الجمـــهوريـــة الجــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعالـــي و الـبـحث الـعـلـمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّـــار ثـليـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـليـــــة الـعـلـــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:
Saddam Guellil

THEME

Existence de solution positive pour un problème aux limites fractionnaire

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. A. Mokhtari	*Pr*	*Président*
Mr. A.Bougoutaia	*M.A.(A)*	*Examinateur*
Mr. A .Rahmoune	*M.A.(A)*	*Examinateur*
Mr.A. Boukehila	*M.C.(A)*	*Encadreur*

Année Universitaire 2017/2018

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mon père mon professeur de toujours,

et ma très chére mère Pour leurs soutien et encouragements.

A Mon encadrente A.boukehila.

A mes proches et toute ma famille. A mes amies et tous les gens qui m'aiment.

A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas cité le nom.

Au bonheur des plus chers.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في درَاسة وجود حلول الموجبة لبعض المسَايئل ذَات الشروط الحدية الكسرية.
أوَلَا نقوم بدرَاسة وجود حلول إِيجَابية لمسَألة ذَات الشروط الحدية الكسرية وذَالك بَاستخدَام نظرية كل من كرَازنوزلسكي و بنَاخ .
فِي المحور الثَاني ، نعمل علَى اثبَات وحدَانية الحلول لمسَألة ذَات الشروط الحدية الكسرية وذَالك بَا عتمَاد علَى نظرية النقطة الصَامدة.
و اخيرًا ندرس وجود وموقع الحلول لمسَألة ذَات الشروط الحدية الكسرية

Résumé

Le but de cette mèmoir est l'étude de l'existence de solutions positives de quelques problèmes aux limites fractionnaire.

En s'intéresse dans un premier temps à l'étude de l'existence de solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant certains théorèmes de point fixe notamment le théorème de Guo-Krasnosel'ski et Banach.

Puis dans un deuxième temps l'existence d'un problème aux limites fractionnaire en résonance en utilisant le théorème de coincidence de Mawhin.

Dans le dernier chapitre on a établi l'existence et la localisation de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire .

Abstract

The objective of this mèmoir , is to study the existence of positive solutions

of some fractional boundary value problems.

Firstly, we study the existence of positive solutions of fractional boundary value problem by using, Guo-Krasnosel'skii theorem.

In a second time, we investigate the existence of solutions of a two-point fractional boundary value problem at resonance.

Finally, we established the existence and localization of positive solutions for a fractional boundary value problem at resonance.

Table des matières

Introduction **4**

1 Préliminaires **6**

1.1 Espaces fonctionnels 6

1.2 Fonctions spéciales 7

1.3 Quelques théorèmes du point fixe 8

1.4 Théorème du point fixe de Banach 9

1.5 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 11

1.6 Stabilité des systèmes différentiels 12

1.7 Système différentiel linéaire 13

1.8 Opérateur de Fredholm 14

2 Analyse fractionnaire **16**

2.1 Historique 16

2.2 Applications du calcul fractionnaire 21

2.2.1 Equation intégrale d'Abel et le problème de tautochrone . . . 21

2.3 Calcul fractionnaire 23

2.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 23

2.3.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 25

2.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo 26

3 Existence de solutions positives pour un problème aux limites fractionnaire et application **30**

3.1 Résultats préliminaires 30

3.2 Résultats principaux 33

3.3 Exemples 38

Bibliographie **39**

Notations

•$C([a,b],\mathbb{R}^+)$: l'espace des fonctions continue de [a, b] dans $\mathbb{R}^+$.

•$L^P[a,b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1,\infty)$ intégrables sur [a, b].

•$AC[a,b]$: espace des fonctions absolûment continues sur [a, b].

•$AC^n[a,b]$: $(n \geq 2)$, espace des fonctions $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC[a,b]$ et $u^{(k)} \in C[a,b], k = 1, ..., n-1$.

•$\mathbb{C}^{m\times n}$: espace vectoriel des matrices à coefficients complexes de m lignes et n colonnes.

•Γ : fonction Gamma d'Euler.

•B : fonction Bêta.

•$I_a^\alpha f(t)$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la fonction f (t) .

•$D_a^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f (t).

•${}^cD_a^\alpha f(t)$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f (t).

Introduction

La théorie des équations diférentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente , la question des dérivées fractionnaires fût abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande qu'elle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz répond que cela mêne à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seule- ment à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc. Diférentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linéaires. De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de labo- rieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Dans les dernières années, le théorème de Krasnoselskii est apparu. Sa version générale est un outil pour obtenir l'existence de multiples solutions positives pour des problèmes aux limites diférents, notamment dans les équations diférentielles ordinaires. Krasnoselskii lui-même dans a appliqué son résultat pour l'étude des solutions pé- riodiques pour un système périodique d'équations diférentielles ordinaires. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations diférentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence de la solution.

Nous rencontrons dans la littérature diférentes techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe pour la résolution des équations diférentielles fractionnaires.

Citons sur ce sujet le travail où ils ont considéré l'équation diférentielle fractionnaire :

oùf : $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, ${}^cD^{\sigma}_{0+}$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, 1 < q < 2 et $0 < \sigma < 1$
Des résultats d'existence sont obtenus moyennant l'alternative de le théoreme du point fixe de Banach.

A travers le troisième chapitre, nous proposons d'étudier le problème aux limites fractionnaires suivant :

$${}^cD^{\alpha}_{0+}u(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0.$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Nous rappelons certaines définitions d'espaces fonctionnels et quelques fonctions spéciales. Nous énonçons ensuite deux théorèmes du point fixe. Enfin, nous présentons brièvement la notion de stabilité des systèmes différentiels.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $\Omega = [a, b]; -\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Dèfinition 1.1. Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit
$i)$ L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ des (classes de) fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(x)|^p dx$ muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$ii)$ L'espace $L^\infty(\Omega)$ des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_\infty = ess\sup_{t\in\Omega} |f(t)| = inf \left\{ M \geq 0, |f(t)| \leq M, p.p.sur\Omega \right\}.$$

Dèfinition 1.2. Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors l'espace des fonctions absolument continues, noté $AC(\Omega)$ est défini comme l'espace des fonctions

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, dérivable presque partout telle que $f' \in L^1(\Omega)$. On a alors

$$f \in AC(\Omega) \Longleftrightarrow f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds, t \in (\Omega) \tag{1.1}$$

Pour $n \geq 2$, on définit l'espace $AC^n(\Omega)$ comme l'espace des fonctions
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in C(\Omega)$,$K = 1, 2, ..., n - 1$ et $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
Une propriété caractéristique de l'espace AC^n est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1. Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^n(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k, \forall t \in \Omega$$

1.2 Fonctions spéciales

On entend par "fonction spéciale" toute fonction qui n'est pas élémentaire (polynôme, fonction trigonométrique, exponentielle, etc.) ayant une grande importance et plusieurs applications. Dans cette section on en rappelle quelques unes qu'on en aura besoin dans notre travail.

Fonction Gama

La fonction Gamma (d'Euler) est une fonction complexe qui généralise la fonction factorielle. Elle a été obtenue par Euler en 1729.

Dèfinition 1.3. La fonction Gamma est définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.2}$$

où z est un nombre complexe quelconque tel que Re z > 0

Remarque 1.1. Une intégration par parties de (1.2) donne

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), Rez > 0.$$

Lorsque $z = n \in \mathbb{N}^*$, alors $\Gamma(n) = (n-1)!$

Fonction Bêta

Dèfinition 1.4. On appelle fonction Bêta la fonction définie par

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, (Rez>0; Rew>0) \tag{1.3}$$

Remarque 1.2. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, (Rez>0; Rew>0).$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématiques, essentiellement dans le domaine de la résolution des équations différentielles. Dans cette section, on va donner les théorèmes de point fixe dont nous aurons besoin dans le présent document.
Commençons par la définition d'un point fixe.

Dèfinition 1.5. Soit A une application d'un ensemble E dans lui-même.
On appelle point fixe de A tout point $\widehat{u}\in E$ tel que $A(\widehat{u})=\widehat{u}$.

Théorème du point fixe (solution minimale et maximale)

Le théorème de point fixe suivant est basé sur les définitions suivantes :

Dèfinition 1.6. Soit E un espace de Banach réel.
Soit K un sous-ensemble non vide fermé de E. K est appelé cône si $ax+by\in K$pour tout $x;y\in K$ et a, b sont réels positifs où $K\cap(-K)=\{0\}$ et $K\neq\{0\}$.

Dèfinition 1.7. Un cône K introduit un ordre partielle sur E de la manière suivante

$$x\leq y \text{ si } y-x\in K$$

Dèfinition 1.8. Le cône K est appelé

• normal : s'il existe un nombre $l\geqslant 1$ de telle sorte que pour tout $x,y\in K$:

$$0\leq x\leq y\Rightarrow\parallel x\parallel\leq l\parallel y\parallel,$$

• régulier : si toute suite croissante qui est bornée par le dessus est convergente. Autrement dit, si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est une suite telle que $x_1 \leq x_2 \leq ...... \leq y$ pour certains $y \in E$, alors il existe $x \in E$ tel que $lim_{n\longrightarrow\infty}\|x-y\| = 0$

Dèfinition 1.9. Pour $x, y \in$ E l'intervalle d'ordre $\langle x, y\rangle$ définie par

$$\langle x, y\rangle = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

Dèfinition 1.10. La fonctionnelle $h(t, x, x_1, ..., x_n)$ est dite croissante sur I$\times E^{n+1}$, si pour tout $(t, \phi, \phi_1, ..., \phi_n) \in I \times E^{n+1}$ et $(t, \psi, \psi_1, ..., \psi_n) \in I \times E^{n+1}$,tel que

$$\phi(\theta) \leq \psi(\theta) \text{ et } \phi_i(\theta) \leq \psi_i(\theta), i = 1, 2, ..., n, \theta \in [-\tau; 0]$$

on a l'inégalité suivante

$$h(t, \phi, \phi_1, ..., \phi_n) \leq h(t, \psi, \psi_1, ..., \psi_n)$$

Thèorèm 1.1. Soit D un sous-ensemble du cône K de l'espace partiellement ordonné E, F : $D \rightarrow$ E est une appleqation croissante. S'il existe $x_0; y_0 \in D$ telle que $x_0 \leq y_0$
, $\langle x, y\rangle \subset D$ et x_0, y_0 sont respectivement des sous et sur solutions de l'équation $x - F(x) = 0$, alors l'équation $x - F(x) = 0$ a une solution minimale et une solution maximale $x^*, y^* \in \langle x, y\rangle$ telle que $x^* \leq y^*$, lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. K est normal et F est complètement continue ;

2. K est régulier et F est continue ;

3. E est réflexif, K est normal, et F est continue ou faiblement continue.

1.4 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour garantir l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une fonction.

Dèfinition 1.11. Soit (E,d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite k-Lipschitzienne de constante $k \geq 0$ si

$$\forall u, v \in E,\ d(f(u), f(v)) \leqslant kd(u, v).$$

Dèfinition 1.12. L'application k-Lipschitzienne f est dite une contraction si $k \in (0, 1)$.

Thèorèm 1.2. (Théorème du point fixe de Banach)
Soit (E, d) un espace métrique complet, soit F une partie fermée de E, et soit $f : F \to E$ une contraction. Alors f admet un unique point fixe.

Dèfinition 1.13. Une partie M d'un espace métrique (E,d) est dite compact si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à M. M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à E (i.e. si la fermeture de M est compacte).

Dèfinition 1.14. Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions avec $f_n : U \to \mathbb{R}^p$.

(i) $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur U s'il existe $L \geq 0$ tel que $\mid f_n(t) \mid \leq L$ pour tout n et tout $t \in U$.

(ii) $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $\mid t_1 - t_2 \mid \leq \delta$ alors $\mid f_n(t_1) - f_n(t_2) \mid \leq \varepsilon$ quelque soit n.

Thèorèm 1.3. (Théorème d'Arzela-Ascoli)
Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue définie sur un intervalle [a, b], alors la suite admet une sous suite converge uniformément sur [a,b] vers une fonction continue.

Mais dans notre travail, les fonctions qu'on va manipuler sont définies sur des intervalles infinis (non bornés). Par conséquent, dans notre cas (projet), le théorème d'Arzela-Ascoli ne fonctionne pas, donc nous avons besoin de la modification suivante :
Soit $p : I = [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue telle que $sup_I \{| \ x(t) \ | \ p(t)\} < \infty$. Soit $\Omega \subset E$.

Dèfinition 1.15. une fonction $X \in \Omega$ est dite presque équicontinue sur I si elle est équicontinue dans chaque intervalle $[0, T], 0 < T < 1$.

Thèorèm 1.4. Si une fonction $X \in \Omega$ est presque équicontinue sur I et uniformément bornée dans le sens de la norme

$$\|X\|_q = sup_I \{| \ X(t) \ | \ p(t)\}$$

où la fonction q est positive et continue sur I et

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0$$

alors est relativement compact dans E.

1.5 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Dèfinition 1.16. Soit K un ensemble non vide d'un espace de Banach E.
On dit que K est un cône si K est convexe fermé et satisfait les conditions suivantes
1)$\alpha x \in K, \forall x \in K$ et $\alpha \geq 0$
2)x et $-x \in K \Longrightarrow x = 0$
tout cône défini une relation d'ordre sur E par

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Dèfinition 1.17. (Opérateur complètement continue)
Soient E un espace de Banach et Ω une partie de E. On dit que l'opérateur $T : \Omega \longrightarrow E$ est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée B de Ω , T (B) est relativement compact dans E.

Thèorèm 1.5. Soit E un espace de Banach et $K \subset$ E un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\Omega_1 \subset \Omega_2$.
Soit $T : K \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1) \longrightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que

$i)\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$
ou bien

$ii)\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$ et $\|Tu\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$
Alors T possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1)$

1.6 Stabilité des systèmes différentiels

L'émergence de la théorie de la stabilité a été à la fin du XIX^{eme} siècle par Liaponov. Cette théorie a une large application dans divers domaines de la physique et les mathématiques.
Pour$r > 0$, considérons $C = C([0, T], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur [0, T] à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ Notons au passage , que cet espace muni de la norme $\|\phi\| = sup_{0 \leq t \leq T} \mid \phi(t) \mid, \phi \in C$, est un espace de Banach. Considérons donc le problème à valeur initiale suivant

$$x'(t) = f(t, x), \ \ pour \ \ t \geq t_0, \tag{1.4}$$

$$x(t) = \psi(t), \ \ pour \ \ 0 \leq t \leq t_0, \tag{1.5}$$

où $\psi : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée continue et $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction f (t, x) est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t, t_0, \psi)$ à travers (t_0, ψ) du problème (1.4)-(1.5) et d'être continue en (t, t_0, ψ) du domaine de définition de f.

Dèfinition 1.18. Supposons que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (1.4) est dite :

• stable en t_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que :

$$\|\psi\| < \delta \Rightarrow |x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon, \forall t \leq t_0$$

dans le cas contraire on dit que la solution est instable en t_0,

• uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0,

• asymptotiquement stable en$t_0$si elle est stable en t_0 et s'il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que : $\|\psi\| < \delta_1 \Rightarrow lim_{t \longrightarrow \infty}|x(t, t_0, \psi)| = 0$.

Dans la suite, nous présentons quelques résultats de la stabilité des systèmes différentiels linéaires.

1.7 Système différentiel linéaire

Considérons le système différentiel le plus simple, à savoir le système linéaire homogène .

$$Y' = AY$$

avec $Y \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ et $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. L'unique solution du problème de Cauchy, de condition initiale $Y(t_0) = Y_0$, est donnée par

$$Y(t, Y_0) = e^{(t-t_0)A}Y_0$$

. On a donc

$$Y(t, Y_0) - Y(t, Z_0) = e^{(t-t_0)A}(Y_0 - Z_0)$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ lorsque $t \longrightarrow \infty$ dont la norme matricielle $\|e^{(t-t_0)A}\|$ doit rester bornée.

Thèorèm 1.6. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système linéaire $Y_0 = AY$ sont

- asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j = 1, ..., m$;
- stables si et seulement si pour tout $j = 1, ..., m$,ou bien$Re(\lambda_j) < 0$,ou bien $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

Example 1.1. La solution générale du système

$$\begin{cases} x' = -x + y \ , \ x(0) = 2 \\ \\ y' = -2y \ , \ y(0) = -1 \end{cases}$$

est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .e^{-t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .e^{-2t}$$

On voit bien que $X(t) \to_{t \longrightarrow \infty} 0$; la solution triviale est asymptotiquement stable.

1.8 Opérateur de Fredholm

Dèfinition 1.19. Soit X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés ,on dit qu'une application linéaire $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes

(i) Ker $(L) = L^1(0)$ est de dimension finie.

(ii) Im(L) = L (D(L)) est fermée et de codiemsion finie.

On définit la codimesion de Im (L) comme étant la dimension de co dim ker (L) = dim $(X \diagdown Y)$.

Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier

$$\text{ind (L)} = \text{dim (ker (L)) - co dim (Im(L))}$$

Proposition 1.1. Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjective si et seulement si L est injectif.

Soit $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0, alors d'aprés ce qui précède, il existe deux projections continues $P : X \longrightarrow X$ et $Q : Y \longrightarrow Y$ tels que

$$\text{Im (P)} = \text{Ker (L) et Ker (Q)} = \text{Im (L)} \ .$$

Posons

$$X_1 = Im(I - P) = KerP \text{ et } Y_1 = Im(Q) \ ,$$

alors on peut écrire

$$X = Ker(L) \oplus X_1; Y = Im(L) \oplus Y_1$$

Soit l'isomorphisme

$$J : Ker(L) \longrightarrow Im(Q) \ ,$$

dont l'existence est assuré par le fait que dim Ker(L) = dim Im(Q) = n. On remarque que

$$D(L) = Ker(L) \oplus (D(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $D(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur Im (L), on note par Lp cette restriction c'est à dire $L_p : D(L) \cap X_1 \longrightarrow Im(L)$.

Lemme 1.2. L_p est un isomorphisme algébrique.

On définit maintenant $K_p = L_p^{-1}$, il est claire que $K_p : Im(L) \subset Y \longrightarrow D(L) \cap KerP$ est bijectif, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés suivantes

Lemme 1.3. (1) Sur Im (L) , on a $LK_p = I$.

(2) Sur D(L) , on a $K_pL = I - P$.

On considère l'opérateur $K_{P,Q} : Y \longrightarrow X$ défini par L_p^{-1} (I - Q) , on a

Lemme 1.4. L'opérateur $L + JP : D(L) \longrightarrow Y$ est un isomorphisme et

$(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$.

En particulier

$$(L + JP)^{-1}x = J^{-1}x \text{ pour tout } x \in ImQ.$$

Lemme 1.5. Si $N : \Delta \subset X \longrightarrow X$ est une application, le problème

$$\text{x} \in D(L) \subset \Delta \ Lx = Nx$$

est équivalent au problème du point fixe

$$x \in \Delta, x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Chapitre 2

Analyse fractionnaire

Dans ce chapitre, nous citons un aperçu historique du calcul fractionnaire. Ensuite, nous donnons deux exemples de ses applications concrètes. Enfin, nous donnons quelques définitions et résultats connus sur le calcul fractionnaire.

2.1 Historique

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui est, dans un certain sens, aussi vieux que le calcul classique que nous connaissons aujourd'hui : Les origines peuvent être retracées à la fin du $XVII^e$ siècle. Notre objectif dans cette section n'est pas d'établir un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire. Comme les domaines de recherche sont tellement variées qu'il semble difficile d'avoir une présentation complète. Pour cette raison, nous allons fournir un aperçu historique uniquement de la période de 1695 à 1974.

•1695

l'époque où Newton et Leibniz ont développé les bases de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz $(1646 - 1716)$ introduit le symbole

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

pour désigner la dérivé $n^{ième}$ d'une fonction f. Quand il a indiqué dans une lettre à de L'Hôpital(1) $(1661-1704)$ (avec l'hypothèse implicite que , de l'hôpital a répondu : "Qu'est-ce que $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ signifie si $n=\frac{1}{2}$ En 30 Septembre 1695, Leibniz écrivit à L'Hôpital dans une lettre que cela mène à un paradoxe dont on tirera profit, un jour, d'utiles conséquences.

•1730

Euler est le deuxième grand mathématicien à aborder la question. Dans son article où il a présenté sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1)=n!$), il a achèvé sur une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha>0$ de x^u, avec $u>0$; en commençant par : pour m, $n\in\mathbb{N}$ avec $m\geq n$,on a

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \tag{2.1}$$

Grâce à sa fonction Gamma, (2.1) s'étend à une puissance $m>0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

Par conséquent, une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha>0$ est donneé par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^\beta=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \tag{2.2}$$

•1822

Fourier obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel grâce à sa célèbre transformée.Il compose sa transformée (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta)cos(p(x-\theta))d\theta dp.$$

Après, il remarque que la dérivée $n^{i}\grave{e}eme(n\in N)$ du cos peut s'écrire comme suit :

$$\frac{d^n}{dx^n}cos(p(x-\theta))=p^n cos\left[p(x-\theta)+\frac{n\pi}{2}\right] \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) a un sens si on remplace n par $\alpha>0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre α de $cos(p(x-\theta))$ et ainsi la dérivée d'ordre α de la fonction f

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p^n cos\left[p(x-\theta)+\frac{n\pi}{2}\right]d\theta dp.$$

•1823

Abel résoud le problème du tautochrone généralisé, en utilisant le calcul fractionnaire.

•1832 – 1837

Liouville est le premier à étudier de manière approfondie le calcul fractionnaire qui semblent attester les huit articles qu'il a publiés entre 1832 et 1837. Partant de

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax} \tag{2.4}$$

pour $n \in N$, il a proposé de définir la dérivée d'ordre α de e^{ax} en étendant n à α. Par conséquent, toute fonction f peut être écrite sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \tag{2.5}$$

possède une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^\alpha e^{a_k x} \tag{2.6}$$

Pour prolonger cette définition à d'autres types de fonctions que (2.5), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\beta-1}e^{-ux}du$$

. En utilisant (2.4), on a :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{(1)^\alpha}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-ux}du$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{(1)^\alpha\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{-\alpha-\beta} \tag{2.7}$$

Remarque 2.1. Bien que (2.2) et (2.7) sont différents pour les exposants β, la limite $\beta = 0$ est problématique.

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

– la définition d'Euler donne :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

– alors que celle de Liouville donne :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = 0$$

Ce paradoxe est effectivement résolu lors de l'utilisation de définitions modernes des dérivées fractionnaires.

•1847

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann donne une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une “fonction complémentaire” qui fait obstacle dans ses travaux ultérieurs.
Elle sera éventuellement abandonnée pour obtenir la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

Remarque 2.2. Les progrès les plus importants sont celles de Liouville dans ses multiples mémoires à l'école polytechnique entre 1832 et 1835, puis la contribution de Riemann en 1847, rend les noms de ces deux mathématiciens restent attaché.

•1867 – 1868

Grünwald ensuite Letnikov suggérent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie.

•1869

La formule définitive de ce qu'on appelle maintenant intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail Sonin. Pour une fonction complexe, dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$f^n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(x)}{(y-z)^{n+1}}dz.$$

Sonin généralise cette formule à $n < 0$ et il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, notée par I_x^α :

•1892

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,t)$$

L'approche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais donne la bonne solution, il constate que

$$U(x,t) = U_0 e^{-axp^{1\backslash 2}}.$$

Il assume alors que $p^{1\backslash 2}U_0 = U_0\sqrt{\pi t}$....ce qui correspond à la dérivée d'ordre 1\2 de U_0.

Il obtient finalement la solution exacte, en développant la solution en série entière.

•1917

Weyl introduit une définition de l'intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

•1927

Marchaud construit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire :

$$D_+^\alpha f(x) = c\int_0^\infty \frac{\Delta_t^t f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

où $\alpha > 0, l \in N avec l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^t est une différence finie d'ordre l :

•1928

Hardy et Littlewood affirment dans leur principale théorème que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < 1/\alpha, I_x^\alpha$ est un opérateur borné de L^p dans L^q, où $1/q = 1/p - \alpha$.

•1937

Riesz donne une définition de l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables :

$$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}}dy.$$

Cet opérateur vérifie $I^\alpha \circ I^\beta = I^\alpha + \beta$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

•1970

Oldham et Spanier étudient Dans le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée $1/2$ du paramètre physique lors d'un phénomène de diffusion.

•1974

Ross organise dans cette année la première conférence sur le calcul fractionnaire à l'Université de New Haven.

Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché une grande réussite de la théorie, ce qui n'est certainement pas unifiée ; En outre, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche intéressants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions différentes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Durant ces trois dernières décennies, plus grand d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire ainsi une diversification importante a été paru dans les domaines d'application.

2.2 Applications du calcul fractionnaire

Avant de passer à une étude des propriétés mathématiques des opérateurs différentiels fractionnaires, prenons un bref regard sur deux exemples : le premier c'est le problème de tautochrone résolu par Abel et le deuxième est un modèle résultant en mécanique où dérivées fractionnaires peuvent être utilisés avec succès.

2.2.1 Equation intégrale d'Abel et le problème de tautochrone

Abel était le premier à résoudre une équation intégrale par le biais du calcul fractionnaire.

Supposons qu'un fil mince C est placé dans le premier quadrant d'un plan vertical et soit une particule glissant sous l'influence de la gravitation terrestre tel que sa vitesse initiale égale à zéro. Le problème du tautochrone consiste à trouver la forme de la courbe C de sorte que le temps de descente T de P à l'origine reste le même quelque soit le point de départ. Une telle courbe est appelée une tautochrone.

Le problème d'Abel est formulé comme suit : Soit s la longueur d'arc mesurée le long de C de O à un point arbitraire Q sur C, et soit α l'angle d'inclinaison. Puis

$-gcos\alpha$ est l'accélération de $\frac{ds^2}{dt^2}$ du particule, où g est la constante de la gravité, et

$$\frac{d\eta}{ds} = cos\alpha$$

Nous avons donc l'équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{d\eta}{ds}$$

A l'aide du facteur intégrant ds/dt, on a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2g\eta + k \tag{2.8}$$

où k est une constante d'intégration. Puisque la particule a démarré d'un repos, ds/dt est nul lorsque $\eta = y$, et donc $k = 2gy$. Nous pouvons donc écrire (2.8) comme suit

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-\eta)}$$

La racine carrée négative est choisi de tel sorte que t croît, s décroît.

Ainsi, le temps de descente T de P à S est

$$T = \frac{2}{\sqrt{2g}}\int_p^o \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}ds$$

La longueur de l'arc s est une fonction de η, c'est à dire

$$s = h(\eta),$$

où h dépend de la forme de la courbe C. donc,

$$T = \frac{2}{\sqrt{2g}}\int_y^o (y-\eta)^{1/2}[h'(\eta)d\eta]$$

ou bien

$$\sqrt{2g}T = \int_y^o (y-\eta)^{1/2}h'(\eta)d\eta \tag{2.9}$$

où

$$h'(\eta) = \frac{ds}{d\eta}$$

Si nous prennons

$$f(y) = h'(y)$$

alors l'équation intégrante de (2.9) peut être écrite avec les notations du calcul fractionnaire comme

$$\frac{\sqrt{2g}}{\Gamma(\frac{1}{2})}T = I^{1/2}f(y) \tag{2.10}$$

où $I^{1/2}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre 1/2. Comme la dérivée fractionnaire est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire il s'ensuit

$$D^{\frac{1}{2}}\frac{2g}{\Gamma(\frac{1}{2})}T = f(y)$$

C'est notre formulation souhaitée. Il reste alors à résoudre (2.10) et ensuite trouver l'équation de C. La résolution de l'équation (2.10) peut être trouvé dans le livre de Miller et Ross

2.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des définitions concernant le calcul fractionnaire.

2.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Dèfinition 2.1. Les intégrales fractionnaires (à gauche et à droite) de Riemann-Liouville de la fonction $f \in L^1[a,b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sont définis par

$$I_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, t > a \tag{2.11}$$

et

$$I_{b-}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, t < b \tag{2.12}$$

respectivement. Pour $\alpha = 0$, on a

$$I_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha} = I \text{ (l'opérateur identité).}$$

Remarque 2.3. Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, I^{\alpha}_{a+}$ et I^{α}_{b-} coïncident avec l'intégrale itérée $n - fois$ de la forme :

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(t) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(t) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

Remarque 2.4. Dans la suite, nous allons utiliser uniquement l'intégrale fractionnaire (à droite). Pour simplifier, nous écrivons I^{α}_a au lieu de I^{α}_{a+} ,et dans le cas où $a = 0$ l'intégrale fractionnaire sera noté tout simplement I^{α}

Example 2.1. soit $f(t) = (t-a)^{\mu}$ ou $\mu > -1$, alor

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-1}} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(t-a)^{\mu}}{(t-s)^{\alpha-1}} ds$$

On pose le changement de variable $s = a + (t-a)x$, on obtient,

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{(t-a)^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\mu} ds$$

$$= \frac{(t-a)^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \mu+1)$$

$$= \frac{(t-a)^{\mu-\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu+1)}$$

D'où

$$I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(t-a)^{\mu-\alpha}$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semigroupe.

Thèorèm 2.1. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1[a,b]$ on a

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) \tag{2.13}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

preuve : Soit $f \in L^1[a,b]$, on a

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds$$

par le théorème de Fubini on arrive à :

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} d\tau ds$$

On utilise le changement de variable $s = \tau + z(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(t) \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$.

2.3.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dèfinition 2.2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 < \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$D_a^{\alpha} f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, t > a, \tag{2.14}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$

Remarque 2.5. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante non nulle est différente de zéro. En effet, pour $0 < \alpha < 1$ et c une constante, on a

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} c &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s), ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Example 2.2. Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ avec $\beta > -1$ et $\alpha \geq 0$ pour $n-1 \leq \alpha < n$, alors

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^{\alpha}(t-a)^{n-\alpha+\beta)}$$

Il s'ensuit alors que, si $(\alpha-\beta) \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$D_a^{\alpha} f(t) = D^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j)} = 0, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

et si $(\alpha-\beta) \in \{1, 2, ..., n\}$, on trouve

$$D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{(\beta-\alpha)}, a < t < b.$$

Le lemme suivant montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

Lemme 2.1. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors on a

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t)$$

pour presque tout $t \in [a, b]$

preuve. Utilisant le Théorème (2.3.1), on trouve

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = D_a^{n} I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t)$$

, presque partout sur $[a, b]$.

Une condition suffisante pour l'existence de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par le résultat suivant :

Lemme 2.2. Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^{\alpha} f$ existe presque partout sur $[a, b]$, en plus elle est donnée par

$$D_a^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(t-a)^{k-a} - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds.$$

2.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour une fonction f est définie par

$$^{c}D_a^{\alpha} f(t) = I_a^{n-a} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \qquad (2.15)$$

avec $n = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Example 2.3. Soit $f(t) = (t-a)^{\mu}$ ou $\mu > 0$, alors pour $0 < \alpha \leq 1$ on a

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= I_a^{1-a} f'(t) = \mu I_a^{1-a}(t-a)^{\mu-1} \\
&= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha}(s-a)^{mu-1} ds, t > a.
\end{aligned}
$$

En utilisant le changement de variable $s = a + (t-a)x$, on obtient,

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha+\mu} \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{-\alpha} dx \\
&= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha+\mu}\beta(\mu, 1-\alpha).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
{}^{c}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1-\alpha+\mu)}(t-a)^{-\alpha+\mu}.
$$

Remarque 2.6. Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée de Caputo d'une fonction constante non nulle est nulle.

La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par le théorème suivant

Thèorèm 2.2. Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, Si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D^{\alpha} f$ existe, alors :

$$
{}^{c}D_a^{\alpha} f(t) = D_a^{\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k]. \tag{2.16}
$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

preuve. d'après la définition de la dérivée Riemann-Liouville on a :

$$
\begin{aligned}
D_a^{\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] &= D_a^{\alpha} I_a^{n-\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(s-a)^k] ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'intégration par partie :

$$
I_a^{n-\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] ds
$$

$$= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)}[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(s-a)^k]_{s=a}^{s=t} +$$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha}[Df(s) - D\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(s-a)^k],$$

où

$$I_a^{n-\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] = I_a^{n-\alpha+1} D[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k],$$

poursuivre de la même manière n-fois, on obtient :

$$\begin{aligned}
&I_a^{n-\alpha}[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= I_a^{n-\alpha+n} D^n[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] \\
&= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k]
\end{aligned}$$

or $f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme d'ordre n - 1, on obtient donc :

$$I_a^{n-\alpha} D^n[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(t-a)^k] &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
&= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\
&=^c D_a^\alpha
\end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Remarque 2.7. Pour $0 < \alpha < 1$, la relation (2.6) devient

$$^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha[f(t) - f(a)]. \tag{2.17}$$

La dérivée fractionnaire de Caputo est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Thèorèm 2.3. Si $f \in C[a,b]$ et si $\alpha > 0 (n-1 < \alpha \leq n)$, alors

$$^{c}D_{a}^{\alpha} I_{a}^{\alpha} f(t) = f(t). \tag{2.18}$$

Le théorème suivant nous montre que la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

Thèorèm 2.4. Si $f \in C^{n}[a,b]$ et si $\alpha > 0 (n-1 < \alpha \leq n)$, alors

$$I_{a}^{\alpha c} D_{a}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)}{k!}(t-a)^{k} \quad ; \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.19}$$

Thèorèm 2.5. Soit K un cône définie dans un espace de Banach E. Supposons que D est un sous ensemble ouvert de E avec $D_K = D \cap K \neq \theta, \overline{D_K} \neq ketA : D_k \longrightarrow K$est un opérateur complètement continu tel que $x \neq A(x)$ pour $x \in \partial\Omega_k$,ainsi les relations suivantes sont satisfaites :

(1) Si $\|Ax\| \leq \|x\|, x \in \partial\Omega_k$,alors

$$i(A, D_k) = 1.$$

(2) Si $\|Ax\| \geq \|x\|, x \in \partial\Omega_k$,alors

$$i(A, D_k) = 0.$$

(3) Soit U un ensemble ouvert de K tel que $\overline{U} \subset$ D.Si $i(A, D_k) = 1$ $i(A, D_k) = 0$ alors A admet un point fixe dans $D_k \diagdown \overline{U_K}$,Le même résultat est obtenu si $i(A, D_k) = 1$ et $i(A, D_k) = 0$

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour un problème aux limites fractionnaire et application

Résumé

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions positives par application de la théorie de point fixe pour le problème aux limites fractionnaire (P) suivant :

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha}u(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0.$$

avec $f \in C([0,1[,[0,1[), a(t) \in C([0,1],[0,1[)$ et $2 < \alpha < 3$.

3.1 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe on va étudier quelques propriétés de la fonction de Green.

Lemme 3.1. On suppose que $M \neq 2$ et $y \in C([0,1],\mathbb{R})$, alors, le problème

$$^{c}D_{0}^{\alpha}u(t) = y(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u^{'}(0) = 0, u^{''}(0) = Mu(1).$$

a une solution unique donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)y(s)ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{M}{2-M}t^2(1-s)^{\alpha-1}, 0 \leq s \leq t, \\ \\ \frac{M}{2-M}t^2(1-s)^{\alpha-1}, 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

preuve. En utilisant les propriétées du calcul fractionnaire, on a

$$u(t) = I_{0^+}^{\alpha} y(t) + a + bt + ct^2. \qquad (3.1)$$

La condition u (0) = 0 implique que a = 0. En dérivant les deux membres de (3.1) et en utilisant la condition initiale $u^{'}(0) = 0$, on trouve b = 0. La condition $u^{"}(0) = Mu(1)$,donne que $u^{''}(0) = 2c = Mu(1)$, $2c = M[I_{0^+}^{\alpha} y(1) + c], 2c - Mc = MI_{0^+}^{\alpha} y(1)$, et $c = \frac{M}{2-M} I_{0^+}^{\alpha} y(1)$. En remplçant a, b et c par leurs valeurs dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= I_{0^+}^{\alpha} y(t) + \frac{M}{2-M} t^2 I_{0^+}^{\alpha} y(1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} y(s)ds + \frac{M}{2-M} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^2 \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)y(s)ds. \end{aligned}$$

Maintenant on suppose que $0 < M < 2$ et les hypothèses suivantes

(H1) a $\in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ et il existe $\tau \in]0,1[$ tel que $\int_\tau^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)ds \neq 0$

$(H2) f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

On dfinit l'opérateur intégral $T : E \longrightarrow E$ par

$$T(u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds$$

qui peut être écrit comme

$$T(u)(t) = I_{0^+}^{\alpha} a(t)f(u(t)) + \frac{M}{2-M} t^2 I_{0^+}^{\alpha} a(1)f(u(1))$$

Lemme 3.2. Soit $y \in C([0,1]), et 2 < \alpha < 3$, l'unique solution du problème fractionnaire

$$\begin{cases} {}^cD_0^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ \\ u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)y(s)ds,$$

avec

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, 0 \leq s \leq t, \\ \\ t(1-s)^{\alpha-1}, t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Lemme 3.3. Pour tout $s,t \in [0,1]$, la fonction de Green G(t, s) est positive, continue et possède les propriétés suivantes :

$i)G(t,s) \leq t(1-s)^{\alpha-1}$,

$ii)\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} G(t,s) \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})(1-s)^{\alpha-1}$ où $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$

preuve. D'après l'expression de G(t, s), il est évident que $G(t,s) \in C([0,1] \times [0,1))$, $G(t,s) \geq 0$ et $G(t,s) \leq (1-s)^{\alpha-1}$ pour $s,t \in [0,1]$.
Montrons la deuxième propriété.
Soient

$$g_1(t,s) = t(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, s \leq t,$$

et

$$g_2(t,s) = t(1-s)^{\alpha-1}, t \leq s.$$

Pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$, on a

$$g_1(t,s) \leq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})(1-s)^{\alpha-1}, t \in [\tau_1, \tau_2].$$

En tenant compte de la monotonie de g_2 par rapport à t, on aura

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} g_2(t,s) = \tau_1(1-s)^{\alpha-1} \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})(1-s)^{\alpha-1},$$

ainsi

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} G(t,s) \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})(1-s)^{\alpha-1},$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 3.4. La solution du problème (P) vérife l'inégalité suivante

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} u(t) \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})\|u\|.$$

preuve. A partir du lemma 3.2, on trouve

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}a(s)f(u(s))ds$$

alors

$$\| u \| = \max_{0\leq t\leq 1}\|u\| = \max_{0\leq t\leq 1}\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}a(s)f(u(s))ds$$

D'autre part, on a

$$u(t) \geq \frac{t(1-t^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}a(s)f(u(s))ds$$

$$\geq t(1-t^{\alpha-1})$$

d'où

$$\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]} u(t) \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})\|u\|.$$

3.2 Résultats principaux

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace de Banach muni de la norme $\|u\| = \max_{t\in[0,1]} \mid u(t) \mid$. Définissons l'operateur intégral $T : E \longrightarrow E$ par

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds, \forall t \in [0,1].$$

Lemme 3.5. La fonction $u \in E$ est solution du problème fractionnaire (P) si et seule- ment si $Tu(t) = u(t), \forall t \in [0,1]$.

preuve. Soit u la solution du problème (P),alors, en appliquant le théorème (2.4),

on touve

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds.$$

Inversement, supposons que u satisfait

$$u(t) = -I_{0^+}\alpha a(t)f(u(t)) + \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)f(u(s))ds$$

Par application du lemme 2.1, on obtient

$${}^cD_{0+}^{\alpha} u(t) =^c D_{0+}^{\alpha} + I^q + a(t)f(u(t)) + \frac{{}^cD_{0+}^{\alpha} t}{\Gamma(\alpha)(1-\xi)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)f(u(s))ds.$$

En utilisant le fait que la dérivée de Caputo ${}^cD_{0+}^{\alpha} t$ est nulle, nous obtenons

$${}^cD_{0+}^{\alpha} + u(t) + a(t)f(u(t)) = 0.$$

Ainsi, u (t) est la solution du problème (P).

Soit P_1 le cône défni par :

$$P_1 = \{u \in E, u(t) \geq 0; 0 \leq t \leq 1, \min{}_{\tau \leq t \leq 1}\ u(t) \geq \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})\|u\|\}$$

Introduisons les quantités $\delta = \tau_1(1-(\tau_2)^{\alpha-2})$, $\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\int_0^1 a(s)(1-s)^{\alpha-1}ds}$, $\beta = \frac{\Gamma(\alpha)}{\delta^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{\alpha-1}ds}$

Thèorèm 3.1. Soit $\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{\alpha-1}ds \neq 0$ et admettant que les hypothèses suivantes sont vérifées

$(H_1) f_0 = f_1 = \infty$.

(H_2) Il existe des constantes r > 0 et $A \in]0, M[$ telles que

$$f(u) \leq Ar, u \in [0, r]$$

Alors le problème aux limites (P) admet au moins deux solutions positives y_1 et y_2 telles que

$$0 < \|y_1\| < r < \|y_2\|.$$

preuve. Pour montrer l'existence de solutions positives du problème (P)il suffit de vérifer les hypothèses du théorème 2.12. En effet, comme$f_0 = 1$ alors on a pour tout $A_1 \in]\beta, 1[$, il existe $r_1 \in]0, r[$ tel que

$$f(u) \geq A_1 u, u \in [0, r_1]$$

Soit $\Omega_{r_1} = \{u \in P : \|u\| < r_1\}$. Si $u \in \partial\Omega_{r_1} \subset P$, on a $\min{}_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta\|u\|$. Il en résulte que pour $u \in \partial\Omega_{r1}$

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds$$

$$\geq \frac{A_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\geq \frac{A_1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\geq \frac{A_1}{\Gamma(\alpha)} \delta^2 \|u\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{1-\alpha}ds$$

ce qui implique que

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\| \text{ pour } u \in \partial\Omega_{r1}$$

D'après le théorème 2.12 on obtient

$$i(T, \Omega_{r1}, P_1) = 0$$

D'autre part, puisque $f_1 = 1$, on déduit que pour tout $A_2 \in]\beta, \infty[$, il existe $r_2 > r$ tel que

$$f(u) \geq A_2 u, u \geq \delta r_2.$$

soit $\Omega_{r2} = \{u \in P : \|u\| < r_2\}$. Si $u \in \partial\Omega_{r2} \subset P$, on a min $_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta\|u\| = \delta r_2$, ainsi pour tout $u \in \partial\Omega_{r2}$ on trouve

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds$$
$$\geq \frac{A_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\geq \frac{A_2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\geq \frac{A_2}{\Gamma(q)} \delta^2 \|u\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{1-\alpha}ds$$

d'où

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\| \text{ pour } u \in \partial\Omega_{r2}$$

Par conséquent

$$i(T, \Omega_{r2}, P_1) = 0$$

$\Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r_2\}$ Pour tout $u \in \partial\Omega_r$, on a

$$Tu(t) \leq \frac{Ar}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)ds$$

$$\leq \frac{Ar}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 a(s)(1-s)^{1-\alpha} ds$$
$$\leq r = \|u\|$$

il s'ensuit que $\|Tu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in \partial\Omega_r$ Compte tenu du théorème 2.12, nous obtenons

$$i(T, \Omega_r, P_1) = 1$$

Nous concluons que T admet un point fixe $y_1 \in \Omega_r \diagdown \overline{\Omega_{r1}}$ et un point fixe $y_2 \in \Omega_{r2} \diagdown \overline{\Omega_r}$ avec $0 < \|y_1\| < r < \|y_2\|$
Ce qu'il fallait démontrer.

Thèorèm 3.2. Soit $\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{\alpha-1} ds \neq 0$ et admettant que les hypothèses suivantes sont verifies.
(H3) $f_0 = 0$.
(H4) Il existe des constantes $\rho > 0$ et $B \in]\beta, 1[$ telles que

$$f(u) \geq B\rho, u \in [\delta\rho, \rho].$$

Alors le problème aux limites (P) admet au moins une solution positive y_1 avec

$$0 < \|y_1\| < \rho.$$

preuve. Raisonnons de la même manière que dans la preuve du théorème précédent. D'après (H3) , on a pour tout $\varepsilon \in]0, m[$, il existe $r_1 \in]0, \rho[$ tel que

$$f(u) \leq \varepsilon u, u \in [0, r_1]$$

Soit $\Omega_{r_1} = \{u \in P : \|u\| < r_1\}$. Pour tout $u \in \partial\Omega_{r_1}$ nous avons

$$Tu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \|u\| \int_0^1 a(s)G(t,s)u(s)ds$$
$$\leq \|u\|$$

ainsi

$$\|Tu\| \leq \|u\| pour u \in \partial\Omega_{r_1}$$

Nous déduisons que

$$i(T, \Omega_{r_1}, P_1) = 1$$

D'un autre côté, soit $\Omega_\rho = \{u \in P : \|u\| < \rho\}$: Comme $u \in \partial\Omega_\rho \subset P$,
on a $\min_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} u(t) \geq \delta\|u\| = \delta\rho$.Par conséquent, pour tout $u \in \partial\Omega_\rho$,nous obtenons

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(t,s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{B\rho}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)G(t,s)ds \\ &\geq \frac{B\rho\delta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{1-\alpha}ds \\ &\geq \rho = \|u\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|Tu(t)\| \geq \|u\| \text{ pour } u \in \partial\Omega_\rho$$

Ce qui implique que

$$i(T, \Omega_\rho, P_1) = 0$$

Nous concluons que pour $r_1 < \rho$ que T admet un point fixe $y_1 \in \partial\Omega_\rho \diagdown \overline{\Omega_{r_1}}$ Ce qui achève la démonstration.

Thèorèm 3.3. Si les hypothèses (H2) et (H4) sont satisfaites et $r \neq \rho$, alors le problème (P) admet au moins une solution positive y vérifant $r < \|y\| < \rho$ ou $\rho < \|y\| < r$.

preuve. Supposons que $r < \rho$
Soit $\Omega_r = \{u \in P : \|u\| < r\}$ et supposons que $r < \rho$. En appliquant l'hypoythèse (H2) on obtient

$$Tu(t) \leq \frac{Ar}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 G(t,s)a(s)ds$$

$$\begin{aligned}&\leq \frac{Ar}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 a(s)(1-s)^{\alpha-1}ds\\&\leq r=\|u\|\end{aligned}$$

il en résulte que, $\|Tu\|\leq\|u\|$ pour tout$u\in\partial\Omega_r$. Par conséquent

$$i(T,\Omega_\rho,P_1)=1$$

Finalement, soit $\Omega_\rho=\{u\in P:\|u\|<\rho\}$Si $u\in\partial\Omega_\rho$ on a : $\min_{\tau_1\leq t\leq\tau_2}u(t)\geq\delta\|u\|=\delta\rho$.

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds\\&\geq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} G(t,s)a(s)f(u(s))ds\\&\geq\frac{B\rho}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)G(t,s)ds\\&\geq\frac{B\rho\delta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)(1-s)^{1-\alpha}ds\\&\geq\rho=\|u\|\end{aligned}$$

il s'ensuit

$$\|Tu(t)\|\geq\|u\|\text{ pour }u\in\partial\Omega_\rho$$

D'où

$$i(T,\Omega_\rho,P_1)=0$$

Toutes les hypothèses du théorème 2.12 sont vérifiées, donc le problème (P) admet au moins une solution positive $y\in\Omega_\rho\diagdown\overline{\Omega_r}$.

3.3 Exemples

Example 3.1. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant

$${}^cD_{0^+}^{\frac{11}{4}}u(t)+(1-t)(\exp(u)+u^2)=0,0<t<1,$$

$$u(0)=u''(0)=0,u(1)=0$$

. où $\alpha=\frac{11}{4},a(t)=1-t$, et

$$f(u)=\exp\ (u)+u^2.$$

Il est facile de vérifier que $f_0 = f_\infty = \infty$ d'où (H1).Nous avons $(\alpha+1)\Gamma(\alpha) = 9.559$, comme f (u) est une fonction croissante pour $u \geq 0$, en prenant $r = \frac{1}{2}$et $A = 2$ exp $(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \in]0, 9.559[$, on obtient

$$f(u) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2\exp\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) = Ar, pour\ u \in [0, r]$$

Ainsi (H2) est vérifée. D'après le théorème 3.1, il existe aux moins deux solutions positives y_1 et y_2 telles que

$$0 < \|y_1\| < \frac{1}{2} < \|y_2\|.$$

Example 3.2. Examinons le problème aux limites fractionnaire suivant

$${}^cD_{0^+}^{\frac{9}{4}} u(t) + 10^{35} u^{\frac{9}{8}} \exp(-u)(1-t) = 0, 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(1) = 0$$

. où $\alpha = \frac{9}{4}, f(u) = 10^{35} u^{\frac{9}{8}} \exp(-u), a(t) = 1 - t, \delta = \frac{1}{4}\left(1 - (\frac{3}{4})^{q-2}\right) = 0.017$, $\beta = 33394, \Gamma(\frac{9}{4}) = 1.133$

Il est clair que (H3) est vérifiée. Comme f (u) est une fonction décroissante pour $u \geq \frac{9}{8}$ en choisissant

$\rho = 70, B = \frac{4732800}{70} \in]33394, 1[$, il en résulte que

$$f(u) \geq f(70) = 4732800 = B\rho, \text{ pour } u \in [\beta\rho, \rho],$$

par conséquent, (H4) est satisfaite. D'après le théorème 3.2, il existe aux moins une solution positive y_1 tel que

$$0 < \|y_1\| < \rho.$$

Example 3.3. Reprenons l'exemple précédent.

Comme (H4) est vérifiée il sur t de vérifer la condition (H2). En effet, comme f est croissante sur $]0, \frac{9}{8}[$, donc pour $r = 10^{-290}$ et $A = 0.0562 \in]0, 3.682[$,nous arrivons à

$$f(u) \leq f(10^{-290}) = Ar, \text{ pour } u \in [0, r],$$

Nous concluons d'après le théorème 3.3 que notre problème admet aux moins une solution positive y satisfaisant $r < \|y\| < \rho$ ou $\rho < \|y\| < r$.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan : Fixed Point Theory and Applications,Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] R. P. Agarwal, D. O'Regan and P. J. Y. Wong : Positive Solutions of diferential diference and integral equations, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[3] B. Ahmed, J. J. Nieto and J. Pimentel : Some boundary value problems of fractional diferential equations and inclusions, Computers Mathematics with Applications , Vol. 62 no. 3, 1238-1250, 2011.

[4] R. Almeida, N. Martins, Existence results for fractional q-diference equations of order $\alpha \in]2, 3[$ with three-point boundary conditions, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19 (2014), 1675-1685. 1

[5] R. I. Avery and A. C. Peterson : Three positive fxed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Computers Mathematics with Applications , vol. 42, no. 35, pp. 313-322, 2001.

[6] Z. Bai : On positive solutions of nonlocal fractional boundary value problem, Nonlinear Analysis, vol. 72, no. 2, pp. 916-924, 2010.

[7] M. Benchohra, M. Hellal, Perturbed partial functional fractional order differential equations with infinite delay, J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. 5(2), (2013), 1-15 .

[8] Y. Bolat, On the oscillation of fractional-order delay differential equations with constant coefficients, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19(11), (2014), 3988-3993.

[9] B. Bonilla, M. Rivero, J.J. Trujillo, On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput. 187 (1) (2007), 68-78.

[10] J.P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sience, (2006).

[11] K. Diethelm, A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil,W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), Springer-Verlag, Heidelberg, (1999), 217-224.

[12] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer. (2004).

[13] JPC. dos Santos, MM. Arjunan, C. Cuevas, Existence results for fractional neutral integro-differential equations with state dependent delay, Comput. Math. Appl. 62(3), (2011), 1275-1283.

[14] A.M.A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc.7 (1995), 89-100.