REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

Faculté des sciences

Département de maths et informatique

Mémoire de fin d'études de licence en mathématique

Option : mathématiques

Equations différentielles à argument retardé

Proposé et Encadré par :

Prof : Mokhtari Abdelkader

Présenté par :

- Adda Farouk
- Kouidri Tahar
- RenaneRihana

N° d'ordre : 2013-PFE/DGI

Remerciements

Tout d’abord merci au bon Dieu le tout puissant, qui nous donne la force, la patience et la volonté pour réaliser ce travail dans des meilleures circonstances et en bon états.

Le présent travail a été réalisé sous la direction de monsieur Abdelkader Mokhtari professeur à l’université de Laghouat, qui nous fait l’honneur de diriger ce travail. Nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance, me vifs remerciements pour son aide, ses conseils précieux, ses sacrifices, malgré ses obligation, ainsi que pour la confiance qu’il nous prodiguée durant la réalisation de ce travail.

J’adresse mes sincères remerciements à madame Abdeslam Nawal enseignante à l’université de Laghouat pour l’aide qu’elle nous donnée avec ses conseils précieux, ses sacrifices, la confiance qu’elle nous donnée, et pour le courage quelle nous donnée pour faire ce travail.

Nous remercions aussi tous les enseignants et les responsables du département de maths et informatique de l’université Ammar Télidji-Laghouat pour leurs aides et leurs encouragements.

Sons oublier nos collègues durant les années d’étude, nous tenons les remercier vivement.

Enfin, nous associons nos remerciements à tous les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l’aboutissement de ce travail.

Dédicace :

Merci Allah de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, laforce d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire
" Ya Kayoum "

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère …
A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant
toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie
à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.
Que dieu les gardes et les protège.
A ma sœur. A mes frères.
A mes amis.

A tous mes enseignants.

A tous mes collègues.
A tous ceux qui me sont chères.
A tous ceux qui m'aiment.
A tous ceux que j'aime.
Je dédie ce travail.

Adda Farouk.

تشكرات

بسم الله والله المستعان أما بعد فإني أتقدم بجزيل الشكر إلى كل من ساهم في مساعدتي داخل هذه التجربة العلمية التي بدأت لتوها بانتهاء احد مراحلها وما يزيد من عزة نفسي هو وجود والدين هما أعز إلي من نفسي فلا يسعني إلا أن أقبل ر أسيهما ولا تكفي صفحات الدنيا لشكرهما فسبحان الذي حباني بأم هي مباركة كاسمها واعظم منزلتا من لقبها– الام- والحمد لله علي أبي محمد بن عالم جليل عبد الرحمن بمسند من الرجال الزهد والحمد لله سمياني بالطاهر علي اشرف الخلق لست بالعلم جاهر والشكر لكل الكرام إلى رئيس القسم (مسلمي) أكن كل الاحترام والشكر الجزيل للأستاذ عبد القادرمختاري على علمه الراسخ بانتظام اما الباقي فهو اعتراف بالجميل للأستاذة (عبدالسلام نوال) والأستاذ بن يطو بن عبد الرحمن على وقوفهما بجانبنا ومساعدتنا ولذلكأشكرهما شكرا خاصا كما أشكرجميع زملائي وزميلاتي على رحب صدرهم والشكر كذلك موصول الي الاستاذ المحترم عباسي يوسف الذي لا يكفي في حقه ثناء وفي الاخير إنه لمن الشرف الكبيرنأيكو ّ ن شخصي علي يد ثلة من العلماء انا محظوظ كل الحظ لمسايرتهم وشكرا.

الطاهر قويدري

Sommaire

Introduction

Les équations différentielles avec un argument retardé est une branche des équations différentielles avec un argument dévié sont des équations différentielles où la fonction inconnue et ses dérivés entrent, de façon générale, sous différentes valeurs de l'argument. Par exemple, x' (t) = f (t, x (t), x (t-7)).

La première équation isolée de ce type est apparu dans la littérature dans la seconde moitié du XVIIIe siècle (Kondorse 1771), mais une étude systématique d'équations avec un argument dévié a commencé seulement au XXe siècle (Surtout dans les quarante dernières années Myshkis-AD dans l'Union soviétique, EM Wright et R. Bellman dans d'autres pays) en rapport avec les exigences de la science appliquée. Les équations différentielles avec un argument dévié ont de nombreuses applications dans la théorie du contrôle automatique, des systèmes d'auto-oscillation de la théorie de l'étude des problèmes liés à la combustion en mouvement fusée, le problème de la planification à long terme dans l'économie, une série de problèmes biologiques, et dans de nombreux d'autres domaines de la science et de la technologie, dont le nombre est grand. L'abondance des applications stimule un développement rapide de la théorie d'équations différentielles avec un argument déviant et, à l'heure actuelle, cette théorie est l'une des branches développement le plus rapide de l'analyse mathématique.

Dans le contenu de cette thèse on va étudier les équations différentielles avec un argument retardé du premier ordre constitué de trois chapitres :

le 1^{er} chapitre est pour établir le théorème du point fixe est quelques propositions qui nous aide pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de problème.

Dans le $2^{éme}$chapitre on va étudier des généralisations sur les équations différentielles du premier ordre et en annonçons le théorème de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Dans le $3^{éme}$chapitre on va poser le problème de l'équation différentielle avec un argument retardé et on va étudier la solution du problème, la méthode de résolution et quelques exemples d'applications.

Rappels

Définition 1 (espace vectoriel) :

Etant donné un corps commutatif K, d'élément neutre 0_K et e ,on dit qu'un ensemble E muni d'une opération interne et d'une opération externe , a une structure d'espace vectoriel si :

- E Est un groupe commutatif pour l'opération interne i.e. :
  $+: E \times E \longrightarrow E$
  1. $\forall x, y, z \in E$ $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$
  2. $\exists 0_E \in E; \forall x \in E$ $\quad 0_E + x = x + 0_E = x$
  3. $\forall x \in E; \forall x' \in E$ $\quad x + x' = x' + x = 0_E \Longrightarrow (x' = -x)$
  4. $\forall x, y \in E$ $\quad x + y = y + x$
- E Vérifie les propriétés suivantes pour la loi externe :
  $.: K \times E \longrightarrow E$
  1. $\forall x \in E; \forall \alpha, \beta \in K$ $\quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
  2. $\forall x \in E$ $\quad ex = x$
  3. $\forall x \in E; \forall \alpha, \beta \in K$ $\quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
  4. $\forall x, y \in E; \forall \alpha \in K$ $\quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Remarque :

On dit que (K, +, .) est un corps commutatif si : K est un groupe commutatif pour la première et la deuxième loi et vérifie les conditions suivantes :

$+: K \times K \longrightarrow K$

$.: K \times K \longrightarrow K$

1. $\forall a, b, c \in K$ $\quad a(b + c) = ab + ac$
2. $\forall a, b, c \in K$ $\quad (b + c)a = ba + ca$

Exemples :

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectorielle sur le corps $\mathbb{R}$.C(I) l'ensemble de fonctions continues sur un intervalle fermé I est un espace vectoriel dans le corps $\mathbb{R}$.

Définition 2 (espace normé) :

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ on appelle norme sur E ,une application de

$$E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longrightarrow \|x\|$$

et qui vérifie : $\forall x, y \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Définition 3 :

Une fonction φ d'un espace vectoriel E dans un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dite bornée si :

$\exists k > 0 \;\; \forall x \in E \quad |\varphi(x)| < k$.

Chapitre 1 :

Quelques Notions topologiques

1)Ouvert fermé voisinage :

1.1-Définition (espace métrique) :

On dit qu'un ensemble E ($E \neq \emptyset$) est un espace métrique s'il existe une application :

$d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Qui vérifie les propriétés suivantes :

1. La séparation :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

2. La symétrie :

$$\forall x, y \in E \; d(x, y) = d(y, x)$$

3. L'inégalité triangulaire :

$$\forall x; y; z \in E \; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Notation : Un espace métrique E de distance d est noté par (E, d).

Exemple :

Un espace normé E dans le corps K est un espace métrique avec la distance :

$\forall x, y \in E \; d(x, y) = \|x - y\|$.

- **soit (E, d) un espace métrique**
- **soit un ensemble $A \subset E$**

1.2-Définition :

On appelle une boule ouverte de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble définit par :

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) < r\}$$

On appelle une boule fermé de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble définit par :

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\}$$

On appelle une sphère de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r \geq 0$ l'ensemble définit par :

$$S(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) = r\}$$

1.3-Définition :

Dans E on dit que A est une partie ouverte de E si et seulement si

$$\forall x \in A\,; \exists r > 0 : B(x, r) \subset A$$

1.4-Définition :

A et dit fermé si : $C_E A$ est une partie ouverte. .

1.5-Définition :

On dit que A est borné si le diamètre de A est fini

I.e.

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y) < \infty$$

1.6-Définition :

On appelle voisinage de $x \in E$ toute partie contenant un ouvert contenant x.

I.e. A voisinage de $x \Longleftrightarrow \exists O(\text{ouvert}); x \in O \subset A$.

Remarque : D'après la définition $B(x_0, r) \subset B_f(x_0, r)$ donc B_f est un voisinage de x_0 .

2) Espace complet :

2.1-Définition 1 (suite convergente) :

Dans un espace métrique (E, d) une suite :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longrightarrow & x(n) = x_n \end{array}$$

Est dite convergente si et seulement si :

$$\exists !\, l \in E, \forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$$

$$\text{on écrit : } \lim_{n \to +\infty} x_n = l$$

2.2-Définition (suite de Cauchy) :

Dans un espace métrique(E,d) une suite (x_n) est dite de Cauchy si et selment si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall p > q \geq n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

2.3-Définition (espace complet) :

On dit qu'un espace métrique (E,d) et un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy et convergente.

2.4-Définition (fonction Lipchitzienne, contractante) :

Soit (E, d_E) et (F, d_F)deux espaces métriques et f une fonction :

$f: E \longrightarrow F$ Dite Lipchitzienne si :

$$\exists! L > 0 \quad d_F(f(x), f(y)) \leq L d_E(x,y) \quad \forall x, y \in E$$

Si $0 < L < 1$ f est dite contractante.

2.5-Définition 2 (fonction continue) :

Soit (E, d_E) et (F, d_F)deux espace métrique et f une fonction :

$f: E \longrightarrow F$ Dite continue au point x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x \in E ; d_E(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2.6-Proposition 1 :

Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des fonctions continues Sur I dans $\mathbb{R}$ est complet pour la distance ρ définit par :

$$\forall f, g \in C(I) \quad \rho(f,g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|$$

Preuve : [1]

Démontrons que ρ et une distance :

$\rho: C(I) \times C(I) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

La séparation: $\forall t \in I; \forall f, g \in C(I)$

$$\rho(f,g) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{t\in I}|f(t) - g(t)| = 0 \Longleftrightarrow \ \forall t \in I \ |f(t) - g(t)| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall t \in I \ \ f(t) = g(t)$$

La symétrie : $\forall f, g \in C(I)$; $\forall t \in I$: $|f(t) - g(t)| = |g(t) - f(t)|$

$$\Rightarrow \sup_{t\in I}|f(t) - g(t)| = \sup_{t\in I}|g(t) - f(t)|$$

L'inégalité triangulaire : $\forall f, g, h \in C(I)$;

$$\forall t \in I \ \ |f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|$$

$$\leq \sup_{t\in I}|f(t) - h(t)| + \sup_{t\in I}|h(t) - g(t)| = \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Alors on a

$$\forall t \in I \ \ |f(t) - g(t)| \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in I}|f(t) - g(t)| \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

$$\Rightarrow \quad \rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Donc ρ est une distance de $C(I)$. $((C(I), \rho)$est un espace métrique)

Démontrons que $C(I)$ est un espace complet :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy alors : $\forall t \in I$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; \ \forall p > q \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in I}\left|f_p(t) - f_q(t)\right| < \varepsilon$$

Puise-que la suite $(\mathbf{f_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{R}$ alors elle converge dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$ a valeurs dans $\mathbb{R}$.

Vérifions maintenant que f est une fonction continue dans I :

Passant a la limite dans la suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; \ \forall p > q \geq n_0 \Longrightarrow \lim_{p\to+\infty}\left(\sup_{t\in I}\left|f_p(t) - f_q(t)\right|\right) < \varepsilon$$

$$\left(\lim_{p\to+\infty}\left(\sup_{t\in I}\left|f_p(t)-f_q(t)\right|\right)\Leftrightarrow \forall t\in I \lim_{p\to+\infty}\left|f_p(t)-f_q(t)\right|\right.$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in I\left|\lim_{p\to+\infty} f_p(t)-f_q(t)\right|\Leftrightarrow$$

$$\left.\sup_{t\in I}\left|\lim_{p\to+\infty} f_p(t)-f_q(t)\right|\Leftrightarrow \sup_{t\in I}\left|\lim_{p\to+\infty} f_p(t)-f_q(t)\right|\right)$$

$\forall\varepsilon>0; \exists n_0\in\mathbb{N}\ ;\ \forall\, p>q\geq n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in I}\left|\lim_{p\to+\infty} f_p(t)-f_q(t)\right|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0; \exists n_0\in\mathbb{N}\ ;\ \forall q\geq n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in I}\left|f_q(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon$

D'où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathbb{R}$ alors la limite f est continue

Alors $C(I)$ est un espace complet.

2.7-Proposition 2 :

Soit (E ,d) un espace complet $B_f(a,r)$ une boule fermée bornée dans E alors $(B_f(a,r),d)$ est un espace complet.

Preuve :

La boule $B_f(a,r)$ est borne .i.e. $r<+\infty$

1. d est une distance pour l'ensemble B_f car $B_f\subset E$ alors (B_f,d) est un espace métrique.

2. soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans B_f: $(x_n)\in B_f\subset E$

$\forall\varepsilon>0; \exists n_0\in\mathbb{N}\ ;\ \forall\, p>q\geq n_0 \Longrightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon$

Puise-que $B_f\subset E$ alors cette suite converge et on a : $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Reste à vérifie que $l\in B_f$ on a :

$\forall\varepsilon>0; \exists n_0\in\mathbb{N}; \forall n\geq n_0 \Longrightarrow d(x_n,l)<\varepsilon$

Pour $n\geq n_0$ $d(a,l)\leq d(a,x_n)+d(x_n,l)<r+\varepsilon$

Pour $\varepsilon\to 0$ on a $d(a,l)\leq d(a,x_n)+d(x_n,l)\leq r$ d'où $d(a,l)\leq r$

Alors $l\in B_f$ donc (B_f,d) est un espace complet.

3)Théorème du point fixe :

3.1-Définition (point fixe) :

Soit f une fonction :$f: E \longrightarrow E$ou E est un espace métrique On dit que $x_0 \in E$ est un point fixe de f si :

$$f(x_0) = x_0$$

Exemple :

La fonction $f(x) = x$ à $x = 1$ comme point fixe.

3.2-Théorème (théorème du point fixe) :

Si f est une fonction contractante d'un espace complet E dans E , alors f admet un point fixe unique.

Preuve :

a) **Unicité :**

Supposons qu'ils existent deux points fixes x_0, x_1

$$x_0 = f(x_0), x_1 = f(x_1)$$

On à alors

$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq Ld(x_0, x_1)$ f est contractante 2.4-CH1

$$0 < L < 1$$

D'où

$d(x_0, x_1) - Ld(x_0, x_1) \leq 0 \Longrightarrow d(x_0, x_1)(1 - L) \leq 0$ et $1 - L > 0$

$\Longrightarrow d(x_0, x_1) \leq 0$ et on a d'autre parts $d(x_0, x_1) \geq 0$

$\Longrightarrow d(x_0, x_1) = 0 \Longrightarrow x_0 = x_1$ d'où l'unicité.

b) <u>Existence :</u>

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E définit par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ arbitraire de E} \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall x \in E \end{cases}$$

$*$ on à

$\forall m \in \mathbb{N}\ \ d(x_{m+1}, x_m) = d\big(f(x_m), f(x_{m-1})\big) \leq$

$$Ld(x_m, x_{m-1}) = Ld\big(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})\big)$$

$$\leq L^2 d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\ldots \leq L^m d(x_1, x_0)$$

D'où : $\quad d(x_m, x_{m-1}) \leq L^m d(x_1, x_0)$ f est contractante 2.4-CH1

a) Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$d\big(x_{n+p}, x_n\big) = d(f\big(x_{n+p-1}\big), f(x_{n-1}))$ par définition de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

D'après l'inégalité triangulaire de d def1.3.A

$$\leq d\left(f\big(x_{n+p-1}\big), f\big(x_{n+p-2}\big)\right) + d\left(f\big(x_{n+p-2}\big), f\big(x_{n+p-3}\big)\right) + \cdots + d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$

D'après $(*)$ étoile

$$\leq (L^{n+p-1} d(x_1, x_0) + L^{n+p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + L^n d(x_1, x_0))$$

$$\leq L^n (L^{p-1} d(x_1, x_0) + L^{p-2} d(x_1, x_0) + \cdots + d(x_1, x_0))$$

$$\leq L^n d(x_1, x_0)(L^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + 1)$$

$$\leq L^n d(x_1, x_0) \frac{1 - L^P}{1 - L}$$

Passant à la limite quand p tend vers l'infinie

$$\leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_1, x_0)$$

D'où

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)$$

Donc $d(x_{n+p}, x_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et puise-que E est un espace complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$

Donc pour $n \longrightarrow +\infty$ $l = f(l)$ d'où l est un point fixe de f.

Chapitre 2 :

Généralisation sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre

1) Equation différentielle ordinaire :

1.1-Définition:

Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) scalaire est une équation mettant en jeu une fonction d'une variable scalaire $u(t): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$, :

$$F\left(t, u, u', u'', \ldots, u^{(m)}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

Où $u^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de u par rapport à t et F est une fonction suffisamment régulière de $I \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$.

L'ordre d'une EDO, défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation, est donc égal à m dans ce cas.

2) Equations différentielles ordinaires du premier ordre :

2.1Définition :

(Problème de Cauchy.) Une équation différentielle ordinaire avec condition initiale s'appelle problème de Cauchy.
Un problème de Cauchy est donc un problème où, pour I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ $f \in C^0(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donnés, il faut trouver une (ou les) solution(s) x de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

i.e. il faut trouver une (ou des) fonctions(s) φ telles que :

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2.2Théorème :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(1) = \begin{cases} x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

pour I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ $f \in C^0(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$
si pour tous $t \in I$ f est Lipchitzienne pour la deuxième variable alors le problème (1) admet une solution unique $x(t): I \longrightarrow \mathbb{R}$.

preuve : [1]
f satisfait la condition de Lipchitz pour la 2éme variable :
I.e.

$\forall t \in I, \forall x_1, x_2 \in C(I)$, $\exists! L > 0$ $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

Soit $0 < h < \frac{1}{L}$ et posant

$\forall t \in I \quad I_t = I \cap [t - h, t + h]$ donc I_t est un intervalle fermé et borné et
$\forall u \in I_t$ $|u - t| < h$ et $I_t \subset I$.

Soit l'ensemble $C(I_t)$des fonctions continues Sur I_t dans $\mathbb{R}$ on définit la distance ρ par :

$$\forall \varphi, \psi \in C(I_t) \quad \rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in I} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

L'ensemble$(C(I_t), \rho)$ définit un espace métrique complet d'après 2.6 ch1.

Puisque la valeur initial $t_0 \in I$ soit $\varphi \in C(I_{t_0})$ on associe a φ la fonction
$f \in C^0(I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ définit par :

$$u \in I_{t_0} \to f(u, \varphi(u))$$

Et ensuite on associe a φ la fonction A définit par

$$u \in I_{t_0} \to A(\varphi(u)) = x_0 + \int_{t_0}^{u} f(t, \varphi(t))dt$$

On remarque que : $\quad A: C(I_{t_0}) \longrightarrow C(I_{t_0})$

A est une fonction contractante :

En effet :

Soit $\varphi, \psi \in C(I_{t_0})$

$$\rho(A(\varphi), A(\psi)) = \sup_{t \in I} |A(\varphi(t)) - A(\psi(t))|$$

$$= \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^{u} f(t, \varphi(t))dt - \int_{t_0}^{u} f(t, \psi(t))dt \right|$$

$$\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^{u} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|dt$$

$$\leq \sup_{t \in I} \int_{t_0}^{u} L|\varphi(t) - \psi(t)|dt$$

$$\leq \sup_{t\in I} L \int_{t_0}^{u} \sup_{t\in I}|\varphi(t) - \psi(t)|\, dt$$

$$\leq Lh\rho(\varphi, \psi) < 1$$

(car : $0 < Lh < 1$) donc A est une application contractante.

Appliquant le théorème du point fixe (3.2 CH1.)

Donc : $\exists!\, \varphi_0 \in C(I_{t_0})$ tell que : $A(\varphi_0) = \varphi_0$

Et on a

$$\forall u \in I_{t_0}\ \varphi_0(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} f(t, \varphi_0(t))dt$$

Passons a la dérivée on obtient :$\forall u \in I_{t_0}$

$$\begin{cases} \varphi_0'(u) = f(t, \varphi_0(u)) \\ \varphi_0(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

i. φ_0 est l'unique solution définit sur I_{t_0}.

ii. On remarque que h ne dépend pas de point t.

iii. On remarque aussi qu'à chaque $t \in I$ correspond une fonction $\varphi_0$définie sur I_t.

Posons $I = [a, b]$

iv. On peut après application successive de résultat (1.1) avec un choix de la valeur initial on arrive a construire une solution sur I après un nombre de pas en effet :

1) Si $t_0 + h \geq b$, la solution φ_0 est définie sur $[t_0 - h, b]$.
2) Si $t_0 + h < b$, on applique le résultat à la même équation différentielle avec la condition initial $t_1 = t_0 + h, x(t_1) = \varphi_0(t_0 + h)$ on obtient une solution$\varphi_1$surI_{t_0+h} est $\phi_1$définit sur l'intervalle $I_{t_0} \cup I_{t_0+h} = [t_0 - h, t_0 + 2h] \cap [a, b]$

   Tell que :$\phi_1 = \begin{cases} \varphi_0(t)\ \ sur\ \ I_{t_0} \\ \varphi_1(t)\ \ sur I_{t_0+h} \end{cases}$

   Ainsi de suite on forme d'après un nombre n_0 de pas une solution unique ϕ_{n_0} définit sur tous l'intervalle $[t_0 - h, b]$.

   A ce moment on passe à gauche de t_0 en commencent par le point $t_0 - h$.

1) Si $t_0 - h \leq a$ on s'arrête et la solution est donc ϕ_{n_0} définit sur tous $[a, b]$.

2) Si $t_0 - h > a$ considérons la même équation différentielle avec la condition initial $z_1 = t_0 - h$, $x(z_1) = \varphi_0(t_0 - h)$ on obtient une solution ϕ_{n_0+1} définie sur l'intervalle $[t_0 - 2h, b] \cap [a, b]$.
   Par suite on arrive à construire une solution unique ϕ définie sur tout l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 1 : Pour un L assez grands h sera très proche à 0 et le n_0 tend vers l'infini .On a pour tous $n \in \mathbb{N}$ $t_0 + nh \leq b$ (majoré) d'après 2) et $t_0 + nh$ est une suite croissante car $h > 0$et quand n tend vers l'infini cette suite et convergente et sa limite sera égale à b , de même pour la suite $t_0 - nh$ cette dernière sera décroissante et minorée.

3) Équations différentielles linéaires du premier ordre

L'équation différentielle linéaire s'écrit simplement :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t) \in K, x(t_0) = x_0 \in K, \qquad (2.1)$$

Où a et b sont deux fonctions continues de I dans K, et où $t_0 \in I$ et $x_0 \in K$ sont donnés. Une solution est alors une fonction φ telle que $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$ et telle que $\varphi(t_0) = x_0$
On rappelle que la méthode de résolution est

1- On cherche les solutions φ_h de l'équation homogène :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x. \qquad (2.2)$$

2- Puis on cherche une solution particulière φ_p de :

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \qquad (2.3)$$

3- La solution est $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$ telle que$\varphi(0) = x_0$.

3.1 Solution homogène

Les solutions sont de la forme, pourt_0; $t \in I$:

$$\varphi_h(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}, \qquad (2.4)$$

où $C \in \mathbb{K}$. Et toute fonction de cette forme est solution. Vérification immédiate.

Définition : La fonction $t \in I \to Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$; (pour $C \in \mathbb{K}$ quelconque) est appelée solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène (2.2). En particulier, pour la condition initiale $\varphi_h(t_0) = x_0$ la solution homogène est :

$$\varphi_h(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \qquad (2.5)$$

Remarque 1 : On en déduit en particulier que si $x = \varphi_h$ est non nul en un point, alors x est non nul en tout point (la fonction exponentielle ne s'annule pas), et en particulier x garde un signe constant. Et si x est nul en un point, alors $x \equiv 0$ est solution, et l'unicité de la solution indique que c'est l'unique solution. Et on vérifie immédiatement que $Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ est solution, et donc on a trouvé toutes les solutions.

Remarque 2 : Une autre méthode pour trouver la solution est de séparer les variables, en écrivant:

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt$$

dès que $x \neq 0$. On en déduit formellement que pour $t \in I$ (avec I intervalle où a est continue) :

$$\log x = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau + c \text{ si } x > 0, \log(-x) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau + c \text{ si } x < 0,$$

où c'est une constante quelconque, soit :

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

où $C = \pm e^c$ est une constante réelle. La fonction $t \to x(t)$ devant être dérivable, on en déduit que la solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ est $x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

3.2 Solution particulière :

Pour trouver une solution particulière de (2.1), on utilise la méthode baptisée 'méthode de variation de la constante' : si on note

$$\varphi'_p(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

la solution homogène pour la condition initiale $x(t0) = 1$, on remarque que cette fonction ne s'annule jamais. Ainsi pour trouver une solution φ_p(particulière) de (2.1) :

$$\varphi'_p(t) = a(t)\varphi_p(t) + b(t), \quad \forall t \in I, \qquad (2.6)$$

il suffit de trouver une fonction $C : t \in I \to \alpha(t) \in \mathbb{K}$ telle que sur I

$$\varphi_p(t) = C(t)\varphi_{h1}(t) \qquad (2.7)$$

On fait ainsi un changement de fonction inconnue : la nouvelle fonction inconnue est $t \to C(t)$

Remplaçant $\varphi p(t)$ par $C(t)\varphi h1(t)$ dans (2.6), on trouve :

$$C'(t)\varphi_{h1}(t) + C(t)\varphi'_{h1}(t) = a(t)C(t)\varphi_{h1}(t) + b(t).$$

Mais φ_{h1} satisfaisant à l'équation différentielle homogène, et il reste :

$$C'(t)\varphi_{h1}(t) = b(t)$$

d'où, pour $t0 \in I$:

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{\varphi_{h1}(\tau)} d\tau + c = \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau + c$$

avec $c \in \mathbb{K}$ une constante d'intégration. D'où $\varphi p(t) = C(t)\varphi h1(t)$:

$$\varphi_p(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau + c\right) e^{\int_{t0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

En particulier pour $c = 0$ on a une solution particulière :

$$\varphi_p(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau\right) e^{\int_{t0}^{t} a(\tau)d\tau} \qquad (2.8)$$

qui correspond à la solution vérifiant $\varphi_p(t0) = 0$.

<u>Remarque 1 :</u> Cette solution particulière s'écrit aussi :

$$\varphi_p(t) \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau \qquad (2.9)$$

Attention : pour dériver φp on commencera par réécrire φp sous la forme (2.8) (produit de fonctions), alors que la forme (2.9) se présente comme :

$$\varphi_p(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau) d\tau$$

et n'est pas dérivable directement (t est à la fois borne de l'intégrale et paramètre de l'intégrant) pour g quelconque, voir annexe. On peut donc éviter d'utiliser l'écriture (2.9), et privilégier l'écriture (2.8).

<u>3.3 Conclusion :</u>

Avec (2.5) et (2.8), ayant $\varphi p(t0) = 0$ dans (2.8), on impose $C = x0$ pour la solution homogène, et la solution de (2.1) est donc :

$$\varphi(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds} d\tau\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}.$$

4)Equation différentielle homogène :

On appelle équation différentielle homogène (du premier ordre) toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Intégration à l'aide d'un paramètre

On démontre que l'une des courbes intégrales d'une équation différentielle homogène admet au point M situé sur la droite $y = tx$ une tangente dont le coefficient directeur est $f(t)$.
C'est au moyen du paramètre t que l'on peut représenter paramétriquement les solutions de l'équation différentielle.
On pose donc $t = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = tx$ d'où la forme différentielle : $dy = xdt + tdx$
On a d'autre part : $\frac{dy}{dx} = f(t) \Leftrightarrow dy = f(t)dx$
En écrivant l'égalité de ces deux expressions de dy il vient :

$$xdt + tdx = f(t)dx \text{ soit encore: } xdt = (f(t) - t)dx$$

Il s'agit alors d'une équation à variables séparables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t} \Rightarrow \ln|x| = \int \frac{dt}{f(t) - t} + K \Rightarrow x(t) = \lambda e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}, \lambda = C^{ste}.$$

En notant $G(t) = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}}$ on obtient alors une représentation paramétrique des intégrales de ce type d'équation :

$$G(t) = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} \begin{cases} x = \lambda G(t) \\ y = \lambda t G(t) \end{cases} \lambda = C^{ste}$$

Chapitre 3 :

Equations différentielles à argument retardé du premier ordre.

1)Position de problème :

Un problème de valeur initiale pour l'équation différentiel avec un argument retarde est donnée par :

$$(P) = \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \text{ si } t \in [t_0, t_0 + h] \\ x(t) = \varphi(t) \quad \text{si } t \in E_{t_0} \end{cases}$$

$$\text{Ou } h > 0 \text{ et } t_0 \in \mathbb{R}$$

Tell que :

i. t_0 : appelle point initial $t_0 \in \mathbb{R}$.

ii. τ : appelle fonction de retardement qui vérifie :

$\tau: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Continué et pour $I = [t_0, t_0 + h]$, $\forall t \in I$, $\tau(t) > 0$.

iii. E_{t_0} : appelle l'ensemble initiale tell que :

$E_{t_0} = \{t - \tau(t) : t \in I \text{ et } t - \tau(t) \leq t_0\} \cup \{t_0\}$

$E_{t_0} \neq \{t_0\}$: car : $t_0 \in I$; $\tau(t) > 0 \Rightarrow -\tau(t_0) < 0 \Rightarrow t_0 - \tau(t_0) < t_0$

$$\Rightarrow t_0 - \tau(t_0) \in E_{t_0}$$

On peut aussi écrire sous la forme suivante :

$E_{t_0} = (\{t - \tau(t) : t \in I\} \cup \{t_0\}) \cap]-\infty, t_0]$

$\left(\text{car } \forall \alpha \in E_{t_0} , \alpha \leq t_0 , \alpha \in]-\infty, t_0] ,\ E_{t_0} \subset]-\infty, t_0]\right)$

Au cas ou $\tau(t) = \tau$ (τ est une constante positive)

$E_{t_0} = (\{t - \tau(t) : t \in I\} \cup \{t_0\}) \cap]-\infty, t_0]$

$E_{t_0} = ([t_{0-}\tau , t_0 - \tau + h] \cup \{t_0\}) \cap]-\infty, t_0]$

$E_{t_0} = [t_{0-}\tau , t_0]$.

iv. φ : appelle la fonction initiale qui vérifie :

$\varphi: E_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ Continue dans E_{t_0}.

v. f : Fonction continue sur un voisinage V de point $(t_0, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^3$;

$b_0 = \varphi(t_0); b_1 = \varphi(t_0 - \tau(t_0))$

Et satisfaite la condition de Lipchitz pour la 2 et la 3 variable

$$\exists L > 0\ \forall (t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in V,$$
$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

Exemple :

Soit $\tau(t) = (\cos t)^2$, $t_0 = 0$ dans ce cas $E_0 = [-1{,}0]$ et le problème initial sera écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - (\cos t)^2)) \text{ si } t \in [0, h] \\ x(t) = \varphi(t) \qquad \text{si} \quad t_0 \in [-1{,}0] \end{cases}$$

2)Existence et unicité de solution pour le problème :

Soit :

$f: V_{(t_0,b_0,b_1)} \longrightarrow \mathbb{R}$; $V_{(t_0,b_0,b_1)} \subset \mathbb{R}^3$ Est un voisinage du point

$(t_0, b_0, b_1) = \big(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau(t_0))\big)$ Peut-être définit par la boule fermée et bornée suivante : pour $0 < \alpha < +\infty$

$$B_f((t_0, b_0, b_1), \alpha) = \left\{ \begin{matrix} \big(t, x(t), x(t - \tau(t))\big) \in \mathbb{R}^3 : \\ \big(|t - t_0| + |x(t) - b_0| + \big|x(t - \tau(t)) - b_1\big|\big) \leq \alpha \end{matrix} \right\}$$

$\exists \alpha > 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |t - t_0| \leq \alpha \\ |x(t) - \varphi(t_0)| \leq \alpha \\ \big|x(t - \tau(t)) - \varphi(t_0 - \tau(t_0))\big| \leq \alpha \end{cases}$$

D'où on peut extraire les conditions suivante sur $x(t)$:

$$(C) = \begin{cases} |x(t) - \varphi(t_0)| \leq \alpha \quad \text{si} \quad t \in I \\ x(t) = \varphi(t) \quad \text{si} \quad t_0 \in E_{t_0} \end{cases}$$

Soit l'ensemble C_0 définie par :

$C_0 = \{x(t) : t \in I \cup E_{t_0} \text{ et } x(t) \text{ continue et vérifie } (C)\}$

2.1Proposition :

L'ensemble C_0 est un espace métrique complet pour la distance suivante :

$$\forall x_1, x_2 \in C_0 \quad \rho(x_1(t), x_2(t)) = \sup_{t\in I}|x_1(t) - x_2(t)|$$

Preuve : [1], [2]

Montrons que est une distance sur :

$\rho: C_0 \times C_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+$

La séparation: $\forall t \in I; \forall x_1, x_2 \in C_0$

$$\rho(x_1(t), x_2(t)) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{t\in I}|x_1(t) - x_2(t)| = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in I \ |x_1(t) - x_2(t)| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall t \in I \quad x_1 = x_2$$

Si $t_0 \in E_{t_0}$ $x_1(t) = x_2(t) = \varphi(t) \Longrightarrow \forall t \in I \cup E_{t_0} \quad x_1 = x_2$

La symétrie et l'inégalité triangulaire se démontre de même de (prpo2.6 CH 1).

D'où ρ est une distance sur C_0 . ((C_0, ρ) Espace métrique)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$

$$\begin{cases} |x_n(t) - \varphi(t_0)| \leq \alpha & \text{si} \quad t \in I \\ x_n(t) = \varphi(t) \quad \text{si} & t_0 \in E_{t_0} \end{cases}$$

On a

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_f(\varphi(t_0), \alpha) \ \ t \in I$ (Boule fermée et bornée de rayon α)

D'autre part $B_f \subset C(I)$

$C(I)$ L'espace des fonctions continué dans I cet espace complet d'apprêt la proposition (2.6 CH 1).

Et puise-que $B_f \subset C(I)$ et est fermée alors B_f est un espace complet d'apprêt la proposition (2.7CH 1).

D'où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergente

$\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = l(t) \ \ l(t) \in B_f(\varphi(t_0), \alpha)$ pour $t \in I$

Et puise-que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$ alors $\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = l(t) \;\; = \varphi(t)$ pour $t \in E_{t_0}$ donc

$x(t) \in C_0$ Qui nous conduit à dire que C_0 et un espace complet pour la distance ρ .

2.2Théorème :

Soit $\tau: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue strictement positive sur $I = [t_0, t_0 + h]$, $h > 0$ soit $\varphi(t)$ une fonction définit par , $\varphi: E_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E_{t_0}.

f Fonction a valeur dans $\mathbb{R}$ continue dans un voisinage V du point $\left(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau(t_0))\right)$ et satisfait en plus la condition de Lipchitz pour la 2 et la 3 variable alors (P) admet une solution unique pour un h suffisamment petit.

Preuve : [1], [2]

a) On peut remplace (P) par une équation équivalente

$$(P') = \begin{cases} y(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\left(\sigma, x(\sigma), x\left(\sigma - \tau(\sigma)\right)\right) d\sigma & \text{si } t \in [t_0, t_0 + h] \\ y(t) = \varphi(t) & \text{si } t \in E_{t_0} \end{cases}$$

Ce problème (P') peut-être définit par une application A tell que :

$$\begin{cases} A(x(t)) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\left(\sigma, x(\sigma), x\left(\sigma - \tau(\sigma)\right)\right) d\sigma & \text{si } t \in [t_0, t_0 + h] \\ A\left(x(t)\right) = \varphi(t) & \text{si } t \in E_{t_0} \end{cases}$$

D'autre part :

b) D'après (1.v.CH3) on a f est continue dans un voisinage V de $\left(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0 - \tau(t_0))\right)$ alors est continue dans un voisinage fermé et bornée $P \subset V$ d'où :

$$\exists M > 0; \forall (t, x, y) \in P; |f(t, x, y)| < M$$

Et d'après (1.ii.CH3) τ est continue en I alors $t - \tau(t)$ est continue

alors d'après définition de continuité

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall t \in I; |t - t_0| \leq \delta \Longrightarrow |(t - \tau(t)) - (t_0 - \tau(t_0))| < \varepsilon$$

Soit $\delta = h_1$et pour $\varepsilon = \tau(t_0)$ on a

$$|t - t_0| \leq h_1 \Longrightarrow |(t - \tau(t)) - (t_0 - \tau(t_0))| < \tau(t_0)$$

$$t \in [t_0, t_0 + h_1] \Longrightarrow |(t - \tau(t)) - (t_0 - \tau(t_0))| < \tau(t_0)$$

$$t \in [t_0, t_0 + h_1] \Longrightarrow -2\tau(t_0) < (t - \tau(t)) - t_0 < 0$$

$$t \in [t_0, t_0 + h_1] \Longrightarrow (t - \tau(t)) \in E_{t_0}$$

c) Montrons que $A \in C_0$:

$$|A(x(t)) - \varphi(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t} f\left(\sigma, x(\sigma), x(\sigma - \tau(\sigma))\right) d\sigma\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left|f\left(\sigma, x(\sigma), x(\sigma - \tau(\sigma))\right)\right| d\sigma$$

d'après b) on a :

$$\leq M(t - t_0)$$

$$\leq Mh \leq \alpha \Longrightarrow h \leq \frac{\alpha}{M}$$

D'où $A : C_0 \longrightarrow C_0$

d) Montrons que A est une application contractante pour $h = \min\left\{h_1, \frac{\alpha}{M}\right\}$:
soient $x_1, x_2 \in C_0$ on a :
$\rho(A(x_1), A(x_2))$
$= sup_{t\in I}|A(x_1(t)) - A(x_2(t)|$

$$= \sup_{t\in I}\left|\int_{t_0}^{t+h} f\left(\sigma, x_1(\sigma), x_1(\sigma - \tau(\sigma))\right) d\sigma - \int_{t_0}^{t+h} f\left(\sigma, x_2(\sigma), x_2(\sigma - \tau(\sigma))\right) d\sigma\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t+h} \left|f\left(\sigma, x_1(\sigma), x_1(\sigma - \tau(\sigma))\right) - f\left(\sigma, x_2(\sigma), x_2(\sigma - \tau(\sigma))\right)\right| d\sigma$$

$$\leq \int_{t_0}^{t+h} L\left(|x_1(\sigma) - x_2(\sigma)| + \left|x_1(\sigma - \tau(\sigma)) - x_2(\sigma - \tau(\sigma))\right|\right) d\sigma$$

$d'apres\ b)$ $et\ le\ fait\ que\ f\ Lipchitzienne\ on\ a$:

$$\leq L \int_{t_0}^{t+h} \left(|x_1(\sigma) - x_2(\sigma)| + \left|\varphi(\sigma - \tau(\sigma)) - \varphi(\sigma - \tau(\sigma))\right|\right) d\sigma$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t+h} \rho\big(x_1(t), x_2(t)\big) d\sigma = Lh\rho\big(x_1(t), x_2(t)\big)$$

A est une fonction contractante si $h < \frac{1}{L}$.

Alors de c)et d) et proposition 2.1.CH3 (C_0 est un espace complet et A est une fonction contractante de C_0 dans C_0) D'après théorème (3.2.CH1) :

Pour $h = \min\left\{h_1, \frac{\alpha}{M}, c\right\}$ avec $c < \frac{1}{L}$ A admet un point fixe unique.

$$\exists!\, U \in C_0 \quad A\big(U(t)\big) = U(t) \quad t \in E_{t_0} \cup I$$

$$\begin{cases} A(U(t)) = \varphi(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\left(\sigma, U(\sigma), U\big(\sigma - \tau(\sigma)\big)\right) d\sigma & si\ t \in [t_0, t_0 + h] \\ A\big(U(t)\big) = \varphi(t) \quad si\ \ t \in E_{t_0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\left(\sigma, U(\sigma), U\big(\sigma - \tau(\sigma)\big)\right) d\sigma \quad si\ t \in [t_0, t_0 + h] \\ U(t) = \varphi(t) \qquad si\ \ t \in E_{t_0} \end{cases}$$

Par dérivation (P) :

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} U'(t) = f(t, U(t), U\big(t - \tau(t)\big))\ si\ t \in [t_0, t_0 + h] \\ U(t) = \varphi(t) \quad si\ t \in E_{t_0} \end{cases}$$

Alors (P) admet une solution unique.

3)La méthode d'étapes :

Considérons le problème de valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau))\ \text{si}\ t \in [t_0, t_0 + n\tau] \quad n \in \mathbb{N}* \\ x(t) = \emptyset_0(t) \qquad\qquad \text{si} \qquad t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0] \end{cases}$$

Ou le retardement est une constante $\tau > 0$ et n et fixe.
On va utiliser une méthode de résolution de ce problème dite la méthode des étapes ou méthode d'intégrations successives qui ramène le problème à un problème de valeurs initiale d'une équation différentielle ordinaire du 1er ordre des chaque étape.

1er étape :

Puisque pour tout t∈ [t_0, t_0+ τ] l'argument t- τ varie dans l'intervalle initiale

[t_0- τ, t_0] et par conséquent le 3éme argument x(t- τ) de la fonction f est égale à la fonction initiale $\varnothing_0$(t- τ).

Donc le problème posé est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t), \varnothing_0(t-\tau)\big) \text{si } t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ x(t_0) = \varnothing_0(t_0) \end{cases}$$

2éme étape :

Supposons qu'il existe une solution $x(t) = \varnothing_1(t)$ du problème sur l'intervalle

[t_0, t_0+ τ], alors comme l'étape précédente le problème sur l'intervalle

[t_0+ τ, t_0+2 τ] se ramène au problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t), \varnothing_1(t-\tau)\big) \quad \text{si } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ x(t_0 + \tau) = \varnothing_1(t_0 + \tau) \end{cases}$$

.

Nième étape :

Supposons que le problème a une solution x(t) = $\varnothing_{n-1}$(t) sur l'intervalle

[t_0 + (n-2) τ , t_0 + (n-1) τ] alors le problème se ramène sur l'intervalle

[t_0 + (n-1) τ, t_0 + n τ] au problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t), \varnothing_{n-1}(t-\tau)\big) \quad \text{si } t \in [t_0 + (n-1)\tau, t_0 + n\tau] \\ x(t_0 + (n-1)\tau) = \varnothing_{n-1}(t_0 + (n-1)\tau) \end{cases}$$

On remarque d'une part que cette méthode permet déterminer la solution x(t) sur plusieurs intervalles de longueurs finies et d'autre part de prouver l'existence de la solution et son unicité sur $Et_0 \cup$ [t_0, T] (T > t_0) si $\varnothing_0$ et f sont continue et si en plus f satisfait à la condition assurant l'unicité de la solution du problème (p) (par exemple la condition de Lipchitz par rapport au 2éme et 3éme argument).

4)Quelques Exemples :

Exemple 1 :

Déterminer x(t) vérifiant :

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t-1) & \text{si } t \in [1,4] \\ x(t) = t & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

Appliquant la méthode des étapes.

1ér étape :

Si t [1,2], alors t-1 varie dans l'intervalle initiale [0,1] et par conséquent x(t-1) = t-1 donc l'équation est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = 6(t-1) & \text{si } t \in [1,2] \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

Par intégration on obtient $x(t) = 3(t-1)^2 + 1$ si t [1,2]

2éme étape :

Si t [2,3] alors t-1 varie dans l'intervalle [1,2] et par conséquent $x(t-1) = 3(t-2)^2 + 1$

Donc sur [2,3] le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = 18(t-2)2 + 6 & \text{si } t \in [2,3] \\ x(t) = 4 \end{cases}$$

Par intégration on obtient : $x(t) = 6(t-2)^2 - 6(t-2) + 4$ si $t \in [2,3]$

3éme étape :

Si t [3,4] alors t-1 varie dans l'intervalle [2,3] et par conséquent $x(t-1) = 6(t-3)^3 + 6(t-3) + 4$

Donc sur [3,4] le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = 36(t-3)3 + 36(t-3) + 24 & \text{si } t \in [3,4] \\ x(t) = 16 \end{cases}$$

Par intégration on obtient :

$x(t) = 9(t-3)4 + 18(t-3)2 + 24(t-3) + 16$ si $t \in [3,4]$

La fonction $t \longrightarrow x(t)$ est continue sur [0,4] mais non dérivable.

Conclusion :

La
solution :

$$\begin{cases} x(t) = t & si\ t \in [0,1] \\ x(t) = 3(t-1)2 + 1 & si\ t \in [1,2] \\ x(t) = 6(t-2)3 + 6(t-2) + 4 & si\ t \in [2,3] \\ x(t) = 9(t-3)3 + 18(t-3)2 + 24(t-3) + 16 & si\ t \in [3,4] \end{cases}$$

Exemple 2 :

On donne les nombres réels $Aa, c, \tau, t0 \in R$.

Déterminer la fonction x(t) vérifiant le problème de valeurs initiale suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x\,(t-\tau) & \text{si } t > t_0 \\ x(t) = c & si\ \ t \in [t_0 - \tau, \tau] \end{cases}$$

Appliquons la méthode des étapes.

1er étape :

Si t $\in$ [t, t + τ] , alors t-μ varie dans l'intervalle initiale $[t_0 - \tau, \tau]$ et par conséquent x(t- τ) = c

Donc le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = a\,c & \text{si t } \in [t_0, t_0 + \tau] \\ x(t) = c \end{cases}$$

Par intégration on obtient x(t) = a c (t-t_0) + c si t $[t_0, t_0 + \tau]$

On peut écrire

Donc $\mu k + \mu \leq t - t_0 < \tau k + 2\tau$

Ensuite $\tau k \leq (t - \tau) - t_0 < (k + 1)\tau$

Donc $k \leq ((t-\tau)-t_0)/\tau < k + 1$

D'où $[((t-\tau)-t_0) / \tau] = k$

D'après l'hypothèse de récurrence on obtient :

$x(t-\tau) = c\sum_{n=0}^{k+1}\frac{a^n}{n!}(t-t_0-n\tau)^n$

si t $\in$ $[t_0 + (k+1)\tau, t_0 + (k+2)\tau]$

ainsi, le problème de valeur initiale pour l'équation différentielle du 1er ordre avec un argument retardé est équivalent sur $[t_0 + (k+1), t_0 + (k+2)\tau]$:

$H(t) = c\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{n!}\right)(t-t_0-n\tau)^n$ Si t $\in$ $[t_0 + (k+1)\tau, t + (k+2)\tau]$

Avec la condition initiale

$x(t_0 + (k+1)\tau) = \sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{n!}\right)((k+1)\tau-(n-1)\tau)^n$

Qui assure la continuité de x(t) au point t_0 + (k+1) τ

Par intégration en t on obtient :

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)(t-t_0-n\tau)^{n+1}$

$$-\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)((k+1)\mu-n\tau)^{n+1}+\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{n!}\right)((k+1)\tau-(n-1)\tau)^n)$$

Donc on peut écrire :

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)(t-t_0-n\tau)^{n+1}$

$$-\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)(k-n+1)^{n+1}\tau^{n+1}+\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^n}{n!}\right)((k-n+2)^n\tau^n)$$

Par un changement de convenable des valeurs de l'indice n on obtient :

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{k+2}\left(\frac{a^n}{n!}\right)(t-t_0-(n-1)\tau)^n$

$$-\sum_{n=1}^{k+2}\left(\frac{a^n}{(n)!}\right)(k-n+2)^n\tau^n+\sum_{n=1}^{k+1}\left(\frac{a^n}{n!}\right)((k-n+2)^n\tau^n)$$

Et après simplification on aura l'égalité à vérifier :

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{k+2}\left(\frac{a^n}{n!}\right)(t-t_0-(n-1)\tau)^n+1)$

Conclusion :

On déduit donc l'égalité $x(t) = c(\sum_{n=1}^{\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)+1} \left(\frac{a^n}{n\,!}\right)(t - t_0 - (n-1)\tau)^n$ pour $t \geq t_0$

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{1} \left(\frac{a^n}{n\,!}\right)(t - t_0 - (n-1)\tau)^n$ si t $[t_0, t_0 + \tau]$

2éme étape :

Si t $\in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ alors t-μ varie dans l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$ et par conséquent $x(t-\tau) = a\,c\,(t-t_0-\tau) + c$

Donc sur $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = a^2c(t - t_0 - \mu) + ac & \text{si } t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ x(t_0 + \mu) = a\,c\,\mu + c \end{cases}$$

Par intégration on obtient :

$x(t) = c\left(\frac{a^2}{2}(t - t_0 - 2\mu)^2 + a(t - t_0) + 1\right)$ si $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$
et on peut écrire

$x(t) = c\,(\sum_{n=1}^{2} \left(\frac{a^n}{n\,!}\right)(t - t_0 - (n-1)\mu)^n + 1)$ Si $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$

3éme étape :

Si $t \in [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ alors t-μ varie dans l'intervalle

$[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ d' où

$x(t-\mu) = c\left(\frac{a^2}{2}(t - t_0 - 2\mu)^2 + a(t - t_0 - \mu) + 1\right)$

Donc sur $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$ le problème est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = c\left(\frac{a^3}{2!}(t - t_0 - 2\mu)^2 + \frac{a^2}{1!}(t - t_0 - \mu) + a\right) & \text{si } t \in [t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau] \\ x(t_0 + 2\mu) = c\,(\frac{a^2}{2}\mu^2 + 2a\mu + 1) \end{cases}$$

Par intégration on obtient :

$x(t) = c\left(\frac{a^3}{3!}(t - t_0 - 2\mu)^4 + \frac{a^2}{2!}(t - t_0 - \mu)^2 + \frac{a^2}{2!}(t - t_0 - \mu)^2 + \frac{a}{1!}(t - t_0) + 1\right)$
sur $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$

Et on peut écrire $x(t) = c(\sum_{n=0}^{3} \left(\frac{a^n}{n\,!}\right)(t - t_0 - (n-1)\mu)^n$

Sur $[t_0 + 2\tau, t_0 + 3\tau]$

On remarque qu'on peut vérifier par récurrence que la solution x(t) prend pour tout $t \geq t_0$ la forme suivante :

$x(t) = c(\sum_{n=1}^{\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)+1} \left(\frac{a^n}{n!}\right)(t - t_0 - (n-1)\tau)^n$ ou [t] désigne la partie entier de t, k N, supposons pour tout t tel que : $t \geq t_0$ et $[(t-t_0) / \tau] \leq k$ on a :

$$x(t) = c(\sum_{n=1}^{\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right)+1} \left(\frac{a^n}{n!}\right)(t - t_0 - (n-1)\tau)^n$$

Démontrons que l'égalité reste vraie pour tout t tel que : $t \geq t_0$ et $[(t-t_0) / \tau] \leq k+1$.

c.à.d.il reste à vérifier que pour $t \geq t_0$ et $[(t-t_0) / \tau] = k+1$ on a :

$$x(t) = c(\sum_{n=0}^{k+2} \left(\frac{a^n}{n!}\right)(t - t_0 - (n-1)\tau)^n$$

En effet, si $[(t-t_0) / \tau] = k+1$ alors $k+1 \leq (t-t_0) / \mu < k+2$.

Exemple 3 :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + x(t-1) & \text{si } t \in [1,3] \\ x(t) = 1 & \text{si } \quad t \in E_{t_0} = [0,1] \end{cases}$$

On a $t_0 = 1, \tau = 1 \Longrightarrow n = 2$

<u>1ére étape :</u>

$\varnothing_0(t) = 1$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 1 & \text{si } t \in [1,2] \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = (k + \int e^{-t}dt)e^t$ (on utilisant 2.4 CH2)

$x(t) = ke^t - 1$

Pour $x(1) = 1 \Longrightarrow k = \frac{2}{e} \Longrightarrow x(t) = 2e^{t-1} - 1$ si $t \in [1,2]$

<u>2éme étape :</u>

$\varnothing_1(t) = 2e^{t-1} - 1$

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2e^{t-2} - 1 & \text{si } t \in [2,3] \\ x(2) = 2e - 1 \end{cases}$$

$x(t) = (k + \int (2e^{t-2} - 1)e^{-t}dt)e^{t}$

$x(t) = ke^{t} + 2te^{t-2} + 1$

Pour $x(2) = 2e - 1 \Longrightarrow k = \frac{2e-6}{e^2} \Longrightarrow x(t) = (2e-6)e^{t-2} + 2te^{t-2} + 1$ si $t \in [2,3]$

D'où la solution de problème est :

$$\begin{cases} x(t) = 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ x(t) = 2e^{t-1} - 1 & \text{si } t \in [1,2] \\ x(t) = 2e^{t-1} - 6e^{t-2} + 2te^{t-2} + 1 & \text{si } t \in [2,3] \end{cases} .$$

<u>Conclusion</u>

Nous sommes arrivés tous près de la fin du travail fixé, qu'on a traité en deux parties essentielles.

La première partie est constituée par le premier et le deuxième chapitre et une partie du troisième chapitre et consacré aux définitions est de théorèmes indispensables pour définir un problème d'équation différentiel avec un argument retardé du premier ordre. On a montré l'existence et l'unicité de la solution.

Une partie de notre mémoire est consacrée à la méthode des étapes et quelques exemples de cette méthode.

Référence bibliographique

[1] Thèse de Mr Azzouzi Ben Azzouz ; Analyse du spectre de certain opérateurs engendrés par des équation différentielles a un argument retardé ; université Ammar Telidji Laghouat Algérie ; 2010.

[2] L.E.EL'gol'ts,S.B.norkin ; introduction to the theory and application of differential equation with deviating arguments ; Académie press, New York, London (1973).

[3] CAYREL Pierre-Louis et al ; Cours sur les équations différentielles ; 22 novembre 2011.

[4] ELMAHDI. I ;Analyse II. Ecole Nationale des Sciences Appliquées ; Université Mohammed I ; Oujda ; 2007-2008.