الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle et applications

Réalisé Par :

Racheda GOUG

Thème

Problème de transmission entre deux fluides de Herschel-Bulkley en couche mince avec des indices de loi de puissance différents

Dr. Fares YAZID	M.C.A	Université de Laghouat	Pésident
Dr. Salim SAF	M.C.B	Université de Laghouat	Encadreur
Dr. Abdelaziz RAHMOUNE	M.C.A	Université de Laghouat	Examinateur

Année universitaire 2024/2025

Remerciments

Je commence par remercier Dieu tout-puissant de m'avoir facilité l'achèvement de ce travail, de m'avoir guidé dans la collecte des informations et des données, et de m'avoir honoré par l'acceptation et le succès.

Ensuite, je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon directeur de recherche, Monsieur ***Dr. Fares YAZID*** *, pour ses conseils précieux et ses remarques précises, ainsi qu'à mon encadrant, Monsieur* ***Dr. Salim SAF*** *, pour sa contribution à l'enrichissement de ce travail.*

Je remercie également Monsieur ***Dr. Abdelaziz RAHMOUNE*** *pour son soutien et ses encouragements.*

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants.

Merci à tous pour votre soutien, vos conseils et votre aide.

...

Dédicaces

À chaque début une fin, et chaque effort mérite sa récompense*…*

Voici le fruit de mon travail et de mes efforts modestes.

Je le dédie à :

Ma chère famille, mon père ***Abdelkader*** *et ma mère* ***Karima****, et mes frères et ma sœur* ***Mohammed, Abdelbasset et Soumia****, pour leur soutien constant et leurs encouragements.*

Mes chers amis, pour leur soutien et leur présence à mes côtés.

Et à tous ceux qui m'ont enseigné une lettre ou offert un conseil.

Je souhaite que ce fruit soit purement pour la face de Dieu tout-puissant et qu'il obtienne votre approbation.

…

Racheda GOUG

ملخــص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نظرية لمشكلة الانتقال بين سائلين من نوع هيرشل-بولكلي (*Herschel-Bulkley*) صلبين غير قابلين للضغط و لزجين في طبقة رقيقة ثنائية الأبعاد في نظام ثابت، على افتراض أن المعاملات المميزة ومؤشرات قوانين القوة للسائلين مختلفة، و من خلال فرض شروط التلامس بين سائل - سائل في حدود الانتقال الطبيعي، أي بعبارة أخرى استمرارية السرعات و استمرارية القيود و كذلك الشروط على أحد حافتي الطبقة الرقيقة. النتائج المتحصل عليها لأجل هاته المشاكل تتعلق بالوجود و الوحدانية و السلوك المقارب.
تتكون هاته المذكرة من ثلاثة فصول. الفصل الأول نقدم فيه النتائج الأساسية لميكانيك الموائع المستمرة، بالإضافة إلى المعادلات المختلفة و الأدوات الرياضية. في الفصل الثاني برهنا وجود و وحدانية الحل الضعيف لمشكلة الانتقال بين السائلين . دراسة السلوك المقارب لمشكلة الانتقال الميكانيكي هو محور الفصل الثالث.

كلمات مفتاحية: سائل هيرشل-بولكلي (*Herschel-Bulkley*)، الانتقال، طبقة رقيقة، سلوك مقارب.

Résumé

Ce mémoire vise à proposer une contribution à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides de Herschel-Bulkley incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques et des indices de loi de puissance des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince. Le mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions générales de la mécanique des milieux continus, ainsi que diverses équations et outils mathématiques. Dans le deuxième chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible à ce problème de transmission. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission.

Mots clés : fluide de Herschel-Bulkley ; transmission ; couche mince ; comportement asymptotique.

Abstract

This dissertation aims to propose a contribution to the study of a transmission problem between two incompressible, rigid, and viscoplastic Herschel-Bulkley fluids in a two-dimensional thin layer in a stationary regime, assuming that the characteristic coefficients and power law indices of the two fluids are different and by imposing on the interface of fluid-fluid contact conditions at the limits of natural transmission, in other words, continuity of speeds and continuity of stresses, as well as conditions on one of the two edges of the layer thin. The dissertation includes three chapters. In the first chapter, we introduce general notations of the mechanics of continuous mediums, as well as various equations and mathematical tools. In the second chapter, we show the existence and the uniqueness of a weak solution to this transmission problem. In the third chapter, we study the asymptotic behavior of a mechanical problem of transmission.

Key Words : Herschel-Bulkley fluid ;transmission ; thin layer ; asymptotic behavior.

NOTATIONS

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$ on note par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω, supposée souvent régulière.
$\Gamma_i(i = 1, 2)$	une partie de la frontière Γ.
$mes(\Gamma_i)$	la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_i.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
ν_n, ν_t	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν sur $\overline{\Omega}$.
$C(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continues sur $\overline{\Omega}$.
$H_1 =$	$\{\sigma \in L^2(\Omega)_s^{n\times n} \,\vert\, \mathrm{Div}(\sigma) \in L^2(\Omega)^n\}$.
$W^{m,p}(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramètres m et p.
$H^m(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramètres m et $p = 2$; $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
$W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$	l'espace de traces d'ordre p.
W'_Γ	le dual topologique de l'espace W_Γ ; $W'_\Gamma = W^{-1+\frac{1}{p},p'}(\Gamma)^n$.
γ	l'application trace.

Si H est un espace de Banach réel, on utilise les notations :

H'	le dual topologique de l'espace H.
$H^n =$	$\{x = (x_i) \mid x_i \in H,\ i = \overline{1, \ldots, n}\}$.
$H^{n\times n} =$	$\{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H,\ i, j = \overline{1, \ldots, n}\}$.
$(\cdot, \cdot)_{H'\times H}$	le produit de dualité entre l'espace H' et l'espace H.
$\Vert \cdot \Vert_H$	la norme de l'espace H.
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H.
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.

Pour une fonction f, on note :

$\mathbf{dom}(f)$	le domaine de f.
$\mathbf{epi}(f)$	l'épigraphe de f.
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	la dérivée de f par rapport à la i-ème composante x_i.
f'	la dérivée de f par rapport au temps.
$\frac{Df}{Dt}$	la dérivée particulaire de f.
∇f	le gradient de f.
$D(f)$	la partie symétrique du gradient de f , $D(f) = \dfrac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
$\mathbf{div}(f)$	la divergence de f.
∂f	le sous-différentiel de f.

Autres notations :

$\liminf$	la limite inférieure.
S_n	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$.
$\mathbf{Div}(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\widetilde{\sigma}$	le déviateur du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\mathbf{tr}(\sigma)$	la trace du tenseur $\sigma \in S_n$.
δ	le tenseur identique.
$p.p$	presque partout.
$\lvert \cdot \rvert$	la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S_n.
" $\cdot$ "	le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^n$ et S_n.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un fluide de type Herschel-Bulkley qui est un milieu visco-plastique, vérifie les lois générales de la mécanique des milieux continus et a une loi de comportement non linéaire particulière. Il est utilisé pour modéliser plusieurs types de fluides, comme par exemple des peintures et la lave volcanique, d'où le grand intérêt de son étude.

Dans les écoulements de faible épaisseur, lorsque l'épaisseur diminue, l'influence relative des effets de surface par rapport aux effets de volume augmente. Il convient alors d'accorder une importance particulière *â* ce qui se passe à l'interface fluide solide et qui induit les conditions aux limites à imposer aux équations décrivant l'écoulement.

Usuellement, la plupart des travaux mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes supposent des conditions d'adhérence aux parois, plus rarement des conditions de glissement ou des conditions en pression. Dans le cas des écoulements de faible épaisseur, on sait justifier [2, 6, 21] par des techniques asymptotiques l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds, laquelle prend en compte implicitement les conditions limites aux parois.

L'étude du comportement asymptotique a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [5] justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir deséquations de Stokes considé rées dans un domaine mince. L'écoulement du type Nazarov-Stokes est traité par Assemien, Bayada et Chambat [4], ainsi que par Nazarov [37] pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problémes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham Ainsi, l' écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traité par Mikelic et Tapiéro [30, 31] et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro [9] Par ailleurs, Taous [46] a é tudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modèle de viscosité étant celui de Litvinov [30] En fin Bunoiu et Saint Jean Paulin [14] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi les quels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson. Les auteurs de [12], [13] ont étudié le même problème, dans lequel seules les conditions de Dirichlet sur la frontière ont été considérées.

Ce mémoire a pour objet l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques et des indices de loi de puissance des deux fluides sont différents et en imposant sur l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelles, autrement dit continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince.

Cependant, nous abordons ici un problème de transmission entre deux domaines bidimensionnels Ω_1^ε et Ω_2^ε en couche mince (les épaisseurs relatives au paramètre ε), et nous supposons qu'il n'y a pas de séparation entre les domaines pendant le processus, c'est-à-dire que le contact est bilatéral. Nous avons donc la même difficulté induite par l'absence des hypothèses de symétrie que dans le problème du revêtement. On cherche à connaitre le comportement asymptotique des fluides lorsque ε tend vers zéro.

Le travail est composé comme suit :

Le premier chapitre, aborde brièvement des notions générales pour faciliter la lecture de ce mémoire. Aussi bien que pour la bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par un rappel des notions générales de la mécanique de milieux continus : on introduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^2$. Ce système comprend la loi de comportement du fluide, l'équation du mouvement et du corps ainsi que les conditions initiales et aux La limites auxquelles il est soumis. La loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans ce mémoiredonnée par :

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{\sigma} = \mu\varepsilon^p |D(u)|^{p-2} D(u) + g\varepsilon \dfrac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } |D(u)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma} \leq g\varepsilon & \text{si } |D(u)| = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Omega$$

où $\tilde{\sigma}$ désigne le déviateur des tenseur des contraintes σ, u représente le champ des vitesses, $D(u)$ désigne le tenseur taux de déformation, $\mu\varepsilon^p$, $g\varepsilon > 0$ sont les coefficients qui caractérisent le modèle de Herschel-Bulkley et qui représentent respectivement : la consistance (la viscosité) et le seuil de plasticité, le paramètre p, $1 < p \leq 2$, est l'exposant de loi de puissance du matériaux (représentant l'indice de rhéofluidification, indice d'écoulement, de viscosité).

Ce modèle est une mixture du modèle de Bingham et du modèle en loi de puissance (proposé par Herschel et Bulkley en 1923). Lorsque $p = 2$, on retrouve les fluides de Bingham, lorsque $g = 0$, on retrouve une loi de puissance (rhéofluidifiant), et lorsque $p = 2$ et $g = 0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes (Newtonien).

Nous présentons ensuite les espaces fonctionnels et principales notations utilisés Pour finir nous rappelons, quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire :

on introduit les fonctions convexes, les opérateurs fortement monotone, les inéquations variationnelles elliptiques.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince qui occupent deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε en dimension deux avec contact bilatéral et des conditions aux limites de transmission naturelles, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents. Dans ce cadre, on décrit la position du problème et les conditions aux limites, concernant le champ de vitesse, et le champ des contraintes qui nous permettent de faire la formulation variationnelle du problème méca-nique de départ, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solution faible du problème.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'un problème de transmission lié par les fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley en régime stationnaire avec des viscosités différentes μ_1, et μ_2, dans des domaines Ω_1^ε, Ω_2^ε supposés minces, avec des conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact entre deux domaines. Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et la formulation variationnelle du problème concernant le champ de vitesse et le champ de la pression. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Korn, Cauchy-Schwartz, Young et Hôldre pour obtenir des estimations à priori.

Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite . Dans ce cas nous avons obtenu [43] :

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right)$$

$$=\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}+\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\quad\text{dans}\ \left(W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)\right)'.$$

Où μ_1 et μ_2 sont les consistances de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, g_1 et g_2 sont le seuil de plasticité de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, $\widehat{f_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{f_i}$ qui représente une densité massique des forces extérieures de milieux Ω_i $(i=1,2)$. $\widehat{u_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{u_i}$ $(i=1,2)$ et $((\widehat{u_{11}},0),(\widehat{u_{21}},0))$, $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ sont le champ de vitesse et la pression des problèmes limites dans $\Omega_1\cup\Omega_2$.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION ET OUTILS MATHÉMATIQUES

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Il comporte deux sections.

Dans la première section, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie des milieux continus et la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley. Ensuite, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent quelques problèmes aux limites décrivant le comportement du fluide dans le cas stationnaire, et ce dans un domaine borné en dimension deux. Enfin, nous décrivons les différentes conditions de contact qui interviennent dans tout le document.

La deuxième section est consacrée aux espaces fonctionnels. On y introduit des espaces de types Sobolev associées à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence. Ensuite nous rappelons les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire. On y présente ici quelques résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes et les inéquations variationnelles elliptiques.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans cette thèse en suivant [7, 15, 18, 23, 44] et [45]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0, T[$. Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0, T[$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans Ω, on a :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement

Soit $u(x, t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in]0, T[$ des points $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox), $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$ de composantes σ_{lm} $(l, m = 1, 2)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + f \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_l $(l = 1, 2)$, représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$\operatorname{Div} \sigma = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}, \quad (l = 1, 2) \tag{1.2}$$

L'équation de conservation de la masse

La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ de l'élément de volume $d\Omega$ du milieu. L'expression générale de l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0 \tag{1.3}$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique, le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre :

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + f = 0. \tag{1,4}$$

Elles sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{lm} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u \cdot \nabla u$ sont négligeables (processus quasi-statique).

L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompressibilité, très réaliste physiquement, se traduit par :

$$TrD(u) = 0$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes :

$$D_{lm}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right), \quad 1 \leq l, m \leq 2 \tag{1.5}$$

Le milieu est dit homogène si sa densité est indépendante de x. Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ρ constante indépendante de x et t. Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

Dans le cas du milieu non-isotherme, l'équation de conservation de l'énergie du premier principe de la thermodynamique. Cependant, nous considérerons toujours que la température du milieu sera constante dans tous les problèmes posés dans cette thèse.

D'un point de vue mathématique, nous disposons de trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre de cinq, représentées par les composantes σ_{lm} $(l, m = 1, 2)$ du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_l $(l = 1, 2)$ de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle lois de comportement, qui sont des relations ethèsentre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement viscoplastique du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans cette thèse.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais physiques qu'il faut réaliser pour obtenir une loi de comportement. On présente ici une description de la loi de comportement viscoplastique du fluide de Herschel-Bulkley traité dans cette thèse en suivant [18],[22] . Le modèle de Herschel-Bulkley est caractérisé par la propriété suivante : le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dit seuil de plasticité. Pour décrire ce modèle, on a besoin de certaines notations.

Soient u le champ des vitesses et D le tenseur taux de déformation défini par :

$$D(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^t u\right) \tag{1.6}$$

On considère aussi son déviateur

$$\widetilde{D} = D - \frac{1}{n}\, tr(D)\delta, \tag{1.7}$$

où $tr(D)$ représente la trace de D et δ le tenseur identique. On note par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\widetilde{\sigma} = \sigma + p\delta \tag{1.8}$$

Dans l'équation (1.8), le scalaire $-p = \frac{1}{n}tr(\sigma)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes. On peut identifier p avec la pression. En plus des déviateurs $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\sigma}$, un autre tenseur S est introduit comme étant la partie des contraintes qui correspond aux propriétés plastiques du matériau. Pour décrire un tel processus, on utilise une collection de fonctions régulières $t \mapsto \left(\widetilde{D}(t), \widetilde{\sigma}(t), S(t)\right)$ pour $t \in [0, T]$ où $T > 0$ est la durée du processus. Le modèle rigide viscoplastique de Herschel-Bulkley suppose que

$$\widetilde{\sigma} = S + \mu \left\|D(u)\right\|^{p-2} \widetilde{D} \tag{1.9}$$

$$f(S) = |S|^2 - g^2 \leq 0 \tag{1.10}$$

$$\widetilde{D} = \lambda 2S \tag{1.11}$$

Où μ est le coefficient de viscosité, $\frac{g}{\sqrt{2}}$ est le seuil de plasticité pour le cisaillement pur et λ est une fonction telle que :

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 & \text{si } f(S) < 0 \text{ ou } f(S) = 0 \text{ et } f'(S) < 0, \\ \lambda(t) > 0 & \text{si } f(S) = 0 \text{ et } f'(S) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Dans (1.12), $f'(S)$ désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \mapsto f(S(t))$ et (1.10) est la condition de Von Mises. En tenant compte de (1.10), l'invariant $S_u = \frac{1}{2}|S|^2$ ne doit pas dépasser la carré du seuil de plasticité pour le cisaillement pur $\frac{g}{\sqrt{2}}$.

D'après (1.11) et (1.12), il vient que le déviateur du tenseur taux de déformation peut varier seulement si S reste sur la surface $f(S) = 0$, en se déplaçant le long de cette dernière. Pour tout autre processus, $\widetilde{D}$ est nul. C'est la raison pour laquelle $|S| = g$ est appelé condition d'écoulement.

Dans le modèle de Herschel-Bulkley, on suppose toujours l'incompressibilité du volume, c'est-à-dire

$$tr(D) = 0, (1.13^*)$$

pour n'importe quel processus de n'importe quelle durée $T > 0$.

Le modèle de Herschel-Bulkley peut être considéré en utilisant seulement les tenseurs D et $\widetilde{D}$. En effet, de (1.9) et (1.11), on a

$$\tilde{\sigma} = (1 + 2\mu|D(u)|^{p-2}\lambda)S, \tag{1.13}$$

$$|\tilde{\sigma}| = (1 + 2\mu|D(u)|^{p-2}\lambda)|S|. \tag{1.14}$$

Si $|\tilde{\sigma}| > g$, alors de (1.10) et (1.14) on déduit que $\lambda > 0$ et de (1.12) on a $|S| = g > 0$. L'équation (1.14) entraîne que

$$\lambda = \frac{1}{2\mu|D(u)|^{p-2}}\left(\frac{|\tilde{\sigma}|}{g} - 1\right).$$

De (1.11) et (1.13), on a

$$\widetilde{D} = \frac{2\lambda}{1 + 2\mu|D(u)|^{p-2}\lambda}\,\tilde{\sigma} = \frac{1}{\mu|D(u)|^{p-2}}\left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right)\tilde{\sigma}.$$

Comme $tr(D) = 0$, on aura d'après (1.7) que $\widetilde{D} = D$. Par conséquent

$$D = \frac{1}{\mu|D(u)|^{p-2}}\left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right)\tilde{\sigma}.$$

Supposons maintenant que $|\widetilde{\sigma}| \leq g$. Alors si $|S| = g$, de (1.14) on obtient $\lambda = 0$, et si $|S| \leq g$, de (1.12) on aura aussi $\lambda = 0$. D'où finalement $D = 0$. Ainsi, on obtient la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{g}{|\widetilde{\sigma}|}\right)\widetilde{\sigma} & \text{si } |\widetilde{\sigma}| > g, \\ 0 & \text{si } |\widetilde{\sigma}| \leq g. \end{cases} \tag{1.15}$$

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.15). Si $|D| = 0$, d'après (1.15), on a $|\widetilde{\sigma}| \leq g$ et si $|D| \neq 0$, on a $|\widetilde{\sigma}| > g$.

Par ailleurs, on sait que $|\widetilde{\sigma}| = 2\mu|D(u)|^{p-2}|D| + g$, donc si on combine cette formule avec (1.13*) l'équation constitutive (1.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma} = \mu|D(u)|^{p-2}D + g\dfrac{D}{|D|} & \text{si } |D| \neq 0, \\ |\widetilde{\sigma}| \leq g & \text{si } |D| = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Il est facile de voir que les deux lois constitutives (1.15) et (1.16) sont équivalentes. Par conséquent, on considère (1.16) comme étant la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley. Par ailleurs, les expériences physiques ont montré que les coefficients qui caractérisent le modèle mécanique de Herschel-Bulkley, autrement dit la viscosité μ et le seuil de plasticité g, dépendent de la température, ce qui explique le comportement thermique de fluide de Herschel-Bulkley.

Remarque 1.1 *Si dans la loi de comportement (1.16), on prend $g = 0$ et $p = 2$, on obtient la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour g suffisamment petit, le fluide de Herschel-Bulkley peut être considéré comme un modèle voisin des fluides visqueux Newtoniens. Si g est strictement positif, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand g croît, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Herschel-Bulkley possède la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (1.16) ; tant que le seuil g n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler. On explique physiquement ce phénomène par le fait que ces fluides sont pour la plupart des suspensions de particules quasi sphériques dans un solvant. Quand les particules sont faiblement concentrées, le seul effet de leur présence est d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules. Si on augmente toujours la concentration, les particules finissent par se toucher. Le solvant n'occupe plus que les interstices. Le liquide devient pâteux à cause des forces entre les particules en contact. Pour provoquer son écoulement, il faut vaincre toutes ces forces, ce qui permet d'expliquer l'existence du seuil g. Un tel comportement s'observe dans le cas* *de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétroliers ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides, par exemple le processus de moulage de métaux. Pour plus d'exemples, on revoit aux ouvrages [3], [20] et [22].*

1.1.3 Conditions aux limites de contact

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du problème que nous utilisons par la suite dans cette thèse. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < h(x)\right\},$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 est la frontière inférieure d'équation $y = 0$, Γ_2 est la frontière supérieure d'équation $y = h(x)$. On suppose que $h\colon]0,1[\to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction de classe C^1.

Γ, la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition de Dirichlet) :

$$u = 0.$$

Contact bilatéral entre deux domaines

Supposons dans ce paragraphe que le milieu occupant deux domaines Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{R}^2$ où les deux domaines sont en contact bilatéral, i.e. il n'y a pas de séparation entre deux corps pendant le processus, il s'agit d'un contact bilatéral. En posant $\Omega_1 =]0,1[\times]0,h_1(x)[$ et $\Omega_2 =]0,1[\times]h_1(x),h_2(x)[$, où $h_i :]0,1[\to \mathbb{R}_+^*$, est une fonction de classe C^1, $i = 1,2$.

Les frontières des Ω_1, Ω_2 seront notées $\partial\Omega_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\partial\Omega_2 = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ respectivement. Γ_0 est la surface bilatérale définie par $y = h_1(x)$. Γ_1 est la surface inférieure définie par $y = 0$ et Γ_2 est la surface supérieure définie par $y = h_2(x)$. On note par n le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1 et vers l'intérieur de Ω_2.

— Sur la surface inférieure et supérieure, nous supposons

$$u_i = 0, \text{ sur } \Gamma_i,\ i = 1,2.$$

— Sur la frontière bilatérale entre deux domaines, nous supposons

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

$$\sigma_1 n - \sigma_2 n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

autrement dit continuité des vitesses et continuité des contraintes.

1.2 Outils Mathématiques

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, leurs principales propriétés notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet, et un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section.

1.2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette sous-section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions p-intégrables, les espaces de Sobolev, qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique au prochain paragraphe. Nous rappelons par la suite les définitions et quelques propriétés de ces espaces. [1, 10, 11, 18]

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces vectoriels normés qui sont bien adaptés à la résolution de nombreux problèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles.

Ce paragraphe contient quelques rappels. Nous aurons également l'occasion de clarifier quelques notations usuelles.

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. Soit p un élément de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, l'espace vectoriel des (classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout) u de Ω dans $\mathbb{R}$, Lebesgue mesurable, vérifant [47] :

(i) Si $1 \leq p < +\infty$, $\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < +\infty$

(ii) Si $p = +\infty$,$\sup\limits_{x\in\Omega} \text{ess} \, |u(x)| < +\infty$

où $\sup\limits_{x\in\Omega} \text{ess} \, |u(x)| = \inf\{M > 0 \quad / \quad |u(x)| \leq M \text{ p.p.}\}$

a) Norme de $L^p(\Omega)$

L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$u \longmapsto \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} \text{ess} \; |u(x)|, & p = +\infty \end{cases} \tag{1.1}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme pour laquelle $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach [11].

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions u de carré sommable sur Ω, i.e. mesurable et telles que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.2}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx \tag{1.3}$$

associé à la norme (1.3), où $(u, v)_{L^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

b) Inégalité de Hölder

Soit (p, q) un couple de $[1, +\infty]^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application suivante :

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega u(x)v(x) \, dxdx$$

est bilinéaire continue à valeurs dans $L^1(\Omega)$, et

$$(u, v) \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

c) Inégalité de Young

Soit $p, q > 1$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

d) Dual de $L^p(\Omega)$

Pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application de dualité est définie par :

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \int_\Omega u(x)v(x) \, dxdx.$$

Pour tout réel p dans $]1, +\infty[$, le bidual de $L^p(\Omega)$, ou encore le dual de son dual $L^q(\Omega)$, s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^p(\Omega)$. On dit que $L^p(\Omega)$ est réflexif [1].

Théorème 1.1 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). Soit (u_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :

(i) $u_n(x) \to u(x)$ p.p. sur Ω,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. (pour plus de détails renvoyons à [24]). Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Définition 1.2. Un point x du domaine de définition d'une application $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-intégrable est dit point de Lebesgue de u si

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |u(t) - u(x)|\, d\lambda(t) = 0$$

où $B(x,r)$ désigne la boule de $\mathbb{R}^n$ centrée en x et de rayon $r > 0$, et λ désigne la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad \text{et } |u_{n_k}| \leq v \text{p.p. dans } \Omega.$$

Proposition 1.1. Soit (f_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et soit (v_n) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. Alors :

- $(\|u_n\|_p)$ est bornée.
- $\liminf \|u_n\|_p \geq \|u\|_p$.
- $\int\limits_\Omega u_n v_n \to \int\limits_\Omega uv$.

Espace de fonctions test $D(\Omega)$

Définition 1.3 (Support d'une fonction). On appelle support d'une fonction u, et on note $supp\, u$, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nulle. C'est aussi la fermeture de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels : $u(x) \neq 0$.

Définition 1.4 (Espace $D(\Omega)$). On appelle espace des fonctions test, et on note $D(\Omega)$, l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω, i.e.

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \text{ compact},\ K \subset \Omega,\ \text{tel que } supp\, u \subset K\}$$

(Certains auteurs utilisent la notation $C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $C_c^\infty(\Omega)$ au lieu de $D(\Omega)$ [1],[11]).

On munit $D(\Omega)$ de la «pseudo-topologie» suivante [28] :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(\Omega)$. On dit que u_n converge vers 0 dans $D(\Omega)$ (en notation : $u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Il existe un compact K de Ω tel que $supp\, u_n \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour tout multi-indice de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(D^\alpha u_n)$ converge vers 0 uniformément sur K. Autrement dit :

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u_n(x)| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

La notation $D^\alpha u$, pour $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^n$, désigne la dérivée d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, elle est définie par :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Remarque 1.1.

1. Si $u \in D(\Omega)$, comme $supp\, D^\alpha u \subset supp\, u$, on aura aussi $D^\alpha u \in D(\Omega)$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$, alors $D^\alpha u_n \to 0$ dans $D(\Omega)$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
2. On dira que $u_n \to u$ dans $D(\Omega)$ si et seulement si $u_n - u \to 0$ dans $D(\Omega)$.

Proposition 1.2. Soit $p \in \mathbb{R}$; $1 \leq p \leq +\infty$, alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ [11].

Définition 1.5 (Espace $D(\overline{\Omega})$). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; $D(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$, ces fonctions à support compact inclus dans $\overline{\Omega}$.[26]

Espace des distrubutions $D'(\Omega)$

Définition 1.6 On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, et on note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 1.7 Soit $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la dérivée $D^\alpha T$ est définie par :

$$\langle D^\alpha T, u\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha u\rangle, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

La notation $\langle T, u\rangle$, pour tout $(T, u) \in D'(\Omega) \times D(\Omega)$, désigne l'image de u par T.

Proposition 1.3. Si $T \in D'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha T \in D'(\Omega)$.

Définition 1.8. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D'(\Omega)$. On dit que T_n converge vers 0 dans $D'(\Omega)$, notée $T_n \to 0 \quad \text{dans } D'(\Omega)$ si et seulement si :

$$\langle T_n, u\rangle \to 0, \quad \forall u \in D(\Omega)$$

Espaces de Sobolev

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine borné, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) \mid D^\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha \mathbf{u}$ désigne la dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de $\mathbf{u}$ au sens des distributions.

Si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réel pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega).$$

On note aussi par $(\mathbf{W}^{m,p}(\Omega))'$ l'espace dual de $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Pour $m = 1$, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in L^p(\Omega) : \forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^p(\Omega)\right\},$$

muni de la norme induite,

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

En particulier, l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire, et la norme induite, respectivement,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega),$$

$$\|u\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega).$$

pour s réel positif quelconque, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^s(\Omega)$ comme étant l'espace intermédiare d'ordre θ entre $\mathbf{H}^m(\Omega)$ et $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = [\mathbf{H}^m(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)]_0, \quad (1-\theta)m = s \,\text{et}\, 0 \leq \theta \leq 1$$

D'autre part, $\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le m}(\sup ess|D^\alpha \mathbf{u}|), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega).$$

Nous utiliserons très souvent dans les raisonnements, les théorèmes de compacité et en particulier celui de Rellich, les injections de Sobolev et le théorème de trace de Sobolev.

Théorème 1.4. *(Injections de Sobolev)* Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \le p < \infty$.

(i) Si $p \in [1, n[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in [1, \frac{np}{n-p}]$.

(ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1,n}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [n, +\infty[$.

(iii) Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $C(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.5. *(Théorème de compacité de Rellich)* Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$ Alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$.

Théorème 1.6. *(Compacité* $\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^q$). Soit Ω un ensemble de mesure finie de $\mathbb{R}^n$ et $1 \le q < p < \infty$. Si $(\mathbf{u}_\mu)_{\mu\ge1}$ est une suite qui converge presque partout vers u et qui est bornée dans $\mathbf{L}^p$, alors $\mathbf{u}_\mu \to \mathbf{u}$ dans $\mathbf{L}^q$.

Lemme 1.5 Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, et $\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}$ des fonctions de $\mathbf{L}^q(\Theta)$, avec $1 < q < \infty$, telles que

$$\|\mathbf{g}_\mu\|_{\mathbf{L}^q(\Theta)} \le c, \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_\mu \to \mathbf{g} \text{ p.p. dans } \Theta.$$

Alors :

$$\mathbf{g}_\mu \rightharpoonup \mathbf{g} \text{ dans } \Theta \text{ faible.}$$

Théorème 1.7 *(Théorème de trace de Sobolev)* Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'application :

$$D(\overline{\Omega}) \to D(\Gamma) : \mathbf{u} \to \mathbf{u}/_\Gamma$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue :

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{L}^p(\boldsymbol{\Gamma}) : \mathbf{u} \to \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}/_\Gamma,$$

où γ est appelée l'application trace sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de traces, l'espace vectoriel

$$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{\Gamma}) = \gamma(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)) = \{\gamma(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{\Gamma})} = \inf \left\{ \|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} \Big/ \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \right\}.$$

L'espace $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}$ est un sous-espace de $\mathbf{L}^p(\Gamma)$; de plus, c'est un espace de Banach, qui est réflexif lorsque $1 < p < \infty$. On constate aisément que l'application :

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$$

est continue avec une norme inférieure à 1.

Théorème 1.8 *(Injections de Sobolev pour les espaces de traces)* Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, et soit $1 \leq p < \infty$.

(i) Si $p \in [1, n]$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in \left[1, \frac{(n-1)p}{n-p}\right]$ et compactement dans $\mathbf{L}^p(\Gamma)$.

(ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [1, +\infty[$.

(iii) Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $C(\mathbf{\Gamma})$.

1.2.2 Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par S_n l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, et par "$\cdot$" et $|\cdot|$ représentent respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et S_n.

Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{l=1}^{n} u_l v_l, \quad |\mathbf{u}| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sum_{l,m=1}^{n} \sigma_{lm} \tau_{ml}, \quad |\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in S_n.$$

On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n\times n} &= \{\sigma = (\sigma_{lm}) \mid \sigma_{lm} = \sigma_{ml} \in \mathbf{L}^p(\Omega),\ l, m = \overline{1, n}\} \\
\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n &= \left\{ \mathbf{u} = (u_l) \;\Big|\; u_l \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega),\ l = \overline{1, n} \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)^n \;\Big|\; D(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n\times n} \right\} \\
H_1 &= \left\{ \sigma \in \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n\times n} \;\Big|\; \mathrm{Div}(\sigma) \in \mathbf{L}^p(\Omega)^n \right\}
\end{aligned}$$

où $D : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n \to \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n\times n}$ et Div : $H^1 \to \mathbf{L}^p(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$D(\mathbf{u}) = (D_{lm}(\mathbf{u})) : D_{lm}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{l,m} + u_{m,l}) \quad \text{et} \quad Div(\sigma) = (\sigma_{lm,m}).$$

Comme la frontière $\boldsymbol{\Gamma}$ est Lipschitzienne, le vecteur normal sortant ν à la frontière est défini p.p.
Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n$, nous conservons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner la trace de $\mathbf{v}$ sur $\boldsymbol{\Gamma}$. On note par $\mathbf{v}_\nu$ et $\mathbf{v}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}$ sur la frontière, données par les formules :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \nu, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \nu,$$

Désignons par γ l'application trace

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^p(\boldsymbol{\Gamma})^n,$$

et faisons introduire les notations

$$\mathbf{W}_\Gamma = \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{\Gamma})^n = \gamma\left(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}'_\Gamma = \mathbf{W}^{-1+\frac{1}{p},p'}(\boldsymbol{\Gamma})^n$$

et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}_\Gamma \times \mathbf{W}'_\Gamma}$ le produit de dualité entre $\mathbf{W}'_\Gamma$ et $\mathbf{W}_\Gamma$. Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in \mathbf{W}'_\Gamma$ tel que la formule de Green suivante soit satisfaite :

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{W}_\Gamma \times \mathbf{W}'_\Gamma} = \langle \sigma, D(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{L}^p(\Omega)^{n\times n}} + \langle \mathrm{Div}(\sigma), v \rangle_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{W}_\Gamma \times \mathbf{W}'_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n,$$

où $\mathbf{d}\gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de σ sur la frontière $\boldsymbol{\Gamma}$ par les formules :

$$\sigma_\nu = \sigma\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

Tout au long de la mémoire dans les problèmes mécaniques, $\boldsymbol{\Gamma}$ est partitionnée en deux parties mesurables $\boldsymbol{\Gamma}_1$ et $\boldsymbol{\Gamma}_2$, telles que $mes(\boldsymbol{\Gamma}_1), mes(\boldsymbol{\Gamma}_2) > 0$.

Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles

$$\mathbf{W}_\Gamma = \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \boldsymbol{\Gamma}\right\}.$$

L'inégalité de Korn généralisée s'applique sur $\mathbf{W}_\Gamma$: il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{\Gamma}$, telle que

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n\times n}} \geq C\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n.$$

1.2.3 Élément d'analyse non linéaire

Dans cette sous-section, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Banach et quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques qui interviennent dans l'étude des problèmes de ce mémoire. Dans le premier paragraphe de cette sous-section, $\mathbf{H}$ désigne un espace de Banach réflexif muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. On note aussi par $\mathbf{H}'$ l'espace dual de $\mathbf{H}$ et par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{H}'\times\mathbf{H}}$ le produit de dualité entre $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

Convergence faible

On dit que la suite $(x_n)_n \subset \mathbf{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathbf{H}$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\langle l, x_n\rangle_{\mathbf{H}'\times\mathbf{H}} \to \langle l, x\rangle_{\mathbf{H}'\times\mathbf{H}} \quad \forall l \in \mathbf{H}'.$$

Dans ce cas, x s'appelle limite faible de la suite $(x_n)_n$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$. La réciproque n'est pas toujours vraie. De plus, puisque l'espace de Banach est réflexif, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1 *(de Bolzano-Weierstrass)* Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathbf{H}$. Il existe alors un élément $x \in \mathbf{H}$ et une sous-suite de $(x_n)_n$, notée $(x_\mu)_\mu$, telle que $x_\mu \rightharpoonup x$.

Fonctions convexes et semi-continuité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement. Ensuite, nous donnons une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes, voir plus détails [10, 19].

Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel $\mathbf{E}$ et à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$.

La fonction φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞, c'est-à-dire s'il existe $x \in \mathbf{E}$ tel que $\varphi(x) < \infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{E},\ t \in [0,1].$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$.

On définit le domaine et l'épigraphe de φ,respectivement, par :

$$\mathrm{dom}(\varphi) = \{x \in \mathbf{E} \mid \varphi(x) < +\infty\},$$

$$\mathrm{epi}(\varphi) = \{(x, \alpha) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

(i) φ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.

(ii) Le domaine de φ est un convexe de $\mathbf{E}$ si φ est convexe.

(iii) φ est convexe si et seulement si $\mathrm{epi}(\varphi)$ est un ensemble convexe dans $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique $\mathbf{E}$ et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \text{ l'ensemble } \{x \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\} \text{ est fermé.}$$

Nous donnons ici quelques propriétés des fonctions semi-continues inférieurement.

Lemme 1.1 Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors

(i) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\mathrm{epi}(\varphi)$ est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbb{R}$.

(ii) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{H}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbf{H}$ tel que $\varphi(u) \geq \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $u \in V_x$.

Il en résulte en particulier que si φ est semi-continue inférieurement et si $x_n \longrightarrow x$, alors

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant :

Théorème 1.2 Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $\mathbf{H}$.

Une fonction $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite *Gâteaux-différentiable* en un point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in \mathbf{H}'$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in H. \tag{1.17}$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé la *différentielle au sens de Gâteaux* de φ au point u.

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de $\mathbf{H}$. Dans ce cas, l'opérateur $u \longrightarrow \nabla\varphi(u) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}'$ s'appelle le *gradient* de la fonction φ.

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 1.2 Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla\varphi(u), v - u\rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{H}. \tag{1.18}$$

L'inégalité (1.18) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes.

On dit que la fonction $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est **sous-différentiable** en un point $u \in \mathbf{H}$ s'il existe $f \in \mathbf{H}'$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u\rangle_{H' \times H} \quad \forall v \in H. \tag{1.19}$$

L'élément f est appelé sous-gradient de φ au point u, et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in \mathbf{H}' : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u\rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in H\}. \tag{1.20}$$

On note par $\mathrm{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{dom}(\partial\varphi) = \{u \in \mathbf{H} : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \tag{1.21}$$

En utilisant (1.20), (1.21) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte :

$$dom(\partial\varphi) \subset dom(\varphi). \tag{1.22}$$

La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de H, c'est-à-dire $dom(\partial\varphi) = \mathbf{H}$.

Lemme 1.3 Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par :

Lemme 1.4 Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et on a

$$\partial\varphi(\mathbf{u}) = \{\nabla\varphi(\mathbf{u})\} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}.$$

Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles

Soient $\mathbf{H}$ un espace de Banach réflexif et séparable, $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ un opérateur non linéaire, $\varphi : \mathbf{H} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, et $\mathbf{f} \in \mathbf{H}'$. Un nombre considérable de problèmes aux limites en mécanique des milieux continus se ramènent aux problèmes suivants. Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \tag{1.23}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est le produit de dualité entre $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

Le problème (1.23) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur $\mathbf{H}$. L'opérateur $\mathbf{A}$ est dit :

(i) **Strictement monotone** si

$$\begin{cases} \langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} > 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}. \end{cases}$$

(ii) **Coercif** si

$$\lim_{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} \to +\infty} \frac{\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}} = +\infty. \tag{1.24}$$

(iii) **Hémi-continu** si la fonction réelle

$$t \longrightarrow \langle \mathbf{A}(\mathbf{u} + tv), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$$

est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En ce qui concerne le problème (1.23), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.3 [10, 29] Soit $A : H \to H'$ un opérateur strictement monotone, borné, hémi-continu et coercif, et soit φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de H. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce (1.23) admet une solution unique.

CHAPITRE 2

RÉSULTATS D'EXISTENCE POUR UN PROBLÈME DE TRANSMISSION GOUVERNÉ PAR LE FLUIDE DE HERSCHEL-BULKLEY

Dans ce travail, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission. Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Dans la sous-section 1, nous présentons le problème mécanique de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Herschel-Bulkley. En outre, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la sous-section 2, nous obtenons la formulation variationnelle du problème. Nous montrons dans la sous-section 3 l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission.

2.1 Position du problème

Nous considérons deux fluides de Herschel-Bulkley rigides, viscoplastiques et incompressibles occupant deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε de $\mathbb{R}^2$. On note par ε $(0 < \varepsilon < 1)$ est un petit qui tend vers zéro, avec ses frontières $\partial\Omega_1^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon$ sont de classe C^1 et sont divisées en trois parties mesurables : Γ_0^ε, Γ_1^ε, et Γ_2^ε, telles que $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$, données par :

$$\partial\Omega_1^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \quad \text{et} \quad \partial\Omega_2^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$$

,

où

- Γ_0^ε est l'interface de contact fluide-fluide définie par $x_2 = \varepsilon h_1(x_1)$,
- Γ_1^ε est la surface inférieure définie par $x_2 = 0$,
- Γ_2^ε est la surface supérieure définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$.

Tels que $h_i :]0,1[\to \mathbb{R}_+^*$ $(i = 1,2)$ est une fonction de classe $C^1(]0,1[)$.

On désigne par Ω^ε le domaine $= \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ et on suppose que :

$$\Omega_1^\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 < x_1 < 1 \ \text{ et } \ 0 < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\right\},$$

et

$$\Omega_2^\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 < x_1 < 1 \ \text{ et } \quad \varepsilon h_1(x_1) < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\right\}.$$

Les fluides sont soumis à des forces volumiques données, de densités f_1^ε et f_2^ε respectivement.

On note par S^2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$, et par "$\cdot$" et "$|\cdot|$" respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S^2. Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u \cdot v = u_l v_l, \quad |u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S^2$, $\sigma \cdot \tau = \sigma_{lm}\tau_{lm}, \quad |\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici et ci-dessous, les indices l et m sont compris entre 1 et 2, et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée.

On désigne par $\widetilde{\sigma}_i^\varepsilon$ le déviateur du tenseur des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = ((\sigma_i^\varepsilon)_{lm})$, donné par :

$$\widetilde{\sigma}_i^\varepsilon = ((\widetilde{\sigma}_i^\varepsilon)_{lm}), \quad (\widetilde{\sigma}_i^\varepsilon)_{lm} = (\sigma_i^\varepsilon)_{lm} - \frac{\operatorname{tr}(\sigma_i^\varepsilon)}{2}\delta_{lm}, \quad i = 1, 2.$$

Où $\delta = (\delta_{lm})$ est le tenseur identique.

Soit $1 < p_i \leq 2$. Nous considérons les tenseurs de taux de déformations définis pour chaque $u_i^\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ par

$$D(u_i^\varepsilon) = (D_{lm}(u_i^\varepsilon)), \quad D_{lm}(u_i^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left((u_i^\varepsilon)_{l,m} + (u_i^\varepsilon)_{m,l}\right), \quad i = 1, 2.$$

On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

Pour chaque champ des vecteurs $v \in W^{1,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ on écrit aussi v pour sa trace sur $\partial\Omega_i^\varepsilon, i = 1, 2$.

Le problème de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Herschel-Bulkley est donné par le problème mécanique suivant :

Problème (P.2.1) : Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \to \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \to S_2, \quad i = 1, 2$ tels que

$$Div\, \sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.1}$$
$$Div\, \sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma}_1^\varepsilon = \mu_1 \varepsilon^{p_1} \left|D(u_1^\varepsilon)\right|^{p_1-2} D(u_1^\varepsilon) + g_1 \varepsilon \frac{D(u_1^\varepsilon)}{\left|D(u_1^\varepsilon)\right|} & \text{si } \left|D(u_1^\varepsilon)\right| \neq 0 \\ \left|\widetilde{\sigma}_1^\varepsilon\right| \leq g_1 \varepsilon & \text{si } \left|D(u_1^\varepsilon)\right| = 0 \end{array}\right\} \text{dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma}_2^\varepsilon = \mu_2 \varepsilon^{p_2} \left|D(u_2^\varepsilon)\right|^{p_2-2} D(u_2^\varepsilon) + g_1 \varepsilon \frac{D(u_2^\varepsilon)}{\left|D(u_2^\varepsilon)\right|} & \text{si } \left|D(u_2^\varepsilon)\right| \neq 0 \\ \left|\widetilde{\sigma}_2^\varepsilon\right| \leq g_2 \varepsilon & \text{si } \left|D(u_2^\varepsilon)\right| = 0 \end{array}\right\} \text{dans} \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div} u_1^\varepsilon = 0 \quad \text{dans}\, \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{dans}\, \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.6}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.7}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_2^\varepsilon, \tag{2.8}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_0^\varepsilon, \tag{2.9}$$

$$\sigma_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur}\, \Gamma_0^\varepsilon. \tag{2.10}$$

Ici, l'écoulement dans les domaines Ω_1^ε et Ω_2^ε sont respectivement données par (2.1) et (2.2) où les densités sont supposées égales à un pour les deux fluides. Les équations (2.3) et (2.4) représentent, respectivement, la loi de comportement des deux fluides de Herschel-Bulkley où $\mu_1^{\varepsilon p_1}, \mu_2^{\varepsilon p_2} > 0$ et $g_1\varepsilon, g_2\varepsilon > 0$ sont respectivement la viscosité et le seuil de plasticité du fluide de Herschel-Bulkley. Le paramètre p tel que $1 < p_i \leq 2$ est l'indice de puissance du fluide. (2.5) et (2.6) représentent la condition d'incompressibilité pour deux fluides respectivement. (2.7) et (2.8) représentent la condition sur la vitesse sur les frontières Γ_1^ε et Γ_2^ε respectivement. Enfin sur la frontière Γ_0^ε, (2.9) et (2.10) représentent la condition de transmission pour l'interface liquide-liquide.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$V(\Omega_i^\varepsilon) = \left\{ v_i \in W^{1,p_i}(\Omega_i^\varepsilon) : \operatorname{div} v_i = 0 \,\text{dans}\, \Omega_i^\varepsilon \,\text{et}\, v_i = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_i^\varepsilon \right\}, \quad i = 1, 2.$$

$$V^\varepsilon = \{(v_1, v_2) \in V(\Omega_1^\varepsilon) \times V(\Omega_2^\varepsilon) : v_1 - v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}.$$

$V(\Omega_1^\varepsilon), i = 1, 2$ qui est un espace de Banach pour la norme induite

$$\|v\|_{V(\Omega_i^\varepsilon)} = \|v\|^2_{W^{1,p}(\Omega_i^\varepsilon)},$$

et V_ε devient un espace de Banach pour la norme suivante :

$$\|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon} = \|v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)},$$

où

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)} = \left(\|v\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{1 \leq l,m \leq 2} \|\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $V^{\varepsilon\prime}$ et V^ε.

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique (2.1)-(2.10).

Lemme 2.1. Supposons que $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon\prime}$. Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ solution de (2.1)-(2.10), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon, \text{ telle que} \\ \langle \phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon) \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon} + J(v_1, v_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \\ \quad \geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon \cdot (v_1 - u_1^\varepsilon) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon \cdot (v_2 - u_2^\varepsilon) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon, \end{cases} \tag{2.11}$$

où

$$\phi : V^\varepsilon \to V^{\varepsilon\prime}, \quad (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \mapsto \phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon);(v_1,v_2)) \in V^\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\phi\langle (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon),(v_1,v_2)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon} &= \mu_1\varepsilon^{p_1}\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p_1-2}\, D(u_1^\varepsilon).D(v_1)\,dx_1dx_2 \\ &+ \mu_2\varepsilon^{p_2}\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p_2-2}\, D(u_2^\varepsilon).D(v_2)\,dx_1dx_2\end{aligned}$$

$$j : V^\varepsilon \to \mathbb{R}, \quad j(v_1,v_2) = g_1\varepsilon\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)|\; dx_1dx_2 + g_2\varepsilon\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)|\; dx_1dx_2$$

Démonstration. Supposons que $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ solution de (2.1)-(2.10) soit suffisamment régulière. En multipliant l'équation (2.1) par $v_1 - u_1^\varepsilon$, et l'équation (2.2) par $v_2 - u_2^\varepsilon$, où $(v_1, v_2) \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous domaine $\Omega_i^\varepsilon, i = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon D(v_1-u_1^\varepsilon)\,dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon D(v_2-u_2^\varepsilon)\,dx_1dx_2 \\ &- \int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1(v_1-u_1^\varepsilon)\,ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2(v_2-u_2^\varepsilon)\,ds \\ &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon(v_1-u_1^\varepsilon)\,dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon(v_2-u_2^\varepsilon)\,dx_1dx_2, \quad \forall (v_1,v_2)\in V^\varepsilon\end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites (2.7)-(2.10), on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1(v_1-u_1^\varepsilon)\,ds + \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2(v_2-u_2^\varepsilon)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1(v_1-u_1^\varepsilon)\,ds + \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1(v_1-u_1^\varepsilon)\,ds \\ &+ \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2(v_2-u_2^\varepsilon)\,ds + \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2(v_2-u_2^\varepsilon)\,ds \\ &= \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon \mathbf{n}(v_1-u_1^\varepsilon)\,ds - \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon \mathbf{n}(v_2-u_2^\varepsilon)ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc (2.12) devient comme suit

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(v_1-u_1^\varepsilon)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(v_2-u_2^\varepsilon)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon(v_1-u_1^\varepsilon)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon(v_2-u_2^\varepsilon)\,dx_1\,dx_2, \quad \forall (v_1,v_2)\in V^\varepsilon.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on aura, en utilisant la définition de $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}, i = 1, 2$ et les conditions d'incompressibilité (2.5) et (2.6)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \widetilde{\sigma_1^\varepsilon}.D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \widetilde{\sigma_2^\varepsilon}.D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\sigma_1^\varepsilon - \frac{\mathrm{tr}(\sigma_1^\varepsilon)}{2}\delta\right).D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} \left(\sigma_2^\varepsilon - \frac{\mathrm{tr}(\sigma_2^\varepsilon)}{2}\delta\right).D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon.D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon.D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&\leq \mu_1\varepsilon^{p_1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p_1-2}D(u_1^\varepsilon).D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&+ \mu_2\varepsilon^{p_2} \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p_2-2}D(u_2^\varepsilon).D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \\
&+ g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)|\, dx_1dx_2 - g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|\, dx_1dx_2 \\
&+ g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)|\, dx_1dx_2 - g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|\, dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

Par consequent

$$
\begin{aligned}
&\langle \phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon} + J(v_1, v_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \\
&\quad \geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1dx_2 \qquad\qquad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon.
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée.

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1. Supposons que $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon\prime}$. Alors il existe un unique $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon$ solution du problème variationnel (2.11).

Démonstration. On peut facilement prouver que l'opérateur ϕ peut s'écrire

$$\begin{aligned}\langle \phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon} &= \langle dJ_1(D(u_1^\varepsilon)), D(v_1)\rangle_{L^{p_1'}(\Omega_1^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_1}(\Omega_1^\varepsilon)_s^4} \\ &+ \langle dJ_2(D(u_2^\varepsilon)), D(v_2)\rangle_{L^{p_2'}(\Omega_2^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_2}(\Omega_2^\varepsilon)_s^4}\end{aligned}$$

où la fonctionnelle J_i, $i = 1, 2$, est définie par

$$J_i : L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \subset S_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma \longmapsto J_i(\sigma) = \frac{\mu_i \varepsilon^{p_i}}{p_i} \int_{\Omega_i} |\sigma|^{p_i}\, dx_1 dx_2, \quad i = 1, 2,$$

et d représente la dérivée au sens de Gâteaux.

Cette fonctionnelle est convexe et semi-continue inférieurement sur $L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4$, et Gâteaux-différentiable. Sa dérivée au sens de Gâteaux au point $\sigma \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4$ est

$$\begin{aligned}\langle dJ_i(\sigma), \tau\rangle_{L^{p_i'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma|^{p_i - 2} \sigma \cdot \tau \, dx_1\, dx_2, \\ &\forall \tau \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4,\ i = 1, 2.\end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\langle dJ_i(\sigma), \tau\rangle_{L^{p_i'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma|^{p_i-2} \sigma . \tau \, dx_1 x_2 \\ &\leq \int_{\Omega_i^\varepsilon} |\mu_i \varepsilon^{p_i}| |\sigma|^{p_i - 1} |\tau| \, dx_1 dx_2 \\ &\leq c \left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |\sigma|^{p_i'(p_i - 1)} \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p_i{}'}} \left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |\tau|_i^{p_i} \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p_i}}\end{aligned}$$

Or on sait que $1 < p_i < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < p_i - 1 < 1$, de plus il existe une constante strictement positive δ de sorte que

$$\delta |\sigma| > 1, \quad \forall \sigma \in L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2.$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $C(p, \delta)$ vérifiant l'inégalité

$$\|dJ_i(\sigma)\|_{L^{p_i'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \leq C(p, \delta) \|\sigma\|_{L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4}, \quad \forall \sigma \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4, \quad i = 1, 2.$$

D'après le lemme (1.2) et la propriété (1.18), $J_i(\sigma)$ est convexe si et seulement si

$$\langle dJ_i(\sigma_1), \sigma_2 - \sigma_1\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \leq J_i(\sigma_2) - J_i(\sigma_1), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}
\big\langle dJ_i(\sigma_1), \sigma_2 - \sigma_1\big\rangle_{L^{p'_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &\leq \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_1|^{p_i - 1} |\sigma_2| \, dx_1 dx_2 - \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_1|^{p_i} \, dx_1 dx_2 \\
&\leq \frac{p_i - 1}{p_i} \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_1|^{p_i} \, dx_1 dx_2 + \frac{1}{p_i} \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_2|^{p_i} \, dx_1 dx_2 \\
&- \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_1|^{p_i} \, dx_1 dx_2 \\
&\leq \frac{1}{p_i} \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_2|^{p_i} \, dx_1 dx_2 - \frac{1}{p_i} \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^{p_i} |\sigma_1|^{p_i} \, dx_1 dx_2 \\
&\leq J_i(\sigma_2) - J_i(\sigma_1), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, dJ_i est semi-continue et monotone, de plus dJ_i est strictement monotone et bornée, $i = 1, 2$.
A cette fin, on a

$$\begin{aligned}
&\big\langle dJ_i(\sigma_1) - dJ_i(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2\big\rangle_{L^{p'_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \\
&\qquad \geq \mu_i \varepsilon^{p_i} \int_{\Omega_i^\varepsilon} (|\sigma_1| - |\sigma_2|)(|\sigma_1|^{p_i - 1} - |\sigma_2|^{p_i - 1}) \, dx_1 dx_2, \\
&\qquad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Donc si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, nous avons $\big\langle dJ_i(\sigma_1) - dJ_i(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2\big\rangle_{L^{p'_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} > 0$, ce qui signifie que dJ_i est strictement monotone, $i = 1, 2$. D'autre part, pour tout $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2) \in V^\varepsilon$, nous avons

$$
\begin{aligned}
|\langle\Phi(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon),(v_1,v_2)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}| &\leq \mu_1\varepsilon^{p_1}\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon}|D(u_1^\varepsilon)|^{p_1'(p_1-1)}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon}|D(v_1)|^{p_1}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&+\mu_2\varepsilon^{p_2}\left(\int_{\Omega_2^\varepsilon}|D(u_2^\varepsilon)|^{p_2'(p_2-1)}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_2'}}\left(\int_{\Omega_2^\varepsilon}|D(v_2)|^{p_2}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\\
&\leq \mu_1\varepsilon^{p_1}\left(\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon}|D(u_1^\varepsilon)|^{p_1}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_1'}}\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon}|D(v_1)|^{p_1}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}}\\
&+\mu_2\varepsilon^{p_2}\left(\left(\int_{\Omega_2^\varepsilon}|D(u_2^\varepsilon)|^{p_2}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\right)^{\frac{p_2}{p_2'}}\left(\int_{\Omega_2^\varepsilon}|D(v_2)|^{p_2}dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\\
&\leq \mu_1\varepsilon^{p}\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p_1}{p_1'}}\|v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}+\mu_2\varepsilon^{p_2}\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p_1}{p_1'}}\|v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}\\
&\leq \mu_1\varepsilon^{p_1}\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p_1}{p_1'}}\|(v_1,v_2)\|_{V^\varepsilon}+\mu_2\varepsilon^{p_2}\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p_2}{p_2'}}\|(v_1,v_2)\|_{V^\varepsilon}\\
&\leq \left(\mu_1\varepsilon^{p_1}\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p_1}{p_1'}}+\mu_2\varepsilon^{p_2}\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p_2}{p_2'}}\right)\|(v_1,v_2)\|_{V^\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\|\phi(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\|_{V^{\varepsilon\prime}}\leq \mu_1\varepsilon^{p_1}\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p_1}{p_1'}}+\mu_2\varepsilon^{p_2}\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p_2}{p_2'}}.$$

Ce qui prouve que l'opérateur ϕ est borné sur V^ε.

Maintenant, d'après l'inégalité généralisée de Korn, il existe une constante $c>0$ telle que

$$\langle\phi(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon),(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}\geq c\left(\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{p_1}+\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{p_2}\right),\quad \forall(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\in V^\varepsilon.$$

Alors

$$\frac{\langle\phi(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon),(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}}\geq c\frac{\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{p_1}+\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{p_2}}{\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}+\|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}},\quad \forall(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\in V^\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $\|(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}\to+\infty$ nous trouvons

$$\frac{\langle\phi(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon),(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}}\geq c\lim_{r\to+\infty,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]}\frac{r^{p_1}\cos^{p_1}\theta+r^{p_2}\sin^{p_2}\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta}=+\infty.$$

Il s'ensuit que l'opérateur ϕ est coercif sur V^ε.

Par ailleurs, la fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
&j\colon V^\varepsilon\to\mathbb{R}\\
&(v_1,v_2)\mapsto j(v_1,v_2)=g_1\varepsilon\int_{\Omega_1^\varepsilon}|D(v_1)|dx_1dx_2+g_2\varepsilon\int_{\Omega_2^\varepsilon}|D(v_2)|dx_1dx_2,
\end{aligned}
$$

est continue et convexe sur V^ε, elle est donc semi-continue inférieurement sur V^ε.

En effet, pour montrer la continuité de j il suffit de considérer une suite $(v_{1n}, v_{2n}) \in V^\varepsilon$ qui converge vers (v_1, v_2) dans V^ε, et utiliser l'inégalité de Hölder et la continuité de g_1, g_2 sur V^ε pour obtenir

$$
\begin{aligned}
|j(v_{1n}, v_{2n}) - j(v_1, v_2)| &\leq \left|\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 |D(v_{1n})| dx_1 dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 |D(v_1)| dx_1 dx_2\right| \\
&\quad + \left|\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 |D(v_{2n})| dx_1 dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 |D(v_2)| dx_1 dx_2\right| \\
&\leq g_1 \varepsilon mes(\Omega_1^\varepsilon)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_{1n} - v_1)|^{p_1} dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&+ g_2 \varepsilon mes(\Omega_2^\varepsilon)^{\frac{1}{p_2'}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_{2n} - v_2)|^{p_2} dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq c \left(\|v_{1n} - v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_{2n} - v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}\right) \\
&\leq c \|(v_{1n} - v_1, v_{2n} - v_2)\|_{V^\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

De plus, pour la convexité, on a pour toute $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2) \in V^\varepsilon$, $t \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
j(tu_1^\varepsilon + (1-t)v_1, tu_2^\varepsilon + (1-t)v_2) &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \varepsilon |D(tu_1^\varepsilon + (1-t)v_1)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \varepsilon |D(tu_2^\varepsilon + (1-t)v_2)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\leq \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \varepsilon |D(tu_1^\varepsilon)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \varepsilon |D((1-t)v_1)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \varepsilon |D(tu_2^\varepsilon)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \varepsilon |D((1-t)v_2)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\leq t \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \varepsilon |D(u_1^\varepsilon)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \varepsilon |D(u_2^\varepsilon)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right) \\
&+ (1-t) \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \varepsilon |D(v_1)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \varepsilon |D(v_2)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right) \\
&\leq tj(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) + (1-t) j(v_1, v_2).
\end{aligned}
$$

Par conséquent le résultat d'existence et d'unicité de la solution résulte des théorèmes classiques, sur les inéquations variationnelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes[10].

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLÈME DE TRANSMISSION ENTRE DEUX FLUIDES DE HERSCHEL-BULKLEY DANS UNE COUCHE MINCE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes, et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact. Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans la section 1, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la section 2, nous présentons le problème mécanique et sa formulation variationnelle. Dans la section 3, nous nous intéressons au comportement asymptotique, pour cela nous prouvons quelques résultats de convergence concernant la vitesse et la pression lorsque l'épaisseur tend vers zéro. En outre, l'unicité d'une solution limite a également été établie.

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème

On note I l'intervalle ouvert $I =]0,1[$. On introduit la fonction $h_i : I \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $h_i \in C^1(I)$, $i = 1,2$.

Nous considérons les domaines suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } 0 < y < h_1(x)\},\\
\Omega_1^\varepsilon &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in I \text{ et } 0 < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\},\\
\Omega_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } h_1(x) < y < h_2(x)\},\\
\Omega_2^\varepsilon &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in I \text{ et } \varepsilon h_1(x_1) < x_2 < \varepsilon h_2(x_1)\},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Remarquez que si $(x_1,x_2) \in \Omega_i^\varepsilon$, alors on a $(x,y) = (x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \in \Omega_i$, $i = 1,2$.

Cela nous permet de définir, pour chaque fonction $\varphi_i^\varepsilon : \Omega_i^\varepsilon \to \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{\varphi_i^\varepsilon} : \Omega_i \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\widehat{\varphi_i^\varepsilon}(x,y) = \varphi_i^\varepsilon(x_1,x_2), \quad i = 1,2.$$

Pour $1 < p \leq 2$, notons par p' le conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et soit $f_i = (f_{i1}, f_{i2}) \in L^{p_i'}(\Omega_i)^2$ une fonction donnée. Nous définissons la fonction $f_i^\varepsilon \in L_i^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ telle que $\widehat{f_i^\varepsilon} = f_i$, $i = 1,2$.

Pour chaque domaine Ω_i^ε, nous supposons que sa frontière $\partial\Omega_i^\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $i = 1,2$ et est divisée en trois parties Γ_0^ε, Γ_1^ε et Γ_2^ε mesurables, telles que $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$, données par

$$\partial\Omega_1^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \quad \text{et} \quad \partial\Omega_2^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon,$$

où Γ_0^ε est la frontière bilatérale définie par $x_2 = \varepsilon h_1(x_1)$. La surface inférieure Γ_1^ε est définie par $x_2 = 0$, la surface supérieure Γ_2^ε est définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$. Nous désignons par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$.

On note S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$ et par "." et $|\cdot|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S_2. Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u \cdot v = u_l v_l$, $|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2$, $\sigma \cdot \tau = \sigma_{lm}\tau_{lm}$, $|\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$
\begin{aligned}
W^{1,p_i}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{ v_i \in W^{1,p_i}(\Omega_i^\varepsilon) : v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_i \right\}, \\
W^{p_i,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{ v_i \in W^{1,p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2 : \mathrm{div}(v_i) = 0 \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon \right\}, \\
W^{p_i}_{\mathrm{div}}(\Omega_i) &= \left\{ v_i \in W^{1,p_i}(\Omega_i)^2 : \mathrm{div}(v_i) = 0 \text{ dans } \Omega_i \right\}, \\
L^{p_i}_0(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{ \varphi_i^\varepsilon \in L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon) : \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = 0 \right\}, \\
L^{p}_0(\Omega_i) &= \left\{ \varphi_i \in L^{p_i}(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} \varphi_i(x,y)\, dxdy = 0 \right\}, \\
W_{p_i}(\Omega_i) &= \left\{ \varphi_i \in L^{p_i}(\Omega_i) : \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \in L^{p_i}(\Omega_i) \right\}, \quad i = 1,2. \\
W_p &= W_{p_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}(\Omega_2), \qquad (3.1) \\
W^\varepsilon_{\mathrm{div}} &= \left\{ (v_1,v_2) \in W^{p_1,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_1^\varepsilon) \times W^{p_2,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_2^\varepsilon) : \begin{array}{r} v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_0, \\ v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right\}, \\
W^\varepsilon &= \left\{ (v_1,v_2) \in W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon)^2 \times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)^2 : v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}.
\end{aligned}
$$

Tous ces espaces sont des espaces de Banach.

On désigne par $\langle \cdot,\cdot \rangle_{W^{\varepsilon'} \times W^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $W^{\varepsilon'}$ et W^ε, et par $\| \cdot \|_{W^{1,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)}$ la norme de l'espace $W^{1,p_i}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)$, $i = 1,2$.

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle

Nous considérons deux fluides de Herschel-Bulkley rigides, viscoplastiques et incompressibles qui occupent les domaines Ω_1^ε et Ω_2^ε. Les deux fluides sont en contact bilatéral, le long de la partie commune Γ_0.

On note par $\mathbf{u}_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon)$ le champ de vitesse, par $\boldsymbol{\sigma}_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon)$ les tenseurs des contraintes et par $D(\mathbf{u}_i^\varepsilon)$ les tenseurs de déformations linéarisées, $i = 1,2$.

Nous modélisons les matériaux avec le tenseur de contrainte total de Cauchy

$$\sigma_i^\varepsilon(u_i^\varepsilon) = -p_i^\varepsilon I_2 + \widetilde{\sigma_i^\varepsilon}(u_i^\varepsilon),$$

où $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ désigne la partie déviateur, et p_i^ε la pression, $i = 1,2$. Le fluide est supposé être incompressible, rigide et viscoplastique, et la relation entre $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ et $D(u_i^\varepsilon)$ est donnée par le modèle de Herschel-Bulkley :

$$
\begin{cases}
\widetilde{\sigma_i^\varepsilon} = \mu_i \varepsilon^{p_i} |D(u_i^\varepsilon)|^{p_i-2} D(u_i^\varepsilon) + g_i \varepsilon \dfrac{D(u_i^\varepsilon)}{|D(u_i^\varepsilon)|} & \text{si } |D(u_i^\varepsilon)| \neq 0, \\
|\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}| \leq g_i \varepsilon & \text{si } |D(u_i^\varepsilon)| = 0
\end{cases}
\qquad i = 1,2,
$$

où $g_i\varepsilon$ est le seuil de plasticité, $\mu_i\varepsilon^{p_i}$ est la viscosité ($g_i > 0$ et $\mu_i > 0$ sont des constantes indépendantes de ε), p représente l'indice de loi de puissance, u_i^ε est le champ de vitesse et

$$D(u_i^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\nabla u_i^\varepsilon + (\nabla u_i^\varepsilon)^T\right), \quad i = 1, 2.$$

On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

— L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$Div\, \sigma_i^\varepsilon + f_i^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2$$

où le vecteur f_i^ε, $i = 1, 2$ de composantes f_{ij}^ε $(j = 1, 2)$, représente une densité massique des forces extérieures.

— L'équation d'incompressibilité

$$div\, u_i^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Nous décrivons les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_i^\varepsilon$. Nous supposons que :

— Sur la surface inférieure et supérieure, on a

$$u_i^\varepsilon = 0, \quad i = 1, 2 \text{ sur } \Gamma_i^\varepsilon$$

— Sur la frontière bilatérale entre deux domaines, on a

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon,$$

$$\sigma_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon,$$

autrement dit, nous supposons la continuité des vitesses et la continuité des contraintes.

Le problème de transmission en régime stationnaire pour les fluides de Herschel-Bulkley en couche mince est donné par le problème mécanique suivant :

Problem (P.3.1) Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon)\colon \Omega_i^\varepsilon \to \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon)\colon \Omega_i^\varepsilon \to S_2$ et la pression $p_i^\varepsilon\colon \Omega_i^\varepsilon \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ tels que

$$\left.\begin{aligned} &Div\, \sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon = 0 \\ &div\, u_1^\varepsilon = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &Div\, \sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0 \\ &div\, u_2^\varepsilon = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\widetilde{\sigma_1^\varepsilon}(u_1^\varepsilon) = \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon) + p_1^\varepsilon I_2 & \\ \widetilde{\sigma_1^\varepsilon} = \mu_1 \varepsilon^{p_1}|D(u_1^\varepsilon)|^{p_1-2}D(u_1^\varepsilon) + g_1\varepsilon\dfrac{D(u_1^\varepsilon)}{|D(u_1^\varepsilon)|} & \text{si } |D(u_1^\varepsilon)| \neq 0 \\ |\widetilde{\sigma_1^\varepsilon}| \leq g_1\varepsilon & \text{si } |D(u_1^\varepsilon)| = 0\end{array}\right\} \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\widetilde{\sigma_2^\varepsilon}(u_2^\varepsilon) = \widetilde{\sigma_2^\varepsilon}(u_2^\varepsilon) + p_2^\varepsilon I_2 & \\ \widetilde{\sigma_2^\varepsilon} = \mu_2 \varepsilon^{p_2}|D(u_2^\varepsilon)|^{p_2-2}D(u_2^\varepsilon) + g_2\varepsilon\dfrac{D(u_2^\varepsilon)}{|D(u_2^\varepsilon)|} & \text{si } |D(u_2^\varepsilon)| \neq 0 \\ |\widetilde{\sigma_2^\varepsilon}| \leq g_2\varepsilon & \text{si } |D(u_2^\varepsilon)| = 0\end{array}\right\} \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \tag{3.5}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_1^\varepsilon \tag{3.6}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_2^\varepsilon \tag{3.7}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_0^\varepsilon \tag{3.8}$$

$$\sigma_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \,\text{sur}\, \Gamma_0^\varepsilon. \tag{3.9}$$

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le conjugué de p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.2) par $v_1 - u_1^\varepsilon$, et l'équation (3.3) par $v_2 - u_2^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous-domaine Ω_i^ε, $i = 1, 2$, et par addition, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_i^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon . D(v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon . D(v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 \\ &- \int_{\partial\Omega_i^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1 (v_1 - u_1^\varepsilon)\, ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2 (v_2 - u_2^\varepsilon)\, ds \\ &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon (v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon (v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in W^\varepsilon.\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (3.2)-(3.9), on trouve la formulation faible :

$$\begin{cases}\text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon \text{ et } (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p'}(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^{p'}(\Omega_2^\varepsilon) \text{ tel que} \\ \phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon)) - \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq 2} \langle p_i^\varepsilon,\ \text{div}(v_i - u_i^\varepsilon)\rangle + J(v_1, v_2) - J(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \\ \geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon . (v_1 - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon . (v_2 - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in W^\varepsilon,\end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2)) &= \mu_1 \varepsilon^{p_1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p_1-2} D(u_1^\varepsilon).D(v_1)\, dx_1 dx_2 \\
&\quad + \mu_2 \varepsilon^{p_2} \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p_2-2} D(u_2^\varepsilon).D(v_2)\, dx_1 dx_2, \\
\langle p_i^\varepsilon, \operatorname{div}(v_i) \rangle &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} p_i^\varepsilon \operatorname{div}(v_i)\, dx_1 dx_2, \quad i = 1, 2, \\
j(v_1, v_2) &= g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)|\, dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)|\, dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

On sait que ce problème variationnel a une solution unique $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p_1'}(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^{p_2'}(\Omega_2^\varepsilon)$, voir pour plus détails [5, 32, 33, 44, 46].

3.3 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous établissons quelques résultats concernant le comportement asymptotique de la solution lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons par rappeler les lemmes suivants, voir [8, 10, 13, 19, 34] :

Lemme 3.1

1. L'inégalité de Poincaré. Pour chaque $v_i \in W_{p_i}^{1,p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2$, nous avons

$$\|v_i^\varepsilon\|_{L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{3.11}$$

2. L'inégalité de Korn. Pour chaque $v_i \in W_{p_i}^{1,p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^2$, il existe une constante positive C_0 indépendante de ε, tel que

$$\|\nabla v_i^\varepsilon\|_{L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^4} \leq C_0 \|D(v_i^\varepsilon)\|_{L^{p_i}(\Omega_i^\varepsilon)^4}, \quad i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Lemme 3.2 (Minty). Soit E un espace de Banach, $A : E \to E'$ un opérateur monotone et semi-continu, $J : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle propre et convexe. Soit $u \in E$ et $f \in E'$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\langle Au; v - u \rangle_{E' \times E} + J(v) - J(u) \geq \langle f; v - u \rangle_{E' \times E}, \quad \forall v \in E.$$
$$\langle Av; v - u \rangle_{E' \times E} + J(v) - J(u) \geq \langle f; v - u \rangle_{E' \times E}, \quad \forall v \in E.$$

Les principaux résultats de cette section sont énoncés par la proposition suivante.

Proposition 3.1 . Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p'}(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^{p'}(\Omega_2^\varepsilon)$ la solution du problème variationnel (3.10). Alors, il existe $(\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \in W_{p_1}(\Omega_1)^2 \times W_{p_2}(\Omega_2)^2$ et $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in L_0^{p_1'}(\Omega_1) \times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$ tels que

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \to (\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \quad \textit{faiblement dans } W_{p_1}(\Omega_1)^2 \times W_{p_2}(\Omega_2)^2, \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}\right) \to (0,0) \quad \textit{faiblement dans } L^{p_1}(\Omega_1) \times L^{p_2}(\Omega_2), \tag{3.14}$$

$$(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}) \to (\widehat{p_1}, \widehat{p_1}) \quad \textit{faiblement dans } L_0^{p_1'}(\Omega_1) \times L_0^{p_2'}(\Omega_2). \tag{3.15}$$

*Démonstration.*En choisissant $(v_1, v_2) = (0,0)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), on en déduit que

$$\begin{aligned} &\mu_1 \varepsilon^{p_1} \|D(u_1^\varepsilon)\|^{p_1}_{L^{p_1}(\Omega_1^\varepsilon)^4} + \mu_2 \varepsilon^{p_2} \|D(u_2^\varepsilon)\|^{p_2}_{L^{p_2}(\Omega_2^\varepsilon)^4} \\ &\leq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon u_1^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon u_2^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Poincaré, Korn et par passage aux variables x et y, on obtient

$$\|\widehat{u_1^\varepsilon}\|_{L^{p_1}(\Omega_1)^2} + \|\widehat{u_2^\varepsilon}\|_{L^{p_2}(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.16}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{L^{p_1}(\Omega_1)^2} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{L^{p_2}(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.17}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{L^{p_1}(\Omega_1)^2} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{L^{p_2}(\Omega_2)^2} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

De plus, nous utilisons les conditions d'incompressibilité (3.2), (3.3) et la formule de Green, pour toute fonction $(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \in W_{\Gamma_1}^{1,p_1}(\Omega_1^\varepsilon) \times W_{\Gamma_2}^{1,p_2}(\Omega_2^\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} \frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_1^\varepsilon} \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_2^\varepsilon} \, dx \, dy \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1} \widehat{u_{11}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_1^\varepsilon}}{\partial x} \, dx \, dy + \varepsilon \int_{\Omega_2} \widehat{u_{12}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_2^\varepsilon}}{\partial x} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en faisant usage de (3.1)

$$\left\|\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{W^{-1,p'_1}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{W^{-1,p'_2}(\Omega_2)} \leq c\varepsilon. \tag{3.19}$$

On peut alors extraire une sous-suite encore notée par $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ telle que

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \to (\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \quad \text{faiblement dans } L^{p_1}(\Omega_1)^2 \times L^{p_2}(\Omega_2)^2, \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y}\right) \to \left(\frac{\partial \widehat{u_1}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_2}}{\partial y}\right) \quad \text{faiblement dans } L^{p_1}(\Omega_1)^2 \times L^{p_2}(\Omega_2)^2, \tag{3.21}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}\right) \to (0,0) \quad \text{faiblement dans } L^{p_1}(\Omega_1) \times L^{p_2}(\Omega_2). \tag{3.22}$$

Soit maintenant $(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon)^2 \times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)^2$, en employant $(u_1^\varepsilon - v_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - v_2^\varepsilon)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), en utilisant les conditions d'incompressibilité (3.2) et (3.3) ainsi que la formule de Green et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon v_1^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon v_2^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 \\
&\leq \mu_1 \varepsilon^{p_1} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p_1} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|^{p_1} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&+ g_1 \varepsilon^{\frac{1}{p_1'}+1} Meas(\Omega_1^\varepsilon)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|^{p_1} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&+ \varepsilon \|\widehat{f_1^\varepsilon}\|_{L^{p_1'}(\Omega_1)^2} \|\widehat{v_1^\varepsilon}\|_{W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)^2} + \varepsilon \|\widehat{f_2^\varepsilon}\|_{L^{p_2'}(\Omega_2)^2} \|\widehat{v_2^\varepsilon}\|_{W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)^2} \\
&+ \mu_2 \varepsilon^{p_2} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p_2} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_2'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|^{p_2} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&+ g_2 \varepsilon^{\frac{1}{p_2'}+1} Meas(\Omega_2^\varepsilon)^{\frac{1}{p_2'}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|^{p_2} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que, après quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_i^\varepsilon)|^{p_i} \, dx_1 \, dx_2\right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p_i}-1} \|\widehat{v_i^\varepsilon}\|_{W^{1,p_i}_{\Gamma_i}(\Omega_i)}, \quad i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Par conséquent, de (3.17), (3.18), (3.23) et (3.24), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon v_1^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon v_2^\varepsilon \, dx_1 \, dx_2 \\
\leq \;& c\varepsilon \left(\|\widehat{v_1^\varepsilon}\|_{W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)^2} + \|\widehat{v_2^\varepsilon}\|_{W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)^2}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En passant aux variables x et y dans le côté gauche de (3.25), on retrouve les estimations suivantes :

$$\|\widehat{p_1^\varepsilon}\|_{L_0^{p'_1}(\Omega_1)} + \|\widehat{p_2^\varepsilon}\|_{L_0^{p'_2}(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.26}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'_1}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'_2}(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.27}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'_1}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'_2}(\Omega_2)} \leq \varepsilon c. \tag{3.28}$$

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée par $(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon})$ telle que

$$(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}) \to (\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \quad \text{faiblement dans } L_0^{p'_1}(\Omega_1) \times L_0^{p'_2}(\Omega_2), \tag{3.29}$$

La preuve est terminée. Cette preuve permet également de déduire que la pression limite vérifie $(\widehat{p_1}(x,y), \widehat{p_2}(x,y)) = (\widehat{p_1}(x), \widehat{p_2}(x))$. $\square$

Proposition 3.2. La vitesse limite donnée par (3.13) vérifie

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}}(x,y)\,dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}}(x,y)\,dy = 0, \quad \forall x \in I. \tag{3.30}$$

Demonstration. Nous savons des conditions d'incompressibilité (3.2) et (3.3) que

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div} u_1^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div} u_2^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_2(x_1)\,dx_1\,dx_2 = 0, \quad \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.$$

Cela implique, en utilisant la formule de Green

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1^\varepsilon} u_{11}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} u_{21}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_2}{dx_1}(x_1)\,dx_1\,dx_2\\ &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \frac{\partial u_{12}^\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial x_2}\varphi_1(x_1)\,dx_1\,dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \frac{\partial u_{22}^\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial x_2}\varphi_2(x_1)\,dx_1\,dx_2.\end{aligned}$$

Par conséquent, par passage aux variables x et y, en utilisant le théorème de Fubini et la formule de Green, nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}&-\int_0^1 \varphi_1(x)\left(\frac{d}{dx}\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^\varepsilon}(x,y)\,dy\right)dx - \int_0^1 \varphi_2(x)\left(\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^\varepsilon}(x,y)\,dy\right)dx\\ &= 0, \quad \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.\end{aligned}$$

Alors,

$$\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy\right)\right) = 0.\forall\varphi \in D(I).$$

Alors,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy\right) = 0.$$

De plus, le fait que $(\widehat{u_{11}^{\varepsilon}}, \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}) \in L^{p_1}(\Omega_1) \times L^{p_2}(\Omega_2)$ et $(h_1, h_2) \in C^1(I) \times C^1(I)$ donne, en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,p_i}(I) \subset C^0(\overline{I}), i = 1,2$

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)\,dy \in C^0(\overline{I}).$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque ε tend vers zéro, en tenant compte des conditions aux limites (3.6), (3.7) et (3.8), la propriété (3.30) peut être déduite.

Nous extrayons dans la proposition ci-dessous l'équation vérifiée par la solution limite $(\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \in W_p^2$ et $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in L_0^{p_1'}(\Omega_1) \times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$.

Proposition 3.3. Si $\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) \neq (0,0)$, alors le point limite $(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}})$ et $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2})$ donné par (3.13) et (3.15) vérifie le problème limite

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right) + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right) \\ &= \widehat{f_1} - \frac{d\widehat{p_1}}{dx} + \widehat{f_2} - \frac{d\widehat{p_2}}{dx}, \quad \text{dans } \left(W_{\Gamma_1}^{1,p_1}(\Omega_1) \times W_{\Gamma_2}^{1,p_2}(\Omega_2)\right)'. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Démonstration. Introduisons l'opérateur Φ défini comme suit

$$\begin{aligned} &\Phi : W^{\varepsilon} \to W^{\varepsilon'}, \\ &\langle \Phi(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}), (v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon})\rangle_{W^{\varepsilon'} \times W^{\varepsilon}} = \mu_1 \varepsilon^{p_1} \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(u_1^{\varepsilon})|^{p_1-2} D(u_1^{\varepsilon}) D(v_1^{\varepsilon})\,dx_1\,dx_2 \\ &\qquad + \mu_2 \varepsilon^{p_2} \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(u_2^{\varepsilon})|^{p_2-2} D(u_2^{\varepsilon}) D(v_2^{\varepsilon})\,dx_1\,dx_2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que Φ est monotone et semi-continu. De plus, nous savons que la fonctionnelle

$$(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in W^\varepsilon \to g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2$$

est propre et convexe. Alors, l'utilisation du lemme de Minty permet d'affirmer que (3.10) est équivalent à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\mu_1\varepsilon^{p_1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|^{p_1-2}.D(v_1^\varepsilon)D(v_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2 \\
&- g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2 + \mu_2\varepsilon^{p_2} \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|^{p_2-2}D(v_2^\varepsilon).D(v_2^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 \\
&+ g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2 - g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} D(u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 \\
&\geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(v_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} p_1^\varepsilon \mathrm{div}(v_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 \\
&+ \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(v_2^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} p_2^\varepsilon \mathrm{div}(v_2^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\, dx_1\, dx_2, \quad \forall (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in W^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Notre but est maintenant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Pour cela, nous utilisons la proposition (3.1) et la faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle convexe et continue

$$(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in W^\varepsilon \to g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|\, dx_1\, dx_2.$$

On trouve l'inégalité limite suivante

$$\begin{aligned}
&\mu_1 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{p_1-2}{2}} \times \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}})}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{12}} - \widehat{u_{12}})}{\partial y}\right] dx\, dy \\
&+ g_1 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy - g_1 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{u_{12}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy \\
&+ \mu_2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{p_2-2}{2}} \times \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}})}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{22}} - \widehat{u_{22}})}{\partial y}\right] dx\, dy \\
&+ g_2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy - g_2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial \widehat{u_{22}}}{\partial y}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy \\
&\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_1}.(\widehat{v_1} - \widehat{u_1})\, dx\, dy + \int_{\Omega_1} \widehat{p_1}\mathrm{div}(\widehat{v_1} - \widehat{u_1})\, dx\, dy + \int_{\Omega_2} \widehat{f_2}.(\widehat{v_2} - \widehat{u_2})\, dx\, dy \\
&+ \int_{\Omega_2} \widehat{p_2}\mathrm{div}(\widehat{v_2} - \widehat{u_2})\, dx\, dy, \quad \forall (\widehat{v_1}, \widehat{v_2}) \in W^\varepsilon. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

En outre, de (3.13) et (3.14) nous trouvons

$$\left(\frac{\partial\widehat{u_{12}}}{\partial y}, \frac{\partial\widehat{u_{22}}}{\partial y}\right) = (0,0) \quad \text{dans } \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Il suit, en gardant à l'esprit (3.30), que $\widehat{u_1}(x,y) = (\widehat{u_{11}}(x,y),0)$ et $\widehat{u_2}(x,y) = (\widehat{u_{21}}(x,y),0$.

Cela permet également de choisir $(\widehat{v_{12}},\widehat{v_{22}}) = (0,0)$ dans (3.32). Considérons maintenant l'opérateur Φ tel que

$$\begin{gathered}\Phi : W_p \to W_p',\\ \langle\Phi(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}}),(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}})\rangle_{W_p'\times W_p}\\ = \frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\,dx\,dy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\,dx\,dy.\end{gathered}$$

Il est clair que l'opérateur Φ est monotone et semi-continu et la fonctionnelle

$$(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}}) \in W_p \to \frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|dx\,dy + \frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|dx\,dy$$

est propre et convexe.

Par conséquent, nous en déduisons en utilisant encore le lemme de Minty (3.2)

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}}-\partial\widehat{u_{11}})}{\partial y}\,dx\,dy + \frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|dx\,dy\\ &-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dx\,dy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}}-\partial\widehat{u_{21}})}{\partial y}\,dx\,dy\\ &+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|dx\,dy - \frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dx\,dy\\ &\geq \int_{\Omega_1}\widehat{f_1}.(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy - \int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy\\ &+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy - \int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy \quad \forall(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}}) \in W_p. \qquad (3.33)\end{aligned}$$

Cela donne, via la formule de Green

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy\\
&+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy,\quad\forall(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}})\in W_p.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

à cause du fait que $W^{1,p_i}_{\Gamma_i}(\Omega_i)$ est dense dans $W^{p_i}(\Omega_i)$,voir [8, 14], on peut prendre $\widehat{v_{11}}=\widehat{u_{11}}\pm\varphi_1$ et $\widehat{v_{21}}=\widehat{u_{21}}\pm\varphi_2$ dans (3.34) où $(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)$ pour obtenir les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{11}}+\varphi_1)}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{21}}+\varphi_2)}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}\varphi_1\,dx\,dy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}\varphi_2\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{11}}-\varphi_1)}{\partial y}\right|dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dx\,dy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{21}}-\varphi_2)}{\partial y}\right|dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dx\,dy\\
&\geq-\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}\varphi_2\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)$. Remplacer dans ces deux inégalités la fonction de test (φ_1,φ_2) par $(\lambda\varphi_1,\lambda\varphi_2)$, $\lambda>0$, en divisant les inégalités obtenues par λ. Le passage à la limite quand λ tend vers 0 implique, sous l'hypothèse $\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y},\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\neq(0,0)$, que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\operatorname{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\operatorname{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}\varphi_1\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}\varphi_2\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dxdy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2dxdy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy\\
&\geq-\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}\varphi_2dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_2\,dx\,dy,
\end{aligned}
$$

$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,p_1}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,p_2}_{\Gamma_2}(\Omega_2)$. Par conséquent, on obtient en combinant ces deux inégalités et en utilisant une intégration simple par parties

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right] \varphi_1\, dx\, dy \\
&-\int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \operatorname{sign}\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right] \varphi_2\, dx\, dy \\
&=\int_{\Omega_1}\left(\widehat{f_1}-\frac{d \widehat{p_1}}{dx}\right) \varphi_1\, dx\, dy+\int_{\Omega_2}\left(\widehat{f_2}-\frac{d \widehat{p_2}}{dx}\right) \varphi_2\, dx\, dy,
\end{aligned}
$$

$\forall(\varphi_1, \varphi_2) \in W_{\Gamma_1}^{1, p_1}(\Omega_1) \times W_{\Gamma_2}^{1, p_2}(\Omega_2)$. Considérons

$$
\varphi \in W_0^{1, min(p_1, p_2)}(\Omega) : \varphi=\begin{cases}\varphi_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \varphi_2 & \text{dans } \Omega_2\end{cases},
$$

et

$$
\widetilde{a_1}=\begin{cases}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\left|\dfrac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2} \dfrac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2} g_1 \operatorname{sign}\left(\dfrac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right] & \text{dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{dans } \Omega_2\end{cases},
$$

$$
\widetilde{a_2}=\begin{cases}0 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\left|\dfrac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2} \dfrac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2} g_1 \operatorname{sign}\left(\dfrac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right] & \text{dans } \Omega_2\end{cases},
$$

$$
\widetilde{b_1}=\begin{cases}\left(\widehat{f_1}-\dfrac{d \widehat{p_1}}{dx}\right) & \text{dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{dans } \Omega_2\end{cases},
$$

$$
\widetilde{b_2}=\begin{cases}0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \left(\widehat{f_2}-\dfrac{d \widehat{p_2}}{dx}\right) & \text{dans } \Omega_2\end{cases},
$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}(\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\varphi\,dx\,dy &= \int_{\Omega_1}(\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}(\widetilde{a_1}+\widetilde{a_2})\varphi_2\,dx\,dy\\
&= \int_{\Omega_1}\widetilde{a_1}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widetilde{a_2}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widetilde{a_1}\varphi_2\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widetilde{a_2}\varphi_2\,dx\,dy\\
&= \int_{\Omega_1}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_1\,dx\,dy\\
&+\int_{\Omega_2}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\mathrm{sign}\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_2\,dx\,dy\\
&= \int_{\Omega_1}\left(\widehat{f_1}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right)\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\left(\widehat{f_2}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right)\varphi_2\,dx\,dy\\
&= \int_{\Omega_1}\widetilde{b_1}\varphi_1\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\widetilde{b_2}\varphi_2\,dx\,dy\\
&= \int_{\Omega}(\widetilde{b_1}+\widetilde{b_2})\varphi\,dx\,dy,\quad \forall\varphi\in W_0^{1,min(p_1,p_2)}(\Omega).
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement (3.31).

Désormais, nous désignerons par $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in W_p$ et $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$ et la solution du problème limite (3.31). □

La proposition suivante montre l'unicité de la solution limite $(\widehat{u_{11}},\widehat{p_1})$ et $(\widehat{u_{21}},\widehat{p_2})$.

Proposition 3.4. *Le problème limite a une solution unique* $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in W_p$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$ *avec la condition (3.30).*

Démonstration. Supposons que le problème limite (3.31) a au moins deux solutions $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})\in W_p$, $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$ et $(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}})\in W_p$, $(\overline{\widehat{p_1}},\overline{\widehat{p_2}})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$. En particulier, $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}}),(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ et$(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}}),(\overline{\widehat{p_1}},\overline{\widehat{p_2}})$ sont solution de la formulation faible (3.33).

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}}-\partial\widehat{u_{11}})}{\partial y}\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}}-\partial\widehat{u_{21}})}{\partial y}\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy\\
&+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy,
\end{aligned}\tag{3.35}$$

et

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{11}}-\partial\overline{\widehat{u_{11}}})}{\partial y}\,dx\,dy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\frac{\partial(\widehat{v_{21}}-\partial\overline{\widehat{u_{21}}})}{\partial y}\,dx\,dy\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|\,dx\,dy\\
&\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_1}(\widehat{v_{11}}-\overline{\widehat{u_{11}}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_1}\frac{d\overline{\widehat{p_1}}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\overline{\widehat{u_{11}}})\,dx\,dy\\
&+\int_{\Omega_2}\widehat{f_2}(\widehat{v_{21}}-\overline{\widehat{u_{21}}})\,dx\,dy-\int_{\Omega_2}\frac{d\overline{\widehat{p_2}}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\overline{\widehat{u_{21}}})\,dx\,dy
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

$\forall(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}})\in W_p$. En employant $\widehat{v_{11}}=\overline{\widehat{u_{11}}}$, $\widehat{v_{21}}=\overline{\widehat{u_{21}}}$ et $\widehat{v_{11}}=\widehat{u_{11}}$, $\widehat{v_{21}}=\widehat{v_{21}}$ comme fonctions de test dans les deux inégalités précédentes, respectivement. En soustrayant les deux inégalités obtenues, on peut déduire

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}-\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\,dx\,dy\\
&+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}-\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\,dx\,dy\\
&\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})\,dx\,dy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})\,dx\,dy.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Observez que pour chaque $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$
\left(|x|^{p_i-2}\,x-|y|^{p_i-2}\,y\right)(x-y)\geq c\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p_i}},\quad 1<p_i\leq 2, i=1,2.
$$

Cela conduit, en utilisant (3.37), à

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p_1}}dxdy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p_2}}dxdy\\
&\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dxdy\\
&=\int_0^1\left[\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}\int_0^{h_1(x)}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dy\right]dx\\
&+\int_0^1\left[\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dy\right]dx.
\end{aligned}
$$

L'utilisation de la condition (3.30) donne

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p_1}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p_1}}dxdy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p_2}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p_2}}dxdy=0. \tag{3.38}$$

Ce qui donne, en gardant à l'esprit (3.38)

$$\left(\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y},\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right)=(0,0).$$

Depuis $\left(\overline{\widehat{u_{11}}}(x,h_1(x)),\overline{\widehat{u_{21}}}(x,h_2(x))\right)=(\widehat{u_{11}}(x,h_1(x)),\widehat{u_{21}}(x,h_2(x)))=(0,0)$, on en déduit que $(\overline{\widehat{u_{11}}},\overline{\widehat{u_{21}}})=(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})$ a.e. dans $\Omega_1\times\Omega_2$. Enfin, pour prouver l'unicité de la pression, nous utilisons l'équation (3.31), avec les deux pressions $(\widehat{p_1},\overline{\widehat{p_1}})$ et $(\widehat{p_2},\overline{\widehat{p_2}})$. Nous trouvons

$$\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}=0.$$

Ensuite, en raison du fait que $(\widehat{p_1},\overline{\widehat{p_1}})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$, $(\widehat{p_2},\overline{\widehat{p_2}})\in L_0^{p_1'}(\Omega_1)\times L_0^{p_2'}(\Omega_2)$, le résultat peut être facilement déduit. $\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de transmission entre deux fluides de Herschel-Bulkley incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques et des indices de loi de puissance des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'une des deux bords de la couche mince.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle (où l'inéquation de la formulation variationnelle), et on utilise les techniques sur les inéquations variationnelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes introduites dans pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution faible. L'étude du comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes, et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact constitue une partie très importante dans ce mémoire.

Travaux perspective

1. En considérant le cas où les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et variantes.
2. L'étude d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles. rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince tridimensionnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.S. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] G. Allaire. Homogenization of the navier–stokes equations with a slip boundary condition. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(6) :605–641, 1991.

[3] P. Apanastasiou. Flow of materials with yield. *J. Rheol.*, 31(5) :385–404, 1987.

[4] A. Assemien, G. Bayada, and M. Chambat. Inertial effects in the asymptotic behaviour of a thin film flow. *Asymptotic Anal.*, 9 :117–208, 1994.

[5] G. Bayada and M. Chambat. The transition between the stokes equations and the reynolds equation : a mathematical proof. *Appl. Math. Optim.*, 14 :73–93, 1986.

[6] G. Bayada, M. Chambat, and S.R. Gamouana. About thin film micropolar asymptotic equations. *Quart. Appl. Math.*, 59(3) :413–439, 2001.

[7] N. Benhaboucha. *Quelques problèmes mathématiques relatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur.* PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, 2003.

[8] F. Boughanim, M. Boukrouche, and H. Smaoui. Asymptotic behavior of a non-newtonian flow with stick-slip condition. *Electron. J. Differ. Equ.*, Conference 11 :17–80, 2004.

[9] A. Bourgeat, A. Mikelic, and R. Tapiéro. Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316(I) :965–970, 1993.

[10] H. Brezis. Équations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité. *Ann. Inst. Fourier*, 30 :115–175, 1969.

[11] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[12] R. Bunoiu and S. Kesavan. Fluide de bingham dans une couche mince. *Ann. Univ. Craiova Math. Comp. Sci. Ser.*, 30 :71–77, 2003.

[13] R. Bunoiu and S. Kesavan. Asymptotic behavior of a bingham fluid in thin layers. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :405–418, 2004.

[14] R. Bunoiu and J. Saint Jean Paulin. Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrication case. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 45(4) :577–591, 2000.

[15] L. Chupin. *Modélisation et Analyse mathématique en films minces.* PhD thesis, Institut Camille Jordan-INSA de Lyon, 2009.

[16] P.G. Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle.* Masson, Paris, 1986.

[17] N. Cristescu. On the optimum die angle in fast wire drawing. *J. Mech. Work. Tech.*, 3(3-4) :275–287, 1980.

[18] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique.* Dunod, Paris, 1976.

[19] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels.* Dunod, Paris, 1974.

[20] M. Fortin. *Calcul Numérique des Écoulement des Fluides de Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressibles par la Méthode des Éléments Finis.* PhD thesis, University of Paris VI, 1976.

[21] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equation.* Springer-Verlag, 1979.

[22] R. Ionescu and M. Sofonea. The blocking property in the study of the bingham fluid. *Int. J. Eng. Sci.*, 24(3) :289–297, 1986.

[23] R. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity.* Oxford University Press, 1993.

[24] R. Jean. *Mesure et Intégration.* Les Presses de l'Université du Québec, Canada, 1975.

[25] Y. Kato. Variational inequalities of bingham type in three dimensions. *Nagoya Math. J.*, 129 :53–95, 1993.

[26] Jong Uhn Kim. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 14(8-9) :1011–1026, 1989.

[27] Y. Letoufa. *Sur la convergence asymptotique d'un problème aux limites non linéaire avec forttement.* PhD thesis, Université de Sétif, 2019.

[28] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles*, volume 3. Dunod, Paris, 1968.

[29] J.L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, 1966.

[30] W.G. Litvinov. *Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids*, volume 291. Longman Scientific and Technical, 1992.

[31] J. Malek. Mathematical properties of flows of incompressible power-law-like fluids that are described by implicit constitutive relations. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 31 :110–125, 2008.

[32] J. Malek, M. Růžička, and V.V. Shelukhin. Herschel-bulkley fluids : existence and regularity of steady flows. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(12) :1845–1861, 2005.

[33] F. Messelmi. *Écoulement Dynamique du Fluide de Bingham Avec Loi de Frottement du Type Sous-Différentiel*. PhD thesis, Université de Sétif, 2010.

[34] Andro Mikelić and Roland Tapiéro. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin layer. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 29 :3, 01 1995.

[35] Andro Mikelić and Roland Tapiéro. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 29 :3, 01 1995.

[36] K. Mosbah, F. Messelmi, and S. Saf. Unsteady flow of bingham fluid in a two-dimensional elastic domain. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 39(2) :513–534, 2024.

[37] S.A. Nazarov. Asymptotic solution of the navier-stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. *Siberian Math. J.*, 31 :296–307, 1990.

[38] K. Raju. *Fluid Mechanics, Heat Transfer, and Mass Transfer*. Wiley, 2011.

[39] S. Saf. *Problème de Frottement Entre Deux Fluides de Herschel-Bulkley dans une Couche Mince avec Frottement*. PhD thesis, Université de Biskra, 2022.

[40] S. Saf and F. Messelmi. Transmission problem between two herschel-bulkley fluids in a three dimensional thin layer. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 9(3) :663–677, 2023.

[41] S. Saf and F. Messelmi. Flow of herschel-bulkley fluid through a three dimensional thin layer. *Studies in Engineering and Exact Sciences*, v.5(n.1) :1470–1486, 2024.

[42] S. Saf, F. Messelmi, and K. Mosbah. Transmission problem between two herschel-bulkley bulkley fluids in thin layer. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 68(3) :663–677, 2023.

[43] S. Saf, F. Messelmi, and F. Yazid. Transmission problem between two herschel-bulkley fluids in a thin layer with different power law index. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 15(8) :17–28, 2024.

[44] F. Saidi. *Sur Quelques Problèmes de Lubrification Par des Fluides Newtoniens non Isothermes et Incompressibles Avec des Conditions aux Bords Non Linéaires*. PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Étienne, 2004.

[45] M. Sofonea and A. Matei. *Variational Inequalities with Application. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*. Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[46] K. Taous. Equations de reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(I) :1213–1218, 1995.

[47] M. Thérèse and L. Suirier. *Distributions, Espaces de Sobolev, Applications.* Ellipses, Paris, 1998.

[48] R. Trémolieres. *Inéquations variationnelles : existence, approximation, résolution.* Phd thesis, Université de Paris, 1972.

[49] C. Tsegga. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans les milieux fissurés.* Phd thesis, Université Paris IX, 1999.

[50] K. Vo-Khac. *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles*, volume Tome (2). Vuibert, Paris, 1972.