3 & +6 & +9 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +2 & +6 & +10 \\ +6 & +10 & +14 \\ +10 & +14 & +18 \end{pmatrix}$$

.

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} +1 & +3 & +5 \\ +3 & +5 & +7 \\ +5 & +7 & +9 \end{pmatrix} \ldots.(*) \Rightarrow B^t = B$$

** المصفوفة ضد تناظرية ($C^t = -C$) تحسب بالعبارة: $C = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \ldots.(4)$. اي ان:

$$C = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} +1 & +2 & +3 \\ +4 & +5 & +6 \\ +7 & +8 & +9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +1 & +4 & +7 \\ +2 & +5 & +8 \\ +3 & +6 & +9 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ +2 & 0 & -2 \\ +4 & +2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \\ +2 & +1 & 0 \end{pmatrix} \ldots.(**) \Rightarrow C^t = -C$$

و تحققان: $B + C = \begin{pmatrix} +1 & +3 & +5 \\ +3 & +5 & +7 \\ +5 & +7 & +9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ +1 & 0 & -1 \\ +2 & +1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +3 \\ +4 & +5 & +6 \\ +7 & +8 & +9 \end{pmatrix} = A$.

حلقة المصفوفات المربعة:

نعلم أن $(M_n(IK),+)$ زمرة تبديلية ، و لدينا كذلك الخواص التالية:

1 . $\forall A,B,C\in M_n(IK): A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$.

2 . $\forall A,B,C\in M_n(IK): \begin{cases} A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C) \\ (A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C) \end{cases}$.

إذن نستنتج أن: $(M_n(IK),+,\times)$ **حلقة** ليست تبديلية لأن جداء المصفوفات ليس تبديلي.

و لدينا كذلك $\forall A\in M_n(IK): A\times I_n=I_n\times A=A$. إذن I_n هي العنصر الحيادي بالنسبة لضرب المصفوفات ومنه نستنتج أن: $(M_n(IK),+,\times)$ **حلقة واحدية**.

المصفوفة القابلة للقلب (أو العكوسة):

تعريف: لتكن المصفوفة المربعة $A\in M_n(IK)$. نقول عن مصفوفة A أنها قابلة للقلب إذا تحقق:

$$\forall A\in M_n(IK),\exists!K\in M_n(IK): A\times K \overset{(1)}{=} K\times A \overset{(2)}{=} I_n \Rightarrow K=A^{-1}.$$

عندئذ نقول أن المصفوفة A قابلة للقلب (عكوسة) في الحلقة $(M_n(IK),+,\times)$ و نسمي المصفوفة A^{-1} نظير المصفوفة A بالنسبة للعملية الثانية $(\times)$ في الحلقة $(M_n(IK),+,\times)$ ، و نرمز لها بالرمز A^{-1} و نرمز كذلك لمجموعة المصفوفات القابلة للقلب (العكوسة) بالرمز $M_n(IK)^*=GL_n(IK)$.

مثال: بين أن المصفوفة المربعة: $A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +1\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ قابلة للقلب و عين مقلوبها A^{-1} .

- المصفوفة المربعة A قابلة للقلب يكافىء:

$$\forall A\in M_2(\mathbb{R}),\exists!K\in M_2(\mathbb{R}): A\times K \overset{(1)}{=} K\times A \overset{(2)}{=} I_2=\begin{pmatrix}+1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}\Rightarrow K=A^{-1}.$$

- نضع: $K=\begin{pmatrix}x & y\\ x_1 & y_1\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ، و نبحث عن القيم: $x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}$ بحيث:

$$i)\ A\,.\,K \overset{(1)}{=} I_2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$. \Rightarrow \begin{cases} x+2x_1 = +1....(1) \\ y+2y_1 = 0.....(2) \\ x+x_1 = 0.....(3) \\ y+y_1 = +1.....(4) \end{cases} \overset{(1)-(3)}{\Rightarrow} x_1 = +1 \overset{(3)}{\Rightarrow} x = -1.$$

$$\overset{(2)-(4)}{\Rightarrow} y_1 = -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} y = +2. \Rightarrow K = \begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}_{(2,2)} = A^{-1}.$$

و بنفس الكيفية للمساواة الثانية نجد ان مقلوب المصفوفة A هي:

$$A^{-1} = K = \begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}_{(2,2)} .$$ وتحقق:

$$i)\ A\,.\,A^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = I_2.$$

.

$$ii)\ A^{-1}.\,A = \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = I_2.$$

تمرين01: لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ +4 & -3 & +4 \\ +3 & -3 & +4 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

اوجد المصفوفة A^2 وبين ان المصفوفة A قابلة للقلب ثم استنتج مقلوبها.

- **الحل:** حساب المصفوفة A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ +4 & -3 & +4 \\ +3 & -3 & +4 \end{pmatrix}_{(3,3)} . \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ +4 & -3 & +4 \\ +3 & -3 & +4 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} = I_3 .$$

- نلاحظ ان: $\begin{cases} A\,.\,A = I_3 \\ sous\ forme \\ A\,.\,K = I_3 \end{cases}$. إذن: المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو:

$$K = A^{-1} = A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ +4 & -3 & +4 \\ +3 & -3 & +4 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

تمرين02: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix}0 & +1 & -1\\ -3 & +4 & -3\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. احسب المصفوفات $(A^2-3A),(A-3.\mathrm{I}_3)$.
2. إستنتج ان المصفوفة A قابلة للقلب ثم عين مقلوبها.

- **الحل: 1 . ا)** حساب المصفوفة A^2 :

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}0 & +1 & -1\\ -3 & +4 & -3\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}.\begin{pmatrix}0 & +1 & -1\\ -3 & +4 & -3\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-2 & +3 & -3\\ -9 & +10 & -9\\ -3 & +3 & -2\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

ب) حساب المصفوفة $(A^2-3.\mathrm{A})$:

$$\left(A^2-3.\mathrm{A}\right)=\begin{pmatrix}-2 & +3 & -3\\ -9 & +10 & -9\\ -3 & +3 & -2\end{pmatrix}_{(3,3)}-3.\begin{pmatrix}0 & +1 & -1\\ -3 & +4 & -3\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}_{(3,3)}=(-2).I_3$$

جـ) حساب المصفوفة $(A-3.\mathrm{I}_3)$:

$$\left(A-3.\mathrm{I}_3\right)=\begin{pmatrix}0 & +1 & -1\\ -3 & +4 & -3\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}-3.\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}-3 & +1 & -1\\ -3 & +1 & -3\\ -1 & +1 & -3\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

2 . إستنتاج ان المصفوفة A قابلة للقلب: حسب ب) نلاحظ ان:

$$\begin{cases}\left(A^2-3.\mathrm{A}\right)=(-2).I_3\\ sous\ forme;\\ A.K=I_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A.\underbrace{\left(\frac{1}{-2}\right)(A-3.I_3)}_{K}=I_3\\ sous\ forme;\\ A.\ K\ =I_3\end{cases}\Rightarrow K=A^{-1}$$

اي ان: $A.\underbrace{\left(\frac{1}{-2}\right)(A-3.I_3)}_{K}=I_3$. إذن: المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو:

$$K = A^{-1} = \left(\frac{1}{-2}\right).(A-3.I_3) = \left(-\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}-3 & +1 & -1\\ -3 & +1 & -3\\ -1 & +1 & -3\end{pmatrix}_{(3,3)} = \left(+\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+3 & -1 & +1\\ +3 & -1 & +3\\ +1 & -1 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)}.$$

تمرين03: لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix}+1 & +2 & +2\\ +2 & +1 & +2\\ +2 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1 . احسب المصفوفات التالية: $(A-4.\mathrm{I}_3)$ ، $(-5.\mathrm{I}_3)$ ، $(-4.A)$ ، A^2 . ثم تأكد ان:

$$A^2 - 4.A - 5.I_3 \overset{?}{=} 0_{\mathbb{R}^3}.$$

2 . إستنتج ان المصفوفة A قابلة للقلب ثم عين مقلوبها.

- **الحل: 1 . ا)** حساب المصفوفة A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix}+1 & +2 & +2\\ +2 & +1 & +2\\ +2 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} . \begin{pmatrix}+1 & +2 & +2\\ +2 & +1 & +2\\ +2 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix}+9 & +8 & +8\\ +8 & +9 & +8\\ +8 & +8 & +9\end{pmatrix}_{(3,3)}.$$

ب) حساب المصفوفتين $(-4.\mathrm{A})$ و $(-5.\mathrm{I}_3)$:

$$(-4.\mathrm{A}) = (-4).\begin{pmatrix}+1 & +2 & +2\\ +2 & +1 & +2\\ +2 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix}-4 & -8 & -8\\ -8 & -4 & -8\\ -8 & -8 & -4\end{pmatrix}_{(3,3)}. \text{ و } (-5.\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}_{(3,3)}.$$

جـ) حساب المصفوفة $(A-5.\mathrm{I}_3)$:

$$(A-4.\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix}+1 & +2 & +2\\ +2 & +1 & +2\\ +2 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} - 4.\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix}-3 & +2 & +2\\ +2 & -3 & +2\\ +2 & +2 & -3\end{pmatrix}_{(3,3)}.$$

د) التأكد من العبارة: $A^2 - 4.A - 5.I_3 \overset{?}{=} 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$A^2-4.A-5.I_3=\begin{pmatrix}+9&+8&+8\\+8&+9&+8\\+8&+8&+9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-8&-8\\-8&-4&-8\\-8&-8&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

.

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}...(*)$$

2 . <u>إستنتاج ان المصفوفة</u> A قابلة للقلب: حسب د) نلاحظ ان:

$$\begin{cases}\left(A^2-4.\mathrm{A}-5.\mathrm{I}_3\right)=0_{\mathbb{R}^3}\\ sous\ forme;\\ A.K=I_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(A^2-4.A\right)=+5.I_3\\ sous\ forme;\\ A.\ K\ =I_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A.\left(A-4.I_3\right)=+5.I_3\\ sous\ forme;\\ A.\ K\ =I_3\end{cases}$$

.

$$\Rightarrow\begin{cases}A.\left(\frac{1}{5}\right).\left(A-4.I_3\right)=.I_3\\ sous\ forme;\\ A.\ K\ =I_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A.\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right).\left(A-4.I_3\right)=I_3}_{K}\\ sous\ forme;\\ A.\ K\ =I_3\end{cases}\Rightarrow K=A^{-1}$$

اي ان: $A.\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)\left(A-4.I_3\right)}_{K}=I_3$. إذن: المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو:

$$.K=A^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right).\left(A-4.I_3\right)=\left(\frac{1}{5}\right).\begin{pmatrix}-3&+2&+2\\+2&-3&+2\\+2&+2&-3\end{pmatrix}_{(3,3)}=\left(+\frac{1}{5}\right).\begin{pmatrix}-3&+2&+2\\+2&-3&+2\\+2&+2&-3\end{pmatrix}_{(3,3)}$$

وتحقق:

$$i)\ A\ .\ A^{-1}=\begin{pmatrix}+1&+2&+2\\+2&+1&+2\\+2&+2&+1\end{pmatrix}.\left(+\frac{1}{5}\right).\begin{pmatrix}-3&+2&+2\\+2&-3&+2\\+2&+2&-3\end{pmatrix}=$$

.

$$=\left(+\frac{1}{5}\right).\begin{pmatrix}+1&+2&+2\\+2&+1&+2\\+2&+2&+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3&+2&+2\\+2&-3&+2\\+2&+2&-3\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{5}\right).\begin{pmatrix}+5&0&0\\0&+5&0\\0&0&+5\end{pmatrix}=I_3.$$

نظرية: لتكن المصفوفتين المربعتين $A,B\in M_n(IK)$.

1 . إذا كانت A و B مصفوفتين قابلتين للقلب فإن: $A\times B$ قابلة للقلب وعندئذ لدينا:

$(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$. و نقول أن: $B^{-1}\times A^{-1}$ نظير $A\times B$ بالنسبة للعملية $(\times)$ في الحلقة $(M_n(IK),+,\times)$.

2 . إذا كانت A قابلة للقلب فإن: A^p قابلة للقلب و $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\left(A^p\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^p$.

مثال1: لتكن المصفوفتين:

$A=\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +3 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو: $A^{-1}=\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +3 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$. و

$B=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو: $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}_{(2,2)}$.

- بما أن A و B قابلتين للقلب فإن: $A.B$ قابلة للقلب ومقلوبها هو:

$$(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}_{(2,2)}.\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +3 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$$

.

$$=\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & +1\\ +3 & +1\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix}+7 & +1\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

مثال2: لتكن المصفوفة $B=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة قابلة للقلب فإن:

$B^2=B.B=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +1 & +1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3 & +4\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}$, $(p=2)$ قابلة للقلب ومقلوبها هو:

$$\left(B^2\right)^{-1}=\left(B^{-1}\right)^2=B^{-1}.B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}_{(2,2)}.\begin{pmatrix}-1 & +2\\ +1 & -1\end{pmatrix}_{(2,2)}=\begin{pmatrix}+3 & -4\\ -2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

2-1. المصفوفات و التطبيقات الخطية:

1-2-1. المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي:

ليكن V_1 ف ش على الحقل IK و $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ أساس له، إذن: $\dim V_1=n$. و ليكن V_2 ف ش على الحقل IK و $B'=\{w_1,w_2,w_3,...,w_p\}$ أساس له، إذن: $\dim V_2=p$. و ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي إذن لدينا :

$$f(v_1)\in V_2 \Rightarrow f(v_1)=a_{11}.w_1+a_{21}.w_2+a_{31}.w_3+....+a_{p1}.w_p .$$

$$f(v_2)\in V_2 \Rightarrow f(v_2)=a_{21}.w_1+a_{22}.w_2+a_{32}.w_3+....+a_{p2}.w_p .$$

.....

.....

.....

$$f(v_n)\in V_2 \Rightarrow f(v_n)=a_{1n}.w_1+a_{2n}.w_2+a_{3n}.w_3+....+a_{pn}.w_p .$$

بحيث: $\forall j=1,2,3,...,n$, $\forall i=1,2,3,...,p$, $a_{ij}\in IK$ فإن: المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}\in M_{p\times n}(IK)$$ تسمى " المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f " بالنسبة للأساس B في V_1 و الأساس B' في V_2 و نرمز لها أحيانا بالرمز: $A=M_B^{B'}(f)$.

ملاحظة: ان:

" عدد أسطر المصفوفة A " يساوي $\dim V_2=p$ و " عدد أعمدة المصفوفة A " يساوي $\dim V_1=n$.

مثال1:

ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف كما يلي: $f(x,y)=(x-y\ ,\ 2x+y\ ,\ x+3y)$. و لتكن

$B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ أساس قانوني لـ: $\mathbb{R}^2$ و لتكن كذلك

$B'=\{l_1=(+1,0,0)\ ,\ l_2=(0,+1,0)\ ,\ l_3=(0,0,+1)\}$ أساس قانوني لـ: $\mathbb{R}^3$. إذن لدينا:

$$\begin{cases} f(e_1)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow f(e_1)=a_{11}.l_1+a_{21}.l_2+a_{31}.l_3 \\ f(e_1)=f(+1,0)=(+1,+2,+1)=a_{11}.(+1,0,0)+a_{21}.(0,+1,0)+a_{31}.(0,0,+1) \end{cases}$$ و .

$$\Rightarrow a_{11}=+1\ ,\ a_{21}=+2,\ a_{31}=+1.$$

$$\begin{cases} f(e_2)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow f(e_2)=a_{12}.l_1+a_{22}.l_2+a_{32}.l_3 \\ f(e_2)=f(0,+1)=(-1,+1,+3)=a_{12}.(+1,0,0)+a_{22}.(0,+1,0)+a_{32}.(0,0,+1) \end{cases}$$.

$$\Rightarrow a_{12}=-1\ ,\ a_{22}=+1,\ a_{32}=+3.$$

و منه المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي:

$$A=M_B^{B'}(f)=M_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^3}(f)=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ +1 & -1 \\ +2 & +1 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}.$$

2-2-1. التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}\in M_{p\times n}(IK)$.

ليكن V_1 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته "n" و $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ أساس له، إذن: $\dim V_1=n$.

و ليكن V_2 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته "p" و $B'=\{w_1,w_2,w_3,...,w_p\}$ أساس له، إذن:

$\dim V_2=p$ ومنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:V_1\to V_2$ و لدينا:

$$\forall v\in V_1: v=x_1.v_1+x_2.v_2+x_3.v_3+....+x_n.v_n$$
$$\Rightarrow f(v)=x_1.f(v_1)+x_2.f(v_2)+x_3.f(v_3)+....+x_n.f(v_n)$$. و لدينا من جهة أخرى:

$$f(v_1)\in V_2 \Rightarrow f(v_1)=a_{11}.w_1+a_{21}.w_2+a_{31}.w_3+....+a_{p1}.w_p$$.

$$f(v_2)\in V_2 \Rightarrow f(v_2)=a_{21}.w_1+a_{22}.w_2+a_{32}.w_3+....+a_{p2}.w_p$$.

.....

.....

.....

$$f(v_n) \in V_2 \Rightarrow f(v_n) = a_{1n}.w_1 + a_{2n}.w_2 + a_{3n}.w_3 + ... + a_{pn}.w_p .$$

ومنه ينتج:

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1.f(v_1) + x_2.f(v_2) + x_3.f(v_3) + ... + x_n.f(v_n) \\ &= x_1.\left[a_{11}.w_1 + a_{21}.w_2 + a_{31}.w_3 + ... + a_{p1}.w_p\right] + \\ &+ x_2.\left[a_{21}.w_1 + a_{22}.w_2 + a_{32}.w_3 + ... + a_{p2}.w_p\right] + \\ &+ .... + x_n.\left[a_{1n}.w_1 + a_{2n}.w_2 + a_{3n}.w_3 + ... + a_{pn}.w_p\right] = \\ &= \underbrace{\left(x_1.a_{11} + x_2.a_{21} + ... + x_n.a_{1n}\right)}_{y_1}.w_1 + ... + \underbrace{\left(x_1.a_{p1} + x_2.a_{p2}\right)}_{y_p}.w_p \end{aligned} .$$

ومنه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو: $f(v) = y_1.w_1 + y_2.w_2 + y_3.w_3 + ... + y_p.w_p$

بحيث:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \,.\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

ملاحظة: في كثير من الأحيان نعين التطبيق f على أنه التطبيق الخطي $f : IK^n \to IK^p$ المعرف

كما يلي:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \,.\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in IK^n : .$$

مثال1: لتكن $A = \begin{pmatrix} +2 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,3)} \in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $IK = \mathbb{R}$ أساسه القانوني

$B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ أساسه القانوني $IK=\mathbb{R}$ الحقل على ش ف $\mathbb{R}^3$ و

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $B'=\{l_1=(+1,0,0)\ ,\ l_2=(0,+1,0)\ ,\ l_3=(0,0,+1)\}$

و لدينا: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=x.l_1+y.l_2+z.l_3\Rightarrow f(x,y,z)=x.f(l_1)+y.f(l_2)+z.f(l_3)$.

من جهة أخرى لدينا:

$$f(l_1)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow f(l_1)=a_{11}.e_1+a_{21}.e_2\Rightarrow f(l_1)=(+2,0)=a_{11}.(+1,0)+a_{21}.(0,+1)=(a_{11},a_{21})$$
$$\Rightarrow f(l_1)=(a_{11},a_{21})=(+2,0)$$

$$f(l_2)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow f(l_2)=a_{12}.e_1+a_{22}.e_2\Rightarrow f(l_2)=(+1,+1)=a_{12}.(+1,0)+a_{22}.(0,+1)=(a_{12},a_{22})$$
$$\Rightarrow f(l_2)=(a_{12},a_{22})=(+1,+1)$$

$$f(l_3)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow f(l_3)=a_{13}.e_1+a_{23}.e_2\Rightarrow f(l_3)=(-1,+1)=a_{13}.(+1,0)+a_{23}.(0,+1)=(a_{13},a_{23})$$
$$\Rightarrow f(l_3)=(a_{13},a_{23})=(-1,+1)$$

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=x.l_1+y.l_2+z.l_3\Rightarrow f(x,y,z)=x.f(l_1)+y.f(l_2)+z.f(l_3)$$

ومنه: $f(x,y,z)=x.f(l_1)+y.f(l_2)+z.f(l_3)=x.(+2,0)+y.(+1,+1)+z.(-1,+1)$.

$$\Rightarrow f(x,y,z)=x.(+2,0)+y.(+1,+1)+z.(-1,+1)=(+2x+y-z\ ,\ y+z).$$

اي ان: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(+2x+y-z\ ,\ y+z)$ و هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A.

- او نحسب التطبيق الخطي f مباشرة أي:

$$\forall v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\Rightarrow f(v)=y_1.e_1+y_2.e_2:\ \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2&+1&-1\\0&+1&+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1=2x+y-z\\y_2=y+z\end{cases}\Rightarrow f(x,y,z)=y_1.e_1+y_2.e_2=(2x+y-z).e_1+(y+z).e_2$$
$$\Rightarrow f(x,y,z)=(2x+y-z).(+1\ ,\ 0)+(y+z).(0\ ,\ +1)=(+2x+y-z\ ,\ y+z)$$
$$\Rightarrow f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(+2x+y-z\ ,\ y+z).$$

و بالتالي التطبيق الخطي f هو: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(+2x+y-z\ ,\ y+z)$.

مثال2: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & +1\\ +2 & 0 & +2\\ +1 & -1 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}\in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني $B=\{e_1=(+1,0,0)\,,\,e_2=(0,+1,0)\,,\,e_3=(0,0,+1)\}$ و $\mathbb{R}^4$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني $B'=\{l_1=(+1,0,0,0)\,,\,l_2=(0,+1,0,0)\,,\,l_3=(0,0,+1,0)\,,\,l_4=(0,0,0,+1)\}$. ومنه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو التطبيق $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف كما يلي:

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=A.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & +1\\ +2 & 0 & +2\\ +1 & -1 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=(-x+z\ ,\ +2x+2z\ ,\ x-y+2z\ ,\ z)\ .$$

اي ان: $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(-x+z\ ,\ +2x+2z\ ,\ x-y+2z\ ,\ z)$ و هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A.

مثال3: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+2 & +1 & -1\\ 0 & +1 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني $B=\{l_1=(+1,+1)\,,\,l_2=(+2,+1)\}$. و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني $B=\{e_1=(+1,0,0)\,,\,e_2=(0,+1,0)\,,\,e_3=(0,0,+1)\}$ فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ المعرف كما يلي:

و لدينا: $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y,z)=x.e_1+y.e_2+z.e_3\Rightarrow f(x,y,z)=x.f(e_1)+y.f(e_2)+z.f(e_3)$.

ومن جهة أخرى لدينا:

$$f(e_1)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow f(e_1)=a_{11}.l_1+a_{21}.l_2\Rightarrow f(e_1)=(+2,0)=a_{11}.(+1,+1)+a_{21}.(+2,+1)=$$
$$.\ =(a_{11}+2a_{21}\ ,\ a_{11}+a_{21})\Rightarrow f(e_1)=(a_{11}+2a_{21},a_{11}+a_{21})=(+2,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+2a_{21}=+2\\ a_{11}+a_{21}\ \ =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=-2\\ a_{21}=+2\end{cases}$$

$$f(e_2)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow f(e_2)=a_{12}.l_1+a_{22}.l_2 \Rightarrow f(e_2)=(+1,+1)=a_{12}.(+1,+1)+a_{22}.(+2,+1)$$
$$=(a_{12}+2a_{22}\ ,\ a_{12}+a_{22}) \Rightarrow f(e_2)=(+1,+1)=(a_{12}+2a_{22},a_{12}+a_{22})=(+1,+1)\ .$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12}+2a_{22}=+1 \\ a_{12}+a_{22}\ =+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12}=+1 \\ a_{22}=\ 0 \end{cases}$$

$$f(e_3)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow f(e_3)=a_{13}.l_1+a_{23}.l_2 \Rightarrow f(e_3)=(-1,+1)=a_{13}.(+1,+1)+a_{23}.(+2,+1)$$
$$=(a_{13}+2a_{23}\ ,\ a_{13}+a_{23}) \Rightarrow f(e_3)=(-1,+1)=(a_{13}+2a_{23}\ ,\ a_{13}+a_{23})\ .$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{13}+2a_{23}=-1 \\ a_{13}+a_{23}\ =+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{13}=+3 \\ a_{23}=-2 \end{cases}$$

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=x.e_1+y.e_2+z.e_3 \Rightarrow f(x,y,z)=x.f(e_1)+y.f(e_2)+z.f(e_3)$$

ومنه:
$$\Rightarrow f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) \\ -2 & +1 & +3 \\ +2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$$
$$=(-2x+y+3z\ ,\ +2x-2z).$$

اي ان: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:\ (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(-2x+y+3z\ ,\ +2x-2z)$ و هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A.

مثال4: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. عين التطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A

بالنسبة للأساس القانوني $\{1,x\}$ للمجموعة $\mathbb{R}_1[x]$ و الأساس القانوني $\{1,x,x^2\}$ للمجموعة $\mathbb{R}_2[x]$.

بما أن $\mathbb{R}_1[x]$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ وأساسه $\{1,x\}$ و $\mathbb{R}_2[x]$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ و أساسه $\{1,x,x^2\}$ فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ومنه:

$$\forall P(x)\in\mathbb{R}_1[x]:\ P(x)=\ a_0.1+a_1.x\ \ ,\ a_0,a_1\in\mathbb{R} \Rightarrow f(P(x))=b_0.1+b_1.x+b_2.x^2$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=A.\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0=a_0 \\ b_1=a_1 \\ b_2=a_0+a_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(P(x))=b_0.1+b_1.x+b_2.x^2=a_0.1+a_1.x+(a_0+a_1).x^2$$

اي ان: $f:\mathbb{R}_1[x]\to\mathbb{R}_2[x]:\ P(x)\mapsto f\left(P(x)\right)=a_0.1+a_1.x+\left(a_0+a_1\right).x^2$ و هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

خواص:

ليكن V_1 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته"n" و $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ أساس له، إذن: $\dim V_1=n$.

و ليكن V_2 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته "p" و $B'=\{w_1,w_2,w_3,...,w_p\}$ أساس له، إذن: $\dim V_2=p$. و ليكن V_3 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته "k" و $B_1=\{u_1,u_2,u_3,...,u_k\}$ أساس له، إذن: $\dim V_3=k$.

1 . $A+B=M_B^{B'}(f+g)=M_B^{B'}(f)+M_B^{B'}(g)$. معناه أن: $(A+B)$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $(f+g)$.

مثال: ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)=(x+y,2x)$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $IK=\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ والمصفوفة المرافقة للتطبيق f وفق الأساس القانوني B هي: $A=M_B^B(f)=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\end{pmatrix}_{(2,2)}$.

و ليكن $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ g(x,y)=(x+y,2x+y)$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $IK=\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ والمصفوفة المرافقة للتطبيق g وفق الأساس القانوني B هي: $B=M_B^B(g)=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$.

- **الطريقة الأولى لحساب مجموع مصفوفتين:**

$$(A+B)=M_B^B(f)+M_B^B(g)=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & 0\end{pmatrix}_{(2,2)}+\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +2 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}=\begin{pmatrix}+2 & +2\\ +4 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

- **<u>الطريقة الثانية لحساب مجموع مصفوفتين</u>**: (نقوم بجمع التطبيقين)

لدينا: $(f+g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)=$$
$$=(x+y,2x)+(x+y,2x+y)=(2x+2y,4x+y)$$

المصفوفة المرافقة للتطبيق $(f+g)$ وفق الأساس القانوني B هي:

$$(A+B)=M_B^B(f+g)=\begin{pmatrix}+2 & +2\\ +4 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

2 . $(\alpha.A)=M_B^{B'}(\alpha.f)=\alpha\,.\,M_B^{B'}(f)$. معناه أن: $\alpha.A$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $(\alpha.f)$.

3 . $M_B^{B'}(f_0)=0_{IK}$. حيث: 0_{IK} هي المصفوفة الصفرية المرافقة للتطبيق المعدوم $f_0=0$.

4 . $(B\times A)=M_B^{B_1}(g\circ f)=M_B^{B'}(g)\times M_{B'}^{B_1}(f)$. أي أن: $(B\times A)$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $(g\circ f)$ تساوي B المصفوفة المرافقة للتطبيق g ضرب A المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

<u>مثال:</u> ليكن $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بالشكل: $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2:\ f(x,y)=(x+y,\ y,\ x)$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $IK=\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ ، أساسه القانوني $B'=\{e_1=(+1,0,0)\ ,\ e_2=(0,+1,0)\ ,\ e_3=(0,0,+1)\}$.

المصفوفة المرافقة للتطبيق f وفق الأساس القانوني B هي: $A=M_B^{B'}(f)=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ 0 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}$.

و ليكن $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ g(x,y,z)=(x+y,2x+y)$. والمصفوفة المرافقة للتطبيق g وفق الأساس القانوني B هي: $B=M_{B'}^B(g)=\begin{pmatrix}+1 & +1 & 0\\ +2 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}$.

- **الطريقة الأولى لحساب جداء مصفوفتين:** $(B.A)=M_B^B(g\circ f)=M_B^{B'}(g).M_{B'}^B(f)$.

اي ان: $(B.A)=M_B^B(g\circ f)=\begin{pmatrix}+1 & +1 & 0\\ +2 & +1 & 0\end{pmatrix}_{(2,3)}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ 0 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}_{(3,2)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}$.

- **الطريقة الثانية لحساب جداء مصفوفتين:** (تركيـب تطبيقين)

لدينا: $(g\circ f):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (g\circ f)(x,y)=g\left[f(x,y)\right]=g\left[(x+y,\ y,\ x)\right]=g\left[(t_1,t_2,t_3)\right]$$
$$=(t_1+t_2\ ,\ 2t_1+t_2)=\left((x+y)+y\ ,\ 2(x+y)+y\right)=(x+2y\ ,\ 2x+3y).$$

المصفوفة المرافقة للتطبيق $(g\circ f)$ وفق الأساس القانوني B هي:

$$B.A=M_B^B(g\circ f)=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

5 . I_n هي المصفوفة الحيادية او الوحدة المرافقة للتطبيق الحيادي Id_V .

نتيجة: ليكن $f:V_1\to V_2$ تطبيق خطي و $A=M_B^{B'}(f)$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f .إن:

(f تقابلي) $\Leftrightarrow$

(المصفوفة $A=M_B^{B'}(f)$ قابلة للقلب والمصفوفة المرافقة للتطبيق f^{-1} هي $A^{-1}=M_{B'}^B\left(f^{-1}\right)$).

3-1. مصفوفة العبور (الإنـتـقــال):

ليكن V_1 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته"n" و $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ و $B'=\{w_1,w_2,w_3,...,w_n\}$ اساسيين له .

بما أن B' أساس للفضاء الشعاعي V_1 فإن: $(w_i)_{1\le i\le n}$ هو مزج خطي للأشعة $\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ أي:

$$w_1\in V_1\Rightarrow w_1=a_{11}.v_1+a_{21}.v_2+a_{31}.v_3+....+a_{n1}.v_n$$
$$w_2\in V_1\Rightarrow w_2=a_{21}.v_1+a_{22}.v_2+a_{32}.v_3+....+a_{n2}.v_n$$
$$.....$$
$$.....$$
$$.....$$
$$w_n\in V_1\Rightarrow w_n=a_{n1}.v_1+a_{n2}.v_2+a_{n3}.v_3+....+a_{nn}.v_n$$

فإن المصفوفة: $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(IK)$ تسمى " مصفوفة العبور او الانتقال " من

الأساس $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ إلى الأساس $B'=\{w_1,w_2,w_3,...,w_n\}$.

مثال1: ليكن $V_1=\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $IK=\mathbb{R}$ و $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ أساسه القانوني و

أساس اخر له . و منه: $B'=\{w_1=(+1,-1,+1)\ ,\ w_2=(+2,-1,0)\ ,\ w_3=(+3,0,0)\}$

$$w_1=(+1,-1,+1)\in V_1\Rightarrow w_1=(+1,-1,+1)=a_{11}.e_1+a_{21}.e_2+a_{31}.e_3$$

$$.\ w_1=(+1,-1,+1)=a_{11}.(+1,0,0)+a_{21}.(0,+1,0)e_2+a_{31}.(0,0,+1)=(a_{11},a_{21},a_{31})$$

$$\Rightarrow a_{11}=+1\ ,\ a_{21}=-1,\ a_{31}=+1.$$

$$w_2=(+2,-1,0)\in V_1\Rightarrow w_2=(+2,-1,0)=a_{12}.e_1+a_{22}.e_2+a_{32}.e_3$$

$$.\ w_2=(+2,-1,0)=a_{12}.(+1,0,0)+a_{22}.(0,+1,0)e_2+a_{32}.(0,0,+1)=(a_{12},a_{22},a_{32})$$

$$\Rightarrow a_{12}=+2\ ,\ a_{22}=-1,\ a_{32}=0.$$

$$w_3=(+3,0,0)\in V_1\Rightarrow w_3=(+3,0,0)=a_{31}.e_1+a_{32}.e_2+a_{33}.e_3$$

$$.\ w_3=(+3,0,0)=a_{31}.(+1,0,0)+a_{32}.(0,+1,0)e_2+a_{33}.(0,0,+1)=(a_{31},a_{32},a_{33})$$

$$\Rightarrow a_{31}=+3\ ,\ a_{32}=0,\ a_{33}=0.$$

ومنه مصفوفة العبور او الانتقال من الأساس B إلى الأساس B' هي:

$$.\ P=M_B^{B'}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ +1 & +2 & +3 \\ -1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3,3)}$$

مثال2:

ليكن $B=\{v_1=(+1,+2)\ ,\ v_2=(+1,+1)\}$ أساس للمجموعة $\mathbb{R}^2$ على الحقل $IK=\mathbb{R}$ ،

$B'=\{\ w_1=(+2,+1)\ ,\ w_2=(+2,+3)\ \}$ أساس أخر لنفس المجموعة على الحقل $IK=\mathbb{R}$ ،

لدينا ان:

$$w_1=(+2,+1)\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow w_1=(+2,+1)=a_{11}.v_1+a_{21}.v_2$$

$$w_1=(+2,+1)=a_{11}.(+1,+2)+a_{21}.(+1,+1)=(a_{11}+a_{21},\ +2a_{11}+a_{21})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+a_{21}&=+2\\2a_{11}+a_{21}&=+1\end{cases}\Rightarrow a_{11}=-1\ ,\ a_{21}=+3.$$

$$w_2=(+2,+3)\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow w_2=(+2,+3)=a_{12}.v_1+a_{22}.v_2$$

$$w_2=(+2,+3)=a_{12}.(+1,+2)+a_{22}.(+1,+1)=(a_{12}+a_{22},\ +2a_{12}+a_{22})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{12}+a_{22}&=+2\\2a_{12}+a_{22}&=+3\end{cases}\Rightarrow a_{12}=+1\ ,\ a_{22}=+1.$$

ومنه مصفوفة العبور او الانتقال من الأساس B إلى الأساس B' هي:

$$P=M_B^{B'}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix}w_1&w_2\\a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}_{(2,2)}=\begin{pmatrix}w_1&w_2\\-1&+1\\+3&+1\end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

مثال3: (المسالة العكسية)

لتكن $P=\begin{pmatrix}v_1&v_2\\+1&+4\\-1&+2\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة العبور من الأساس القانوني $B=\{e_1=(+1,0)\ ,\ e_2=(0,+1)\}$ إلى الأساس $B'=\{v_1\ ,\ v_2\}$ للفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $IK=\mathbb{R}$، أوجد أشعة الأساس $B'=\{v_1\ ,\ v_2\}$.

لدينا ان:

$$v_1\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow v_1=a_{11}.e_1+a_{21}.e_2$$

$$v_1=a_{11}.(+1,0)+a_{21}.(0,+1)=(a_{11}\ ,\ a_{21})\Rightarrow v_1=(a_{11}\ ,\ a_{21})\overset{P}{=}(+1\ ,\ -1).$$

$$v_2\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow v_2=a_{12}.e_1+a_{22}.e_2$$

$$v_2=a_{12}.(+1,0)+a_{22}.(0,+1)=(a_{12}\ ,\ a_{22})\Rightarrow v_2=(a_{12}\ ,\ a_{22})\overset{P}{=}(+4\ ,\ +2).$$

ملاحظات:

1 . مصفوفة العبور P من الأساس B إلى الأساس B' هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي Id_{V_1} وبما أن التطبيق الحيادي Id_{V_1} تقابلي فإن: P قابلة للقلب إذن: P^{-1} موجودة و هي بذلك مصفوفة العبور من الأساس B' إلى الأساس B.

مثال: (نأخذ المثال2) . وجدنا في المثال2 مصفوفة العبور من الأساس $B=\{v_1=(+1,+2)\ ,\ v_2=(+1,+1)\}$ إلى الأساس $B'=\{w_1=(+2,+1)\ ,\ w_2=(+2,+3)\}$ هي

$$P=M_B^{B'}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)}=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -1 & +1 \\ +3 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

ولدينا: $$P^{-1}=M_{B'}^{B}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)}=\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ +3 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

(يمكن التأكد من ان: $P.P^{-1}=P^{-1}.P=I_2$).

- لنبحث عن مصفوفة العبور من الأساس $B'=\{w_1=(+2,+1)\ ,\ w_2=(+2,+3)\}$ إلى الأساس $B=\{v_1=(+1,+2)\ ,\ v_2=(+1,+1)\}$. لدينا ان:

$$v_1=(+1,+2)\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow v_1=(+1,+2)=a_{11}.w_1+a_{21}.w_2$$

$$v_1=(+1,+2)=a_{11}.(+2,+1)+a_{21}.(+2,+3)=(+2a_{11}+2a_{21},\ a_{11}+3a_{21}).$$

$$\Rightarrow\begin{cases}+2a_{11}+2a_{21}&=+1\\ a_{11}+3a_{21}&=+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}+2a_{11}+2a_{21}&=+1\\ -2a_{11}-6a_{21}&=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{11}=+\frac{3}{4}\\ a_{21}=-\frac{1}{4}\end{cases}.$$

$$v_2=(+1,+1)\in V_1=\mathbb{R}^2\Rightarrow v_2=(+1,+1)=a_{21}.w_1+a_{22}.w_2$$

$$v_2=(+1,+1)=a_{21}.(+2,+1)+a_{22}.(+2,+3)=(+2a_{21}+2a_{22},\ a_{21}+3a_{22}).$$

$$\Rightarrow\begin{cases}+2a_{21}+2a_{22}&=+1\\ a_{21}+3a_{22}&=+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}+2a_{21}+2a_{22}&=+1\\ -2a_{21}-6a_{22}&=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{21}=+\frac{1}{4}\\ a_{22}=+\frac{1}{4}\end{cases}.$$

ومنه مصفوفة العبور او الانتقال من الأساس B' إلى الأساس B هي:

$$P^{-1}=M_{B'}^{B}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)}=\left(\frac{1}{4}\right).\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ +3 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)}.$$

2 . ليكن V_1 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته "n" و $B=\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ و

$B' = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ اساسيين له . لدينا:

$$\forall v \in V_1 \Rightarrow v = x_1.w_1 + x_2.w_2 + x_3.w_3 + ... + x_n.w_n \ ; \ (x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow v = y_1.v_1 + y_2.v_2 + y_3.v_3 + ... + y_n.v_n$$

بحيث: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = P^t \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

نظرية:

ليكن V_1 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته"n" و $B = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ و $B_1 = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$ اساسيين له ، ليكن V_2 ف ش على الحقل IK ذو بعد منته"n" و $B' = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ و $B_1' = \{u_1', u_2', u_3', ..., u_p'\}$ اساسيين له ، بحيث P مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس B_1 و Q مصفوفة العبور من الأساس B' إلى الأساس B_1' ، و ليكن $f : V_1 \to V_2$ تطبيق خطي و A المصفوفة المرافقة له بالنسبة للأساس B في V_1 و الأساس B' في V_2 لدينا: $V_1 \xrightarrow{Id_{V_1}} V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{Id_{V_2}^{-1}} V_2$.

$$B = M_{B_1}^{B_1'}\left(Id_{V_2}^{-1} \circ f \circ Id_{V_1}\right) = M_{B'}^{B_1'}\left(Id_{V_2}^{-1}\right) \times M_{B}^{B'}(f) \times M_{B_1}^{B}\left(Id_{V_1}\right)$$
$$\Rightarrow B = Q^{-1}.A.P$$

مثال: ليكن $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل IK و أساسه القانوني B و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل IK و أساسه القانوني B' و ليكن $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = (x+y, \ x, \ y)$ و. $A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}_{(3,2)}$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f.

و ليكن $B_1 = \{v_1 = (+1,+2), v_2 = (+2,+3)\}$ أساس أخر للفضاء $\mathbb{R}^2$ ، إذن مصفوفة العبور من

الأساس B إلى الأساس B_1 هي: $P=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}$ ، و ليكن

$B_1^{/}=\{u_1=(+1,-1,+1)\ ,\ u_2=(+2,-1,0)\ ,\ u_3=(+3,0,0)\}$ أساس للمجموعة $\mathbb{R}^3$

و منه مصفوفة العبور من الأساس $B^{/}$ إلى الأساس $B_1^{/}$ هي: $Q=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +3\\ -1 & -1 & 0\\ +1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}$.

و مصفوفة العبور من الأساس $B_1^{/}$ إلى الأساس $B^{/}$ هي: $Q^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right).\begin{pmatrix}0 & 0 & +3\\ 0 & -3 & -3\\ +1 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}$.

و لدينا: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id_{V_1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{Id_{V_2}^{-1}} \mathbb{R}^3$.

$$B=M_{B_1}^{B_1^{/}}\left(Id_{V_2}^{-1}\circ f\circ Id_{V_1}\right)=M_{B^{/}}^{B_1^{/}}\left(Id_{V_2}^{-1}\right)\times M_{B}^{B^{/}}(f)\times M_{B_1}^{B}\left(Id_{V_1}\right)$$
$$\Rightarrow B=Q^{-1}.A.P$$

اي ان:

$$B=\left(\frac{1}{3}\right).\begin{pmatrix}0 & 0 & +3\\ 0 & -3 & -3\\ +1 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}.\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & 0\\ 0 & +1\end{pmatrix}_{(3,2)}.\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(2,2)}=$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right).\begin{pmatrix}0 & 0 & +3\\ 0 & -3 & -3\\ +1 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}.\begin{pmatrix}+3 & +5\\ +1 & +2\\ +2 & +3\end{pmatrix}_{(3,2)}=\left(\frac{1}{3}\right).\begin{pmatrix}+6 & +9\\ -9 & -15\\ +7 & +12\end{pmatrix}_{(3,2)}$$

4-1. رتبة مصفوفة:

لتكن $A=\left(A^1,A^2,A^3,...,A^n\right)=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}\in M_{p\times n}(IK)$. بحيث: $A_i=\left(a_{i1},a_{i2},a_{i3},....,a_{in}\right)$ و $1\le i\le p$

بحيث: $\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\\ \vdots\\ a_{pj}\end{pmatrix}$ $1\le j\le n$.

تعريف: رتبة مصفوفة A هي رتبة التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A و نرمز لها بـ : $rang(A)$. ونعرف كذلك: $rang(A) = \dim\langle A^1, A^2, A^3, ..., A^n\rangle = \dim\langle A_1, A_2, A_3, ..., A_p\rangle$.

خواص: لتكن $A \in M_{p\times n}(IK)$.

1 . $\forall A \in M_{p\times n}(IK):\ rang(A) = rang(A^t)$.

2 . رتبة مصفوفة A هي أكبر عدد ممكن من الاشعة سواء من أعمدتها (او من أسطرها) المستقلة خطيا و الغير معدومة. (**ملاحظة:** $\forall A \in M_{p\times n}(IK):\ 0 < rang(A) \le Min(p, n)$) .

3 . لا تتغير رتبة مصفوفة A عند إستبدال عمود (أو سطر) بأخر.

4 . لا تتغير رتبة مصفوفة A عند إضافة إلى أحد الأعمدة (او الأسطر) عبارة خطية (مزج خطي) من أعمدة (أسطر) أخرى.

طريقة عملية لتعيين رتبة مصفوفة: (تحويلات أولية)

لتكن $A \in M_{p\times n}(IK)$. بإستخدام الخاصيتين (3) و (4) نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الأول (أو السطر الأول) ما عدا العنصر الأول ثم نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الثاني (أو السطر الثاني) ما عدا العنصر الأول و الثاني ثم و هكذا ....

نتيجة: رتبة المصفوفة A تساوي عدد الاشعة سواء من أعمدتها (او من أسطرها) المستقلة خطيا و الغير معدومة المتبقاة.

ترميز: نرمز بـ: L_i الى السطر رقم i و C_i الى العمود رقم i.

مثال1: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,2)}$ ، عين رتبة المصفوفة A .

الطريقة الأولى (بإستعمال التعريف):

- التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو $f: E = \mathbb{R}^2 \to F = \mathbb{R}^2$ المعرف كما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,2)} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+3y \end{pmatrix}^t_{(2,1)} = (x+y\ ,\ x+3y) .$$

و منه صورة التطبيق الخطي f (ف. ش . جزئي من $F=\mathbb{R}^2$) المولدة بالأشعة المستقلة خطيا هي:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g(f) &= \left\{ f(x,y)\in F :\ (x,y)\in E=\mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ (x+y\ ,\ x+3y) :\ x,y\in\mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ (x,\ x)+(y\ ,\ 3y) = x.(+1,\ +1)+ y.(+1\ ,\ +3) :\ x,y\in\mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \alpha\ .\ v_1+\beta\ .\ v_2;\quad v_1=(+1,\ +1),\ v_2=(+1\ ,\ +3) :\ \alpha=x,\ \beta=y\in\mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\langle v_1=(+1,\ +1)\ , v_2=(+1\ ,\ +3) \right\rangle \subset F=\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

حيث: الشعاعين v_1 و v_2 مستقلين خطيا. و بالتالي:

$$rang(A) = rang\left(\operatorname{Im} g(f)\right) = \dim\left(\operatorname{Im} g(f)\right) = \dim F\ = \dim\mathbb{R}^2\ = 2 vecteur.$$

<u>الطريقة الثانية</u> (ف ش ج المولد بواسطة اشعة سواء من أعمدة أو من أسطر المصفوفة A):

لتكن الأشعة $v_2=(+1,+3)$ و $v_1=(+1,+1)$ و ليكن V ف ش ج من $\mathbb{R}^2$ المولد بواسطة $\{v_1, v_2\}$.

هل الأشعة $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطيا ؟

- <u>لندرس الاستقلال الخطي للشعاعين</u> v_1 و v_2 : $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha.v_1+\beta.v_2\ = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \alpha \overset{?}{=} 0 \\ \beta \overset{?}{=} 0 \end{cases}$.اي:

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha.(+1,\ +1)+\beta.(+1,\ +3)\ = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta\ =0\ ...(1) \\ \alpha+3\beta=0...(2) \end{cases} \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow}\ 2\beta=0\ \Rightarrow \beta=0\ \overset{(1)}{\Rightarrow}\ \alpha=0.$$

و منه $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساس للمجموعة V إذن: $V=\langle v_1, v_2\rangle$ و

$$rang(A) = \dim(\mathrm{V}) = 2 vecteur.$$

ملاحظة: يمكن إستعمال الخاصية (2) و دراسة الإستقلال الخطي مباشرة للجملة $\{v_1, v_2\}$.

<u>الطريقة الثالثة</u> (بإستعمال التحويلات الأولية):

$A^{(0)}=\begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\ fixé \\ L_2 \end{matrix} \xrightarrow{L_2-L_1} A^{(1)}=\begin{pmatrix} +1 & +2 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$. و من اعمدة المصفوفة المتدرجة

$A^{(1)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & +1\end{pmatrix}$ (هي مصفوفة مثلثية علوية) تحتوي على شعاعين $\vec{v_1}=(+1,0)$ و $\vec{v_2}=(+2,+1)$

مستقلين خطيا. و بالتالي: $rang(A)=2 vecteur.$.

نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الأول ماعدا العنصر الأول أي نقوم بتصفير العنصر الاول في السطر الثاني وذلك بإجراء المزج خطي L_2-L_1 (السطر الثاني نطرح منه السطر الأول نجد السطر الثاني $(0,+1)$) ، السطر الأول يبقى ثابت.

ملاحظة: السطر الذي يتغير هو السطر الذي يوجد فيه العنصر الذي نقوم بتصفيره أما باقي الأسطر فتبقى ثابتة.

مثال2: (إستعمال طريقة التحويلات الأولية)

لتكن المصفوفتين: $A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}$ و $B=\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ +1 & +1 & +2\\ +2 & +1 & +3\end{pmatrix}_{(2,3)}$. اوجد رتبة كل مصفوفة.

لدينا ان: $0<rang(A)\le Min(p\,,\,n)$. أي ان: $0<rang(A)\le Min(3\,,\,2)=2 vecteur.$.

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\ fixé\\ L_2-3L_1\\ L_3-L_1\end{matrix}\rightarrow A^{(1)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & -5\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\ fixé\\ 5.R_3-2R_2\end{matrix}\rightarrow A^{(2)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & -5\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}K_1\\ K_2\\ K_3\end{matrix}.$$

وبالتالي: عـدد الاشعة من أسطر المصفوفة المتدرجة $A^{(2)}=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ 0 & -5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ المستقلة خطيا و الغير معدومة المتبقاة هي: الشعاعين $\vec{u_1}=(+1,+2)$ و $\vec{u_2}=(0,-5)$. و منه: $rang(A)=2 vecteur.$.

- و بنفس الكيفية ان:

$0<rang(B)\le Min(p\,,\,n)$ أي ان: $0<rang(B)\le Min(2\,,\,3)=2 vecteur.$. أي ان:

$$B^{(0)}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2\ fixé & C_3 \\ +1 & +1 & +2 \\ +2 & +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,3)} \xrightarrow{C_3-2C_2} B^{(1)}=\begin{pmatrix} T_1 fixé & T_2 & T_3 \\ +1 & +1 & 0 \\ +2 & +1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

.

$$\xrightarrow{T_2-T_1} B^{(2)}=\begin{pmatrix} R_1 & R_2 fixé & R_3 \\ +1 & 0 & 0 \\ +2 & -1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,3)} \xrightarrow{R_2+R_3} B^{(3)}=\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ +1 & 0 & 0 \\ +2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

وبالتالي: عـدد الأشعة من أعمدة المصفوفة المتدرجة $B^{(3)}=\begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ +1 & 0 & 0 \\ +2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ المستقلة خطيا و الغير معدومة المتبقاة هي: الشعاعين $\vec{v_1}=(+1,+2)$ و $\vec{v_2}=(0,-1)$. و منه: $rang(B)=2 vecteur.$.

مثال3: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ +2 & +3 & +3 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$. اوجد رتبة المصفوفة A. لدينا ان:

$0<rang(A)\le Min(3,3)=3 vecteur.$ أي ان: $0<rang(A)\le Min(p,n)$. أي ان:

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ +2 & +3 & +3 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\ fixé \\ L_2-L_1 \\ L_3-2L_1 \end{matrix} \rightarrow A^{(1)}=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1 \\ R_2 fixé \\ R_3-R_2 \end{matrix} \rightarrow A^{(2)}=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$$.

وبالتالي: عـدد الاشعة من اسطر او أعمدة المصفوفة المتدرجة $A^{(2)}=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$

المستقلة خطيا و الغير معدومة المتبقاة هي: الاشعة من الاسطر $\vec{u_1}=(+1,+1,+1)$ و $\vec{u_2}=(0,+1,0)$ و $\vec{u_3}=(0,0,+1)$ او من الاعمدة $\vec{v_1}=(+1,0,0)$ و $\vec{v_2}=(+1,+1,0)$ و $\vec{v_3}=(+1,0,+1)$ و منه:

$rang(A)=3 vecteur.$.

طريقة غـوص او غـوس او قـوص Gauss لحساب مقلوب مصفوفة:

لتكن $A\in M_{n\times n}(IK)$ و $rang(A)=n$. بإستخدام الخاصيتين (3) و (4)

نقوم بتشكيل المصفوفة الموسعة $(A:I_n)$. لحساب A^{-1} (نستعمل الخاصيتين (3) و (4) من خواص الرتبة) نقوم بإحدى بالعمليات التالية:

1. مبادلة سطر (عمود) بأخر في نفس المصفوفة.

2. إضافة سطر (عمود) إلى سطر (عمود) أخر.

3. إضافة مزج خطي للأسطر (للأعمدة) إلى سطر (عمود) أخر.

4. إجراء مزج خطي لسطر (لعمود) مع سطر (عمود) أخر.

و في الأخير يجب أن نصل إلى المصفوفة الموسعة $(I_n : K)$ حيث المصفوفة K هي المصفوفة $K = A^{-1}$.

ملاحظة: العملية التي نجريها على المصفوفة A نجريها كذلك على المصفوفة الحيادية I_n.

مثال1: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,2)}$. عين المصفوفة A^{-1}.

وجدنا في مثال سابق أن: $rang(A) = 2 \overset{?}{=} vecteur \overset{?}{=} m = n$ و منه المصفوفة A^{-1} موجودة (أي ان: A قابلة للقلب او عكـوسة). و منه: نريد انطلاقا من $(A : I_n)$ ان نصل الى $(I_n : K)$.

نحصل على المصفوفة $A^{(0)} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 & 0 \\ +1 & +3 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 fixé \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 fixé \end{matrix}$. المدرجة $A^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 & +2 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}$ و هي مصفوفة مثلثية علوية (تحتوي على شعاعين من الاسطر مثلا $\overrightarrow{u_1} = (+1,+2)$ و $\overrightarrow{u_2} = (0,+1)$ مستقلين خطيا) و من خلالها نحسب رتبة المصفوفة A. اي ان: $rang(A) = 2 vecteur$. ثم نواصل التحويلات الاولية التالية:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 & 0 \\ +1 & +3 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 fixé \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 fixé \end{matrix}$$

$$\rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +3 & -2 \\ 0 & +1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \rightarrow A^{(2)} = (I_2 : K) \Rightarrow K = A^{-1} = \begin{pmatrix} +3 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$$

و بالتالي مقلوب المصفوفة A هي: $A^{-1} = \begin{pmatrix} +3 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)}$. يمكن أن نتأكـد من ذلك ان:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A \overset{?}{=} I_n$. و ذلك: $A.A^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & +2 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,2)} . \begin{pmatrix} +3 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}_{(2,2)} = I_2 = A^{-1}.A$.

مثال2:

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & +2 & +1\\ +2 & +3 & +3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}$. اوجد مقلوب المصفوفة A $\left(A^{-1}\right)$ بإستعمال طريقة غـوس.

وجدنا في مثال سابق أن: $rang(A)=3 vecteur \overset{?}{=} m \overset{?}{=} n$ و منه المصفوفة A^{-1} موجودة

(أي ان: A قابلة للقلب او عكـوسة). و منه: نريد انطلاقا من $(A\vdots I_n)$ ان نصل الى $(I_n\vdots K)$.

لدينا ان:

$$A^{(0)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0\\ +1 & +2 & +1 & 0 & +1 & 0\\ +2 & +3 & +3 & 0 & 0 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1\ fixé\\ L_2-L_1\\ L_3-2L_1\end{matrix}\rightarrow A^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & +1 & +1 & -2 & 0 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}R_1\\ R_2 fixé\\ R_3-R_2\end{matrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & +1 & +1 & -2 & 0 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}R_1\\ R_2 fixé\\ R_3-R_2\end{matrix}\rightarrow A^{(3)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}T_1-T_3\\ T_2\\ T_3\ fixé\end{matrix}$$

.

$$\rightarrow A^{(3)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}K_1\\ K_2\\ K_3 fixé\end{matrix}\rightarrow A^{(4)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & 0 & +2 & +1 & -1\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}K_1-K_3\\ K_2\\ K_3\ fixé\end{matrix}$$

$$\rightarrow A^{(4)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & +1 & 0 & +2 & +1 & -1\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}S_1-S_2\\ S_2 fixé\\ S_3\end{matrix}\rightarrow A^{(5)}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}+1 & 0 & 0 & +3 & 0 & -1\\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1\end{array}\right)\begin{matrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{matrix}$$

و بالتالي: مقلوب المصفوفة A هو: $A^{-1}=\begin{pmatrix}+3 & 0 & -1\\ -1 & +1 & 0\\ -1 & -1 & +1\end{pmatrix}$. يمكن أن نتأكـد من ذلك ان:

$A.A^{-1}=A^{-1}.A\overset{?}{=}I_n$. و ذلك:

$$.A.A^{-1}=\begin{pmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & +2 & +1\\ +2 & +3 & +3\end{pmatrix}_{(3,3)}.\begin{pmatrix}+3 & 0 & -1\\ -1 & +1 & 0\\ -1 & -1 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)}=I_3=A^{-1}.A$$

5-1. المحددات:

تعريف المصفوفة المستخرجة: ليكن IK حقلا و لتكن $A\in M_{n\times n}(IK)$ ، نعرف المصفوفة المستخرجة من المصفوفة A و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A و نرمز لها بالرمز: A_{ij} .

مثال: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\ +3 & +1 & +1\\ +4 & +1 & +2\end{pmatrix}_{(3,3)}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. المصفوفة $A_{11}=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{pmatrix}_{(2,2)}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

تسمى "المصفوفة المستخرجة " من A وذلك بحذف السطر الأول $(i=+1)$ والعمود الأول $(j=+1)$.

تعريف المحدد:

ليكن IK حقلا، و لتكن المصفوفة المربعة $A\in M_{n\times n}(IK)$ و $f:M_{n\times n}(IK)\to IK$ تطبيق يحقق الشرطين:

1 . إذا كانت المصفوفة $A=(a_{11})$ فإن: $\forall a_{11}\in IK: f(A)=a_{11}$.

2 . إذا كانت المصفوفة من الشكل: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(IK)$ فإن:

$$f(A)=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\times a_{ij}\times f(A_{ij}) .$$

نسمي التطبيق f محدد المصفوفة A بانه العـدد الحقيقي (حالة $IK=\mathbb{R}$) و نرمز له بالرمز:

$|A|$ او $dét(A)$. ونكتب تعريفا ان: $\forall A\in M_{n\times n}(IK):\ dét(A)=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\times a_{ij}\times dét(A_{ij})$.

ملاحظات:

1 . يمكن حساب محدد المصفوفة A من جهة اي عمود للمصفوفة A :

$\forall A\in M_{n\times n}(IK):\ dét(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\times a_{ij}\times dét(A_{ij})$. وبأخذ j قيمة اختيارية

تسمى هذه العبارة بحساب المحدد وفق العمود j .

2 . و ايضا يمكن حساب محدد المصفوفة A من جهة اي سطر للمصفوفة A :

$\forall A\in M_{n\times n}(IK):\ dét(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\times a_{ij}\times dét(A_{ij})$. وبأخذ i قيمة اختيارية

تسمى هذه العبارة بحساب المحدد وفق السطر i .

أمثلة:

1 . لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و منه: $dét(A) = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times dét(A_{ij})$.

- حساب المحدد وفق العمود الأول $(j=1)$: $A=\begin{pmatrix} j=1 & \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$dét(A) \overset{j=1}{=} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \times a_{i1} \times dét(A_{i1}) = (-1)^{1+1} \times a_{11} \times dét(A_{11}) + (-1)^{2+1} \times a_{21} \times dét(A_{21})$$
$$= +a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}.$$

- حساب المحدد وفق السطر الأول $(i=1)$: $A=\overset{i=1}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{(2,2)}} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$dét(A) \overset{i=1}{=} \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} \times a_{1j} \times dét(A_{ij}) = (-1)^{1+1} \times a_{11} \times dét(A_{11}) + (-1)^{1+2} \times a_{12} \times dét(A_{12})$$
$$= +a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

خلاصة: إن: $dét(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}) \in IK$.

2 . لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ و منه:

$$dét(A) = \sum_{i,j=1}^{3} (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times dét(A_{ij}).$$

- حساب المحدد وفق السطر الأول $(i=1)$: $A=\overset{i=1}{\begin{pmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{(3,3)}} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$$dét(A) \overset{i=1}{=} \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\times a_{1j}\times dét(A_{ij}) =$$

$$=(-1)^{1+1}\times a_{11}\times dét(A_{11}) + (-1)^{1+2}\times a_{12}\times dét(A_{12}) + (-1)^{1+3}\times a_{13}\times dét(A_{13})$$

$$. = +a_{11}\times dét(A_{11}) - a_{12}\times dét(A_{12}) + a_{13}\times dét(A_{13}) =$$

$$= +a_{11}\times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) - a_{12}.(a_{21}.a_{33} - a_{31}.a_{23}) + a_{31}.(a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}).$$

طريقة خاصة: طريقة ســاروس Sarraus

هناك طريقة خاصة لحساب محدد من الدرجة " $n=3$ " فقـط تسمى" **طريقة ســاروس** ".

$$. dét(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

لحساب محدد A نقوم بإيجاد حاصل ضرب الأسطر المائلـة إنطلاقا من الـقطر مع إعطاء الإشارة الموجبة في نهاية ناتج الضرب ثم حاصل ضرب الأسطر المائلة عكس الـقطر مع إعطاء الإشارة السالبة في نهاية ناتج الضرب، ثم جمع هذه العناصر نجد:

$$. \begin{aligned} dét(A) = &+(a_{11}.a_{22}.a_{33}) + (a_{12}.a_{23}.a_{31}) + (a_{13}.a_{21}.a_{32}) \\ &-(a_{31}.a_{22}.a_{13}) - (a_{32}.a_{23}.a_{11}) - (a_{33}.a_{21}.a_{12}). \end{aligned}$$

خواص محدد مصفوفة: لتكن المصفوفة المربعة $A, B \in M_{n\times n}(IK)$.

1 . $dét(A)=0 \Leftrightarrow$ اعمدة (او اسطر) المصفوفة A مرتبطة خطيا.

2 . $dét(A)\neq 0 \Leftrightarrow$ اعمدة (او اسطر) المصفوفة A مستقلة خطيا $\Leftrightarrow rang(A) = n \overset{?}{=} m \Leftrightarrow$ المصفوفة A قابلة للقلب (A^{-1} موجودة) .

3 . إذا كان أحد أعمدة (أو أسطر) المصفوفة A معـدوم فان: $dét(A)=0$.

4 . إذا كان أحد أعمدة (أو أسطر) المصفوفة A عبارة عن مزج خطي للأعمدة (للأسطر) أخرى

أو إذا تساوى عمودين (او سطرين) فإن: $dét(A)=0$.

5 . $\forall A \in M_{n\times n}(IK):\ dét(A)=dét(A^t)$.

6 . $\forall A,B \in M_{n\times n}(IK):\ dét(A\,.\,B)=dét(A).dét(B)=dét(B.A)$.

7 . $\forall \alpha \in IK\ ,\ \forall A \in M_{n\times n}(IK):\ dét(\alpha\,.\,A)=(\alpha)^{n=rang(A)}\,.\,dét(A)$.

8 . $\forall I_n \in M_{n\times n}(IK):\ dét(I_n)=+1=\underbrace{1\times 1\times ...\times 1}_{n\ fois}$.

9 . إذا كانت A قابلة للقلب ($dét(A)\neq 0$) فإن: $dét(A^{-1})=\dfrac{+1}{dét(A)}$ $\forall A \in M_{n\times n}(IK):$.

10 .
$$\forall A \in M_{n\times n}(IK):\ dét(A^p)=dét\left(\underbrace{A\times A\times ...\times A}_{p\ fois}\right)=$$
$$=\left(\underbrace{dét(A)\times dét(A)\times ...\times dét(A)}_{p\ fois}\right)=(dét(A))^p\ ,\ \forall \in \mathbb{N}^*$$
.

11 . لا تتغير قيمة المحدد عند إضافة إلى أحد الأعمدة (أو الأسطر) عبارة خطية من الأعمدة (الأسطر) الأخرى.

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\ 0 & +1 & +2\\ +1 & 0 & 0\end{pmatrix}_{(3,3)}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ و منه:

$$dét(A)=dét\begin{pmatrix}+1 & +2 & +1\\ 0 & +1 & +2\\ +1 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{i=1}{=}+(+1).\begin{vmatrix}+1 & +2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-(+2).\begin{vmatrix}0 & +2\\ +1 & 0\end{vmatrix}+(+1).\begin{vmatrix}0 & +1\\ +1 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=+(+1).\left[(+1).(0)-(0).(+2)\right]-(+2).\left[(0).(0)-(+1).(+2)\right]+$$
$$+(+1).\left[(0).(0)-(+1).(+1)\right]=+(+1).(0)-(+2).(-2)+(+1).(-1)=$$
$$=(0)-(-4)+(-1)=(+4)+(-1)=+3\neq 0$$
.

- نضيف إلى السطر الأول : السطرين الثاني و الثالث فنجد ان:

$$dét(A) = dét\begin{pmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & +1 & +2 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = dét\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ 0 & +1 & +2 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{i=1}{=}$$

$$+(+2).\begin{vmatrix} +1 & +2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (+3).\begin{vmatrix} 0 & +2 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} + (+3).\begin{vmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= +(+2).\left[(+1).(0) - (0).(+2)\right] - (+3).\left[(0).(0) - (+1).(+2)\right] +$$

$$+(+3).\left[(0).(0) - (+1).(+1)\right] = +(+2).(0) - (+3).(-2) + (+3).(-1) =$$

$$= (0) - (-6) + (-3) = (+6) + (-3) = +3 \neq 0$$

12 . عند مبادلة عمود (سطر) بعمود (سطر) أخر و العكس نضرب قيمة المحدد في (-1).

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ و منه:

$$dét(A) = dét\begin{pmatrix} +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix} \overset{i=1}{=} +(+1).\begin{vmatrix} +3 & +2 \\ +7 & +1 \end{vmatrix} - (+4).\begin{vmatrix} +2 & +2 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} + (+2).\begin{vmatrix} +2 & +3 \\ 0 & +7 \end{vmatrix} =$$

$$= +(+1).\left[(+3) - (+14)\right] - (+4).\left[(+2) - (0)\right] + (+2).\left[(+14) - (0)\right] =$$

$$= (-11) - (+8) + (+28) = (-11 - 8 + 28) = +9 \neq 0$$

- نستبدل في محدد المصفوفة A العمود الأول بالعمود الثاني و العكس نجد ان:

$$dét(A) = dét\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix} = (-1).\, dét\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 \\ +4 & +1 & +2 \\ +3 & +2 & +2 \\ +7 & 0 & +1 \end{pmatrix} \overset{i=1}{=}$$

$$= (-1).\left[+(+4).\begin{vmatrix} +2 & +2 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} - (+1).\begin{vmatrix} +3 & +2 \\ +7 & +1 \end{vmatrix} + (+2).\begin{vmatrix} +3 & +2 \\ +7 & 0 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= (-1).\left[+(+8) - (-11) + (-28)\right] = (-1).(-9) = +9 \neq 0$$

13 . محـدد مصفوفة مثلثية علوية او مصفوفة مثلثية سفلية او مصفوفة قطرية يساوي جـداء عناصر القطر الرئيسي لها.

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix}+1 & +4 & +2\\ 0 & +3 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. يمكن حساب محدد المصفوفة A وفق السطر الثالث $i=3$ الذي به اصفار او وفق العمود الاول $j=1$ الذي به اصفار، و منه:

$$dét(A)=\begin{vmatrix}+1 & +4 & +2\\ 0 & +3 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{vmatrix}_{\begin{matrix}+ & - & +\end{matrix}} \overset{i=3}{=} +(0).\begin{vmatrix}+4 & +2\\ +3 & +2\end{vmatrix}-(0).\begin{vmatrix}+1 & +2\\ 0 & +2\end{vmatrix}+(+1).\begin{vmatrix}+1 & +4\\ 0 & +3\end{vmatrix}=$$
$$=(0)-(0)+(+3)=+3\neq 0$$

- او وفق العمود الاول $j=1$ الذي به اصفار:

$$dét(A)=\begin{vmatrix}+1 & +4 & +2\\ 0 & +3 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{vmatrix}_{\begin{matrix}+\\ -\\ +\end{matrix}} \overset{i=3}{=} +(+1).\begin{vmatrix}+3 & +2\\ 0 & +1\end{vmatrix}-(0).\begin{vmatrix}+4 & +2\\ 0 & +1\end{vmatrix}+(0).\begin{vmatrix}+4 & +2\\ +3 & +2\end{vmatrix}=$$
$$=(+3)-(0)+(0)=+3\neq 0$$

ومن جهة اخرى كــون المصفوفة A مثلثية علوية فإن:

$$dét(A)=dét\begin{pmatrix}+1 & +4 & +2\\ 0 & +3 & +2\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix}=(+1).(+3).(+1)=+3\neq 0 .$$

14 . لدينا ان:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. نعلم سابقا ان:

$dét(A)=+9\neq 0$. و لنحسب محدد المصفوفة A بإستعمال الخاصية (14) فنجد:

$$dét(A)=dét\begin{pmatrix} +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{vmatrix} +1 & (+2+2) & +2 \\ +2 & (+1+2) & +2 \\ 0 & (+3+4) & +1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(14)}{=} \begin{vmatrix} +1 & +2 & +2 \\ +2 & +1 & +2 \\ 0 & +3 & +1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 & +2 & +2 \\ +2 & +2 & +2 \\ 0 & +4 & +1 \end{vmatrix} = (+3)+(+6)=+9\neq 0$$

15 . لدينا ان:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha\times a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha\times a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \alpha\times a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha\times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}, \forall \alpha\in IK.$$

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} +1 & +4 & +2 \\ +2 & +3 & +2 \\ 0 & +7 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. و ليكن $\alpha\in IK=\mathbb{R}$ ، لدينا ان:

$$dét(A) = dét\begin{pmatrix} +1 & \alpha.4 & +2 \\ +2 & \alpha.3 & +2 \\ 0 & \alpha.7 & +1 \end{pmatrix} \overset{i=1}{=} +(+1).\begin{vmatrix} \alpha.3 & +2 \\ \alpha.7 & +1 \end{vmatrix} - (\alpha.4).\begin{vmatrix} +2 & +2 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} + (+2).\begin{vmatrix} +2 & \alpha.3 \\ 0 & \alpha.7 \end{vmatrix} =$$

$$= +(+1).\left[(+3.\alpha)-(+14.\alpha)\right] - (+4.\alpha).\left[(+2)-(0)\right] + (+2).\left[(+14.\alpha)-(0)\right] =$$

.

$$= (-11.\alpha) - (+8.\alpha) + (+28.\alpha) = (-11.\alpha - 8.\alpha + 28.\alpha) = \alpha\,.\,(+9) = \alpha\,.\,dét(A) \neq 0$$

1-5-1. تطبيقات لحساب المحددات:

أ. حساب مقلوب مصفوفة:

نظرية: ليكن IK حقلا، و لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_{n\times n}(IK)$. لدينا:

المصفوفة A قابلة للقلب (او عكوسة) (A^{-1} موجودة) $\Leftrightarrow$ $dét(A) \neq 0$.

تعريف: ليكن IK حقلا، و لتكن المصفوفة المربعة $A \in M_{n\times n}(IK)$ بحيث: $dét(A) \neq 0$.

نعرف مقلوب مصفوفة A و التي نرمز لها بالرمز: A^{-1} بإحدى العبارات التالية:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{dét(A)} = \frac{C^t}{dét(A)} \quad \text{او} \quad A^{-1} = \frac{\left(Comatrice(A)\right)^t}{dét(A)} = \frac{\left(Com(A)\right)^t}{dét(A)} \quad \text{او}$$

$$A^{-1} = \frac{\left(Cofactore(A)\right)^t}{dét(A)} = \frac{\left(Cof(A)\right)^t}{dét(A)}\,.$$

بحيث: $C_{ij} = (-1)^{i+j}\,.\,dét(A_{ij}),\ \forall i,j = 1,2,3,....,n$.

نسمي المصفوفة C^t أحيانا **بالمرافق او المساعد التقليدي** للمصفوفة A (او مصفوفة المساعدة او مصفوفة المرافقات او مصفوفة المحددات الصغرى للمصفوفة A) و نرمز لها بالرمز: $Adj(A)$. حيث:

$$Adj(A) = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\,.$$

مثال: لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} +2 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \\ +4 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. اوجد مقلوب المصفوفة A .

- لنحسب محـدد المصفوفة A :

$$dét(A)=dét\begin{pmatrix}+2 & +2 & -1\\ 0 & -1 & +1\\ +4 & 0 & +1\end{pmatrix}\overset{i=1}{=}+(+2).\begin{vmatrix}-1 & +1\\ 0 & +1\end{vmatrix}-(+2).\begin{vmatrix}0 & +1\\ +4 & +1\end{vmatrix}+(-1).\begin{vmatrix}0 & -1\\ +4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=+(+2).\left[(-1)-(0)\right]-(+2).\left[(0)-(+4)\right]+(-1).\left[(0)-(-4)\right]=$$

$$=(-2)+(+8)+(-4)=(+2)=+2\neq 0$$

بما ان $dét(A)=+2\neq 0$ فإن: المصفوفة A قابلة للـقـلـب (او عـكـوسـة) (A^{-1} موجودة) .

حيث: $A^{-1}=\dfrac{Adj(A)^t}{dét(A)}=\dfrac{C^t}{dét(A)}$ مع: $Adj(A)=C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}$ و

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}.\ dét(A_{ij}),\ \forall i,j=1,2,3,....,n$$

و لدينا:

$$Adj(A)=\ C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix}-1 & +1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & C_{12}=(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix}0 & +1\\ +4 & +1\end{vmatrix} & C_{13}=(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}0 & -1\\ +4 & 0\end{vmatrix}\\ C_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}+2 & -1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & C_{22}=(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix}+2 & -1\\ +4 & +1\end{vmatrix} & C_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}+2 & +2\\ +4 & 0\end{vmatrix}\\ C_{31}=(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}+2 & -1\\ -1 & +1\end{vmatrix} & C_{32}=(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}+2 & -1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & C_{33}=(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix}+2 & +2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & +1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & +1\\ +4 & +1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ +4 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}+2 & -1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}+2 & -1\\ +4 & +1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}+2 & +2\\ +4 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}+2 & -1\\ -1 & +1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}+2 & -1\\ 0 & +1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}+2 & +2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & +4 & +4\\ -2 & +6 & +8\\ +1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

ومنه: $Adj(A)=\ C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & +4 & +4\\ -2 & +6 & +8\\ +1 & -2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A)^t=\ C^t=\begin{pmatrix}-1 & -2 & +1\\ +4 & +6 & -2\\ +4 & +8 & -2\end{pmatrix}$.

وبالتالي نجد: $A^{-1}=\frac{Adj(A)^t}{dét(A)}=\frac{C^t}{dét(A)}=\left(\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}-1&-2&+1\\+4&+6&-2\\+4&+8&-2\end{pmatrix}$. يمكن أن نتأكد من ذلك ان:

$A.A^{-1}=A^{-1}.A\overset{?}{=}I_n$. و ذلك:

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix}+2&+2&-1\\0&-1&+1\\+4&0&+1\end{pmatrix}_{(3,3)}.\left(\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}-1&-2&+1\\+4&+6&-2\\+4&+8&-2\end{pmatrix}_{(3,3)}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+2&+2&-1\\0&-1&+1\\+4&0&+1\end{pmatrix}_{(3,3)}.\begin{pmatrix}-1&-2&+1\\+4&+6&-2\\+4&+8&-2\end{pmatrix}_{(3,3)}=$$

.

$$=\left(\frac{1}{2}\right).\begin{pmatrix}+2&0&0\\0&+2&0\\0&0&+2\end{pmatrix}_{(3,3)}=\begin{pmatrix}+1&0&0\\0&+1&0\\0&0&+1\end{pmatrix}_{(3,3)}=$$

$$=I_3=A^{-1}.A$$

ب. دراسة الاستقلال الخطي لجملة من الأشعة في $\mathbb{R}^n$:

- إذا كان: $v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ ، $v_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}$ ، ... ، $v_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\a_{3n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$ بحيث:

$\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ جملة من أشعة $\mathbb{R}^n$ فإنه لدينا:

(تكون الجملة $\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\}$ مستقلة خطيا) $\Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0\right)$.$\left(dét(v_1,v_2,...,v_n)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\right)$

مثال: لتكن الأشعة $v_1=(+2,0,+4)$ ، $v_2=(+2,-1,0)$ ، $v_3=(-1,+1,+1)$ من الفضاء $\mathbb{R}^3$.

- بين ان جملة الاشعة $\{v_1,v_2,v_3\}$ مستقلة خطيا.

لنحسب محدد الجملة:

$$dét(v_1,v_2,v_3)=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ +2 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \\ +4 & 0 & +1 \end{vmatrix} \overset{i=2}{=} -(0).\begin{vmatrix} +2 & -1 \\ 0 & +1 \end{vmatrix}+(-1).\begin{vmatrix} +2 & -1 \\ +4 & +1 \end{vmatrix}-(+1).\begin{vmatrix} +2 & +2 \\ +4 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(0)+(-1).(+6)-(+1).(-8)=(0)+(-6)+(+8)=+2\neq 0$$

و بالتالي الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا.

. **حساب رتبة مصفوفة:** ليكن IK حقلا، و لتكن المصفوفة الكيفية $A\in M_{p\times n}(IK)$. أي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} .$$

1 . إذا كان: $p=n$ (أي عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة) فإن: المصفوفة A تصبح مصفوفة مربعة. إذن أول خطوة نقوم بها هي حساب $dét(A)$ فإذا كان: $dét(A)\neq 0$ فإن: $rang(A)=n$.

و إذا كان: $dét(A)=0$ فإن: $rang(A)\neq n\leq (n-1)$ ، في هذه الحالة نقوم بإستخراج مصفوفة A_{ij} بحيث: $i,j=1,2,3,....,n$ و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A فإذا كان: إحدى محددات المصفوفات المستخرجة يختلف عن الصفر (مثلا: $dét(A_{11})\neq 0$) فإن :

$rang(A)=(n-1)$ و إذا وجدنا جميع المحددات تساوي صفر فإن: $rang(A)\neq (n-1)\leq (n-2)$

، في هذه الحالة نقوم بإستخراج مصفوفات أخرى و ذلك بحذف سطرين و عمودين من المصفوفة A فإذا كان إحدى محددات المصفوفات المستخرجة يختلف عن الصفر فإن: $rang(A)=(n-2)$.

و إذا وجدنا جميع المحددات تساوي صفر فإن: $rang(A)\neq (n-2)\leq (n-3)$ و هكذا.....

مثال: عين رتبة المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +2 & +1 \\ +3 & +5 & +5 & +3 \\ +3 & +5 & +5 & +3 \end{pmatrix}$.

<u>الخطوة الأولى</u> : نقوم بحساب محدد A . لدينا: $dét(A)=0$ لأن العمود الأول يساوي العمود الرابع و منه: $rang(A)\neq 4\leq 3$.

الخطوة الثانية : نقوم بإستخراج مصفوفة A_{ij} بحيث: $i,j=1,2,3,4$ و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A نلاحظ أن المصفوفات A_{ij} بحيث: $i,j=1,2,3,4$ المستخرجة من المصفوفة A محدداتها تساوي الصفر لأنه في كل مرة نجد عمود أو سطر مكرر (مثلا:

$$\left|A_{12}\right|=\begin{vmatrix}+1 & +2 & +3\\ +3 & +5 & +3\\ +3 & +5 & +3\end{vmatrix}=0$$) . و منه: $rang(A)\neq 3\leq 2$.

الخطوة الثالثة: نستخرج مصفوفة من المصفوفة A و ذلك بحذف سطرين و عمودين مثلا:

نحذف السطرين الثالث و الرابع و العمودين الثالث و الرابع فنجد: $A_1=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{pmatrix}_{(2,2)}$ إذن:

$$dét(A_1)=\begin{vmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{vmatrix}=+1\neq 0$$ و منه الاشعة A_1 مستقلة خطيا. وبالتالي:

$$rang(A)=rang(A_1)=2\,vecteur.$$

2 . إذا كان $p>n$ (أي عدد الأسطر أكبر من عدد الأعمدة) في هذه الحالة نقوم بإستخراج إحدى المصفوفات A_i من المصفوفة A و ذلك بحذف عدد من الأسطر i حتى تصبح A_i مصفوفة مربعة من الدرجة n ، فإذا كان محدد إحدى المصفوفات المستخرجة ، و لتكن مثلا A_1 يختلف عن الصفر فإن: $rang(A)=rang(A_1)=n$ ، وإذا كانت جميع محددات المصفوفات المستخرجة يساوي الصفر فإن: $rang(A)\neq n\leq(n-1)$ ، في هذه الحالة نقوم بإستخراج إحدى المصفوفات A_{ij} من المصفوفة A و ذلك بحذف عدد من الأسطر i و عمود j حتى تصبح A_{ij} مصفوفة مربعة من الدرجة $(n-1)$ فإذا كان: محدد إحدى المصفوفات المستخرجة و لتكن مثلا A_{21} يختلف عن الصفر فإن: $rang(A)=rang(A_{21})=(n-1)$ ، وإذا كانت جميع محددات المصفوفات المستخرجة يساوي الصفر فإن: $rang(A)\neq(n-1)\leq(n-2)$ ، و هكذا.....

مثال: عين رتبة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

نعلم ان: $0<rang(A)\leq Min(3\,,\,2)=2\,vecteur.$ لدينا: $A_1=\begin{pmatrix}+1 & +2\\ +3 & +1\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة مستخرجة " مربعة" من المصفوفة A وذلك بحذف السطر الثالث $i=3$ من المصفوفة A و لدينا ان:

$det(A_1)=\begin{vmatrix}+1 & +2\\ +3 & +1\end{vmatrix}=-5\neq 0$ و منه الاشعة A_1 مستقلة خطيا. وبالتالي:

$rang(A)=rang(A_1)=2\,vecteur$.

3 . إذا كان: $p<n$ (أي عدد الأعمدة أكبر من عدد الأسطر) في هذه الحالة نقوم بنفس الخطوات السابقة فقط نستبدل كلمة سطر بعمود.

مثال: عين رتبة المصفوفة $A=\begin{pmatrix}+2 & +1 & +1\\ 0 & +2 & +1\end{pmatrix}_{(2,3)}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. نعلم ان:

$0<rang(A)\leq Min(2\,,\,3)=2\,vecteur.$ لدينا: $A_1=\begin{pmatrix}+2 & +1\\ 0 & +2\end{pmatrix}_{(2,2)}$ مصفوفة مستخرجة " مربعة" من المصفوفة A وذلك بحذف العمود الثالث $j=3$ من المصفوفة A و لدينا ان:

$det(A_1)=\begin{vmatrix}+2 & +1\\ 0 & +2\end{vmatrix}=+4\neq 0$ و منه الاشعة A_1 مستقلة خطيا. وبالتالي:

$rang(A)=rang(A_1)=2\,vecteur$.

الفصل الثاني:

حل جمل المعادلات الخطية

1-2. مفاهيم عامة:

ليكن IK حقل تبديلي " $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ " ، نسمي جملة المعادلات الخطية (S) ذات "n" معادلة و"m" مجهول و بمعاملات من الحقل IK ، كل جملة من الشكل:

$$(S):\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + ... + a_{1m}.x_m = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + ... + a_{2m}.x_m = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + ... + a_{3m}.x_m = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + ... + a_{nm}.x_m = b_n \end{cases}.$$

- يمكن كتابة الجملة (S) على " **<u>الشكل المصفوفي</u>:** $(S): A.X = b$ " كما يلي:

$$(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A \,.\, X = b.$$

حيث: $A \in M_{n\times m}(IK)$ تسمى "مصفوفة المعاملات" للجملة (S) و هي معطاة،

$X \in M_{m\times 1}(IK)$ يسمى شعاع المجاهيل للجملة (S)،

$b \in M_{n\times 1}(IK)$ يسمى شعاع الطرف الثاني للجملة (S) و عناصره معطاة كذلك.

رتبة الجملة (S): نسمي رتبة الجملة (S) العدد المساوي لرتبة المصفوفة A ونكتب:

$$rang(A) = rang((S)).$$

ملاحظات: يمكن أن نميز الحالات التالية:

أ. $n = m$ (<u>عدد المعادلات</u> يساوي <u>عدد المجاهيل</u>) فإن: $rang((S)) = n$ او $rang((S)) < n$.

ب. $n < m$ (<u>عدد المعادلات</u> أقل من <u>عدد المجاهيل</u>) فإن: $rang((S)) = n$ او $rang((S)) < n$.

ج. $n > m$ (<u>عدد المعادلات</u> أكبر من <u>عدد المجاهيل</u>) فإن: $rang((S)) = m$ او $rang((S)) < m$.

مثال: لتكن جملة المعادلات الخطية: $(S): \begin{cases} +2x+y+z+2t & =+1 \\ +3x+0.y+z+t & =0 \\ 0.x+1.y+2z+0.t & =+1 \end{cases}$.

اولا: **كتابة "الشكل المصفوفي"** $(S): A.X=b$ (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل):

$$(S): \begin{cases} +2x+y+z+2t & =+1 \\ +3x+0.y+z+t & =0 \\ 0.x+1.y+2z+0.t & =+1 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +2 \\ +3 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S): A.X=b$$

حيث: $b=\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ ، $A=\begin{pmatrix} +2 & +1 & +1 & +2 \\ +3 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +2 & 0 \end{pmatrix}$.

2-2. دراسة مجموعة الحلول

تعريفات:

- نسمي حلا لجملة المعادلات الخطية (S) كل شعاع $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ من IK^n الذي يحقق "n" معادلة للجملة (S).

- نقول أن الجملة (S) متجانسة إذا كان الطرف الثاني: $b=0$.

الجمل المتكافئة:

نقول عن جملتي معادلات خطية أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.

عدد حلول جملة معادلات خطية:

نظرية: إذا كانت جملة معادلات خطية (S) بـ: "n" معادلات و "m" مجاهيل على الشكل المصفوفي $(S): A.X=b$ فإن: الجملة (S) تقبل إما:

ا. حل وحيد.

ب. لا تقبل حلول.

ج. عدد لانهائي من الحلول.

3-2. طرق حل جمل المعادلات الخطية:

1-3-2. حل جملة معادلات خطية ذات "n" معادلة و "n" مجهول:

نعتبر جملة معادلات خطية تتكون من "n" معادلة و "n" مجهول (S_1) :

$$(S_1):\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3+...+a_{1n}.x_n=b_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3+...+a_{2n}.x_n=b_2 \\ a_{31}.x_1+a_{32}.x_2+a_{33}.x_3+...+a_{3n}.x_n=b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}.x_1+a_{n2}.x_2+a_{n3}.x_3+...+a_{nn}.x_n=b_n \end{cases}.$$

- يمكن كتابة الجملة (S_1) على " **الشكل المصفوفي:** $(S_1): A.X=b$ " كما يلي:

$$(S_1) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A\,.\,X=b.$$

1-1-3-2. طريقة كـرامــر Cramer لحل الجملة (S_1):

نقول عن جملة معادلات خطية أنها لـكـرامـر إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل و محدد المصفوفة المرافقة للجملة غـير معدوم.

- إذا كان: $dét(A)\neq 0$ فإن: الجملة (S_1) هي جملة كـرامـر وهي تقبل حلا وحيدا معطى بواسطة قاعدة كـرامـر التالية:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\ ،\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\ ،\ ....،\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}\ .$$

حيث Δ هو محدد المصفوفة A المستخرجة من الجملة (S_1) و Δ_i هو المحدد المستخرج من المصفوفة A بإستبدال العمود i بالعمود b مثلا: Δ_1 هو المحدد المستخرج من المصفوفة A بإستبدال العمود الأول في المصفوفة A بالعمود b.

2-1-3-2. حل الجملة (S_1) " بإستعمال مقلوب مصفوفة ":

- إذا كان: $dét(A) \neq 0$ فإن: المصفوفة A قابلة للقلب (عكوسة) اي: A^{-1} موجودة إذن:

$$(S_1) \Leftrightarrow A \,.\, X = b \Leftrightarrow \left(A^{-1}.\, A\right).\, X = A^{-1}.\, b$$
$$\Leftrightarrow I_n \,.\, X = A^{-1}.\, b \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}.\, b$$

و بالتالي الجملة (S_1) تقبل " حـلا وحـيـدا " معطى بالشكل: $X = A^{-1}.\, b$.

ملاحظة: إذا كان: $dét(A) = 0$ فإن الجملة (S_1) تقبل عـدد لانهائي من الحلول أو لا تقبل حلول.

(يمكن تحويل الجملة لـكـرامر).

مثال:

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_2): \begin{cases} +3x_1 - 2x_2 + x_3 = +14 \\ +x_1 + 3x_2 + x_3 = +2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = +2 \end{cases}$.

- الشكل المصفوفي (S_2): $A.X = b$ يكتب على الشكل:

$$(S_2) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ -2 & +5 & +2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} +14 \\ +2 \\ +2 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X = b \quad .$$

حل الجملة (S_2) بإستعمال طريقة كـرامـر Cramer:

بما أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل و $dét(A) = +22 \neq 0$ فإن: الجملة (S_2) جملة كـرامـر Cramer و هي تقبل حلا وحيدا $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t = (x_1, x_2, x_3)$ معطى بالشكل:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b & y & z \\ +14 & -2 & +1 \\ +2 & +3 & +1 \\ +2 & +5 & +2 \end{vmatrix}}{dét(A) = +22} = \frac{(+22)}{+22} = +1 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x & b & z \\ +3 & +14 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ -2 & +2 & +2 \end{vmatrix}}{dét(A) = +22} = \frac{(-44)}{+22} = -2 .$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x & y & b \\ +3 & -2 & +14 \\ +1 & +3 & +2 \\ -2 & +5 & +2 \end{vmatrix}}{dét(A) = +22} = \frac{(+154)}{+22} = +7 .$$

حل الجملة (S_2) بإستعمال مقلوب مصفوفة A^{-1} :

- بما أن: $dét(A) = +22 \neq 0$ فإن: المصفوفة A قابلة للقلب (عكوسة) اي: A^{-1} موجودة إذن:

$$(S_2) \Leftrightarrow A \,.\, X = b \Leftrightarrow \left(A^{-1}.\, A\right) . X = A^{-1}.\, b$$
$$\Leftrightarrow I_n . X = A^{-1}.\, b \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}.\, b .$$

و بالتالي الجملة (S_2) تقبل " حـلا وحـيـدا " معطى بالشكل: $X = A^{-1}.\, b$.

لنحسب A^{-1} بإستعمال " طريقة المصفوفة المرافقة" : حيث:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{dét(A)} = \frac{C^t}{dét(A)} \quad \text{مع:} \quad Adj(A) = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} .\, dét\left(A_{ij}\right), \forall i, j = 1,2,3 .$$

$$Adj(A) = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} =$$

و لدينا:

$$= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} +3 & +1 \\ +5 & +2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ -2 & +2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} +1 & +3 \\ -2 & +5 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & +1 \\ +5 & +2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} +3 & +1 \\ -2 & +2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} +3 & -2 \\ -2 & +5 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & +1 \\ +3 & +1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} +3 & +1 \\ +1 & +1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} +3 & -2 \\ +1 & +3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -4 & +11 \\ +9 & +8 & -11 \\ -5 & -2 & +11 \end{pmatrix} .$$

ومنه: $Adj(A) = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -4 & +11 \\ +9 & +8 & -11 \\ -5 & -2 & +11 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)^t = C^t = \begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}$.

وبالتالي نجد: $A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{dét(A)} = \frac{C^t}{dét(A)} = \left(\frac{1}{+22}\right).\begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}$. يمكن أن نتأكد من ذلك ان:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A \overset{?}{=} I_n$. و ذلك:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ -2 & +5 & +2 \end{pmatrix}_{(3,3)} .\left(\frac{1}{+22}\right).\begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}_{(3,3)} =$$

$$= \left(\frac{1}{22}\right).\begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ -2 & +5 & +2 \end{pmatrix}_{(3,3)} .\begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}_{(3,3)} =$$

.

$$= \left(\frac{1}{22}\right).\begin{pmatrix} +22 & 0 & 0 \\ 0 & +22 & 0 \\ 0 & 0 & +22 \end{pmatrix}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{(3,3)} =$$

$$= I_3 = A^{-1}.A$$

و منه : $A^{-1} = \left(\frac{1}{+22}\right).\begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}$.

و بالتالي حل الجملة (S_2) معطى بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}.\ b = \left(\frac{1}{+22}\right).\begin{pmatrix} +1 & +9 & -5 \\ -4 & +8 & -2 \\ +11 & -11 & +11 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} +14 \\ +2 \\ +2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{+22}\right).\begin{pmatrix} +22 \\ -44 \\ +154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +7 \end{pmatrix}.$$

إذن حل الجملة (S_2) هو: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^t = (x_1, x_2, x_3) = (+1, -2, +7)$.

3-1-3-2. حل الجملة (S_1) بإستعمال تحويل غـوس Gauss:

لتكن المصفوفة الموسعة $(A':b')$ المصفوفة المكافئة او المتدرجة للمصفوفة الموسعة$(A:b)$ بتحويل غـوس المطبق على المصفوفة $(A:b)$، عندئذ فإن حل الجملة (S_1) مكـافئ لحل الجملة (S_1') حيث: $A'.X = b' \Leftrightarrow (S_1')$.

و بالإعتماد على " الـرتـبة " ، نميز الحالات التالية:

أ. إذا كانت: $rang(A) = rang((A:b)) = n$ فإن الجملة(S_1) تملك حـلا وحـيـدا.

ب. إذا كانت: $rang(A) = rang((A:b)) < n$ فإن الجملة(S_1) تملك عدد غـير منته من الحلول.

ج. إذا كانت: $rang(A) \neq rang((A:b))$ فإن الجملة(S_1) لا تملك حلول.

مثال: لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_2): \begin{cases} +3x_1 - 2x_2 + x_3 = +14 \\ +x_1 + 3x_2 + x_3 = +2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = +2 \end{cases}$.

- الشكل المصفوفي $(S_2): A.X = b$ يكتب على الشكل:

$$(S_2) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ -2 & +5 & +2 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} +14 \\ +2 \\ +2 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X = b .$$

- حل جملة المعادلات الخطية(S_2) بطريقة **تحويـل غـوس Gauss**:

$$A^{(0)} = (A \vdots I_3 \vdots b) = \begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \vdots +1 & 0 & 0 \vdots +14 \\ +1 & +3 & +1 \vdots 0 & +1 & 0 \vdots +2 \\ -2 & +5 & +2 \vdots 0 & 0 & +1 \vdots +2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \ fixé \\ 3L_2 - L_1 \rightarrow \\ 3L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

لدينا ان:

$$\rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \vdots +1 & 0 & 0 \vdots +14 \\ 0 & +11 & +2 \vdots -1 & +3 & 0 \vdots -8 \\ 0 & +11 & +8 \vdots +2 & 0 & +3 \vdots +34 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \ fixé \rightarrow \\ R_3 - R_2 \end{matrix} .$$

$$\rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} +3 & -2 & +1 \vdots +1 & 0 & 0 \vdots +14 \\ 0 & +11 & +2 \vdots -1 & +3 & 0 \vdots -8 \\ 0 & 0 & +6 \vdots +3 & -3 & +3 \vdots +42 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix} .$$

- انطلاقا من المصفوفة المكافئة او المتدرجة $A^{(2)}$ للمصفوفة A :

$$A^{(2)}=\left(A^{/}\vdots I_3^{/}\vdots b^{/}\right)=\begin{pmatrix}+3 & -2 & +1\vdots +1 & 0 & 0\vdots+14\\ 0 & +11 & +2\vdots -1 & +3 & 0\vdots -8\\ 0 & 0 & +6\vdots +3 & -3 & +3\vdots+42\end{pmatrix}\begin{matrix}T_1\\T_2\\T_3\end{matrix}$$ و هي مصفوفة مثلثية علوية

و بالتالي: $dét\left(A^{(2)}\right)=dét\begin{pmatrix}+3 & -2 & +1\\ 0 & +11 & +2\\ 0 & 0 & +6\end{pmatrix}=(+3).(+11).(+6)=+198\neq 0$. و منه:

<u>عـدد الأشعة</u> من اسطر او أعمدة المصفوفة المتدرجة $A^{(2)}=\begin{pmatrix}+3 & -2 & +1\\ 0 & +11 & +2\\ 0 & 0 & +6\end{pmatrix}\begin{matrix}T_1\\T_2\\T_3\end{matrix}$ <u>المستقلة خطيا و</u>

<u>الغير معدومة المتبقاة</u> هي: الأشعة من الأسطر $\overrightarrow{u_1}=(+3,-2,+1)$ و $\overrightarrow{u_2}=(0,+11,+2)$ و $\overrightarrow{u_3}=(0,0,+6)$ او من الأعمدة $\overrightarrow{v_1}=(+3,0,0)$ و $\overrightarrow{v_2}=(-2,+11,0)$ و $\overrightarrow{v_3}=(+1,+2,+6)$. و من الواضح أن:

$rang(A)=rang\left(\left(A^{/}\vdots b^{/}\right)\right)=n=3\,vecteur.$ و منه الجملة (S_2) تقبل حلا وحيدا.

والجملة المكافئة او المتدرجة للجملة (S_2) هي:

$$(S_2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}+3 & -2 & +1\\ 0 & +11 & +2\\ 0 & 0 & +6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+14\\-8\\+42\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(S_2^{/}\right):\begin{cases}+3x_1-2x_2+x_3=+14....(1)\\ 0.x_1+11x_2+2x_3=-8.....(2)\\ 0.x_1+0.x_2+6x_3=+42...(3)\end{cases}.$$

إذن لدينا: من المعادلة(3) نجد ان: $x_3=\frac{+42}{+6}=+7$ ، نعوض x_3 في المعادل (2) نجد ان:

$0.x_1+11x_2+2(+7)=-8\Leftrightarrow+11x_2=-8-14=-22\Leftrightarrow x_2=\frac{-22}{+11}=-2$ ، ثم نعوض x_2 و x_3

في المعادلة(1) نجد ان : $+3x_1-2(-2)+(+7)=+14\Leftrightarrow+3x_1=+14-4-7=+3\Leftrightarrow x_1=\frac{+3}{+3}=+1$.

و بالتالي حلول الجملة (S_2) هي المجموعة: $S=\{x_1=+1\,,\,x_2=-2\,,\,x_3=+7\}$.

ملاحظة: ليس بالضرورة بأن تقوم بنفس المزج الخطي الذي أجريناه و لكن المهم أن تصل إلى نفس النتائج.

نظرية: إن الشرط الكافي و اللازم لكي تقبل الجملة الخطية المتجانسة: $A.X=0$ ذات "n" معادلة و "n" مجهول حلول غـيـر تـافهة ($X=0$) هو أن يكون: $dét(A)=0$.

2-3-2. حل جملة معادلات خطية ذات "n" معادلة و "m" مجهول:

لتكن جملة المعادلات الخطية (S_3) ذات "n" معادلة و "m" مجهول:

$$(S_3):\begin{cases} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3+...+a_{1m}.x_m=b_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3+...+a_{2m}.x_m=b_2 \\ a_{31}.x_1+a_{32}.x_2+a_{33}.x_3+...+a_{3m}.x_m=b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}.x_1+a_{n2}.x_2+a_{n3}.x_3+...+a_{nm}.x_m=b_n \end{cases} .$$

- يمكن كتابة الجملة (S_3) على " **الشكل المصفوفي:** $(S_3): A.X=b$ " كما يلي:

$$(S_3) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A\,.\,X=b. .$$

2-3-2-1. طريقة الحـل (تحـويل الجـملة الى جملة كـرامـر):

نستخرج من المصفوفة A مصفوفة مربعة بديلـة A_r محددها غير معدوم و نرمز له بالرمز: Δ_r (نبحث عن أعلى رتبة ممكنة للمصفوفة A) و ذلك بحذف أسطر و أعمدة من المصفوفة A

حيث: $$A_r=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} .$$

العدد r عبارة عن رتبة المصفوفة المربعة A_r المستخرجة من المصفوفة A ، نسمي المجاهيل الموافقة للأعمدة A_r " بالمجاهيل الرئيسية " فيما تسمى المجاهيل المتبقية " بالوسائط " ففي هذه

الحالة تتحول الجملة (S_3) الى جملة كـرامـــر (S'_3) بمصفوفة A_r من r معادلة و r مجهول، فهي إذا تقبل حلا وحيدا، فإذا كان هذا الحل يحقق كل معادلات الجملة (S_3) فنقول أن الجملة تقبل حلول و إذا كان هذا الحل لا يحقق معادلة واحدة على الأقل من الجملة (S_3) فنقول الجملة (S_3) لا تقبل حلول.

- يدعى Δ_r المحدد الرئيسي (هو محدد المعادلات الرئيسية) و تدعى المعادلات غير الرئيسية المعادلات التي لا تدخل في تشكيل المحدد الرئيسي و مجاهيلها تستعمل كوسائط.

- يجب أن تكون كل معادلة غير رئيسية منسجمة مع جملة المعادلات الرئيسية أي المحدد المتكونة أعمدته من عوامل المجاهيل الرئيسية و العمود b يساوي الصفر.

ملاحظة: نقول أن الجملة الخطية $A.X=0$ ذات "n" معادلة

و "m" مجهول بأنها متجانسة إذا كان: $b=0$.

نظرية: لكي تقبل الجملة الخطية $A.X=b$ ذات "n" معادلة و "m" مجهول حـلـول يكفي و يلزم أن تكون كل معادلة غير رئيسية منسجمة مع جملة المعادلات الرئيسية.

مثال1: (عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات)

لتكن جملة المعادلات الخطية: $(S_4): \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = +1 \ldots.(1) \\ x_1+2x_2-x_3+x_4 = +2 \ldots.(2) \\ +3x_1+5x_2-x_3+3x_4 = +5 \ldots.(3) \end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المجاهيل" أكبر من "عدد المعادلات".

1 - الشكل المصفوفي $(S_4): A.X=b$ يكتب على الشكل:

$$(S_4): \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = +1 \ldots.(1) \\ x_1+2x_2-x_3+x_4 = +2 \ldots.(2) \\ +3x_1+5x_2-x_3+3x_4 = +5 \ldots.(3) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & -1 & +1 \\ +3 & +5 & -1 & +3 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 \\ +2 \\ +5 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X=b$$

2. تحويل الجملة لـكـرامـــر (بالاعتماد على رتبة الجملة):

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

لدينا: $\left|B_{j=1}\right|=\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +2 & -1 & +1\\ +5 & -1 & +3\end{vmatrix}=0$ ، $\left|B_{j=2}\right|=\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & +1\\ +3 & -1 & +3\end{vmatrix}=0$ ، $\left|B_{j=3}\right|=\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & +2 & +1\\ +3 & +5 & +3\end{vmatrix}=0$ ،

$\left|B_{j=4}\right|=\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & +2 & -1\\ +3 & +5 & -1\end{vmatrix}=0$.

حيث: $B_{j=4}$ ، $B_{j=3}$ ، $B_{j=2}$ ، $B_{j=1}$ هي مصفوفات مستخرجة من المصفوفة A و ذلك بحذف في كل مرة عمود، وبما أن جميع محدداتها تساوي الصفر فإن: $rang(A)\neq 3\leq 2$. إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف عمودين $(j=3,j=4)$ و سطر $(i=3)$ و لتكن مثلا

$A_2=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{pmatrix}_{(2,2)}$ و لدينا: $\Delta_2=dét(A_2)=\begin{vmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{vmatrix}=+1\neq 0$.

و Δ_2 هو المحدد الرئيسي" لمعادلتين رئيسيتين" هما المعادلة الأولى و الثانية أما المعادلة الثالثة فهي معادلة غير رئيسية إذن: المجهولين الرئيسين هما x_1 و x_2 و المجهولين غير الرئيسين هما x_3 و x_4 ، يتم إستعمالهما " كوسائط". و لدينا كذلك " المعادلة الثالثة الغير رئيسية " منسجمة مع المعادلتين الرئيسيتين (الأولى و الثانية) لأن: $\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & +2 & +2\\ +3 & +5 & +5\end{vmatrix}=0$.

إذن تتحول الجملة (S_4) لجملة كرامر المكافئة $(S_4'): A_2.X=b'$ بحيث نعتبر x_1 و x_2 " مجاهيل أساسية " و " المجهولين غير الرئيسين " هما x_3 و x_4 ، يتم إستعمالهما " كوسائط " و لدينا:

$(S_4'): A_2.X=b'\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=(+1-x_3-x_4)\ldots.(1)\\ x_1+2x_2=(+2+x_3-x_4)\ldots.(2)\end{cases}\Leftrightarrow(S_4'):\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1-x_3-x_4\\ +2+x_3-x_4\end{pmatrix}$.

حلها معطى بالشكل: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}b & y\\ +1-x_3-x_4 & +1\\ +2+x_3-x_4 & +2\end{vmatrix}}{dét(A_2)=+1}=-3x_3-x_4$.

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x & b \\ +1 & +1-x_3-x_4 \\ +1 & +2+x_3-x_4 \end{vmatrix}}{dét(A_2)=+1} = +1+2x_3 .$$

ونعوض x_1 و x_2 في المعادلة الثالثة للجملة (S_4) نجد ان:

$$(3) \ldots. +3x_1+5x_2-x_3+3x_4 \overset{?}{=} +5 \Leftrightarrow +3(-3x_3-x_4)+5(+1+2x_3)-x_3+3x_4 = $$
$$= -9x_3-3x_4+5+10x_3-x_3+3x_4 = +5 .$$

إذن محققة وبالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_4) هي المجموعة:

$$S = \{(-3x_3-x_4 \ , +1+2x_3 \ , x_3 \ , x_4): \ x_3 , x_4 \in \mathbb{R}\} .$$

مثال2: (عدد المعادلات أقـل من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية: $(S_5): \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4 = +1 \ldots.(1) \\ x_1-2x_2+x_3-x_4 = -1 \ldots.(2) \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4 = +5 \ldots.(3) \end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المعادلات" اقــل من "عدد المجاهيل" .

1- الشكل المصفوفي $(S_5): A.X = b$ يكتب على الشكل:

$$(S_5): \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4 = +1 \ldots.(1) \\ x_1-2x_2+x_3-x_4 = -1 \ldots.(2) \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4 = +5 \ldots.(3) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & -2 & +1 & +1 \\ +1 & -2 & +1 & -1 \\ +1 & -2 & +1 & +5 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +5 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X = b$$

2. تحويل الجملة لـكـرامـــر (بالاعتماد على رتبة الجملة):

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

لدينا: $|A_{j=1}| = \begin{vmatrix} -2 & +1 & +1 \\ -2 & +1 & -1 \\ -2 & +1 & +5 \end{vmatrix} = 0$ ، $|A_{j=2}| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +5 \end{vmatrix} = 0$ ، $|A_{j=3}| = \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +1 & -2 & -1 \\ +1 & -2 & +5 \end{vmatrix} = 0$ ،

$\left|A_{j=4}\right|=\begin{vmatrix}+1 & -2 & +1\\ +1 & -2 & +1\\ +1 & -2 & +1\end{vmatrix}=0$. حيث: $A_{j=4}$ ، $A_{j=3}$ ، $A_{j=2}$ ، $A_{j=1}$ هي مصفوفات مستخرجة من

المصفوفة A و ذلك بحذف في كل مرة عمود، وبما أن جميع محدداتها تساوي الصفر فإن:

$rang(A)\neq 3\leq 2$.

إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف عمودين $(j=1,j=2)$ و سطر

$(i=3)$ و لتكن مثلا $B=\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}_{(2,2)}$ و لدينا: $\Delta_2=dét(B)=\begin{vmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$.

و Δ_2 هو المحدد الرئيسي" لمعادلتين رئيسيتين" هما المعادلة الأولى و الثانية أما المعادلة الثالثة فهي معادلة غير رئيسية إذن: المجهولين الرئيسين هما x_3 و x_4 و المجهولين غير الرئيسين هما x_1 و x_2 ، يتم إستعمالهما " كوسائط". و لدينا كذلك " المعادلة الثالثة الغير رئيسية " منسجمة مع المعادلتين الرئيسيتين (الأولى و الثانية) لأن: $\begin{vmatrix}+1 & +1 & +1\\ +1 & -1 & -1\\ +1 & +5 & +5\end{vmatrix}=0$.

إذن تتحول الجملة (S_5) لجملة كرامر المكافئة $(S_5'):B.X=b'$ بحيث نعتبر x_3 و x_4 " مجاهيل أساسية " و " المجهولين غير الرئيسين " هما x_1 و x_2 ، يتم إستعمالهما " كوسائط " و لدينا:

$(S_5'):B.X=b'\Leftrightarrow\begin{cases}x_3+x_4=(+1-x_1+2x_2)\ldots.(1)\\ x_3-x_4=(-1-x_1+2x_2)\ldots.(2)\end{cases}\Leftrightarrow(S_5'):\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1-x_1+2x_2\\ -1-x_1+2x_2\end{pmatrix}$.

حلها معطى بالشكل: $x_3=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}b & y\\ +1-x_1+2x_2 & +1\\ -1-x_1+2x_2 & -1\end{vmatrix}}{dét(B)=-2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(+2x_1-4x_2)=-x_1+2x_2.$.

$x_4=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}x & b\\ +1 & +1-x_1+2x_2\\ +1 & -1-x_1+2x_2\end{vmatrix}}{dét(B)=-2}=\dfrac{-2}{-2}=+1.$.

ونعوض x_3 و x_4 في المعادلة الثالثة للجملة (S_5) نجد ان:

$$(3)\ldots.x_1-2x_2+x_3+5x_4\overset{?}{=}+5 \Leftrightarrow x_1-2x_2+(-x_1+2x_2)+5(+1)=$$
$$=x_1-2x_2-x_1+2x_2+5=+5.$$

إذن محققة وبالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_5) هي المجموعة:

$$S=\{(x_1,\ x_2\ ,\ -x_1+2x_2\ ,\ +1):\ x_1,\ x_2\in\mathbb{R}\}.$$

مثال3: (عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_6):\begin{cases}+2x+3y=+3\ldots..(1)\\ +x-2y\ =+5\ldots..(2)\\ +3x+2y=+7\ldots..(3)\end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المعادلات" اكبر من "عدد المجاهيل" .

1- الشكل المصفوفي $(S_6): A.X=b$ يكتب على الشكل:

$$(S_6):\begin{cases}+2x+3y=+3\ldots..(1)\\ +x-2y\ =+5\ldots..(2)\\ +3x+2y=+7\ldots..(3)\end{cases}\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}+2 & +3\\ +1 & -2\\ +3 & +2\end{pmatrix}_{(3,2)}}_{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{(2,1)}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}+3\\ +5\\ +7\end{pmatrix}_{(3,1)}}_{b}\Leftrightarrow A.X=b$$

حيث: $b=\begin{pmatrix}+3\\ +5\\ +7\end{pmatrix}_{(3,1)}$ ، $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{(2,1)}$ ، $A=\begin{pmatrix}+2 & +3\\ +1 & -2\\ +3 & +2\end{pmatrix}_{(3,2)}$.

2. تحويل الجملة لكرامر (بالإعتماد على رتبة الجملة):

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

بما أن: $A\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ فإن: $0<rang(A)\ \le\ Min(3\ ,\ 2)=2 vecteur.$ ، إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف السطر الثالث $(i=3)$ و لتكن مثلا $B=\begin{pmatrix}+2 & +3\\ +1 & -2\end{pmatrix}_{(2,2)}$ و

لدينا: $dét(B)=\begin{vmatrix}+2 & +3\\ +1 & -2\end{vmatrix}=-7\neq 0$. اذن $rang(B)=2$.

و منه: $rang(A)=rang(B)=2$ (رتبة المصفوفة A هي رتبة المصفوفة المستخرجة B).

إذن تتحول الجملة (S_6) لجملة كـرامـر المكافئـة $(S_6'): B.X=b'$ بحيث: نعتبر x و y "مجاهيل أساسية " و لا توجد وسائط ولدينا:

$$(S_6'):\begin{cases}+2x+3y=+3\ .....(1)\\ +x-2y\ \ =+5\ ....(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}+2 & +3\\ +1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+3\\ +5\end{pmatrix}\Leftrightarrow (S_6'): B.X=b'.$$

حلها معطى بالشكل: $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}b & y\\ +3 & +3\\ +5 & -2\end{vmatrix}}{dét(B)=-7}=\left(\dfrac{1}{-7}\right)\left[(-6)-(+15)\right]=\dfrac{(-21)}{(-7)}=+3$.

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}x & b\\ +2 & +3\\ +1 & +5\end{vmatrix}}{dét(B)=-7}=\frac{\left[(+10)-(+3)\right]}{-7}=\frac{(+7)}{(-7)}=-1.$$

ونعوض x و y في المعادلة الثالثة للجملة (S_6) نجد ان:

$$(3)\ ....\ +3x+2y\overset{?}{=}+7\ \Leftrightarrow\ +3(+3)+2(-1)=(+9)+(-2)=+7\ .$$

إذن محققة وبالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_6) هي المجموعة:

$$S=\{(x=+3\ ,\ y=-1)\}.$$

مثال4: (عدد المعادلات أقـل من عـدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_7):\begin{cases}+x+y+z+t\ \ \ \ =0\ ....(1)\\ +x+3y+2z+4t=0\ ....(2)\\ +2x+z-t\ \ \ \ \ \ =0\ ....(3)\end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المعادلات" اقـل من "عدد المجاهيل" .

1- الشكل المصفوفي $(S_7): A.X=b$ يكتب على الشكل:

$$(S_7):\begin{cases} +x+y+z+t = 0 \ldots.(1) \\ +x+3y+2z+4t = 0 \ldots.(2) \\ +2x+z-t = 0 \ldots.(3) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +2 & +4 \\ +2 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X = b$$

حيث: $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{(4,1)}$ ، $A = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +2 & +4 \\ +2 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}_{(3,4)}$.

2. تحويل الجملة لـكـرامـــر (بالاعتماد على رتبة الجملة):

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

بما أن: $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ فإن: $0 < rang(A) \leq Min(3\ ,\ 4) = 3 vecteur.$.

ولدينا: $|A_{j=1}| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +3 & +2 & +4 \\ 0 & +1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ، $|A_{j=2}| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +4 \\ +2 & +1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ، $|A_{j=3}| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +4 \\ +2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ،

$|A_{j=4}| = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +2 \\ +2 & 0 & +1 \end{vmatrix} = 0$. حيث: $A_{j=4}$ ، $A_{j=3}$ ، $A_{j=2}$ ، $A_{j=1}$ هي مصفوفات مستخرجة من المصفوفة A من الدرجة أو الصنف (3×3) و ذلك بحـذف في كل مرة عمود، وبما أن جميع محدداتها تساوي الصفر فإن: $rang(A) \neq 3 \leq 2$. ، إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف السطر الثالث $(i=3)$ و العمودين الثالث $(j=3)$ و الرابع $(j=4)$ و لتكن مثلا $C = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +3 \end{pmatrix}_{(2,2)}$ و لدينا: $det(C) = \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +3 \end{vmatrix} = +2 \neq 0$. اذن $rang(C) = 2$.

و منه: $rang(A) = rang(C) = 2$ (رتبة المصفوفة A هي رتبة المصفوفة المستخرجة C).

إذن تتحول الجملة (S_6) لجملة كـرامـر المكافئـة $(S_7'): C.X = b'$ بحيث: نعتبر x و y "مجاهيل أساسية" و z و t وسائط ولدينا:

$$.\left(S_7'\right):\begin{cases}+x+y\ =0-z-t\ .....(1)\\ +x+3y=0-2z-4t...(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}+1 & +1\\ +1 & +3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z-t\\ -2z-4t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(S_7'\right):C.X=b'$$

حلها معطى بالشكل: $.x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}b & y\\ -z-t & +1\\ -2z-4t & +3\end{vmatrix}}{dét(C)=+2}=\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t\right).$

$$.y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}x & b\\ +1 & -z-t\\ +1 & -2z-4t\end{vmatrix}}{dét(C)=+2}=\frac{(-z-3t)}{(+2)}=\left(-\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}t\right).$$

ونعوض x و y في المعادلة الثالثة للجملة (S_7) نجد ان:

$$.\ (3)\ ....+2x+z-t\overset{?}{=}0\ \Leftrightarrow\ +2.\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t\right)+z-t=-z+t+z-t=0.$$

إذن محققة وبالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_7) هي المجموعة:

$$.S=\left\{\left(\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t\right),\left(-\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}t\right),\ z\ ,\ t\right):\ z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

2-2-3-2. حـل الجملة (S_1) بإستعمال تحـويل غــوس Gauss:

لتكن المصفوفة الموسعة $(A':b')$ المصفوفة المكافئة للمصفوفة الموسعة $(A:b)$ بتحويل غـوس المطبق على $(A:b)$ ، عندئذ فإن: حل الجملة (S_1) مكافئ لحل الجملة (S_1') حيث:
$.\left(S_1'\right):A'.X=b'$

و بالإعتماد على الـرتبة، نميز الحالات التالية:

1. <u>الحالة</u> : $m<n$ أي: "<u>عـدد المعادلات</u>" أكـبـر من "<u>عـدد المجاهيل</u>"

أ. إذا كانت: $rang(A)=rang\left((A:b)\right)=m$ فإن الجملة (S_1) تملك حــلا وحـيـدا.

ب. إذا كانت: $rang(A)=rang\left((A:b)\right)<m$ فإن الجملة (S_1) تملك عدد غـير منته من الحلول.

ج. إذا كانت: $rang(A) \neq rang\big((A:b)\big)$ فإن الجملة (S_1) لا تملك حلول.

2. الحالة : $m > n$ أي: "عـدد المعادلات" أقـل من "عـدد المجاهيل"

أ. إذا كانت: $rang(A) = rang\big((A:b)\big) \leq n$ فإن الجملة (S_1) تملك عدد غير منته من الحلول.

ب. إذا كانت: $rang(A) \neq rang\big((A:b)\big)$ فإن الجملة (S_1) لا تملك حلول.

مثال1: (عدد المعادلات أكبـر من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_6): \begin{cases} +2x+3y=+3 \ldots..(1) \\ +x-2y=+5 \ldots..(2) \\ +3x+2y=+7 \ldots..(3) \end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المعادلات" اكـبـر من "عدد المجاهيل" .

1- الشكل المصفوفي $(S_6): A.X=b$ يكتب على الشكل:

$$(S_6): \begin{cases} +2x+3y=+3 \ldots..(1) \\ +x-2y=+5 \ldots..(2) \\ +3x+2y=+7 \ldots..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +2 & +3 \\ +1 & -2 \\ +3 & +2 \end{pmatrix}_{(3,2)}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(2,1)}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} +3 \\ +5 \\ +7 \end{pmatrix}_{(3,1)}}_{b} \Leftrightarrow A.X=b$$

حيث: $b=\begin{pmatrix} +3 \\ +5 \\ +7 \end{pmatrix}_{(3,1)}$ ، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(2,1)}$ ، $A=\begin{pmatrix} +2 & +3 \\ +1 & -2 \\ +3 & +2 \end{pmatrix}_{(3,2)}$.

2 - حـل الجملة بإستعمال تحويل غـوس Gauss :

$$A^{(0)}=(A:b)=\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ +1 & -2 & +5 \\ +3 & +2 & +7 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \ fixé \\ L_3-3L_2 \end{matrix} \rightarrow A^{(1)}=\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ +1 & -2 & +5 \\ 0 & +8 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)}=\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ +1 & -2 & +5 \\ 0 & +8 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} R_1 fixé \\ 2R_2-R_1 \\ R_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow A^{(2)}=\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ 0 & -7 & +7 \\ 0 & +8 & -8 \end{pmatrix}\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \ fixé \\ T_3 \end{matrix} \rightarrow A^{(3)}=\begin{pmatrix} +2 & +3 & +3 \\ 0 & -7 & +7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{matrix} =\left(A' : b'\right)$$

إذن: (عدد المجاهيل) = 2 و منه: $rang(A)=rang\big((A:b)\big)=rang\Big(\big(A' : b'\big)\Big)=m=2$. ومنه

الجملة (S_6) تملك حـلا وحـيـدا.

تتحول الجملة (S_6) للجملة المكافئـة $(A' : b')$:

$$(S_6'): A'.X = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +2 & +3 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3,2)} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} +3 \\ +7 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)} \Leftrightarrow \begin{cases} +2x+3y=+3....(1) \\ 0.x-7y=+7....(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=+3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_6) هي المجموعة: $S = \{(x=+3\ ,\ y=-1)\}$.

مثال2: (عـدد المعادلات أقـل من عـدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية: $(S_7): \begin{cases} +x+y+z+t = 0 ....(1) \\ +x+3y+2z+4t = 0 ....(2) \\ +2x+z-t = 0 ....(3) \end{cases}$.

- لاحظ هنا ان "عدد المعادلات" اقـل من "عدد المجاهيل" .

1- الشكل المصفوفي $(S_7): A.X = b$ يكتب على الشكل:

$$(S_7): \begin{cases} +x+y+z+t = 0 ....(1) \\ +x+3y+2z+4t = 0 ....(2) \\ +2x+z-t = 0 ....(3) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +2 & +4 \\ +2 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow A.X = b$$

حيث: $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{(4,1)}$ ، $A = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +2 & +4 \\ +2 & 0 & +1 & -1 \end{pmatrix}_{(3,4)}$.

2 - حـل الجملة بإستعمال تحـويـل غـوس Gauss :

$$A^{(0)} = (A : b) = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 : 0 \\ +1 & +3 & +2 & +4 : 0 \\ +2 & 0 & +1 & -1 : 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\ fixé \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 : 0 \\ 0 & +2 & +1 & +3 : 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 : 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 : 0 \\ 0 & +2 & +1 & +3 : 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 : 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2\ fixé \\ R_3 + R_2 \end{matrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 : 0 \\ 0 & +2 & +1 & +3 : 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 : 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix} = (A' : b').$$

إذن: (عدد المجاهيل) = 2 و منه:

$rang(A) = rang\left((A:b)\right) = rang\left(\left(A' : b'\right)\right) = 2 \le n = 3 < m = 4$. ومنه الجملة (S_7) تملك عدد غيـر منته من الحلول.

تتحول الجملة (S_7) للجملة المكافئـة $\left(A' : b'\right)$: $\left(S_7'\right): A'.X = b'$ بحيث: نعتبر x و y "مجاهيل أساسية " و z و t وسائط ولدينا:

$$\left(S_7'\right): A'.X = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +2 & +1 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3,4)} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)} \Leftrightarrow$$

.

$$\Leftrightarrow \left(S_7'\right): \begin{cases} +x+y = 0-z-t \ .....(1) \\ 0.x+2y = 0-z-3t ...(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z-t \\ -z-3t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(S_7'\right): C.X = b'.$$

وبحل الجملة نجد: $y = \left(-\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t\right)$ و $x = \left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t\right)$.

وبالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_7) هي المجموعة:

$$S = \left\{ \left(\left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t\right), \left(-\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t\right), z \ , \ t \right) : z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

الفصل الثالث:

التكاملات

1-3. قابلية التكامل بمفهوم ريمان Riemann:

ليكن $[a,b]$ مجال "محـدود و مغلـق" (بمعنى: متراص) من $\mathbb{R}$ ، و لتكن f دالة حقيقية معرفة و محـدودة على المجال $[a,b]$.

تعريف1: نقول عن تجزئة $d_n=\{x_0=a,....,x_n=b\}$ للمجال $[a,b]$ أنها " منتظمة " ، إذا كان طـول جميع مجالاتها هو : $\frac{b-a}{n}$. أي: $\forall i=1,2,3,...,n:\ x_i=x_{i-1}+i.\left(\frac{b-a}{n}\right)$. بفرض أن:

$$\forall i=1,2,3,....,n:\ m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\left(f(x)\right)\ ,\ M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\left(f(x)\right)$$

تعريف2: - نسمي مجموع" **داربـو Darboux الأسـفل"** المتصل بالدالة f و التقسيم d_n ، العدد الحقيقي: $s_n(f)=s(f,d_n)=\sum_{i=1}^{n}m_i.(x_i-x_{i-1})=\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{i=1}^{n}m_i$.

- نسمي مجموع " **داربـو Darboux الأعلى** " المتصل بالدالة f و التقسيم d_n ، العدد الحقيقي:

$$S_n(f)=S(f,d_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i.(x_i-x_{i-1})=\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{i=1}^{n}M_i.$$

ملاحظة: $s_n(f)$ متتالية متـزايـدة ، $S_n(f)$ متتالية متناقصة و لدينا: $\forall n\ge 1:\ s_n(f)\le S_n(f)$.

و منه نستنتج أن: $s_n(f)$ و $S_n(f)$ متتاليتين متقاربتين.

تعريف3: نقول عن الدالة f إنها **قابلة للتكامل بمفهوم ريمان Riemann** على المجال $[a,b]$ إذا كان لدينا: $\lim_{n\to+\infty}s_n(f)\overset{?}{=}\lim_{n\to+\infty}S_n(f)$. و تشكل النهاية المشتركة للنهايتين ، تكامل f على المجال $[a,b]$ و نكتب: $\lim_{n\to+\infty}s_n(f)\overset{?}{=}\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b f(x)dx.$.

مثال1: أثبت أن الدالة: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)=x^2$ **قابلة للتكامل بمفهوم ريمان Riemann** على المجال $[a,b]=[0,+1]$.

- التجزئة "المنتظمة" للمجال $[0,+1]$ معرفة بالشكل:

$$\forall i=1,2,3,...,n:\ x_i = x_{i-1} + i.\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + i.\left(\frac{b-a}{n}\right) = 0 + i.\left(\frac{1-0}{n}\right) = i.\left(\frac{1}{n}\right).$$

أي ان التقسيم: $x_0 = a = 0$ ، $x_1 = 1.\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ ، $x_2 = 2.\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}$ ، .... ، $x_n = b = n.\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n} = +1$.

إذن:

$$\begin{cases} f(x_0) = f(a) = f(0) = (0)^2 = 0, \\ f(x_1) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \\ f(x_2) = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}, \\ \vdots \\ f(x_n) = f(b) = f(+1) = (+1)^2 = +1. \end{cases}.$$

بما أن f دالة محدودة و دالة متزايدة على المجال $[0, +1]$ فإن:

$$\begin{cases} m_0 = \underset{x_0 \le x \le x_1}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = \underset{0 \le x \le \frac{1}{n}}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = f(0) = (0)^2 = 0, \\ m_1 = \underset{x_1 \le x \le x_2}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = \underset{\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \\ m_2 = \underset{x_2 \le x \le x_3}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = \underset{\frac{2}{n} \le x \le \frac{3}{n}}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}, \\ \vdots \\ m_i = \underset{x_i \le x \le x_{i+1}}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = \underset{i.\frac{1}{n} \le x \le (i+1).\frac{1}{n}}{\text{Inf}}\left(f(x)\right) = f\left(i.\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{i^2}{n^2}, \end{cases}.$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\cdot \begin{cases} M_0 = \sup\limits_{x_0 \le x \le x_1} \left(f(x)\right) = \sup\limits_{0 \le x \le \frac{1}{n}} \left(f(x)\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}, \\ M_1 = \sup\limits_{x_1 \le x \le x_2} \left(f(x)\right) = \sup\limits_{\frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}} \left(f(x)\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}, \\ M_2 = \sup\limits_{x_2 \le x \le x_3} \left(f(x)\right) = \sup\limits_{\frac{2}{n} \le x \le \frac{3}{n}} \left(f(x)\right) = f\left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^2 = \frac{9}{n^2}, \\ \vdots \\ M_i = \sup\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left(f(x)\right) = \sup\limits_{i.\frac{1}{n} \le x \le (i+1).\frac{1}{n}} \left(f(x)\right) = f\left((i+1).\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 = \frac{(i+1)^2}{n^2}, \end{cases}$$

و منه لدينا:

$$s_n(f) = s(f, d_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \left(\frac{1-0}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \left(\frac{1}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \left(\frac{1}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^2}$$

$$\cdot \quad = \left(\frac{1}{n^3}\right).\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right).\left(\frac{(n-1).((n-1)+1).(2(n-1)+1)}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad s_n(f) = s(f, d_n) = \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6.n^3}.$$

و كذلك ان:

$$S_n(f) = S(f, d_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \left(\frac{1-0}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \left(\frac{1}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \left(\frac{1}{n}\right).\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^2}$$

$$= \left(\frac{1}{n^3}\right).\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n)^2\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right).\left(\frac{n(n+1).(2n+1)}{6}\right)$$

$$\cdot$$

$$\Rightarrow \quad S_n(f) = S(f, d_n) = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6.n^3}.$$

و بالمرور الى النهاية نجد أن:

$$\cdot \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} s_n(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n-1).n.(2n-1)}{6.n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n).(n).(2n)}{6.n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2.n^3}{6.n^3} = \frac{2}{6} = \frac{+1}{3}. \\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n+1).n.(2n+1)}{6.n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n).(n).(2n)}{6.n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2.n^3}{6.n^3} = \frac{2}{6} = \frac{+1}{3}. \end{cases}$$

و بالتالي: $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(f) \overset{?}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f) = \frac{+1}{3}$.

و منه الدالة f **قابلة للتكامل بمفهوم ريمان Riemann** على المجال $[0,+1]$، و لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(f) \overset{?}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^{+1} x^2\,dx = \left(+\frac{1}{3}\right).$$

مثال2:

الدالة $f(x)=\begin{cases}+1: & x\in\mathbb{Q}\\ 0: & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ غير قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على المجال $[0,+1]$ لأن:

$$\forall i=0,1,2,3,....,(n-1):\ m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\left(f(x)\right)=0\ ,\ M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\left(f(x)\right)=+1$$ ، و منه

$s_n(f)=0$ و $S_n(f)=+1$. اي ان: $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)=+1 \neq \lim_{n\to+\infty} s_n(f)=0$.

قضية1: كل دالة حقيقية f مستمرة على المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ "قابلة للتكامل بمفهوم ريمان" على هذا المجال.

قضية2: كل دالة حقيقية f رتيبة على المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ "قابلة للتكامل بمفهوم ريمان" على هذا المجال.

مجاميع ريمان Riemann: لتكن f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ ، و لتكن $d=(x_i)_{0\le i\le n}$ تجزئة منتظمة للمجال $[a,b]$. أي نقسم المجال $[a,b]$ إلى "n" مجال متساوي بواسطة النقاط : $\forall i=0,1,2,3,...,n:\ x_i=a+i.\left(\frac{b-a}{n}\right)$. فنحصل على المستطيلات التي عرضها:

$$\forall k=0,1,2,3,...,n:\ (x_{k+1}-x_k)=\left(\frac{b-a}{n}\right)$$ و أطوالها هي الإرتفاعات:

$f(x_0)$ ، $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ ، .... ، $f(x_{n-1})$.

تعريف: نسمي **مجموع ريمان Riemann** و نرمز له بالرمز: R_n المرافق للتابع f و للتجزئة المجموع التالي: $R_n(d)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k).f(x_k)=\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$.

نتيجة: لتكن f دالة معرفة و محدودة و" قابلة للتكامل على المجال$[a,b]$ حسب ريمان " لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right).\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k.\left(\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

ملاحظات:

1.إن العدد $\int_a^b f(x)dx$ غير مرتبط بالتقسيم d ، و كذلك لا يتغير بتغير قيم الدالة عند عدد غير منته من النقاط.

2. إن المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم" بمعنى أنه يمكن تعويض الحرف x بأي حرف أخر أي: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = ...$.

3. نضع اصطلاحا: $\int_a^a f(x)dx = 0$ ، $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

خواص:

لتكن f و g دالتين "مستمرتين" على المجال $[a,b]$ ، لدينا:

1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \int_a^b (\lambda . f)(x)dx = \lambda . \int_a^b f(x)dx$.

3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

4. $f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ , \forall x \in [a,b]$.

2-3. التكامل غير المحدود:

البحث عن الدوال الأصلية:

تعريف1: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ ، نسمي دالة " أصلية " للدالة f كل دالة $F: I \to \mathbb{R}$ معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، و تحقق:

$\forall x \in I : \; F'(x) = f(x)$.

أمثلة:

1. $F : x \mapsto x^2$ دالة أصليـة للدالة: $f : x \mapsto 2x$ على $\mathbb{R}$.
2. $F : x \mapsto x^2 + 1$ دالة أصليـة للدالة: $f : x \mapsto 2x$ على $\mathbb{R}$.
3. $F : x \mapsto Cos(x)$ دالة أصليـة للدالة: $f : x \mapsto -Sin(x)$ على $\mathbb{R}$.
4. $F : x \mapsto Sin(x)$ دالة أصليـة للدالة: $f : x \mapsto Cos(x)$ على $\mathbb{R}$.
5. $F : x \mapsto \ln(x)$ دالة أصليـة للدالة: $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}_+^*$.

ملاحظة: الدالة الأصلية ليست وحيدة.

نظرية: إذا كانت F و G دالتين أصليـتيـن للدالة f فإن: ثابت $F - G = Cte$.

نتيجة: إذا كانت $F : I \to \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة $f : I \to \mathbb{R}$ فإن: الدوال من الشكل : $F(x) + Cte$ هي كذلك دوال أصلية للدالة f حيث : Cte ثابت حقيقي.

تعريف2: نسمي" **تكامل غير محدود** " للدالة $f : I \to \mathbb{R}$ و نرمز له بالرمز: $\int f(x)dx$ ، كل دالة من الشكل: $F(x) + Cte$ و نكتب: $\int f(x)dx = F(x) + Cte$.

ملاحظة: التكاملين: $\int_a^b f(x)dx$ و $\int f(x)dx$ ليس لهما نفس المعنى ، التكامل: $\int_a^b f(x)dx$ هو عـدد حقيقي أما التكامل: $\int f(x)dx$ هو عبارة عن دالــة.

خواص أساسية: لتكن F و G دالتين أصليـتيـن للدالتين f و g على الترتيب، إذن الدوال:

$$f+g \;\text{،}\; \alpha.f\,,(\alpha \in \mathbb{R}) \;\text{،}\; (f.G+g.F) \;\text{،}\; \frac{f.G-F.g}{G^2}\,,(G \neq 0)$$

تقبل دوال أصلية و لدينا:

1. $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x)$.

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \int (\alpha . f)(x)dx = \alpha . F(x)$.

3. $\int (f.G + g.F)(x)dx = (F.G)(x)$.

4. $\int \left(\frac{f.G - F.g}{G^2}\right)(x)\,dx = \left(\frac{F}{G}\right)(x)$.

مثال: $F: x \mapsto x^2$ دالة أصليـة للدالة: $f: x \mapsto 2x$ على $\mathbb{R}$ و

$G: x \mapsto x^3$ دالة أصليـة للدالة: $g: x \mapsto 3x^2$ على $\mathbb{R}$ ، إذن لدينا:

* $F+G: x \mapsto x^2 + x^3$ دالة أصليـة للدالة: $f+g: x \mapsto 2x + 3x^2$ على $\mathbb{R}$ ،

* $(F.G): x \mapsto x^2 . x^3 = x^5$ دالة أصليـة للدالة: $(f.g): x \mapsto (2x.x^3 + x^2.3x^2) = 5x^4$ على $\mathbb{R}$،

* $\left(\frac{F}{G}\right): x \mapsto \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ دالة أصليـة للدالة:

$\left(\frac{f.G - F.g}{G^2}\right): x \mapsto \left(\frac{2x.x^3 - x^2.3x^2}{(x^3)^2}\right) = \frac{-x^4}{x^6} = \left(\frac{-1}{x^2}\right)$ على $\mathbb{R}^*$.

3-3. التكامل المحـدود:

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ ، و لتكن F دالة أصلية لها على المجال $[a,b]$.

- نسمي تكامل محدود للدالة f بين العددين a و b العدد الحقيقي: $F(b) - F(a)$ ، و نرمز له بالرمز: $\int_a^b f(x)dx$ و نكتب: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

ملاحظات:

ا. إن المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم" بمعنى أنه يمكن تعويض الحرف x بأي

حرف أخر أي: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots.$

ب. نضع اصطلاحا: $\int_a^a f(x)dx = 0$ ، $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

خواص:

لتكن f و g دالتين "مستمرتين" على المجال $[a,b]$ ، لدينا:

ا. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

ب. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \int_a^b (\lambda . f)(x)dx = \lambda . \int_a^b f(x)dx$.

ج. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

د. $f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

و. $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

4-3. طرق حساب التكامل:

الطرق العامة: يمكن إيجاد دالة أصلية للدالة f بسهولة إذا كانت الدالة f مشتقة دالة معروفة.

أمثلة:

$2/\int Sin(x)\,dx = -Cos(x)+k$ ، $1/\int Cos(x)\,dx = +Sin(x)+k$.

$4/\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$ ، $3/\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$5/\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = Arc\tan g(x) + k$ ، $6/\int \frac{+u'(x)}{1+(u(x))^2}\,dx = Arct\,an\,g(u(x)) + k, \forall u(x) \in D$.

$7/\int Sh(x)\,dx = Ch(x)+k$ ، $8/\int Ch(x)\,dx = +Sh(x)+k$.

$9/\int \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = +Arc\sin(x)+k$ ، $10/\int \frac{+u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\,dx = +Arc\sin(u(x))+k,\ \forall u(x)\in D$.

$11/\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -Arc\cos(x)+k$ ، $12/\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\,dx = -Arc\cos(u(x))+k,\ \forall u(x)\in D$.

$13/\int e^x\,dx = e^x+k$ ، $14/\int \left(\frac{-1}{x^2}\right)dx = \left(\frac{+1}{x}\right)+k,\ x\neq 0$.

$15/\int \frac{+1}{Cos^2(x)}\,dx = \tan g(x)+k$ ، $16/\int \frac{+1}{Ch^2(x)}\,dx = th(x)+k$.

$17/\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|+k,\ \forall u(x)\in D$ ، $18/\int \frac{A}{(x-a)}\,dx = A.\ln|(x-a)|+k,\ (x\neq a)$.

$$19/\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{A}{(1-n).(x-a)^{n-1}}+k,\ (x\neq a, n\neq +1)$$

في كل مرة يكون الثابت k اختياري من $\mathbb{R}$.

طريقة تبديـل المتغير:

لتكن f دالة معرفة على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ ، و $\varphi: I\to J$ تقابلي ومستمر و قابل للاشتقاق على المجال I. بوضع: $x=\varphi(t)$ فنجد ان: $dx=\varphi'(t).dt$ و منه نجد العلاقة:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt$$.

مثال1: أحسب التكامل: $I=\int x.\sqrt{x-2}\,dx$.

نضع: $t=\sqrt{x-2}$ أي ان: $t^2=x-2 \Leftrightarrow x=t^2+2$ و منه: $dx=2t\,dt$ ، بتعويض في التكامل نجد:

اي ان: $I=\int x.\sqrt{x-2}\,dx=\int (t^2+2).t.2t\,dt=\int (2t^4+4t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3+k;\ \ k\in\mathbb{R}$.

$$I=\int x.\sqrt{x-2}\,dx=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-2}\right)^5+\frac{4}{3}\left(\sqrt{x-2}\right)^3+k;\ \ k\in\mathbb{R}$$.

مثال2: أحسب التكامل المحدود $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx$.

- قبل تبديل المتغير، نحول كتابة التكامل المحدود على الشكل التالي:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x).cos(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-(\sin(x))^2\right).cos(x)dx .$$

- نضع: $t=\sin(x)$ و منه: $dt=\cos(x)\,dx$ ، ولدينا ان: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sin(0)=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=+1 \end{cases}$.

و بتعويض في التكامل نجد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)\,dx=\int_0^{+1}\left(1-t^2\right)dt=\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)_0^{+1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)=\left(+\frac{2}{3}\right) .$$

التكامل بالـتجـزئة:

لتكن f و g دالتين " قابلتين للإشتقاق بإستمرار" على المجال $[a,b]$ فإن:

$$\begin{cases} f(x)=.... \rightarrow f'(x)=.... \\ \quad \searrow \\ g'(x)=.... \rightarrow g(x)=.... \end{cases} \Rightarrow \int f(x).g'(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]-\int f'(x).\,g(x)\,dx. .$$

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x).\,g(x)\,dx. .$$

في الحالة العامة لدينا:

$$\int g(x)\,df=\left[f(x).g(x)\right]-\int f(x).\,dg \text{ او } \int f(x)\,dg=\left[f(x).g(x)\right]-\int g(x).\,df .$$

مثال1: أحسب التكامل: $I=\int x.e^x\,dx$.

- بوضع: $\int x.e^x\,dx = \left[x.e^x\right] - \int (+1).e^x dx.$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = +1 \\ \searrow \\ g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \end{cases}$.

و منه: $I = \int x.e^x\,dx = x.e^x - e^x + k = (x-1).e^x + k,\ k \in \mathbb{R}$.

مثال2: أحسب التكامل: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(x)\,dx$.

- بوضع:

$$\begin{cases} f(x) = x \rightarrow f'(x) = +1 \\ \searrow \\ g'(x) = \sin(x) \rightarrow g(x) = -\cos(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(x)\,dx = \left[x.(-\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (+1).(-\cos(x))\,dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin(x)\,dx = \left[-x.\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \left[-x.\cos(x) + \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = +1.$$

5-3. تكـامل الـدوال الـنـاطـقـة:

تعريف: نسمي كسرا ناطقا كل عبارة من الشكل: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث: $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود من $\Re[x]$. إن مكاملة الدوال الكسرية الناطقة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يعتمد أساسا على تفكيك الكسور الى عناصر بسيطة من الشكل: $\frac{a}{(x-b)^n}$ و $\frac{a.x+b}{\left(x^2+\alpha.x+\beta\right)^m}$ حيث:

a ، b ، α ، β عناصر من $\mathbb{R}$ و n ، m عناصر من $\mathbb{Z}$.

تـفـكـيـك الـكـسـور:

أولا: إذا كانت درجة البسط $P(x)$ أكبر من أو تساوي درجة المقام $Q(x)$ $\left(\deg P(x) \geq \deg Q(x)\right)$، عندئذ: نقوم بإجراء " القسمة الإقليدية " لـ : $P(x)$ على $Q(x)$ سنحصل على حاصل القسمة و ليكن $M(x)$ و ليكن باقي القسمة $R(x)$ و بالتالي: الكسر الناطق

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ يكتب على الشكل: $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

حيث درجة $R(x)$ أقـل تماما من درجة $Q(x)$. $(\deg R(x) < \deg Q(x))$.

في هذه الحالة نفكـك الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ الى كسور جزئية.

ثانيا: نقوم بتفكيك $\frac{R(x)}{Q(x)}$ يعني تفكيك المقام $Q(x)$ الى كثيرات حدود خطية من الشكل: $(a.x^1 + b)$

أو تربيعية من الشكل: $(a.x^2 + b.x + c)$ حيث: a ، b ، c عناصر من $\mathbb{R}$ مع إحتمال تكرار كل

واحدة منهما إلى "n" من مرات أي: تصبح من الشكل: $(a.x^1 + b)^n$ او $(a.x^2 + b.x + c)^n$

حيث: $n \in \mathbb{N}^*$.

هناك أربعة حالات:

الحالة الأولى: اذا كان: $Q(x) = (a_1.x + b_1).(a_2.x + b_2).(a_3.x + b_3).....(a_n.x + b_n)$ عندئذ:

يكتب الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1.x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2.x + b_2)} + \frac{A_3}{(a_3.x + b_3)} + ... + \frac{A_n}{(a_n.x + b_n)}.$$

الحالة الثانية: اذا كان: $Q(x) = (a.x + b)^n = \underbrace{(a.x + b).(a.x + b).(a.x + b)..... (a.x + b)}_{n\ fois}$. عندئذ:

يكتب الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a.x + b)^1} + \frac{A_2}{(a.x + b)^2} + \frac{A_3}{(a.x + b)^3} + ... + \frac{A_n}{(a.x + b)^n}.$$

الحالة الثالثة: اذا كان:

$$Q(x) = (a_1.x^2 + b_1.x + c_1).(a_2.x^2 + b_2.x + c_2).(a_3.x^2 + b_3.x + c_3).....(a_n.x^2 + b_n.x + c_n).$$

عنـدئـذ: يكتب الـكسـر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1.x+B_1}{\left(a_1.x^2+b_1.x+c_1\right)} + \frac{A_2.x+B_2}{\left(a_2.x^2+b_2.x+c_2\right)} + \frac{A_3.x+B_3}{\left(a_3.x^2+b_3.x+c_3\right)} + ... + \frac{A_n.x+B_n}{\left(a_n.x^2+b_n.x+c_n\right)}.$$

الحالة الرابعة: اذا كان:

$$Q(x) = \left(a.x^2+b.x+c\right)^n = \underbrace{\left(a.x^2+b.x+c\right).\left(a.x^2+b.x+c\right).\left(a.x^2+b.x+c\right).....\left(a.x^2+b.x+c\right)}_{n\ fois}.$$

عنـدئـذ: يكتب الـكسـر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1.x+B_1}{\left(a.x^2+b.x+c\right)^1} + \frac{A_2.x+B_2}{\left(a.x^2+b.x+c\right)^2} + \frac{A_3.x+B_3}{\left(a.x^2+b.x+c\right)^3} + ... + \frac{A_n.x+B_n}{\left(a.x^2+b.x+c\right)^n}.$$

خلاصة: نفرض أن: $Q(x) = (x-\alpha)^n . \left(x^2+a.x+b\right)^m$.

عنـدئـذ: يكتب الـكسـر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{(x-\alpha)^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i.x + B_i}{\left(x^2+a.x+b\right)^i}.$$

حيث: β_i ، B_i ، A_i عـناصر من $\mathbb{R}$ يتم تعينهم بالمطابقة.

الدوال الأصلية للكسور الناطقة:

ليكن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسرا ناطقا معاملاته في $\mathbb{R}$ ، لقد رأينا سابقا أن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يفكك في $\mathbb{R}$ على شكل مجموع دوال على النحو التالي:

أ. دالة على شكل كثير حدود.

ب. كسور ناطقة من الشكل: $\frac{A}{(x-a)^n}$.

ج. كسور ناطقة من الشكل: $\frac{A.x+B}{(x^2+a.x+b)^n}$.

و بالتالي فإن حساب دالة أصلية للكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يقودنا بالتأكيد لحساب الدوال الأصلية التي هي من الشكل أ)، ب) و ج) السابقة.

ا. **حساب تكامل من الشكل:** $\int P_n(x)\,dx$. حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة "n" .

$$\int P_n(x)\,dx = \int \left(a_0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + a_3.x^3 + ... + a_n.x^n\right) dx$$

$$= a_0.x^1 + \frac{a_1}{2}.x^2 + \frac{a_2}{3}.x^3 + \frac{a_3}{4}.x^4 + ... + \frac{a_n}{(n+1)}.x^{n+1} + Cte.$$

ب. **حساب تكامل من الشكل:** $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$.

. $n=1 \Rightarrow \int \frac{A}{(x-a)^1}\,dx = A.\ln|x-a| + k,\ k\in\mathbb{R}.$

. $n \geq 2 \Rightarrow \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{A}{(1-n).(x-a)^{n-1}} + k,\ k\in\mathbb{R}.$

ج. **حساب تكامل من الشكل:** $\int \frac{A.x+B}{(a.x^2+b.x+c)^n}\,dx$.

أولا لنحسب التكامل من الشكل: $\int \frac{+1}{a.x^2+b.x+c}\,dx$.

نكتب المقام على الشكل القانوني: $a.x^2+b.x+c = a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2-4.a.c)}{4a^2}\right]$.

نضع: $u = \left(x+\frac{b}{2a}\right)$ و $l = \frac{(b^2-4.a.c)}{4a^2}$ ، إذن: لدينا ثلاث حالات .

1. $\Delta = 0$ ، في هذه الحالة نتحصل على تكامل بسيط:

$$\int \frac{+1}{a.x^2+b.x+c}\,dx = \int \frac{+1}{a.u^2}\,du = \left(\frac{-1}{a.u}\right) + Cte = \left(\frac{-1}{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)}\right) + Cte$$

2. $\Delta > 0$ ، في هذه الحالة نضع: $k^2 = l$ ، فيصبح لدينا:

$$\int \frac{+1}{a.x^2+b.x+c}\,dx = \int \frac{+1}{a.\left(u^2-k^2\right)}\,du = \frac{1}{(-2k).a}\int\left(\frac{1}{u+k}-\frac{1}{u-k}\right).du =$$

$$= \frac{1}{(-2k).a}\left[\ln|u+k| - \ln|u-k|\right] + Cte = \frac{1}{(-2k).a}.\ln\left|\frac{u+k}{u-k}\right| + Cte.$$

3. $\Delta < 0$ ، في هذه الحالة نضع: $k^2 = -l$ ، فيصبح لدينا:

$$\int \frac{+1}{a.x^2+b.x+c}\,dx = \int \frac{+1}{a.\left(u^2+k^2\right)}\,du = \frac{1}{a.k^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{k}\right)^2}.du =$$

$$= \frac{1}{a.k}.\int \frac{\left(\frac{du}{k}\right)}{1+\left(\frac{u}{k}\right)^2} = \frac{1}{a.k}.\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a.k}.Arc\tan g\left(\frac{u}{k}\right) + Cte.$$

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{+1}{x^2+2x+3}\,dx$. لدينا ان:

$$\int \frac{+1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{+1}{\left(x^2+2x+1\right)+2}\,dx = \int \frac{+1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right).\int \frac{+1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\int \frac{\left(\frac{dx}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).Arc\tan g\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + Cte$$

ثانيا لنحسب التكامل من الشكل: $\int \frac{m.x+n}{a.x^2+b.x+c}\,dx$.

نستخرج مشتق المقام في البسط أي: $m.x+n = \frac{m}{2a}.\underbrace{(2a.x+b)}_{\text{المقـــــــام}}(2a.x+b)+n-\frac{mb}{2a}$ ، و منه نجد:

$$\int \frac{m.x+n}{a.x^2+b.x+c}\,dx = \left(\frac{m}{2a}\right).\underbrace{\int \frac{2a.x+b}{a.x^2+b.x+c}\,dx}_{I_1} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right).\underbrace{\int \frac{1}{a.x^2+b.x+c}\,dx}_{I_2}.$$

و منه لحساب I_2 إرجع إلى الشكل الأول و لدينا: $I_1 = \ln\left|a.x^2+b.x+c\right| + Cte$.

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$.

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \left(\frac{1}{2}\right).\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{+1}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right).\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{+1}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

لدينا ان:

$$= \left(\frac{1}{2}\right).\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\int \frac{\left(\frac{dx}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right).\ln\left|x^2+2x+3\right| + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).Arc\tan g\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + Cte.$$

نرجع لحساب التكامل: $I = \int \frac{A.x+B}{(a.x^2+b.x+c)^n}\,dx$ **حيث:** $n \geq 2$

نكتب المقام على الشكل $(\Delta < 0)$: $a.x^2+b.x+c = \left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right)\right] = t^2 + k^2$.

حيث: $t = \left(x+\frac{b}{2}\right)$ و $k^2 = \left(c-\frac{b^2}{4}\right)$.

إذن التكامل I يصبح على الشكل:

$$I = \int \frac{A.x+B}{(a.x^2+b.x+c)^n}\,dx = \int \frac{\left(A.t-\frac{A.b}{2}\right)+B}{(t^2+k^2)^n}\,dt = \int \frac{A.t+h}{(t^2+k^2)^n}\,dt =$$

$$= A.\int \frac{t}{(t^2+k^2)^n}\,dt + h.\int \frac{+1}{(t^2+k^2)^n}\,dt = I_n + J_n.$$

حيث: $I_n = A.\int \frac{t}{(t^2+k^2)^n}\,dt$ ، $J_n = h.\int \frac{+1}{(t^2+k^2)^n}\,dt$ و $h = \left(-\frac{A.b}{2}+B\right)$.

- لحساب التكامل I_n نضع: $y=\left(t^2+k^2\right)$ فيكون: $dy=2t.dt$ و بالتالي:

$$I_n=A.\int\frac{t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\,dt=\left(\frac{1}{2}\right).A.\int\frac{2t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\,dt=\left(\frac{1}{2}\right).A.\int\frac{+1}{y^n}\,dy=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right).A.\int y^{-n}\,dy=\left(\frac{1}{2}\right).A.\frac{y^{(1-n)}}{(1-n)}+Cte\;=\;\frac{A.}{2.(1-n)}.\left(t^2+k^2\right)^{1-n}+\;Cte.$$

- و لحساب التكامل J_n نستعمل " التكامل بالتجزئة " فنحصل على:

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{+1}{\left(t^2+k^2\right)^n}=\left(t^2+k^2\right)^{-n} \;\rightarrow f'(t)=(-n).\left(t^2+k^2\right)^{-n-1}.(2t) \\ \qquad\searrow \\ g'(t)=+1\rightarrow g(t)=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow J_n=h.\int\frac{+1}{\left(t^2+k^2\right)^n}.dt=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;-h.\int t.(-n\,2t).\left(t^2+k^2\right)^{-n-1}.dt$$

$$J_n=h.\int\frac{+1}{\left(t^2+k^2\right)^n}.dt=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+2nh.\int\frac{t^2}{\left(t^2+k^2\right)^{n+1}}\,dt=$$

$$=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+2nh.\int\frac{(t^2+k^2)-k^2}{\left(t^2+k^2\right)^{n+1}}\,dt=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+2n.J_n\;-\left(2n.k^2\right).h.\int\frac{+1}{\left(t^2+k^2\right)^{n+1}}\,dt=$$

$$=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+2n.J_n\;-\left(2n.k^2\right).J_{n+1}.\Rightarrow\;\;J_n=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+2n.J_n\;-\left(2n.k^2\right).J_{n+1}$$

$$\Rightarrow\left(2n.k^2\right).J_{n+1}=\frac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+(2n-1).\,J_n$$

و بالتالي نجد العلاقة التالية: $\left(2n.k^2\right).J_{n+1}=\dfrac{h.t}{\left(t^2+k^2\right)^n}\;+(2n-1).\,J_n$.

هذه العلاقة تمكننا من حساب J_2 بتعويض $n=1$ فنجد J_2 بدلالة J_1 حيث أن J_1 قيمته معلومة و هي:

$$J_1=h.\int\frac{+1}{\left(t^2+k^2\right)^1}\,dt=\frac{h}{k^2}.\int\frac{+1}{\left(1+\dfrac{t^2}{k^2}\right)^1}\,dt=\frac{h}{k}.\int\frac{\left(\dfrac{dt}{k}\right)}{\left(1+\left(\dfrac{t}{k}\right)^2\right)^1}\;=$$

$$=\left(\frac{h}{k}\right).\,Arc\tan g\left(\frac{t}{k}\right)+Cte.$$

و بهذا يصبح التكامل J_2 معلوم ، وبنفس الطريقة نجد J_3 بوضع $n=2$ فنحصل على J_3 بدلالة J_2 التي أصبحت معلومة و هكذا .....

أشكال أخرى:

تـكـامل من الشكل: $\int \frac{+1}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx$.

نعلم أن: $a.x^2+b.x+c = a.\left[\left(\underbrace{x+\frac{b}{2a}}_{u}\right)^2 - \underbrace{\frac{\left(b^2-4.a.c\right)}{4a^2}}_{k^2}\right]$.

ومنه لدينا حالتين:

1. <u>حالة</u> $a<0$: إذن يجب أن يكون $\Delta \geq 0$ ، نضع: $k^2 = \frac{\left(b^2-4.a.c\right)}{4a^2}$ و منه نجد:

$$\int \frac{+1}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{k^2-u^2}}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{k^2}}\right)\int \frac{+1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{k}\right)^2}}\,du =$$

.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right).\int \frac{\left(\frac{du}{k}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{k}\right)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right).\,Arc\sin\left(\frac{u}{k}\right)+Cte.$$

2. <u>حالة</u> $a>0$: نضع: $\pm k^2 = \frac{\left(b^2-4.a.c\right)}{4a^2}$ (حسب إشارة Δ)

$$\int \frac{+1}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{k^2\pm u^2}}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).\ln\left|u+\sqrt{k^2\pm u^2}\right|+Cte.$$.

و لدينا كذلك:

$$\int \frac{+1}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{k^2\pm u^2}}\,du=$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{\left(\frac{u}{k}\right)^2+1}}\,du=\left(\frac{1}{k.\sqrt{a}}\right).ArgSh\left(\frac{u}{k}\right)+Cte:\ si\ \Delta<0.\\ \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{\left(\frac{u}{k}\right)^2-1}}\,du=\left(\frac{1}{k.\sqrt{a}}\right).ArgCh\left(\frac{u}{k}\right)+Cte:\ si\ \Delta>0.\end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx$.

لدينا: حالة $a=(-2)<0$ و $\Delta=b^2-4.a.c=+25>0$ اي ان:

$$-2x^2+3x+2=(-2).\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)=(-2).\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right]=$$

$$=(-2).\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=(-2).\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]=$$

$$=-\left(\frac{5}{4}\right)^2(-2).\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^2.\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right]=+\left(\frac{25}{16}\right)(+2).\left[1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2\right]$$

$$\Rightarrow -2x^2+3x+2=+\left(\frac{25}{8}\right).\left[1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2\right]$$

و بالتالي:

$$\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=\int \frac{+1}{\sqrt{+\left(\frac{25}{8}\right).\left[1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2\right]}}\,dx=\int \frac{\sqrt{8}}{5\sqrt{.\left[1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2\right]}}\,dx=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2}}\,dx$$

بوضع: $u=\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]$ و منه: $du=\left(\frac{4}{5}\right).dx$ ، إذن لدينا:

$$\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right).\int \frac{+1}{\sqrt{1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2}}\,dx=\left(\frac{\sqrt{8}}{4}\right).\int \frac{\left(\frac{4}{5}\right).dx}{\sqrt{1-\left[\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]^2}}=$$

$$.=\left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right).\int \frac{+du}{\sqrt{1-u^2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\int \frac{+du}{\sqrt{1-u^2}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).Arc\sin(u)+Cte=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).Arc\sin\left(\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)+Cte.$$

اي ان: $\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).Arc\sin\left(\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)+Cte.$.

تكامل من الشكل: $\int \frac{m.x+n}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx$.

نستعمل نفس الطريقة السابقة المستعملة في الشكل الثاني فنجد:

$$\int \frac{m.x+n}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx=\left(\frac{m}{2a}\right).\int \frac{2a.x+b}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx+\left(n-\frac{m.b}{2a}\right).\underbrace{\int \frac{+1}{\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx}_{I_2}=$$

.

$$=\left(\frac{m}{a}\right).\left(\sqrt{a.x^2+b.x+c}\right)+\left(n-\frac{m.b}{2a}\right).I_2$$

لحساب I_2 نرجع إلى الشكل الثالث (الشكل السابق).

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{-8.x+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx$. لدينا ان:

$$\int \frac{-8.x+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=\left(\frac{-8}{2(-2)}\right).\int \frac{-4.x+3}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx+$$

$$+\left(1-\left(\frac{(-8).(+3)}{2(-2)}\right)\right).\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=$$

.

$$=(+2).\int \frac{-4.x+3}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx+(-5).\int \frac{+1}{\sqrt{-2.x^2+3.x+2}}\,dx=$$

$$=(+2).\sqrt{-2.x^2+3.x+2}-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).Arc\sin\left(\left(\frac{4}{5}\right).\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)+Cte.$$

تكـــامل من الشكل: $\int \frac{+1}{(m.x+n).\sqrt{a.x^2+b.x+c}}\,dx$.

نضع: $t=\frac{+1}{m.x+n}$ أي ان: $x=\left(\frac{+1}{m.t}-\frac{n}{m}\right)$ ، إذن: $dx=\left(\frac{-1}{m.t^2}\right).dt$ ثم نرجع إلى الشكل الرابع.

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{+1}{(x+1).\sqrt{x^2-2}}\,dx$.

نضع: $t=\frac{+1}{m.x+n}=\frac{+1}{x+1}$ أي ان: $x=\left(\frac{+1}{m.t}-\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{+1}{t}-1\right)$ ، إذن: $dx=\left(\frac{-1}{t^2}\right).dt$

$$\int \frac{+1}{(x+1).\sqrt{x^2-2}}\,dx=\int \frac{t.\left(-\frac{1}{t^2}\right).dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2}}=\int \frac{\left(-\frac{1}{t}\right).dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2}}\,dx=$$

إذن:
$$=\int \frac{\left(-\frac{1}{t}\right).dt}{\sqrt{\left(\frac{-t^2-2t+1}{t^2}\right)}}\,dx=\int \frac{t.\left(-\frac{1}{t}\right).dt}{\sqrt{-t^2-2t+1}}\,dx=\int \frac{-dt}{\sqrt{-t^2-2t-1+1+1}}\,dx=$$

.

$$=\int \frac{-dt}{\sqrt{2-\left(t^2+2t+1\right)}}\,dx=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\int \frac{-dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\text{Arccos}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+Cte.$$

اي ان: $\int \frac{+1}{(x+1).\sqrt{x^2-2}}\,dx=\left(\frac{+1}{\sqrt{2}}\right)\text{Arccos}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+Cte.$.

تكاملات من الشكل: $\int f\left(x\,,\,x^{\frac{m}{n}}\,,\,\ldots\,,\,x^{\frac{r}{s}}\right)dx$.

حيث: f هو كسر ناطق بدلالة $x^1\,,\,x^{\frac{m}{n}}\,,\,\ldots\,,\,x^{\frac{r}{s}}$.

أولا نبحث عن المقام المشترك للكسور: $1\,,\,\frac{m}{n}\,,\,\ldots\,,\,\frac{r}{s}$ و ليكن k ، ثم نقوم بتبديل المتغير بوضع:

$x=t^k$ و منه نجد ان: $dx=k.t^{k-1}.dt$ ، ثم نرجع f إلى كسر ناطق.

مثال: أحسب التكامل التالي: $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,dx$.

- نلاحظ ان المقام المشترك للكسور: $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ هو العدد $k=4$ ، إذن نضع: $x=t^k=t^4$ ومنه

$dx=4.t^3.dt$. و بالتالي: $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,dx=\int \frac{\left(t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(t^4\right)^{\frac{3}{4}}+1}4.t^3.dt=\int \frac{4.t^5}{t^3+1}.dt=$. ولدينا ان:

$\frac{t^5}{t^3+1}=\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)$. و منه:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,dx=\int \frac{\left(t^4\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(t^4\right)^{\frac{3}{4}}+1}4.t^3.dt=\int \frac{4.t^5}{t^3+1}.dt=\int 4.\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right).dt=$$

$$=4.\int t^2\,dt+4.\int \frac{t^2}{t^3+1}.dt=4.\left(\frac{t^3}{3}\right)-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+Cte=$$

$$=4.\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3}{3}\right)-\frac{4}{3}\ln\left|\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3+1\right|+Cte=\left(\frac{4}{3}\right).x^{\frac{3}{4}}-\left(\frac{4}{3}\right).\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|+Cte.$$

6-3. تـكـامــل الـدوال المثلـثية و الأسـية:

- تكامل من النوع: $\int e^{k.x}.\,\mathrm{Cos}(a.x)\,dx$.

لحساب هذا النوع من التكاملات، نستعمل " التكامل بالتجزئة " مرتين و تكون دالته الأصلية على الشكل: $e^{k.x}.\left[\alpha.\,\mathrm{Cos}(a.x)+\beta.\,\mathrm{Sin}(a.x)\right]$.

- تـكـامــل من النوع: $\int P_n(x).e^{k.x}.\,dx$.

$P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة "n" و $k\in\mathbb{R}$ ، يمكننا حساب التوابع الأصلية لهذا النوع من التكاملات بإستعمال " التكامل بالتجزئة " عدة مرات، و بعد الحساب نجد أن التوابع الأصلية هي

من الشكل: $F(x) = Q_n(x).e^{k.x} + Cte$ حيث: $Q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة "n" ، و يمكن حسابه بسرعة بمقارنة $F'(x)$ مع $P_n(x).e^{k.x}$.

مثال: أحسب التكامل التالي: $I = \int \underbrace{\left(2x^2+4x+3\right).e^{+2x}}_{f(x)}\, dx$.

- الدالة الأصلية للدالة f هي من الشكل: $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right).e^{+2x}$. لدينا ان:

$$F'(x)=\left(2ax+b\right).e^{+2x}+2\left(ax^2+bx+c\right).e^{+2x}=\left(2ax^2+\left(2a+2b\right).x+\left(b+2c\right)\right).e^{+2x}=f(x).$$

بمطابقة $F'(x)$ مع $f(x)$ نجد ان :

$$\begin{cases} 2a=+2 \\ (2a+2b)=+4 \\ (b+2c)=+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=+1 \\ (+2b)=+2 \\ (b+2c)=+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=+1 \\ b=+1 \\ (+1+2c)=+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=+1 \\ b=+1 \\ c=+1 \end{cases}.$$

إذن: $F(x)=\left(x^2+x+1\right).e^{+2x}$ و منه: $I=\left(x^2+x+1\right).e^{+2x}+Cte.$.

التكامل من الشكل: $\int f\left(Sh(x),Ch(x)\right)dx$.

- لحساب التكامل نستعمل التغير: $t=e^x$ او $t=th\left(\frac{x}{2}\right)$.

مثال: أحسب التكامل التالي: $I=\int \frac{ch(x)}{sh(x)}\,dx$.

نضع: $t=th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}$ و منه:

$$dt=\left(th(x)\right)'=\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)'=\frac{ch(x).ch(x)-sh(x).sh(x)}{\left(ch(x)\right)^2}=\left(1-th^2(x)\right).dx=\left(1-t^2\right).dx$$

.

$$\Leftrightarrow dt=\left(1-t^2\right).dx \Leftrightarrow dx=\frac{dt}{\left(1-t^2\right)}.$$

و منه التكامل I يصبح على الشكل:

$$I = \int \frac{ch(x)}{sh(x)}\,dx = \int \frac{+1}{\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)}\,dx = \int \frac{+1}{t}\cdot\frac{dt}{(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t.(1+t).(1-t)} =$$

$$= \int\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{(1+t)}+\frac{c}{(1-t)}\right)dt = \int\left(\frac{a}{t}+\frac{b}{(1+t)}+\frac{c}{(1-t)}\right)dt =$$

.

$$= \int\left(\frac{+1}{t}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(1+t)}+\frac{\left(+\frac{1}{2}\right)}{(1-t)}\right)dt = \ln|t|-\frac{1}{2}\ln|1+t|+\frac{1}{2}\ln|1-t| + Cte =$$

$$= \ln|th(x)|-\frac{1}{2}\ln|1+th(x)|+\frac{1}{2}\ln|1-th(x)| + Cte\,.$$

اي ان: $I = \int \frac{ch(x)}{sh(x)}\,dx = \ln|th(x)|-\frac{1}{2}\ln|1+th(x)|+\frac{1}{2}\ln|1-th(x)| + Cte$.

تكـامـل من الشكل: $\int f\left(\mathrm{Cos}(x)\,,\,\mathrm{Sin}(x)\right)dx$. **حيث** f **دالة كسرية.**

في هذه الحالة نضع: $t = \tan g\left(\frac{x}{2}\right)$ (في كثير من الحالات) و الدوال $\sin(x)$ و $\cos(x)$ معطاة

بهذا الشكل:

.
$$\begin{cases} \sin(x) = \dfrac{2.\tan g\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan g^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2.t}{1+t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \cos(x) = \dfrac{1-\tan g^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan g^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ t = \tan g\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right) = \mathrm{Arctan}\,g(t) \Leftrightarrow \\ x = 2.\mathrm{Arctan}\,g(t) \Leftrightarrow dx = \dfrac{+2}{1+t^2}\,dt \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل التالي: $I = \int \frac{+1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx$.

نضع: $t = \tan g\left(\frac{x}{2}\right)$ و منه: $\sin(x) = \frac{2.t}{1+t^2}$ و $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $dx = \frac{2.dt}{1+t^2}$ ، وبالتعويض:

$$I=\int\frac{+1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx=\int\frac{+1}{\left(\frac{2.t}{1+t^2}\right)+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}.\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{+2}{\left(-t^2+2t+1\right)}.dt=$$

$$=\int\frac{(-2)}{\left(+t^2-2t-1\right)}.dt==\int\frac{(-2)}{\left(+t^2-2t+1-1-1\right)}.dt=\int\frac{(-2)}{\left(\left(+t^2-2t+1\right)-2\right)}.dt=$$

$$=\int\frac{(-2)}{(-2).\left(1-(t-1)^2\right)}.dt=\int\frac{+1}{\left(1-(t-1)^2\right)}.dt\ ,\ u=(t-1)\ \Leftrightarrow\ du\ =\ dt.$$

$$=\int\frac{+1}{\left(1-u^2\right)}.du\ =\int\left[\frac{\left(+\frac{1}{2}\right)=a}{(1-u)}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)=b}{(1+u)}\right].du\ =$$

$$=\left(+\frac{1}{2}\right).\ln\left|1-(1+t)\right|+\left(-\frac{1}{2}\right).\ln\left|1+(1+t)\right|\ =$$

$$.\ =\left(+\frac{1}{2}\right).\ln|-t|+\left(-\frac{1}{2}\right).\ln|2+t|\ =\left(+\frac{1}{2}\right).\ln\left|\frac{t}{2+t}\right|\ +\ Cte.$$

اي ان: $I=\int\frac{+1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx=\left(+\frac{1}{2}\right).\ln\left|\frac{\tan g\left(\frac{x}{2}\right)}{2+\tan g\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\ +\ Cte.$.

تـكـامـل من الشكل: $\int \mathrm{Sin}^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,dx$.

في هذه الحالة نميز ثلاث حالات:

ا . الحالة الأولى : "n" **فردي. أي:** $n=(2.k+1)$ **. حيث:** k **عدد طبيعي.**

$$\int \mathrm{Sin}^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,dx=\int \sin^{2k}(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,.\,\sin(x)dx=\int\left(\sin^2(x)\right)^k.\mathrm{Cos}^m(x).\sin(x)dx=$$

$$=\int\left(1-\cos^2(x)\right)^k.\mathrm{Cos}^m(x).\sin(x)dx\ .$$

نضع: $t=\cos(x)\Leftrightarrow dt=-\sin(x)\,.\,dx$ إذن: $\int \mathrm{Sin}^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,dx\ =-\int(1-t)^k\,.\,t^m.\,dt$.

هذا يعني أن التكامل يصبح عبارة عن تكامل كثير حدود.

مثال: 1. أحسب التكامل التالي : $I=\int \mathrm{Sin}^3(x)\,.\,\mathrm{Cos}^6(x)\,dx$.

لدينا ان:

$$I = \int \mathrm{Sin}^3(x).\mathrm{Cos}^6(x)dx = \int \sin^2(x).\cos^6(x).\sin(x)dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right).\cos^6(x).\sin(x)dx =$$

و منه نستعمل التغير: $t = \cos(x) \Leftrightarrow dt = -\sin(x)\,.\,dx$ و منه التكامل I يصبح على الشكل:

$$I = \int \mathrm{Sin}^3(x)\,.\,\mathrm{Cos}^6(x)\,dx = -\int \left(1-t^2\right).t^6\,.dt = \int \left(t^8 - t^6\right)dt =$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right).t^9 - \left(\frac{1}{7}\right).t^7 = \left(\frac{1}{9}\right).\cos^9(x) - \left(\frac{1}{7}\right).\cos^7(x) + Cte.$$

اي ان: $I = \int \mathrm{Sin}^3(x)\,.\,\mathrm{Cos}^6(x)\,dx = \left(\frac{1}{9}\right).\cos^9(x) - \left(\frac{1}{7}\right).\cos^7(x) + Cte.$

ب. الحالة الثانية: "m" فردي. أي: $m = (2.k+1)$. حيث: k عدد طبيعي.

$$\int \mathrm{Sin}^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,dx = \int \sin^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^{2k}(x)\,.\cos(x)dx = \int \sin^n(x)\,.\left(\cos^2(x)\right)^k.\cos(x)dx =$$

$$= \int \sin^n(x)\,.\left(1-\sin^2(x)\right)^k.\cos(x)dx\,.$$

نضع: $t = \sin(x) \Leftrightarrow dt = +\cos(x).dx$ إذن: $\int \mathrm{Sin}^n(x)\,.\,\mathrm{Cos}^m(x)\,dx = \int t^n\,.\left(1-t^2\right)^k dt$

هذا يعني أن التكامل يصبح عبارة عن تكامل كثير حدود.

مثال1: أحسب التكامل التالي: $I = \int \mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^3(x)\,dx$.

لدينا ان:

$$\int \mathrm{Sin}^2(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \int \sin^2(x).\mathrm{Cos}^2(x).\cos(x)dx = \int \sin^2(x).\left(\cos^2(x)\right)^1.\cos(x)dx =$$

$$= \int \sin^2(x).\left(1-\sin^2(x)\right)^1.\cos(x)dx\,.$$

نستعمل التغير: $t = \sin(x) \Leftrightarrow dt = +\cos(x).dx$ و بالتالي التكامل I يصبح على الشكل:

$$\int \mathrm{Sin}^2(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \int t^2.\left(1-t^2\right)^1.dt = \int \left(t^2-t^4\right)^1 dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right).t^3 - \left(\frac{1}{5}\right).t^5 = \left(\frac{1}{3}\right).\sin^3(x) - \left(\frac{1}{5}\right).\sin^5(x) + Cte.$$

اي ان: $I = \int \mathrm{Sin}^2(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}\right).\sin^3(x) - \left(\frac{1}{5}\right).\sin^5(x) + Cte.$.

مثال2: أحسب التكامل التالي: $I = \int \mathrm{Sin}^4(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx$.

لدينا ان:

$$\int \mathrm{Sin}^4(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \int \sin^4(x).\mathrm{Cos}^2(x).\cos(x)dx = \int \sin^4(x).\left(\cos^2(x)\right)^1.\cos(x)dx =$$

$$= \int \sin^4(x).\left(1-\sin^2(x)\right)^1.\cos(x)dx .$$

نستعمل التغير: $t = \sin(x) \Leftrightarrow dt = +\cos(x).dx$ و بالتالي التكامل I يصبح على الشكل:

$$\int \mathrm{Sin}^4(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \int t^4.\left(1-t^2\right)^1.dt = \int \left(t^4-t^6\right)^1 dt =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right).t^5 - \left(\frac{1}{7}\right).t^7 = \left(\frac{1}{5}\right).\sin^5(x) - \left(\frac{1}{7}\right).\sin^7(x) + Cte.$$

اي ان: $I = \int \mathrm{Sin}^4(x).\mathrm{Cos}^3(x)\,dx = \left(\frac{1}{5}\right).\sin^5(x) - \left(\frac{1}{7}\right).\sin^7(x) + Cte.$.

ج. الحالة الثالثة: "n" **زوجي و** "m" **زوجي.**

نستعمل تبديل المتغير: $t = \tan g(x)$ أو نستعمل القواعد التالية (في كثير من الحالات):

$$\begin{cases} (1)\ \sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2}.\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right). \\ (2)\ \sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}.\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right). \\ (3)\ \cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}.\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right). \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل التالي: $I = \int \mathrm{Sin}^2(x).\mathrm{Cos}^4(x)\,dx$.

بإستعمال العلاقات المثلثية التالية:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(2x)=1-2\sin^2(x)\\ \cos(2x)=2\cos^2(x)-1\\ \sin(2x)=2\,\sin(x)\,.\,\cos(x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin^2(x)=\frac{1}{2}\,.\,(1-\cos(2x))\\ \cos^2(x)=\frac{1}{2}\,.\,(1+\cos(2x))\\ \sin(x)\,.\,\cos(x)=\frac{1}{2}\,.\,\sin(2x)\end{array}\right.$$

$$(4)\ \cos(4x)\,.\,\cos(2x)=\frac{1}{2}\,.\,(\cos(2x)+\cos(6x))$$

نجد:

$$\mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^4(x)=(\mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^2(x))\,.\,\mathrm{Cos}^2(x)=(\mathrm{Sin}(x)\,.\,\mathrm{Cos}(x))^2\,.\left(\frac{1}{2}\,.\,(1+\cos(2x))\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2\,.\left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)=\left(\frac{1}{4}\sin^2(2x)\right).\left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{8}.(1-\cos(4x))\right).\left(\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\right)=\frac{1}{16}\,.\,(1-\cos(4x)).(1+\cos(2x))=$$

$$=\frac{1}{16}\,.\,[1+\cos(2x)-\cos(4x)-\cos(4x)\,.\,\cos(2x)\,]=$$

$$=\frac{1}{16}\,.\left[1+\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\,.\,(\cos(2x)+\cos(6x)\,)\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\,.\left[1+\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(6x)\right]$$

أي ان: $\mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^4(x)=\frac{1}{16}\,.\left[1+\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(6x)\right]$.

و بالتالي نجد:

$$I=\int \mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^4(x)\,dx=\int\frac{1}{16}\,.\left[1+\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(6x)\right]dx=$$

$$=\left(\frac{1}{16}\right).\left(x+\frac{1}{2.2}\sin(2x)-\frac{1}{4}\sin(4x)\,\frac{1}{2.6}\sin(6x)\right)+Cte.$$

أي ان: $I=\int \mathrm{Sin}^2(x)\,.\,\mathrm{Cos}^4(x)\,dx=\left(\frac{1}{16}\right).\left(x+\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{4}\sin(4x)\,\frac{1}{12}\sin(6x)\right)+Cte$.

تـكـامــل من الشكل: $\int \mathrm{Sin}(n.x)\,.\,\mathrm{Cos}(m.x)\,dx$.

نحول " الجـداء " إلى " مجموع " بإستعمال دساتير التحويل التالية:

$$\begin{cases} (1)\ \sin(a.x).\sin(b.x) = \frac{1}{2}.\left(\cos\left[(a-b).x\right] - \cos\left[(a+b).x\right]\right). \\ (2)\ \sin(a.x).\cos(b.x) = \frac{1}{2}.\left(\sin\left[(a-b).x\right] + \sin\left[(a+b).x\right]\right). \\ (3)\ \cos(a.x).\cos(b.x) = \frac{1}{2}.\left(\cos\left[(a-b).x\right] + \cos\left[(a+b).x\right]\right). \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل التالي: $E = \int \mathrm{Sin}(3x).\mathrm{Cos}(x)\,dx$.

لدينا ان: حسب العلاقة المثلثية التالية:

$$(2)\ \sin(3x).\cos(x) = \frac{1}{2}.\left(\sin\left[(3-1).x\right] + \sin\left[(3+1).x\right]\right) = \frac{1}{2}.\left(\sin(2x) + \sin(4x)\right)$$

و بالتالي:

$$E = \int \mathrm{Sin}(3x).\mathrm{Cos}(x)\,dx = \int \frac{1}{2}.\left(\sin(2x) + \sin(4x)\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(4x)\right) + Cte.$$

أي ان: $E = \int \mathrm{Sin}(3x).\mathrm{Cos}(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\cos(4x) + Cte.$.

الفصل الرابع:

المعادلات التفاضلية

1-4. المعادلات التفاضلية العادية

تعريفات:

- نسمي معادلة تفاضلية من المرتبة "n" كل معادلة من الشكل:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \quad .....(1)$$

حيث: F دالة معلومة ذات $(n+2)$ متغير، $y(x)$ هي دالة للمتغير x و $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ هي المشتقات المتتالية للدالة $y(x)$ إلى غاية المرتبة (أو الدرجة) "n".

- " أكبر درجة إشتقاق" موجودة في المعادلة (1) تمثل " رتبة " المعادلة التفاضلية.

رتبة المعادلة التفاضلية:

هي " اعلى مشتقة " تتضمنها المعادلة.

مثال1:

- المعادلة $x.y'(x)+y(x)=+3$ ← رتبة المعادلة هي: 1 .
- المعادلة $\left(y''(x)\right)^2+x.\left(y'(x)\right)^3 = x^2$ ← رتبة المعادلة هي: 2 .
- المعادلة $y'''(x) + 2\left(y''(x)\right)^2 + y(x) = \cos(x)$ ← رتبة المعادلة هي: 3 .

درجة المعادلة التفاضلية:

هي" قوة (او اس) رتبة " المعادلة التفاضلية.

مثال2:

ا . المعادلة $y'(x)-2x.\left(y(x)\right)^3+5=0$ ← رتبة المعادلة هي: 1 . و درجة المعادلة هي: 1

ب. المعادلة $\left(y''(x)\right)^2+\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^3=0$ ← رتبة المعادلة هي: 2 و درجة المعادلة هي: 2 .

ج. المعادلة← $y'''(x) + 2x.y''(x)+\left(y'(x)\right)^2 = \sin(x)$ رتبة المعادلة هي: 3 ودرجة المعادلة هي:1.

د. المعادلة $x.y'(x)+y(x)=0$ معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

و. المعادلة $y''(x)+y'(x)+x=\cos(x)$ معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

- المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هي كل معادلة من الشكل: $y'(x)=f(x\,,\,y(x))$ .....(2).

- نقول أن المعادلة التفاضلية (2) تملك حلا عاما $y_0(x)$ إذا كان: $y_0'(x)=f(x\,,\,y_0(x))$.

- إذا اضيف للمعادلة (2) شرطا من النوع: $y_0(x)=y_0$ ، نقول إن الجملة:

$$\begin{cases} y'(x)=f(x\,,\,y(x)) \\ y_0(x)=y_0 \end{cases}$$ تملك " حلا خاصا ".

1-2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ذات المتغيرات المنفصلة:

لتكن الدالتين "المستمرتين" $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:J\to\mathbb{R}$ بحيث: I و J مجالين من $\mathbb{R}$ و

$\forall y\in J:\ g(y)\neq 0$.

- نسمي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ذات "متغيرات منفصلة" (أو "منفصلة المتغيرات")

كل معادلة من الشكل: $y'(x)=h(x).k(y)$ او $y'(x)=\dfrac{f(x)}{g(y)}$ او $g(y).y'(x)=f(x)$.

و بتعويض: $y'(x)=\dfrac{dy(x)}{dx}$ نجد ان: $g(y).dy(x)=f(x).dx$ .....(3) و لحل المعادلة (3) يكفي مكاملة الطرفين فنحصل على ما يلي:

$$\int f(x).dx=\int g(y).dy(x)\Rightarrow F(x)=G(y)+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$ ....(3).

حيث: الدالتين F و G هما " الدالتين الأصليتين " للد التين f و g على الترتيب.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'(x)=2x.y(x)$ ....(*) .

- المعادلة التفاضلية (*) هي معادلة "منفصلة المتغيرات" . و لدينا:

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = 2x.y(x) \Leftrightarrow \frac{dy(x)}{y(x)} = 2x.dx \overset{\int}{\Leftrightarrow} \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int 2x.dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = x^2 + k \ , k \in \mathbb{R} \overset{e^X}{\Leftrightarrow} |y(x)| = e^{x^2+k}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \begin{cases} +e^{+k} \cdot e^{x^2} \ , (solution\ positive) \\ -e^{+k} \cdot e^{x^2} \ , (solution\ négative) \end{cases} \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{x^2} \ , \ C \in \mathbb{R}.$$

و منه حل العام المعادلة التفاضلية هو: (C ثابت اختياري) $y_G(x) = C \cdot e^{x^2} \ , \ C \in \mathbb{R}.$.

مثال2: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x \cdot y'(x) = y(x) \ldots.(*)$

مع تحقق الشرط الابتدائي: $y(+1) = +2$.

- المعادلة التفاضلية $(*)$ هي معادلة "منفصلة المتغيرات" . و لدينا:

$$x \cdot y'(x) = y(x) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{dy(x)}{y(x)} = \frac{dx}{x} \overset{\int}{\Leftrightarrow} \int \frac{dy(x)}{y(x)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + k \ , k \in \mathbb{R} \overset{e^X}{\Leftrightarrow} |y(x)| = \ln|k.x|$$

$$\Leftrightarrow y(x) = C \cdot x \ , \ C \in \mathbb{R}.$$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y_G(x) = C \cdot x \ , \ C \in \mathbb{R}$.

- تعيين الثابت C : الحل العام للمعادلة التفاضلية $y_G(x)$ يحقق الشرط الابتدائي: $y_G(+1) = +2$.

اي ان: $y_G(+1) = C \cdot (+1) = +2 \Leftrightarrow C = +2$.

و منه الحل الخاص للجملة : $\begin{cases} x.y'(x) = y(x) \\ y_0(+1) = +2 \end{cases}$ هو معطى بالشكل: $y(x) = 2x$.

2-2-4. المعادلات التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى:

- نسمي معادلة تفاضلية "متجانسة " من المرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

(4).... $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ حيث: f دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}$.

- لحل المعادلة (4) نضع: $t(x) = \frac{y(x)}{x}$ أي أن:

$t(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = t(x).x \Leftrightarrow y'(x) = \left(t'(x).x + t(x).1\right)$. إذن لدينا:

$$(4) \Leftrightarrow y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) = f(t) \Leftrightarrow \left(t'(x).x + t(x).1\right) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow t'(x).x = f(t) - t(x) \Leftrightarrow \frac{dt(x)}{dx}.x = f(t) - t(x) \quad .$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt(x)}{f(t) - t(x)} = \frac{dx}{x}.$$

اي ان: $\frac{dx}{x} = \left(\frac{+1}{f(t) - t(x)}\right).dt(x) \Leftrightarrow y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) = f(t) \Leftrightarrow (4)$.

إذن المعادلة التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى أصبحت معادلة تفاضلية ذات " متغيرات منفصلة " او " منفصلة المتغيرات " (أي: نرجع إلى طريقة حل المعادلة (3)).

مثال1: حل المعادلة التفاضلية التالية: $(*)$.... $x^2.y'(x) + x^2 + y^2(x) + x.y(x) = 0$.

- بقسمة المعادلة $(*)$ على x^2 (مع $x \neq 0$) نجد ان:

$\forall x \in \mathbb{R}^* : y'(x) + 1 + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{y(x)}{x}\right) = 0$....$(*)$. و بوضع: $t(x) = \frac{y(x)}{x}$ و بالتالي:

$t(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = t(x).x \Leftrightarrow y'(x) = t'(x).x + t(x)$. اي ان:

$$(*)....\forall x \in \mathbb{R}^* : y'(x) + 1 + \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{y(x)}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow t'(x).x + t(x) + 1 + t^2(x) + t(x) = 0$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{dt(x)}{dx}.x = -t^2(x) - 2t(x) - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{+1}{t^2(x) + 2t(x) + 1}\right)dt(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)dx.$$

و منه تصبح $(*)$ على الشكل:

$$\left(\frac{+1}{t^2(x)+2t(x)+1}\right)dt(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \frac{-1}{\left(t(x)+1\right)^2}dt(x)=\left(+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{-1}{\left(t(x)+1\right)^2}dt(x)=\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{+1}{t(x)+1}=\ln|x|+k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{+1}{\left(\ln|x|+k\right)}=t(x)+1 \Leftrightarrow t(x)=\frac{+1}{\left(\ln|x|+k\right)}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x)}{x}=t(x)=\frac{+1}{\left(\ln|x|+k\right)}-1 \Leftrightarrow y(x)=\frac{x}{\left(\ln|x|+k\right)}-x\ ,\ k\in\mathbb{R}.$$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية $(*)$ هو: $y_G(x)=\frac{x}{\left(\ln|x|+k\right)}-x\ ,\ k\in\mathbb{R}$.

مثال2: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2.y'(x)=x\,.\,y(x)-y^2(x)....(*)$.

- بقسمة المعادلة $(*)$ على x^2 (مع $x\neq 0$) نجد ان:

$$\forall\ x\in\mathbb{R}^*:\ y'(x)=\left(\frac{y(x)}{x}\right)-\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2....(*)$$ و بوضع: $t(x)=\frac{y(x)}{x}$ و بالتالي:

$$t(x)=\frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x)=t(x)\,.\,x \Leftrightarrow y'(x)=t'(x)\,.\,x+t(x)$$ اي ان:

$$(*)....\forall\ x\in\mathbb{R}^*:\ y'(x)=\left(\frac{y(x)}{x}\right)-\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 \Leftrightarrow t'(x)\,.\,x+t(x)=t(x)-t^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt(x)}{dx}\,.\,x=-t^2(x) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{t^2(x)}\right)dt(x)=\left(+\frac{1}{x}\right)dx.$$

$$\left(\frac{-1}{t^2(x)}\right)dt(x)=\left(+\frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \frac{-1}{t^2(x)}dt(x)=\left(+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-1}{t^2(x)}dt(x)=\int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{+1}{t(x)}=\ln|x|+k \ , \ k\in\mathbb{R}$$

و منه تصبح $(*)$ على الشكل:

$$\Leftrightarrow \frac{+1}{(\ln|x|+k)}=t(x) \Leftrightarrow t(x)=\frac{+1}{(\ln|x|+k)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x)}{x}=t(x)=\frac{+1}{(\ln|x|+k)} \Leftrightarrow y(x)=\frac{x}{(\ln|x|+k)} \ , \ k\in\mathbb{R}.$$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $(*)$ هو: $y_G(x)=\frac{x}{(\ln|x|+k)} \ , \ k\in\mathbb{R}.$.

3-2-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

- نسمي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y'(x)+P(x).y(x)=Q(x)....(5).$$

حيث: $P(x)$ و $Q(x)$ " دالتين مستمرتين" على مجال I من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- <u>إذا كان</u> : $Q(x)=0$ فإن المعادلة: $y'(x)+P(x).y(x)=0$ تسمى المعادلة المرافقة للمعادلة (5).

الطريقة الأولى لحل المعادلة (5):

نضع: $y(x)=u(x).v(x)$ و منه نجد: $y'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$.

نعوض $y(x)$ و $y'(x)$ في المعادلة (5) فنجد:

$$(5)\Leftrightarrow y'(x)+P(x).y(x)=Q(x) \Leftrightarrow u'(x).v(x)+u(x).v'(x)+P(x).u(x).v(x)=Q(x)$$

$$\Leftrightarrow u'(x).v(x)+u(x).\left(\underbrace{v'(x)+P(x).v(x)}_{(**)}\right)=Q(x)....(***)$$

نختار $v(x)$ بحيث يكون: $(**)\Leftrightarrow v'(x)+P(x).v(x)=0$ و منه:

$$(**) \Leftrightarrow v'(x)+P(x).v(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{dv(x)}{dx} = -P(x).v(x) \Leftrightarrow \frac{dv(x)}{v(x)} = -P(x).dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dv(x)}{v(x)} = \int -P(x)\,dx \Leftrightarrow \ln|v(x)| = -\int P(x)\,dx + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x) = k\,.\,e^{-\int P(x)\,dx}\ ,\ k = e^{c} \in \mathbb{R}_+^*$$

و من جهة أخرى يصبح لدينا:

$$(***)\ .....\ u'(x).v(x) = Q(x) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{Q(x)}{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \int \left(\frac{Q(x)}{k}\right).e^{+\int P(x)\,dx}\,.\,dx + Cte\ ,\ k, Cte \in \mathbb{R}_+^*$$

و منه الحل العام للمعادلة (5) هو:

$$y_G(x) = u(x)\,.\,v(x) = \left[\int \left(\frac{Q(x)}{k}\right).e^{+\int P(x)\,dx}\,.\,dx + Cte\right].\left[k\,.\,e^{-\int P(x)\,dx}\right]$$

$$= \left(\int Q(x)\,.\,e^{+\int P(x)\,dx}\,dx\right).\left(e^{-\int P(x)\,dx}\right) + \left(Cte\,.\,k\,.\,e^{-\int P(x)\,dx}\right)$$

اي ان: $y_G(x) = \left(e^{-\int P(x)\,dx}\right).\left(\int Q(x)\,.\,e^{+\int P(x)\,dx}\,dx\right) + \left(C\,.\,e^{-\int P(x)\,dx}\right),\ C \in \mathbb{R}.$

مثال: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y'(x) + 2x\,.\,y(x) = 2x\,.\,e^{-x^2}\ .....(*)$$

لدينا: $P(x) = 2x$ و $Q(x) = 2x\,.\,e^{-x^2}$ و بالتالي:

$$v(x) = k\,.\,e^{-\int P(x)\,dx} = k\,.\,e^{-\int 2x\,dx} = \left(k\,.\,e^{-x^2}\right),\ k \in \mathbb{R}_+^*.$$ و

$$u(x) = \int \left(\frac{Q(x)}{v(x)} \right) . dx = \int \left(\frac{2x . e^{-x^2}}{k . e^{-x^2}} \right) . dx = \frac{1}{k} . \int 2x . dx = \left(\frac{1}{k} . x^2 + Cte \right).$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى هو:

$$y_G(x) = u(x) . v(x) = \left(\frac{1}{k} . x^2 + Cte \right) . \left(k . e^{-x^2} \right) = x^2 . e^{-x^2} + C . e^{-x^2}$$

اي ان: $y_G(x) = u(x) . v(x) = \left(x^2 + C \right) . e^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

الطريقة الثانية لحـل المعادلة (5): (الحل العام = حل المعادلة بدون طرف ثاني + حل خاص)

- **أولا** : نحل المعادلة " بدون طرف ثاني " (المعادلة المرافقة للمعادلة (5)):

$$y'(x) + P(x) . y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{dx} \right) = - P(x) . y(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{y(x)} \right) = - P(x) . dx \overset{\int}{\Leftrightarrow} \int \left(\frac{dy(x)}{y(x)} \right) = - \int P(x) . dx$$

.

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = - \int P(x) . dx + k \ , \ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1(x) = K . e^{-\int P(x) . dx} \ , \ K \in \mathbb{R}.$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $y_1(x) = K . e^{-\int P(x) . dx}$, $K \in \mathbb{R}$.

- **ثانيا**: إذا أمكن ملاحظة (أو إستنتاج) " حل خاص " للمعادلة (5) و ليكن $y_0(x)$ فإن: الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى (المعادلة(5)) هو:

$$y_G(x) = y_1(x) + y_0(x)$$

مثال1: نأخذ المثال السابق: $y'(x) + 2x . y(x) = 2x . e^{-x^2}$.....(*)

لدينا: $P(x) = 2x$ و $Q(x) = 2x . e^{-x^2}$.

- **اولا**: نحل المعادلة بدون طرف ثاني: $y'(x) + 2x \,.\, y(x) = 0$.

$$y'(x) + 2x \,.\, y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = -2x \,.\, y(x) \Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{y(x)}\right) = -2x \,.\, dx$$

$$\overset{\int}{\Leftrightarrow} \int\left(\frac{dy(x)}{y(x)}\right) = -\int 2x.dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = -\int 2x.dx + k \;,\; k \in \mathbb{R}$$.

$$\Leftrightarrow y_1(x) = K \,.\, e^{-\int 2x dx} = K \,.\, e^{-x^2} \;,\; K \in \mathbb{R}.$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $y_1(x) = K \,.\, e^{-x^2} \;,\; K \in \mathbb{R}.$.

- **ثانيا** : نلاحظ أن: $y_0(x) = x^2 \,.\, e^{-x^2}$ هو " حـل خاص " يحقق المعادلة $(*)$ لأن:

$$y_0'(x) + 2x \,.\, y_0(x) \overset{?}{=} 2x \,.\, e^{-x^2} .....(*)$$ و منه:

$$y_0'(x)2x \,.\, e^{-x^2} - (2x).\underbrace{\left(x^2 \,.\, e^{-x^2}\right)}_{y_0(x)} = 2x \,.\, e^{-x^2} - (2x) \,.\, y_0(x)$$

$$\Leftrightarrow y_0'(x) + 2x \,.\, y_0(x) = 2x \,.\, e^{-x^2}.$$

(محققة) .

و منه الحل العام للمعادلة $(*)$ هو:

$$y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \left(K \,.\, e^{-x^2}\right) + \left(x^2 \,.\, e^{-x^2}\right) = \left(x^2 + K\right) \,.\, e^{-x^2} \;,\; K \in \mathbb{R}.$$.

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y'(x) - \tan g(x) \,.\, y(x) = \frac{+1}{\cos(x)} .....(**)$$.

أولا: نلاحظ أن: $y_0(x) = \frac{x}{\cos(x)}$ هو" حـل خاص " للمعادلة $(**)$(يمكن التأكد من ذلك بسهولة).

ثانيا: نحل المعادلة " بـدون طرف ثاني " (المعادلة المرافقة):

$$y'(x) - \tan g(x) \,.\, y(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = + \tan g(x) \,.\, y(x) \Leftrightarrow \left(\frac{dy(x)}{y(x)}\right) = + \tan g(x) \,.\, dx$$

$$\overset{\int}{\Leftrightarrow} \int\left(\frac{dy(x)}{y(x)}\right) = \int \tan g(x)\, dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.dx \Leftrightarrow \ln|y(x)| = -\int \frac{(-\sin(x))}{\cos(x)}.dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y(x)| = -\ln(|\cos(x)|) + k \;,\; k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln|y(x)| = \ln(|\cos(x)|^{-1}) + k \;,\; k \in \mathbb{R}$$

$$\overset{e^X}{\Leftrightarrow} |y(x)| = e^k \,.\, \frac{+1}{|\cos(x)|} \,,\, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y_1(x) = \frac{K}{\cos(x)} \;,\; K \in \mathbb{R}.$$

و منه الحل العام " للمعادلة المرافقة " هو: $y_1(x) = \dfrac{K}{\cos(x)} \;,\; K \in \mathbb{R}.$.

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية (**) هو:

$$y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \left(\frac{K}{\cos(x)}\right) + \left(\frac{x}{\cos(x)}\right) \;,\; K \in \mathbb{R}.$$

الطريقة الثالثة لحل المعادلة : (5) (هي طريقة **التغيير الثابت)**

Méthode de variation de la Constante

- إذا لم يكن من الممكن ملاحظة " حـل خاص " للمعادلة التفاضلية الخطية (5) ، نستعمل في هذه الحالة طريقة تسمى **طريقة التغيير الثابت** . أي أننا نعتبر الثابت K " دالة بدلالة المتغير x "

فتصبح: $K = K(x)$ (هو الثابت الموجود في حل " المعادلة المرافقة " للمعادلة(5)) و منه:

$$y_1(x) = K \,.\, e^{-\int P(x)\,dx} \,,\, K = Cte \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0(x) = K(x) \,.\, e^{-\int P(x)\,dx} \,,\, K(x) = fonction\ de\ x = ?$$

و بما انه حـل الخاص $y_0(x)$ فهو يحقق المعادلة التفاضلية الخطية :(5)

$y_0'(x) + P(x) \,.\, y_0(x) = Q(x)$ .....(5) اي نبحث عن $y_0'(x)$ فنجد ان:

$y_0'(x) = K'(x) \,.\, e^{-\int P(x)\,dx} + K(x) \,.\, (-P(x)) \,.\, e^{-\int P(x)\,dx}$ ثم نعوض $y_0(x)$ و $y_0'(x)$ في المعادلة

التفاضلية الخطية (5) فنجد:

$$(5) \ldots . y_0'(x) + P(x) . y_0(x) = Q(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(K'(x) . e^{-\int P(x)\,dx} - P(x) . K(x) . e^{-\int P(x)\,dx} \right) + P(x) . K(x) . e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

.

$$\Leftrightarrow K'(x) . e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x) \Leftrightarrow K'(x) = Q(x) . e^{+\int P(x)\,dx}$$

$$\Leftrightarrow K(x) = \int Q(x) . e^{+\int P(x)\,dx} . dx + C \ , \ C \in \mathbb{R}.$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة " الحل الخاص" $y_0(x)$ ونجد الحل العام المعادلة التفاضلية الخطية (5) يكتب على الشكل:

$$. y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \left(K . e^{-\int P(x)\,dx} \right) + \left(\left[\int Q(x) . e^{+\int P(x)\,dx} . dx + C \right] . e^{-\int P(x)\,dx} \right) , \ K, C \in \mathbb{R}.$$

مثال1: نأخذ المثال السابق: $(*) \ldots . y'(x) + 2x . y(x) = 2x . e^{-x^2}$.

- **اولا**: وجدنا سابقا أن الحل العام " للمعادلة المرافقة " هو: $. y_1(x) = K . e^{-x^2} \ , \ K \in \mathbb{R}.$

- **ثانيا:** إيجاد " الحل الخاص $y_0(x)$ " للمعادلة التفاضلية : $(*)$ نستعمل **طريقة التغيير الثابت**:

نضع: $K = K(x)$ و منه:

$$. y_1(x) = K . e^{-x^2} \ , K = Cte \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0(x) = K(x) . e^{-x^2} \ , K(x) = fonction\ de\ x = ?$$

و بما انه حل الخاص $y_0(x)$ فهو يحقق المعادلة التفاضلية الخطية : $(*)$

$(*) \ldots . y_0'(x) + 2x . y_0(x) = 2x . e^{-x^2}$ اي ان:

$$(*) \ldots \left(K'(x) . e^{-x^2} + (-2x) . K(x) . e^{-x^2} \right) + (+2x) . \left(K(x) . e^{-x^2} \right) = 2x . e^{-x^2}$$

.

$$\Leftrightarrow K'(x) . e^{-x^2} = 2x . e^{-x^2} \Leftrightarrow K'(x) = 2x \Leftrightarrow K(x) = \left(x^2 + c \right) , c \in \mathbb{R}.$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة " الحل الخاص" $y_0(x)$ ونجد الحل العام المعادلة التفاضلية الخطية $(*)$ يكتب على الشكل:

$$y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \left(K \,.\, e^{-x^2}\right) + \left(\left[\left(x^2 + c\right)\right].e^{-x^2}\right),\ K, c \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\ y_G(x) = \left(x^2 + K + c\right).e^{-x^2} = \left(x^2 + C\right).e^{-x^2}\ ,\ C \in \mathbb{R}.$$

اي ان: $y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = = \left(x^2 + C\right).e^{-x^2}\ ,\ C \in \mathbb{R}$.

مثال2: نأخذ المثال السابق: $y'(x) - \tan g(x).y(x) = \dfrac{+1}{\cos(x)}$ ....$(**)$.

1 . نعلم سابقا أن الحل العام " للمعادلة المرافقة " هو: $y_1(x) = \dfrac{K}{\cos(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. .

2 . إيجاد " الحل الخاص $y_0(x)$ " للمعادلة التفاضلية $(**)$: نستعمل **طريقة التغيير الثابت**:

نضع: $K = K(x)$ و منه:

$$y_1(x) = \frac{K}{\cos(x)}\ ,\ K = Cte \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0(x) = \frac{K(x)}{\cos(x)}\ ,\ K(x) = fonction\ de\ x = ?\ .$$

و بما انه حل الخاص $y_0(x)$ فهو يحقق المعادلة التفاضلية الخطية $(**)$:

$$y_0'(x) - \tan g(x).y_0(x) = \frac{+1}{\cos(x)} \text{.....}(**)$$ اي ان:

$$(*)\ \ldots \left(\frac{K'(x).\cos(x) - K(x).(-\sin(x))}{\cos^2(x)}\right) - \tan g(x).\left(\frac{K(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{+1}{\cos(x)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{K'(x)}{\cos(x)} + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right).\left(\frac{K(x)}{\cos(x)}\right) - \tan g(x).\left(\frac{K(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{+1}{\cos(x)}\ .$$
$$\Leftrightarrow \frac{K'(x)}{\cos(x)} = \frac{+1}{\cos(x)} \Leftrightarrow K'(x) = (+1) \Leftrightarrow K(x) = (x + c),\ c \in \mathbb{R}.$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة " الحل الخاص" $y_0(x)$ ونجد الحل العام المعادلة التفاضلية الخطية $(*)$ يكتب على الشكل:

$$y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \left(\frac{K}{\cos(x)}\right) + \left(\frac{(x+c)}{\cos(x)}\right),\ K, c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\ y_G(x) = \frac{(x+K+c)}{\cos(x)} = \frac{(x+C)}{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}.$$

اي ان: $y_G(x) = y_1(x) + y_0(x) = \frac{(x+C)}{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}$.

4-2-4. المعادلة التفاضلية لبرنولي Bernoulli:

نسمي المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

$y'(x) + P(x).y(x) = Q(x).y^n(x) .....(*)$, "$n \neq +1$" بمعادلة بـرنـولـي.

طريقة حـل معادلة بـرنـولـي:

- بقسمة طرفي المعادلة $(*)$ بالدالة $y^n(x)$ نجد ان:

$$y'(x).y^{-n}(x) + P(x).y^{1-n}(x) = Q(x) ...(*)$$ ، نضع: $z(x) = y^{1-n}(x)$ و منه:

$z'(x) = (1-n).y^{-n}(x).y'(x)$ فنجد: $z'(x) + P(x).z(x) = Q(x) ...(**)$ $\cdot \frac{+1}{(1-n)}$.

و هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى.

مثال: حل المعادلة التفاضلية الخطية:

$$x.y'(x) + y(x) = \ln(x).y^2(x),\ \forall\ x > 0\ ....(*)$$

$$\Leftrightarrow\ y'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)y(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right).y^2(x),\ \forall\ x > 0....(*)$$ ·

هي من الشكل: $y'(x) + P(x).y(x) = Q(x).y^n(x),\ (n \neq 1)....(*)$ ·

حيث: $P(x) = \left(\frac{+1}{x}\right)$ و $Q(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ و $(n = +2 \neq +1)$.

نضع: $z(x) = y^{1-n}(x) = y^{1-2}(x) = y^{-1}(x) = \frac{+1}{y(x)}$ و منه : $z'(x) = \frac{(-1).y'(x)}{y^2(x)}$. اي ان:

$$(*)\ldots\ y'(x)+\left(\frac{1}{x}\right).y(x)=\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).y^2(x)\ ,\ \forall\ x>0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{y'(x)}{y^2(x)}+\left(\frac{1}{x}\right).\left(\frac{+1}{y(x)}\right)=\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\ ,\ \forall\ x>0$$

$$\Leftrightarrow -z'(x)+\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\ ,\ \forall\ x>0$$

$$\Leftrightarrow +z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)\ ,\ \forall\ x>0$$

فنجد: $+z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right),\forall x>0$ و هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى.

1- نحل "المعادلة المرافقة " (أي بدون طرف ثاني): $+z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=0$.

$$+z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{dz(x)}{z(x)}\right)=\left(\frac{1}{x}\right).dx$$

$$\overset{\int}{\Leftrightarrow}\ \ln|z(x)|=\ln|x|+k\ ,\ k\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \ln|z(x)|=\ln|k\ .\ x|$$

$$\overset{e^X}{\Leftrightarrow}\ z(x)=(K.x)\ ,\ K\in\mathbb{R}.$$

و منه الحل العام " للمعادلة المرافقة " هو: $z_1(x)=K.x\ ,\ K\in\mathbb{R}$.

2 . نلاحظ أن: $z_0(x)=\ln(x)+1$ هو " حـل خاص " للمعادلة التفاضلية الخطية:

$+z'(x)-\left(\frac{1}{x}\right).z(x)=\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right),\forall x>0$ و بالتالي " الحل العام " للمعادلة هو:

$z_G(x)=z_1(x)+z_0(x)=(K.x)+(\ln(x)+1)\ ,\ K\in\mathbb{R}$. لكن لدينا: $z(x)=\frac{+1}{y(x)}$.

إذن الحل العام للمعادلة $(*)$ هو: $y_G(x)=\frac{+1}{z_G(x)}=\frac{+1}{(K.x+\ln(x)+1)}\ ,\ K\in\mathbb{R}.$.

5-2-4 المعادلة التفاضلية لـــريكـــاتي Ricatti:

1) صيغة مـعادلـة ريـكـاتـي Ricatti :

فهي معادلة من الشكل: $\frac{dy(x)}{dx}=a(x).y^2(x)+b(x).y(x)+c(x)\ldots.(Ricatti)$. حيث:

$a(x)$، $b(x)$، $c(x)$ دوال للمتغير x.

2) طريقة حل معادلة ريكاتي :

لا يمكننا حل هذا النوع من المعادلات الا اذا عرفنا حلا خاصا لها $y_1(x)$ ثم القيام بتغيير للدالة المجهولة: $y(x) = y_1(x) + z(x)$ و الذي يغير المعادلة التفاضلية الى:

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz(x)}{dx} = a(x).\left[y_1(x)+z(x)\right]^2 + b(x).\left[y_1(x)+z(x)\right]+c(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz(x)}{dx} = a(x).\left[y_1^2(x)+2.y_1(x).z(x)+z^2(x)\right]+ + \left[b(x).y_1(x)+b(x).z(x)\right]+c(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz(x)}{dx} = a(x).z^2(x)+\left[2.a(x).y_1(x)+b(x)\right].z(x)+ + \left[\underbrace{a(x).y_1^2(x)+b(x).y_1(x)+c(x)}_{=\frac{dy_1(x)}{dx}}\right]$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{dz(x)}{dx} = a(x).z^2(x)+\left[2.a(x).y_1(x)+b(x)\right].z(x)....(**)$$

اي ان:

$$\frac{dz(x)}{dx} = a(x).z^2(x)+\left[2.a(x).y_1(x)+b(x)\right].z(x)....(**)$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{dz(x)}{dx} - \left[2.a(x).y_1(x)+b(x)\right].z(x) = a(x).z^2(x),\ m=2....(**)$$

و المعادلة : $(**)$ $\frac{dz(x)}{dx} - \left[2.a(x).y_1(x)+b(x)\right].z(x) = a(x).z^{2=m}(x),\ m=2....(**)$

هي معادلة برنولي في حالة $m=2$.

مثال: اوجد حل المعادلة التالية: $y'(x) = +\frac{1}{x}.y^2(x) - \left(2+\frac{1}{x}\right).y(x) + x + 2.....(1)$ مع العلم ان:

$y_1(x) = x$ حلا خاصا.

- المعادلة: (1) هي معادلة ريكاتي Ricatti من الشكل:

$$\frac{dy(x)}{dx} = a(x).y^2(x)+b(x).y(x)+c(x)....(Ricatti)$$

.

- نتأكد بدون اي اشكال ان: $y_1(x) = x$ حلا للمعادلة (1) و ذلك بوضع:

$y(x) = y_1(x) + z(x) = x + z(x) \Leftrightarrow y'(x) = 1 + z'(x)$ و بالتعويض في (1) نجد ان:

$$y'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,y^2(x) - \left(2+\frac{1}{x}\right).\,y(x) + x + 2.....(1)$$

$$\Leftrightarrow 1 + z'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,\left(x+z(x)\right)^2 - \left(2+\frac{1}{x}\right).\left(x+z(x)\right) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + z'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,\left(x+z(x)\right)^2 - \left(2+\frac{1}{x}\right).\left(x+z(x)\right) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + z'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,\left(x^2 + 2x.z(x) + z^2(x)\right) - \left(2+\frac{1}{x}\right).\left(x+z(x)\right) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + z'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,\left(x^2 + 2x.z(x) + z^2(x)\right) - 2x - 2z(x) - 1 - \frac{1}{x}.z(x) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow z'(x) = +\frac{1}{x}\,.\,\left(x^2 + 2x.z(x) + z^2(x)\right) - x - 2z(x) - \frac{1}{x}.z(x)$$

$$\Leftrightarrow z'(x) = +x + 2.z(x) + \frac{1}{x}.z^2(x) - x - 2z(x) - \frac{1}{x}.z(x) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{1}{x}.\,z^2(x) - \frac{1}{x}.z(x)$$

$$\Leftrightarrow z'(x) + \frac{1}{x}.z(x) = \frac{1}{x}.\,z^{2=m}(x).....(2)$$

.

و المعادلة : (2) $z'(x) + \frac{1}{x}.z(x) = \frac{1}{x}.\,z^{2=m}(x).....(2),\ m = 2$ هي معادلة برنولي في حالة $m = 2$.

و بالقسمة على $z^2(x)$ نجد ان: $\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x}.\frac{1}{z(x)} = \frac{1}{x}$ ....(3). و بوضع التحويل:

$u(x) = z^{1-m}(x) = z^{1-2}(x) = z^{-1}(x) = \frac{1}{z(x)} \Leftrightarrow \frac{du(x)}{dx} = -\frac{1}{z^2(x)}.\frac{dz(x)}{dx}$ و بالتعويض في (3) نجد ان:

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x}.\frac{1}{z(x)} = \frac{1}{x} ....(3) \Leftrightarrow \left(-\frac{du(x)}{dx}\right) + \frac{1}{x}.u(x) = \frac{1}{x}$$

.

$$\Leftrightarrow \frac{du(x)}{dx} - \frac{1}{x}.u(x) = -\frac{1}{x}....(4)$$

و المعادلة : (4) $\frac{du(x)}{dx} - \frac{1}{x}.u(x) = -\frac{1}{x}....(4)$ هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى .

<u>حلها</u>:

1. <u>الحل العام " للدالة المرافقة "</u> للمعادلة (4): $u_H(x)$

$\frac{du(x)}{dx} - \frac{1}{x}\,.\,u(x) = 0.....(H)$. أي ان:

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{1}{x}.u(x) = 0.....(H) \Leftrightarrow \frac{du(x)}{u(x)} = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln|u(x)| = \ln|x| + c_1 \Leftrightarrow u_H(x) = c\,.\,x....(H)$$

.

3. " <u>الحل الخاص</u> " للمعادلة (4)_: $u_P(x)$

باستعمال ٠ طريقة التغيير الثابت ٠ . اي ان:

الحل الخاص $u_P(x)$ يكتب على الشكل : $u_P(x) = c(x).x.....(P)$ و نبحث عن المجهول دالة الثابت للمتغير x: $c(x)$ و باشتقاق المعادلة (P) :

$$u_P(x)=c(x).x.....(P)\Leftrightarrow u'_P(x)=c'(x).x+c(x)$$

$$\Leftrightarrow u'_P(x)-c(x)=c'(x).x \Leftrightarrow u'_P(x)-\frac{1}{x}.(x.c(x))=c'(x).x$$

$$\Leftrightarrow u'_P(x)-\frac{1}{x}.u_P(x)=c'(x).x...(4.1)$$

و بالمقارنة (4.1) و (4) نجد ان: $c'(x).x=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow c'(x)=-\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow c(x)=\int\frac{-1}{x^2}.dx$

$$\Leftrightarrow c(x)=\frac{1}{x}+k,\ k\in\mathbb{R}$$

أي ان: الحل الخاص $u_P(x)$ للمعادلة الاصلية (p) هو: $u_P(x)=\left(\frac{1}{x}+k\right).x\ .....(P)$.

وبالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية (4) هو:

$$u_G(x)=u_H(x)+u_P(x)=c.x+\left(\frac{1}{x}+k\right).x \Leftrightarrow u_G(x)=(c+k).x+1 \Leftrightarrow u_G(x)=\lambda.x+1\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

و بالعودة الى التحويل $u(x)=z^{1-m}(x)=z^{-1}(x)=\frac{1}{z(x)}$ نجد الحل العام $z_G(x)$ للمعادلة (4) هو:

$$u(x)=z^{1-m}(x)=z^{-1}(x)=\frac{1}{z(x)} \Leftrightarrow z(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{\lambda.x+1}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

اي ان الحل العام $y_G(x)$ للمعادلة (1) هو: $y_G(x)=y_1(x)+z(x)=x+\frac{1}{\lambda.x+1}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

3-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

نسمي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة، كل معادلة من الشكل:

$$a\ .\ y''(x)+b\ .\ y'(x)+c\ .\ y(x)=f(x)\ .....(6)$$

حيث: a ، b ، c " ثوابت حقيقية " و f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- إذا كان: $f(x)=0$ فإن: المعادلة التفاضلية:

$$a\ .\ y''(x)+b\ .\ y'(x)+c\ .\ y(x)=0.....(7)$$

تسمى بالمعادلة التفاضلية " المتجانسة " من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.

حـــل المعادلة التفاضلية المتجانسة (7):

- لحل المعادلة (7) نحتاج فقط إلى حلين مستقلين خطيا $y_1(x)$ و $y_2(x)$ يسمى هذان الحلان بجملة الحلول الأساسية.

الحل العام للمعادلة " المتجانسة " (7) يكتب على الشكل:

$y_H(x) = C_1 \,.\, y_1(x) + C_2 \,.\, y_2(x)$. حيث: C_1 و C_2 ثوابت حقيقية أو عقدية.

ملاحظات:

1 . <u>إذا كان</u>: $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة (7) فإن:

($y_1(x)$ ، $y_2(x)$ مستقلان خطيا) $\Leftrightarrow$ (<u>الرونسكي</u> $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$) . اي:

$$Wronskien(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \left(y_1(x).y_2'(x) - y_1'(x).y_2(x)\right) \neq 0 .$$

2 . <u>إذا كان</u>: $y_1(x)$ " حل " للمعادلة (7) $\left(W(y_1(x), y_2(x)) = 0\right)$ فإنه: يوجد

$y_2(x) = C(x) \,.\, y_1(x)$ بحيث: $\{y_1(x), y_2(x)\}$ جملة حلول أساسية.

- نبحث عن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ من الشكل: $y(x) = e^{r.x}$. حيث:

$$\cdot \begin{cases} y(x) = 1 \,.\, e^{r.x} \\ y'(x) = r \,.\, e^{r.x} \\ y''(x) = r^2 \,.\, e^{r.x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x) \sim 1 \\ y'(x) \sim r \\ y''(x) \sim r^2 \end{cases}$$

و منه المعادلة (7) تصبح على الشكل: $P(r) = a \,.\, r^2 + b \,.\, r + c = 0 \ldots\ldots(8)$.

و تسمى هذه المعادلة " **بالمعادلة المميزة** " للمعادلة (7) ، و بالتالي: $y(x) = e^{r.x}$ يكون "حلا " للمعادلة (7) إذا قبلت المعادلة (8) " حلا ".

حل المعادلة المميزة: $P(r) = a \,.\, r^2 + b \,.\, r + c = 0 \ldots\ldots(8)$.

نحسب اولا المميز Δ فنجد ان : $\Delta = b^2 - 4a.c$.

<u>الحالة الأولى</u>: <u>إذا كان</u> $\Delta > 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) حلين هما:

$(r_1 < r_2)$ ، $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}$ و $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}$ و بالتالي: $y_1(x) = e^{r_1.x}$ و $y_2(x) = e^{r_2.x}$.

إذن حلول المعادلة التفاضلية " <u>المتجانسة</u> " (7) هي من الشكل:

$y_H(x) = C_1 . e^{r_1.x} + C_2 . e^{r_2.x}$. حيث: C_1 و C_2 ثوابت حقيقية.

الحالة الثانية: إذا كان $\Delta = 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) " حل مضاعف "هو:

$r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2.a}$ و منه: $y_1(x) = e^{r.x}$ ، لنبحث عن $y_2(x)$ من الشكل:

$y_2(x) = C(x) . y_1(x) = C(x) . e^{r.x}$ فنجد: $y_2(x) = (\alpha.x+\beta) . e^{r.x}$.

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية " المتجانسة " (8) هي من الشكل:

$y_H(x) = C_1 . e^{r.x} + C_2 . (\alpha.x+\beta) . e^{r.x} = (K_1 + K_2.x) . e^{r.x}$. حيث: K_1 و K_2 ثوابت حقيقية.

الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta < 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) " جـذران مركبان مترافقان " هما:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \alpha - i.\beta \\ où; \\ r_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \alpha + i.\beta \end{cases} \quad (r_1 < r_2)$$. حيث: $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$.

و منه لدينا: $y_1(x) = e^{\alpha.x} . (\cos(\beta.x))$ ، $y_2(x) = e^{\alpha.x} . (\sin(\beta.x))$.

إذن حلول المعادلة التفاضلية " المتجانسة " (8) هي من الشكل:

$y_H(x) = e^{\alpha.x} . (C_1 . \cos(\beta.x) + C_2 . \sin(\beta.x))$. حيث: C_1 و C_2 ثوابت عـقدية .

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

$y''(x) + 4.y'(x) + 3.y(x) = 0$ .....(*).

- المعادلة المميزة للمعادلة (*) هي: $P(r) = r^2 + 4.r + 3 = 0$ .....(*).

و لدينا: $\Delta = b^2 - 4a.c = (+4)^2 - 4.(+1).(+3) = (+16) - (+12) = +4 > 0$.

و منه للمعادلة حلين هما:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(+4)-\sqrt{+4}}{2.(+1)} = \frac{-4-2}{+2} = -3. \\ où; \\ r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(+4)+\sqrt{+4}}{2.(+1)} = \frac{-4+2}{+2} = -1. \end{cases}$$.

وبالتالي: $y_1(x) = e^{r_1.x} = e^{-3x}$ و $y_2(x) = e^{r_2.x} = e^{-x}$.

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية " المتجانسة " (*) هو من الشكل:

$y_H(x) = C_1 . e^{-3x} + C_2 . e^{-x}$. حيث: C_1 و C_2 ثوابت حقيقية .

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

$$(**): \begin{cases} y''(x) - 2.y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = +1 \, , \, y'(0) = +2 \end{cases} .$$

- المعادلة "المميزة " للمعادلة (**) هي: $P(r) = r^2 - 2.r + 1 = 0$ .....(**)

و لدينا: $\Delta = b^2 - 4a.c = (-2)^2 - 4.(+1).(+1) = (+4) - (+4) = 0$ و منه للمعادلة " حل مضاعف"

هو: $r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2.a} = \frac{-(-2)}{2.(+1)} = \frac{+2}{+2} = +1$.

إذن الحل العام للمعادلة " المتجانسة " (**) هو من الشكل:

$y_H(x) = (C_1 + C_2.x) . e^{r.x} = (C_1 + C_2.x) . e^{+x}$. حيث: C_1 و C_2 ثوابت حقيقية .

- إيجاد الثابتين C_1 و C_2 :

ومن جهة أخرى لدينا: $y_H(0) = (C_1 + C_2.(0)) . e^{r.(0)} = C_1 \Rightarrow C_1 = +1$ و ايضا:

$$y_H(x) = (C_1 + C_2.x) . e^{+x} \Rightarrow y'_H(x) = C_2.e^{+x} + (C_1 + C_2.x) . e^{+x}$$
$$\Rightarrow y'_H(x) = (C_1 + C_2.(1+x)) . e^{+x} \Rightarrow y'_H(0) = (C_1 + C_2) . e^{+(0)} .$$
$$\Rightarrow y'_H(0) = C_1 + C_2 = +2 \Rightarrow C_2 = +2 - C_1 = (+2-1) = +1$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية " المتجانسة " (**) هو:

$y_H(x) = (C_1 + C_2.x) . e^{+x} = (+1+x).e^{+x} = (x+1).e^{+x}$.

مثال3: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية: $y''(x) - 2.y'(x) + 2.y(x) = 0$ ....(*)

- المعادلة " المميزة " للمعادلة (*) هي: $P(r) = r^2 - 2.r + 2 = 0$ .....(*)

و لدينا: $\Delta = b^2 - 4a.c = (-2)^2 - 4.(+1).(+2) = (+4) - (+8) = -4 < 0$.

و منه للمعادلة $(*)$ " حـلان مركـبان مترافقان " هما:

$$(r_1 < r_2)\ \text{.}\ \begin{cases} r_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(-2)-i\sqrt{-(-4)}}{2.(+1)} = \dfrac{+2-i(+2)}{(+2)} = (+1-i) = \alpha - i.\beta \\ \Rightarrow \alpha = +1\ et\ \beta = +1 \\ où; \\ r_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(-2)+i\sqrt{-(-4)}}{2.(+1)} = \dfrac{+2+i(+2)}{(+2)} = (+1+i) = \alpha + i.\beta \\ \Rightarrow \alpha = +1\ et\ \beta = +1 \end{cases}$$

حيث: $\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$. و منه لدينا: $y_1(x) = e^{\alpha.x}.(\cos(\beta.x))$ ، $y_2(x) = e^{\alpha.x}.(\sin(\beta.x))$.

إذن حلول المعادلة التفاضلية " المتجانسة " $(*)$ هي من الشكل:

$$y_H(x) = e^{\alpha.x}.(C_1.\cos(\beta.x) + C_2.\sin(\beta.x)) = e^{(+1).x}.(C_1.\cos((+1).x) + C_2.\sin((+1).x))$$
$$\Leftrightarrow y_H(x) = e^{x}.(C_1.\cos(x) + C_2.\sin(x))\ ,\ C_1\ ,\ C_2 \in \mathbb{R}$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

$$a\ .\ y''(x) + b\ .\ y'(x) + c\ .\ y(x) = f(x)\ .....(6)$$

- إيجاد " الحل الخاص " للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

الطريقة الأولى: طريـقـة التغيـيـر الـثـوابت.

- نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية (6) انطلاقا من الحل العام للمعادلة "المتجانسة" (7):

$$y_H(x) = C_1\ .\ y_1(x) + C_2\ .\ y_2(x)\ \Rightarrow\ y_P(x) = C_1(x)\ .\ y_1(x) + C_2(x)\ .\ y_2(x)\ .....(P),$$
$$C_1(x)\ et\ C_2(x) = "deux\ fonctions\ de\ x".$$

- و لإيجاد الـدالتين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يـؤول الى " حل الجملة " (S) التالية:

$$(S):\ \begin{cases} C_1'(x)\ .\ y_1(x) + C_2'(x)\ .\ y_2(x) = 0\ .....(1) \\ C_1'(x)\ .\ y_1'(x) + C_2'(x)\ .\ y_2'(x) = f(x)\ .....(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = ...? \\ C_2'(x) = ...? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = ...? \\ C_2(x) = ...? \end{cases}$$

ثم نعوض الدالتين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ في المعادلة (P) للحصول على " الحل الخاص" $y_P(x)$

و في الأخير نجد " الحل العام " للمعادلة التفاضلية الخطية (6) يكتب على الشكل:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x) \ldots.(6) \quad .$$

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية: $y''(x)+3.y'(x) = e^x \ldots.(1)$.

1 . لنبحث عن "الحل المتجانس" (حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية بدون طرف ثاني):

$$y''(x)+3.y'(x) = 0 \ldots.(H) \quad .$$

نعلم ان:

$$\left\{\begin{array}{l} y(x) = 1\,.\,e^{r.x} \\ y'(x) = r\,.\,e^{r.x} \\ y''(x) = r^2\,.\,e^{r.x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x) \sim 1 \\ y'(x) \sim r \\ y''(x) \sim r^2 \end{array}\right. .$$

و منه المعادلة المميزة للمعادلة (H) تصبح على الشكل: $P(r) = r^2 + 3.r = 0 \ldots.(H)$.

و لدينا: $\Delta = b^2 - 4.a.c = (+3)^2 - 4.(+1).(0) = +9 > 0$

و منه للمعادلة (H) حلين هما:

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+3)-\sqrt{+9}}{2.(+1)} = \dfrac{-3-3}{(+2)} = \dfrac{-6}{+2} = -3 \\ où; \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+3)+\sqrt{+9}}{2.(+1)} = \dfrac{-3+3}{(+2)} = \dfrac{0}{+2} = 0 \end{array}\right. .$$

وبالتالي: $y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-3x}$ و $y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(0)x} = +1$.

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية " المتجانسة " (H) هو من الشكل:

$$y_H(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) = C_1.e^{-3x} + C_2.(+1) = \left(C_1.e^{-3x} + C_2\right) \,, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \ldots.(H) \quad .$$

2 . لإيجاد " الحل الخاص " للمعادلة التفاضلية (1) ، **نستعمل طريقة تغييـر الثوابت** بوضع:

$$\left\{\begin{array}{l} y_H(x) = C_1\,.\,y_1(x) + C_2\,.\,y_2(x) \Rightarrow y_P(x) = C_1(x)\,.\,y_1(x) + C_2(x)\,.\,y_2(x) \ldots.(P), \\ C_1(x) \; et \; C_2(x) = "deux \; fonctions \; de \; x". \end{array}\right. .$$

- و لإيجاد الـدالتين $C_1(x)$ و $C_2(x)$ يـؤول الى " حل الجملة " (S) التالية:

$$.(S):\begin{cases} C_1'(x).y_1(x)+C_2'(x).y_2(x)=0 \ .....(1) \\ C_1'(x).y_1'(x)+C_2'(x).y_2'(x)=f(x) \ .....(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=...? \\ C_2'(x)=...? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=...? \\ C_2(x)=...? \end{cases}$$

$$(S):\begin{cases} C_1'(x).y_1(x)+C_2'(x).y_2(x)=0 \ .....(1) \\ C_1'(x).y_1'(x)+C_2'(x).y_2'(x)=f(x) \ .....(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x).e^{-3x}+C_2'(x).(+1)=0 \ .....(1) \\ C_1'(x).(-3).e^{-3x}+C_2'(x).(0)=e^{x} \ .....(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x).e^{-3x}+C_2'(x)=0 \ ...(1) \\ C_1'(x).(-3).e^{-3x}=e^{x} \ .....(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2'(x)=-C_1'(x).e^{-3x} \ ...(1) \\ C_1'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right).e^{4x} \ .....(2) \end{cases} \Rightarrow$$ اي ان:

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2'(x)=\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x} \ .....(1) \\ C_1'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right).e^{4x} \ ...(2) \end{cases}$$

و بإجراء المكاملة نجد ان:

$$.\begin{cases} C_2'(x)=\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x} \ .....(1) \\ C_1'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right).e^{4x} \ ...(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2(x)=\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x}+k_2 \ , \ k_2\in\mathbb{R} \ .....(1) \\ C_1(x)=\left(-\frac{1}{12}\right).e^{4x}+k_1 \ , \ k_1\in\mathbb{R} \ ...(2) \end{cases}$$

و منه <u>الحل الخاص</u> $y_P(x)$ للمعادلة التفاضلية (1) هو:

$$y_P(x)=C_1(x).y_1(x)+C_2(x).y_2(x)=\left(\left(-\frac{1}{12}\right).e^{4x}+k_1\right).e^{-3x}+\left(\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x}+k_2\right).(+1)$$

$$\Rightarrow \ y_P(x)=\left(-\frac{1}{12}\right).e^{x}+k_1.e^{-3x}+\left(\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x}+k_2\right)....(P)$$

و بالتالي" <u>الحل العام</u> " للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية(1) يكتب على الشكل التالي:

$$y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=\left[C_1.e^{-3x}+C_2\right]+\left[\left(-\frac{1}{12}\right).e^{x}+k_1.e^{-3x}+\left(\left(+\frac{1}{3}\right).e^{x}+k_2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \ y_G(x)=(C_1+k_1).e^{-3x}+\left(+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right).e^{x}+(C_2+k_2)=K_1.e^{-3x}+\left(\frac{1}{4}\right).e^{x}+K_2 \ , \ K_1 \ , \ K_2\in\mathbb{R}.$$

اي ان: $y_G(x)=K_1.e^{-3x}+\left(\frac{1}{4}\right).e^{x}+K_2 \ , \ K_1 \ , \ K_2\in\mathbb{R}$.

الطريقة الثانية: لنبحث عن الحل الخاص : $y_P(x)$

- " الحل الخاص" يعتمد على شكل التابع $f(x)$.

1. $f(x)=P_n(x)$ حيث: $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة "n" ، نبحث عن " حل خاص" يكون من الشكل:

أ. $y_P(x)=Q_n(x)$ اذا كان: $c \neq 0$.

ب. $y_P(x)=x\,.\,Q_n(x)$ اذا كان: $b\neq 0$ و $c=0$.

ج. $y_P(x)=x^2\,.\,Q_n(x)$ اذا كان: $b=0$ و $c=0$.

حيث: $Q_n(x)$ كثير حدود من نفس درجة $P_n(x)$.

2 . $f(x)=P_n(x).e^{\alpha'.x}$ حيث: $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة "n" و $\alpha'\in\mathbb{R}$، نبحث عن " حل خاص " من الشكل:

أ. $y_P(x)=Q_n(x).e^{\alpha'.x}$ اذا كان: "α'" **ليس جذر** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة.

ب. $y_P(x)=x^1.Q_n(x).e^{\alpha'.x}$ اذا كان: "α'" **جذر بسيط** " للمعادلة المميزة" للمعادلة المتجانسة.

ج. $y_P(x)=x^2.Q_n(x).e^{\alpha'.x}$ اذا كان: "α'" **جذر مضاعف**" للمعادلة المميزة" للمعادلة المتجانسة.

حيث: $Q_n(x)$ كثير حدود من نفس درجة $P_n(x)$.

3 . $f(x)=A.\cos(\beta'.x+\varphi)+B.\sin(\beta'.x+\varphi)$. حيث: $(\beta',\varphi)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

- نبحث عن " حل خاص " يكون من الشكل:

أ. $y_P(x)=A.\cos(\beta'.x+\varphi)+B.\sin(\beta'.x+\varphi)$ اذا كان: "$i.\beta'$" **ليس حل** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة.

ب. $y_P(x)=Ax^1.\cos(\beta'.x+\varphi)+Bx^1.\sin(\beta'.x+\varphi)$ اذا كان: "$i.\beta'$" **حل** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية: $y''(x)+3.y'(x)=e^{x}$ ....(1) .

- نعلم ان الحل العام من الشكل: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)$.

- **أولا : نبحث عن "الحل المتجانس $y_H(x)$ ":**

- وجدنا في المثال السابق ان " الحل المتجانس $y_H(x)$ " يكتب على الشكل:

$$y_H(x)=C_1.y_1(x)+C_2.y_2(x)=C_1.e^{-3x}+C_2.(+1)=\left(C_1.e^{-3x}+C_2\right),C_1,C_2\in\mathbb{R}....(H)$$.

- **ثانيا : نبحث عن " الحل الخاص $y_P(x)$ ":**

- ان " الطرف الثاني" للمعادلة (1) هو من الشكل:

$f(x)=e^{x}=P_n(x).e^{\alpha'.x}$ حيث: $P_n(x)=+1$ كثير حدود من الدرجة "$n=0$" و $\alpha'=+1\in\mathbb{R}$ ،

و بما أن: "$\alpha'=+1$" **ليس جذر** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة (1).

إذن: نبحث عن " حل خاص $y_P(x)$ " من الشكل: $y_P(x)=Q_n(x).e^{\alpha'.x}$ حيث: $Q_n(x)$ كثير حدود من نفس درجة $P_n(x)$ (درجة "0"). اي من الشكل: $Q_n(x)=k$, $k=Cte\in\mathbb{R}$ و بالتالي:

$$y_P(x)=Q_n(x).e^{x}=k.e^{x}$$.

- **لنبحث عن الثابت k**: بما ان $y_P(x)$ هو" حل خاص " فهو يحقق المعادلة التفاضلية: (1)

$y''_P(x)+3.y'_P(x)=e^{x}$ ....(1) حيث: $y_P(x)=k.e^{x}$ ، $y'_P(x)=k.e^{x}$ ، $y''_P(x)=k.e^{x}$. اي ان:

$$\left(k.e^{x}\right)+3.\left(k.e^{x}\right)=e^{x}....(1)\Leftrightarrow 4.k.e^{x}=e^{x}\Leftrightarrow k=\left(+\frac{1}{4}\right)$$.

و منه " الحل الخاص" من الشكل: $y_P(x)=k.e^{x}=\left(+\frac{1}{4}\right).e^{x}$.

و بالتالي " الحل العام" للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (1) هو:

$$y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=\left[C_1.e^{-3x}+C_2\right]+\left[+\frac{1}{4}.e^{x}\right]=C_1.e^{-3x}+\frac{1}{4}.e^{x}+C_2\ ,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$$.

اي ان: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=C_1.e^{-3x}+\frac{1}{4}.e^{x}+C_2\ ,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$y''(x)-4y'(x)+4y(x)=e^{+2x} \quad ...(2)$$

- نعلم ان الحل العام من الشكل: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)$.

- **أولا : نبحث عن "الحل المتجانس** $y_H(x)$ **":** $P(r)=r^2-4.r+4=0 \quad ....(H)$.

و لدينا: $\Delta=b^2-4.a.c=(-4)^2-4.(+1).(+4)=+16-16=0$.

و منه للمعادلة (H) " حل مضاعف" هو: $r_1=r_2=r=\frac{-b}{2.a}=\frac{-(-4)}{2.(+1)}=\frac{+4}{(+2)}=+2$.

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية " المتجانسة " (H) هو من الشكل:

$$y_H(x)=(C_1+C_2.x).e^{r.x}=(C_1+C_2.x).e^{+2x} \quad ,C_1,C_2\in\mathbb{R}....(H)$$

- **ثانيا : نبحث عن " الحل الخاص** $y_P(x)$ **":**

- **ان "** الطرف الثاني" للمعادلة (2) هو من الشكل:

$f(x)=e^{2x}=P_n(x).e^{\alpha'.x}$ حيث: $P_n(x)=+1$ كثير حدود من الدرجة "$n=0$" و $\alpha'=+2\in\mathbb{R}$ ،

وبما أن: "$\Delta=0$" فنبحث عن " حل خاص $y_P(x)$" من الشكل: $y_P(x)=\lambda(x).e^{\alpha'.x}=\lambda(x).e^{2x}$

حيث: $\lambda(x)$ كثير حدود يطلب تعيينه وبما انه $y_P(x)$ هو" حل خاص " فهو يحقق المعادلة التفاضلية (2): $y_P''(x)-4y_P'(x)+4y_P(x)=e^{+2x}$. حيث:

$$\begin{cases} y_P'(x)=\left(\lambda'(x)+2\lambda(x)\right).e^{2x} \\ y_P''(x)=\left(\lambda''(x)+2\lambda'(x)+2\lambda'(x)+4\lambda(x)\right).e^{2x} \\ \qquad\quad =\left(\lambda''(x)+4\lambda'(x)+4\lambda(x)\right).e^{2x} \\ y_P(x)=\lambda(x).e^{2x} \end{cases}.$$

$$y_P''(x)-4y_P'(x)+4y_P(x)=e^{+2x}$$
$$\Leftrightarrow\left[\left(\lambda''(x)+4\lambda'(x)+4\lambda(x)\right).e^{2x}\right]-4\left[\left(\lambda'(x)+2\lambda(x)\right).e^{2x}\right]+4\left[\lambda(x).e^{2x}\right]=e^{+2x}$$
$$\Leftrightarrow\left[\lambda''(x)+4\lambda'(x)-4\lambda'(x)+4\lambda(x)-8\lambda(x)+4\lambda(x)\right].e^{2x}=e^{+2x}$$
$$\Leftrightarrow\lambda''(x).e^{2x}=e^{+2x}\Leftrightarrow\lambda''(x)=+1.$$

اي ان:

و بإجراء المكاملة مرتين نجد ان:

$$\lambda''(x)=+1\Rightarrow\lambda'(x)=x+k\ ,\ k\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \lambda(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+k.x+c\right),\ k,c\in\mathbb{R}$$

. و بالتعويض في

الحل الخاص $y_P(x)$ نجد ان: $y_P(x)=\lambda(x).e^{2x}=\left(\frac{1}{2}x^2+k.x+c\right).e^{2x}\ ,\ k,c\in\mathbb{R}$.

و بالتالي" الحل العام " للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (2) يكتب على الشكل التالي:

$$y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=(C_1+C_2.x).e^{2x}+\left(\frac{1}{2}x^2+k.x+c\right).e^{2x}$$
$$=\left(\frac{1}{2}x^2+(C_2+k).x+(C_1+c)\right).e^{2x}\ ,\ k,c,C_1,C_2\in\mathbb{R}$$
$$=\left(\frac{1}{2}x^2+K_1.x+K_2\right).e^{2x}\ ,\ K_1,K_2\in\mathbb{R}$$

اي ان: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+K_1.x+K_2\right).e^{2x}\ ,\ K_1,K_2\in\mathbb{R}.$.

مثال3: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=\sin(x)\ ...(3)$$
$$=e^{(0).x}.\sin\left((+1).x+(0)\right)$$
$$=e^{(\alpha').x}.\sin\left(\beta'.x+\varphi\right)\ ,\ \alpha'=0\ ,\ \beta'=+1$$

- نعلم ان الحل العام من الشكل: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)$.

- **أولا : نبحث عن "الحل المتجانس $y_H(x)$ ":** $P(r)=r^2+r+1=0\ .....(H)$.

و لدينا: $\Delta=b^2-4.a.c=(+1)^2-4.(+1).(+1)=(-3)<0.$.

و منه للمعادلة (3) " حـلان مركبان مترافقان " هما:

$$\cdot \begin{cases} r_1 = \dfrac{-b - i.\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+1) - i.\sqrt{-(-3)}}{2(+1)} = \dfrac{-1 - i.\sqrt{+3}}{(+2)} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) - i\left(\dfrac{\sqrt{+3}}{2}\right) = \alpha - i.\beta \\ \quad où; \\ r_2 = \dfrac{-b + i.\sqrt{-\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+1) + i.\sqrt{-(-3)}}{2(+1)} = \dfrac{-1 + i.\sqrt{+3}}{(+2)} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{+3}}{2}\right) = \alpha + i.\beta \end{cases}$$

حيث: $y_1(x) = e^{\alpha.x}.\cos(\beta.x)$ و $y_2(x) = e^{\alpha.x}.\sin(\beta.x)$ ، $\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$.

إذن حلول المعادلة التفاضلية " المتجانسة " (3) هي من الشكل:

$$\Delta < 0\ ,\ y_H(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) = e^{\alpha.x}.\left(C_1.\cos(\beta.x) + C_2.\sin(\beta.x)\right)\ ,\ C_1, C_1 \in \mathbb{R} .$$

اي ان: $$\Delta < 0\ ,\ y_H(x) = e^{\left(-\frac{1}{2}\right).x}.\left(C_1.\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right),\ C_1, C_1 \in \mathbb{R} .$$

- ثانيا : نبحث عن " الحل الخاص $y_P(x)$ ":

- ان " الطرف الثاني" للمعادلة (3) هو من الشكل:

$$\cdot \begin{aligned} f(x) &= \sin(x) = \sin(1.x) \\ &= A.\cos(\beta'.x + \varphi) + B.\sin(\beta'.x + \varphi)\ ,\ \alpha' = 0\ ,\ \beta' = +1 \end{aligned}$$

و بما أن: "$i.\beta' = i.(+1)$" **ليس جـذر** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة (3). اي ان:

$$"\left(\left(-\frac{1}{2}\right) \pm i.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = (\alpha \pm i.\beta) \neq (\alpha' \pm i.\beta') = ((0) \pm i.(+1))" .$$

إذن: نبحث عن " حـل خاص $y_P(x)$ " من الشكل:

$y_P(x) = A.\cos(x) + B.\sin(x)\ ,\ A\ ,\ B \in \mathbb{R} ....(P)$ ، حيث:

حيث: B و A ثابتين من $\mathbb{R}$ يطلب تعيينهما . وبما انه $y_P(x)$ هو" حـل خاص " فهو يحقق المعادلة التفاضلية(3): $y_P''(x) + y_P'(x) + y_P(x) = \sin(x) ....(3)$.

$$\cdot \begin{cases} y_P'(x) = -A.\sin(x) + B.\cos(x) = B.\cos(x) - A.\sin(x) ...(*) \\ y_P''(x) = -A.\cos(x) - B.\sin(x) ....(**) \\ y_P(x) = A.\cos(x) + B.\sin(x) ...(***) \end{cases}$$

و بالجمع طرفا الى طرف نجد ان:

$$y_P''(x)+y_P'(x)+y_P(x)=\sin(x) \Leftrightarrow \left[B.\cos(x)-A.\sin(x)\right]=\left[(0).\cos(x)+(+1).\sin(x)\right].$$

و بمقارنة او المطابقة نجد ان: $\begin{cases} B=0 \\ et \\ (-A)=+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ et \\ A=-1 \end{cases}$.

و بالتعويض في الحل الخاص $y_P(x)$ نجد ان:

$$y_P(x)=A.\cos(x)+B.\sin(x)=(-1).\cos(x)+(0).\sin(x)=-\cos(x)....(P).$$

اي ان: $y_P(x)=-\cos(x)....(P)$.

و بالتالي" الحل العام " للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (3) يكتب على الشكل التالي:

$$y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)=e^{\left(-\frac{1}{2}\right).x}.\left(C_1.\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+\left(-\cos(x)\right),\ C_1,C_1\in\mathbb{R}.$$

اي ان: $y_G(x)=e^{\left(-\frac{1}{2}\right).x}.\left(C_1.\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2.\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)-\cos(x),\ C_1,C_1\in\mathbb{R}$.

مثال4: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$y''(x)+2\,y'(x)-3\,y(x)=(-4x-8).e^{-x}.....(4)$$
$$=P_1(x).e^{(-1).x}$$
$$=P_n(x).e^{(\alpha').x},\ \alpha'=-1,\ "n"=+1$$

- نعلم ان الحل العام من الشكل: $y_G(x)=y_H(x)+y_P(x)$.

- **أولا : نبحث عن "الحل المتجانس** $y_H(x)$ **":** $P(r)=r^2+2r-3=0\ .....(H)$.

و لدينا: $\Delta=b^2-4.a.c=(+2)^2-4.(+1).(-3)=(+4)+(+12)=+16>0.$.

و منه للمعادلة (4) " حـلين متمايزين " هما:

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+2)-\sqrt{+16}}{2(+1)} = \dfrac{-2-4}{(+2)} = \left(\dfrac{-6}{+2}\right) = -3 \\ \quad où; \\ r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \dfrac{-(+2)+\sqrt{+16}}{2(+1)} = \dfrac{-2+4}{(+2)} = \left(\dfrac{+2}{+2}\right) = +1 \end{array}\right. .$$

حيث: $y_1(x) = e^{r_1.x}$ و $y_2(x) = e^{r_2.x}$.

إذن حلول المعادلة التفاضلية " المتجانسة " (4) هي من الشكل:

$$y_H(x) = C_1.y_1(x) + C_2.y_2(x) = \left(C_1.e^{-3x} + C_2.e^{x}\right),\ C_1, C_1 \in \mathbb{R}\ ,\ \Delta > 0 .$$

- ثانيا : نبحث عن " الحل الخاص $y_P(x)$ ":

- ان " الطرف الثاني**"** للمعادلة (4) هو من الشكل:

$$f(x) = (-4x-8).e^{-x} = = P_1(x).e^{(-1).x} = P_n(x).e^{(\alpha').x}\ ,\ \alpha' = -1\ ,\ "n" = +1 .$$

و بما أن: "$\alpha' = (-1)$" **ليس جـذر** " للمعادلة المميزة " للمعادلة المتجانسة (4).

إذن: نبحث عن " حـل خاص $y_P(x)$ " من الشكل:

$$y_P(x) = P_n(x).e^{(\alpha').x} = \left(a.x^1 + b\right).e^{-x}\ ,\ a, b \in \mathbb{R}....(P)$$ ، حيث:

حيث: b و a ثابتين من $\mathbb{R}$ يطلب تعيينهما . وبما انه $y_P(x)$ هو" حـل خاص " فهو يحقق المعادلة التفاضلية(4): $y_P''(x) + 2.y_P'(x) - 3.y_P(x) = (-4x-8).e^{-x}$ ....(4) .

$$\left\{\begin{array}{l} y_P'(x) = \left(-a.x + (a-b)\right).e^{-x}.....(*) \\ y_P''(x) = \left(+a.x + (-2a+b)\right).e^{-x}....(**) \\ y_P(x) = (a.x+b).e^{-x} .....(***) \end{array}\right. .$$

$$y_P''(x) + 2.y_P'(x) - 3.y_P(x) = (-4x-8).e^{-x} ....(4)$$

و منه: $\Leftrightarrow \left(+a.x + (-2a+b)\right).e^{-x} + 2\left(-a.x + (a-b)\right).e^{-x} - 3(a.x+b).e^{-x} = (-4x-8).e^{-x}$.

$\Leftrightarrow (-4a.x - 4b).e^{-x} = (-4x-8).e^{-x}$

و بمقارنة او المطابقة نجد ان: $\begin{cases} -4a = -4 \\ et \\ -4b = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +1 \\ et \\ b = +2 \end{cases}$.

و بالتعويض في الحل الخاص $y_P(x)$ نجد ان:

$$y_P(x) = P_n(x).e^{(\alpha').x} = (a.x^1 + b).e^{-x} = (x+2).e^{-x} ....(P) .$$

اي ان: $y_P(x) = (x+2).e^{-x} ....(P)$.

و بالتالي" <u>الحل العام</u> " للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (4) يكتب على الشكل التالي:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x) = (C_1.e^{-3x} + C_2.e^{x}) + (x+2).e^{-x} \ , \ C_1, C_1 \in \mathbb{R} .$$

اي ان: $y_G(x) = (C_1.e^{-3x} + C_2.e^{x}) + (x+2).e^{-x} \ , \ C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$.

قائمة المراجع

1. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الآلي ج1 المتتاليات و الدوال الوحيدة المتغير la cedraie " .2009.

2. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الآلي ج2 التحليل، الإشتقاق و دساتير المتوسط تايلور la cedraie ". 2010.

3. بابا حامد بن حبيب " التحليل *I*" ديوان المطبوعات الجامعية. 2008.

4. علي حميدة و عبد الوهاب بيبي .الرياضيات في الجامعة .التحليل .الجزء الثاني و الجزء الثالث.2001. جامعة قسنطينة.

5. عبد الوهاب بيبي، .علي حميدة وفهيم لكحل .الرياضيات في الجامعة .الجبر .الجزء الأول.2001 . جامعة قسنطينة.

6. قادة علاب " عناصر من التحليل الرياضي التوابع لمتغير حقيقي واحد ". ديوان المطبوعات الجامعية. 1991.