الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي الأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيــــةالـعـلـــــوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique

Par:

Djemoui Marwa

THEME

Stabilité de la solution pour un problème aux limites avec des coefficients variables sur une variété riemannienne

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr.Belabbaci Youcef	*M.C.A*	*Président*
Mr. Rahmoune Abita	*M.C.A*	*Examinateur*
Mme.Boukhatem Yamna	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2020/2019

Remerciements

En premier lieu, mes remerciements s'adressent à ***ALLAH*** *le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour Madame ***Boukhatem Yamna*** *d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques, pertinentes et s'encouragement.*

Un très grand merci aux professeurs : ***Y. Belabbaci*** *et* ***A. Rahmoune*** *qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

Ma dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père pour leurs confiances et leurs encouragements.

A mes sœurs pour leurs douceurs et leurs gentillesses.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis...

ملخص

في هذا العمل، نعتبر المعادلة الموجية غير الخطية بمعاملات متغيرة وشروط في الحدود غير خطية. تحت شروط على المعطيات الابتدائية، نبرهن الوجود الكلي و الوحدانية للحل باستعمال تقريبات فاودغلاركن و مبرهنة التراص، ومن ثم نبرهن التقارب الاسي للحل بتعريف دالة طاقة مكافئة واستعمال طريقة مضاعف الطاقة في المنوعة الريمانية وبذلك نجد ان الحل متقارب بشكل اسي.

كلمات مفتاحية تقارب اسي، تقريبات غلاركن، معادلة موجية غير خطية، منوعة ريمانية، وجود كلي.

Résumé :

Dans ce travail, on considère une équation d'ondes semi-linéaire avec coefficients variables et des conditions aux limites non linéaires. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on prouve l'existence globale et l'unicité de la solution en se basant sur les approximations de Faeodo-Galerkin et la méthode de compacité. En suite, la stabilité exponentielle est obtenue en introduisant une fonction d'énergie équivalente et utilisant la méthode du multiplicateur d'énergie sur une variété riemannienne, cette énergie équivalente assure que le système est dissipatif.

Mots clés : Approximations de Faeodo-Galerkin, équation d'ondes semi-linéaire, existence globale, stabilité exponentielle, variété riemannienne.

Abstract :

In this work, we consider a semilinear wave equation with variable coefficients under the nonlinear boundary feedback. Under certain assumptions on the initial data, we prove the global existence and the uniqueness of the solution by the Galerkin's approximations and the method of compacity. Then, the exponential stability is obtained by introducing an equivalent energy function and using the energy multiplier method on the riemannian manifold. This equivalent energy function shows that the system is dissipatif.

Key-words : Exponential stability, Galerkin's approximations, global existence, riemannian manifold, semilinear wave equation.

Table des matières

Introduction

La stabilité d'un système non dissipatif décrit par des équations aux dérivées partielles (EDPs) représente le plus souvent un challenge extrêmement mathématique.
Dans [3], Shao et Guo s'intéressent à l'étude d'un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire avec des conditions aux limites non linéaires. Plus précisément, on considère le problème suivant :

$$u'' - \Delta_g u + h(\nabla u) + f(u) = 0, \quad \text{sur} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{1}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière Γ, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues non linéaires, ∇ et Δ_g désignent le gradient et l'opérateur de Laplace-Beltrami respectivement, ils ont écrit sous la coordonnée euclidienne de la forme :

$$\nabla_g u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad |\nabla_g u|_g^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

et

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\mathfrak{g}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \tag{2}$$

avec $\{a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq i, j \leq n\}$ sont des fonctions symétriques et il existe des constantes réelles positives a_0, a_1 telles que :

$$a_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a_1 |\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$A(x) = (a_{ij}(x))$ est une $n \times n$-matrice pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $G = (g_{ij}(x)) = A^{-1}(x)$ de determinant $\mathfrak{g} = det(G)$.

Sous les conditions aux limites sur $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} u = 0 \qquad & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \tfrac{\partial u}{\partial v} + l(u') = 0 \quad & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \end{aligned}$$

où $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est le champ de vecteurs unitaire extérieur normal sur Γ, et $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.

Une étude analogue est obtenue par M.Aassila et M.Cavalcanti dans [8], ils ont étudié l'existence de la solution en se basant sur les approximations de Faeodo-Galerkin, ensuite ils ont établi la stabilité exponentielle en utilisant la technique du multiplicateur due à Komornik et Zuazua [14]. De plus, un nouveau critère d'inégalité a été introduit en [2] pour atteindre la stabilité uniforme du ce système qui est considéré comme un système non dissipatif dans le cas particulier ($\Delta_g = \Delta$). Cependant, dans ce travail, en utilisant une approche complètement différente et la méthode de la géométrie riemannienne, nous montrons que le système (1) est essentiellement un système

dissipatif en introduisant une fonction d'énergie équivalente du système. Cette approche ne généralise pas seulement le résultat de constantes coefficients en coefficients variables, mais simplifie également de manière significative la preuve du cas de coefficients constants considéré dans [2].
La généralisation du cas des coefficients constants aux coefficients variables n'est pas direct, et elle a besoin de quelques contraintes géométriques supplémentaires sur la variété riemannienne formées par des coefficients variables, cela n'est pas nécessaire pour le cas des coefficients constants.

Quatre chapitre ont été considérés dans ce travail. Le premier chapitre est de rappeler quelques notions usuelles. On commence par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible étoile ainsi quelques résultats pour les espaces séparables, puis on énonce des définitions et des propriétés élémentaires sur les espaces de Lebesgue L^p. Ils sont suivis par quelques définitions et quelques propriétés fondamentales sur les espaces de Sobolev qu'il faut absolument connaitre pour l'étude de notre problème. Dans la fin de ce chapitre, on a donné quelques définitions sur les espaces fonctionnels avec un lemme de Gronwall.

Le seconde chapitre sera consacré à rappeler quelque définitions et propriétés de la géométrie, qui seront utiles pour la suite. On commence par des notions d'une variété différentiable, espace et fibré tangent ainsi que espace et fibré cotangent, application tangent, champ de vecteurs et formes différentielles. En suite, on rappel des définitions et des propriétés élémentaires sur la géométrie riemannienne.

Dans le troisième chapitre, sous certaines conditions sur les données initiales et en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité, on montre l'existence globale et l'unicité de la solution du problème considéré.

Dans le dernier chapitre, on établit la stabilité exponentielle de la solution régulière par une construction d'une fonctionnelle d'énergie équivalente du système et en utilisant la méthode de multiplicateur d'énergie sur une variété riemannienne.

Notations

Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
g	La métrique Riemannienne euclidienne associée à $\mathbb{R}^n$.
$\langle . \rangle_g$	Le produit scalaire associée a l'espace $\mathbb{R}^n$.
$\vert . \vert_g$	La norme associée à l'espace $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	L'espace des distributions .
$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\vert\alpha\vert}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$	La dérivée d'ordre α avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\vert\alpha\vert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
q	L'exposant conjugué de p telle que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
p.p.	Presque partout.
$\Vert . \Vert_p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$\nabla_X Y$	La dérivée covariante de Y par rapport à X.
∇H	La différentielle covariante d'un champ de vecteur H.
$H^m(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
H_0^m	La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans H^m.
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$	Le gradient de u.
$F \hookrightarrow E$	L'injection de F dans E.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	La convergence faible étoile.
∇	La connexion de Levi-Civita.
∇_g	L'opérateur gradient en fonction du métrique g.
div_g	L'opérateur divergence en fonction du métrique g.
Δ_g	L'opérateur de Beltrami-Laplace en fonction du métrique g.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions usuelles, qui seront utiles dans la suite. On commence par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible étoile ainsi quelques résultats pour les espaces réflexifs et les espaces séparables, puis on énonce des définitions et des propriétés élémentaires sur les espaces de Lebesgue L^p. Ils sont suivis par quelques définitions et quelques propriétés fondamentales sur les espaces de Sobolev qu'il faut absolument connaitre pour l'étude de notre problème. Dans la fin de ce chapitre, on a donné quelques définitions sur les espaces fonctionnels avec un lemme de Gronwall. Les principaux ouvrages utilisés sont [1], [7] et [4].

1.1 Topologie faible

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Quand f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Proposition 1.1. *Soit (x_n) une suite de E. On a :*
(i) $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in E'$.
(ii) Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.
(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Proposition 1.2. *Si E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncide avec la topologie usuelle. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.2 Topologie faible $*$

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme dual $\|f\| = \sup\limits_{x \in E \, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$) et soit E'' son bidual (muni de la norme

$$\|\zeta\| = \sup_{f \in E' \|f\| \leq 1} |\langle \zeta, f \rangle|).$$

On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} J : E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & J_x, \end{array}$$

telle que

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

Pour chaque $x \in E$ on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$.

Définition 1.2. *La topologie faible $*$ notée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Proposition 1.3. *La topologie faible $*$ est séparé.*

Proposition 1.4. *Soit f_n une suite de E'. On a*
(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall x \in E$.
(ii) Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$.
(iii) Si $f_n \to f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$.
(iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
(v) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

1.2.1 Espaces réflexifs

Définition 1.3. *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'', E est dite réflexif si $J(E) = E''$.*

Proposition 1.5. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si*

$$\mathbf{B}_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

1.2.2 Espaces séparables

Définition 1.4. *Un espace métrique est dite séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Proposition 1.6. *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Théorème 1.1. *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors $\mathbf{B}_E$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Corollaire 1.1. *Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraire (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

1.3 Espaces L^p

Dans cette partie, on donne quelques définitions et propriétés élémentaires des espaces L^P.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.
L'application :

$$\begin{array}{llc} \mathcal{F} : \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ \textit{intégrable}\} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ \qquad\qquad f & \longmapsto & \|f\| = \displaystyle\int_\Omega |f(x)|dx \end{array}$$

est une semi-norme.
On va définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$:

$$\forall f, g \in \mathcal{F} : \qquad f \Re g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ p.p \,\text{sur}\ \Omega.$$

Définition 1.5. *L'ensemble quotient $\mathcal{F}/\Re$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)|dx$, s'appelle l'espace de Lebesgue et sera noté par L^1.*

Définition 1.6. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega)$.*

Définition 1.7. *On dit que f est essentiellement bornée sur Ω, s'il existe une constante C positive telle que $|f(x)| \leq C$ p.p .*
La plus petite de ces constantes est appelée le sup essentiel de f. On la note par $\sup .ess|f(x)|$.

Définition 1.8. *L'espace de Lebesgue d'ordre ∞, noté $L^\infty(\Omega)$, est un espace des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\sup .ess|f(x)| < +\infty.$$

Proposition 1.7. *L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$f \mapsto \begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_\infty = ess.\sup_{x \in \Omega} |f(x)|, & si \quad p = +\infty, \end{cases}$$

est une norme.

Proposition 1.8. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :*

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Notation 1.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note par q l'exposant conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Proposition 1.9. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, pour $\eta > 0$ on a

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}.$$

Démonstration. La fonction log est concave. Donc pour tout a et b strictement positives

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{\log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} = \log(ab),$$

donc

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Proposition 1.10. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration.
1. Si $p = 1$ et $p = \infty$, la conclusion est évidente.
2. Si $1 < p < \infty$, d'après l'inégalité de Young, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{1}{p}\|f(x)\|_p^p + \frac{1}{q}\|g(x)\|_q^q.$$

On remplace f par λf $(\lambda > 0)$ il vient :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q. \tag{1.1}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p}$.
De manière à minimiser le membre à droite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

□

Remarque 1.1. *Lorsque $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder devient l'inégalité de* ***Cauchy-Schwarz****.*

Théorème 1.2. ***(le théorème de représentation de Riesz)*** *Soit $1 \leq p < \infty$ et $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^q$ unique telle que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x)f(x)\, dx \quad \forall f \in L^p. \tag{1.2}$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Remarque 1.2. *Le théorème 1.2 exprime que tout forme linéaire continue sur L^p pour $1 < p < \infty$ se représente à l'aide d'une fonction de L^q.*

Théorème 1.3. ***(Fischer-Riesz)*** *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
Et si $1 < p < \infty$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.

Théorème 1.4. *Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, telle que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n) telle que :*
  i. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
  ii. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}$ *et p.p sur* Ω, *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Propriétés 1.1. *1.* $L^\infty = (L^1)'$.
  2. $L^1 \subset (L^\infty)'$.
  3. La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(L^\infty, L^1)$.
  4. Si (f_n) une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible étoile $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Définition 1.9. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. On dit que F s'injecte continument dans E si $F \subset E$ et si l'inclusion est continue, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in F$:*

$$\|x\|_E \leq C\|x\|_F.$$

Notons par $F \hookrightarrow E$ l'injection de F dans E.
L'injection $F \hookrightarrow E$ est compacte si de plus de tout suite bornée de $(F, \|.\|_F)$, on peut extraire une sous suite convergente dans $(E, \|.\|_E)$.

Proposition 1.11. *Si Ω est de mesure finie alors*
  i) $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.
  ii) $\forall q \geq p : \quad L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

1.4 Les distributions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Notation 1.2. *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω. On note $C_K^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support dans un compact $K \subset \Omega$. Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelées les fonctions tests.*

Définition 1.10. *Une distribution (réelle) dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$:*

$$\begin{array}{rcccc} T & : & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & \phi & \mapsto & T(\phi) = \langle T, \phi \rangle, \end{array}$$

qui vérifie la propriété suivante : Pour tout K compact de Ω, il existe une constante $C_k > 0$ et il existe $P_k \in \mathbb{N}$ telles que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_k \sup_{|\alpha| \leq P_k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (multi-indice). Notons par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions dans Ω.

Remarque 1.3. *$\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Définition 1.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la dérivée d'une distribution T est une distribution définie par*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Corollaire 1.2. *Toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, $(p \geq 1)$ est dans $L^1_{loc}(\Omega)$, où*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f \in L^1(K); \qquad \text{pour tout } K \subset \Omega \text{ compact} \right\}.$$

Conséquence :
Toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ définit une distribution dite régulière définie par

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposition 1.12. *L'injection canonique $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue.*

Remarque 1.4. *La dérivée d'une fonction régulière coïncide avec sa dérivée au sens des distribution.*

1.5 Les espaces de Sobolev

1.5.1 L'espace H^m

Définition 1.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit l'espace de Sobolev suivant :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \text{pour tout } i = 1, .., n \right\},$$

et le produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ est donné par :

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx$$

pour tout u, v dans $H^1(\Omega)$.
Ainsi la norme associée est donnée par :

$$\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_2 = \|u\|^2_2 + \|\nabla u\|^2_2.$$

Proposition 1.13. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.13. *Étant donné m un entier strictement positif, on définit les espaces de Sobolev H^m par :*

$$H^m(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in N^n, |\alpha| \leq m\right\},$$

où $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ est la dérivée partielle de u d'ordre α au sens des distributions, définie par

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad avec \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

On le munit d'un produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

ainsi que d'une norme :

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.14.
Soit $m' \geq m$. Alors $H^{m'}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$, de plus l'injection canonique est continue.

Démonstration.
La preuve est immédiate car $\|u\|_{H^m} \leq \|u\|_{H^{m'}}$.

□

Définition 1.14. ***(Ouvert régulier)***
On dit qu'un ouvert Ω est de classe C^1 si pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$ il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $h : Q \to U$ bijective telle que

$$h \in C^1(\overline{Q}),\ h^{-1} \in C^1(\overline{U}),$$
$$h(Q_+) = U \cap Q,\ et\, h(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Avec $\quad x = (x', x_n) \quad$ *où* $\quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^n_+ & = & \{x = (x', x_n) : \quad x_n > 0\}, \\ Q & = & \{x = (x', x_n) : \quad \|x'\| < 1 \; et \; \|x_n\| < 1\}, \\ Q_+ & = & Q \cap \mathbb{R}^n_+, \\ Q_0 & = & \{x = (x', x_n) : \quad \|x'\| < 1 \; et \; x_n = 0\}. \end{array}$$

Théorème 1.5. ***(Rellich-Kondrachov)*** *Soient $m \geq 1$ entier. Pour Ω un ouvert bornée de classe C^1, on a*
Si $n < 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.
Si $n = 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, où $\forall p \in [2, +\infty[$.
Si $n > 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.
Avec injections continues.

1.5.2 L'espace H_0^m

Définition 1.15. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Étant donnée $m \geq 1$, l'espace $H_0^m(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. Autrement dit*

$$u \in H_0^m(\Omega) \ \Leftrightarrow\ \exists (u_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } u_n \to u \text{ dans } H^m(\Omega).$$

Proposition 1.15. *Si $u \in H^m(\Omega)$ est à support compact, alors $u \in H_0^m(\Omega)$.*

Proposition 1.16. *$H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.5. *On peut définir H_0^m pour $m > 1$ par :*

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) : \, u = Du = ... = D^{m-1}u = 0, \; sur \, \partial\Omega \right\}.$$

Proposition 1.17. *Soit $u \in H^1(\Omega)$, alors on a l'équivalence suivant*

$$u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega.$$

Lemme 1.1. ***(Inégalité de Poincaré)*** *On suppose que Ω est un ouvert borné, alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \quad \|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2.$$

Corollaire 1.3. *La norme $\|\nabla u\|_2$ est équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^1}$.*

1.5.3 Théorème de trace

Définition 1.16. *Soit s un réel, $0<s<1$; On désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace :*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \, \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \left(\|u\|_2^2 + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.6. ***(le théorème de trace)*** *Si Ω est un ouvert borné régulière, alors il existe $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ opérateur linéaire continue tel que*

- $Ker\gamma = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma u = 0\} = H_0^1(\Omega)$;
- $Im\gamma = \left\{ u_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega) \mid \gamma u = u_{|\partial\Omega} \right\} = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *et*

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.3}$$

1.5.4 L'espace H^{-m}

Définition 1.17. *$H^{-m}(\Omega)$ est le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$,*
c'est-à-dire $T \in H^{-m}(\Omega)$ si $T : \; H_0^m(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et continue, i.e

$$\exists \, k > 0, \, \forall u \in H_0^m(\Omega) : \quad |T(u)| \leq k\|u\|_{H_0^m}.$$

Remarque 1.6. *On a les inclusions suivantes*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

1.6 Les espaces fonctionnels

Soit $(X, \| \|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 1.18. *On définit l'espace C(0,T ;X) par*

$$C(0,T;X) = \{f : (0,T) \to X \mid continues\}.$$

On le munit par la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Notation 1.3. *On note par D(0,T ;X), l'ensemble des fonctions continues à support compact dans (0,T) à valeurs sur X.*

Définition 1.19. *L'espace $L^p(0,T;X)$ avec $1 \leq p < \infty$ est l'ensemble des classes des fonctions f mesurables définies de (0,T) à valeurs dans X, telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ est dans $L^p(X)$, et il est muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(0,T,X) = \{f : (0,T) \to X |\ mesurable\ et\ \exists C > 0 :\ \|f(t)\|_X \leq C\ p.p\ \},$$

est muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = inf\{C > 0\ :\ \|f(t)\|_X \leq C\ p.p\ t \in (0,T)\}.$$

Définition 1.20. *On définit l'espace de Sobolev, noté $H^1(0,T;X)$, par*

$$H^1(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u \in L^2(0,T;X), u' \in L^2(0,T;X)\}.$$

Proposition 1.18. *L'espace $H^1(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{H^1(0,T;X)} = \left(\|u\|_{L^2(0,T;X)} + \|u'\|_{L^2(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.21. *Étant donné un entier $m \geq 2$, on définit par récurrence l'espace*

$$H^m(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u \in H^{m-1}(0,T;X)\ ;\ u' \in H^{m-1}(0,T;X)\}.$$

Proposition 1.19. *L'espace $H^m(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{H^m(0,T,X)} = \|u\|_{L^2(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|u^{(\alpha)}\|_{L^2(0,T;X)}.$$

1.7 Lemme de Gronwall

Lemme 1.2. *Soient $f, g \in C(0,T;\mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^T f(s)\, ds + \int_0^T g(s)\Psi(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^T f(s)\, ds\right) \exp\left(\int_0^T g(s)\, ds\right), \quad \forall t \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $f = 0$, le lemme précédent devient :

Corollaire 1.4. *Soient $g \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^T g(s)\Psi(s)\,ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^T g(s)\,ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Rappels sur la géométrie différentielle

Dans ce chapitre on rappel quelque définitions et propriétés de la géométrie, qui seront utiles pour la suite. On commence par des notions d'une variété différentiable, espace et fibré tangent ainsi qu'un espace et fibré cotangent, application tangent, champ de vecteurs et formes différentielles. En suite, on rappel des définitions et des propriétés élémentaires sur la géométrie Riemannienne qu'il faut absolument connaitre pour l'étude de notre problème et on renvoie aux ouvrages [9], [13] et [11] pour plus des détails.

2.1 Variété différentiable

2.1.1 Rappels topologiques

Soit M un ensemble non vide.

Définition 2.1. *Une topologie $\mathcal{T}$ est une famille de sous-ensembles de M, appelés ouverts, telle que :*
1. L'ensemble vide ϕ et M sont des ouverts ;
2. L'intersection $\bigcap_i U_i$ d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert ;
3. L'union quelconque d'ouverts est ouvert.
Le couple $(M, \mathcal{T})$ est dite espace topologique.

Définition 2.2. *Un ensemble ouvert contenant un point $p \in M$ s'appelle voisinage de M. Un espace topologique M est de Hausdorff, ou séparé, si pour tous les points p et q de M il existe des voisinages U_p et U_q disjoints.*

Définition 2.3. *On dit qu'une famille B d'ouverts est une base d'ouverts d'un espace topologique $(M, \mathcal{T})$, si tout ouvert U de $\mathcal{T}$ s'écrit comme réunion quelconque d'intersection finie des éléments de B. On dit que M est à base dénombrable, s'il admet une base d'ouverts dénombrable.*

Définition 2.4. *Une application $\varphi : M \longrightarrow N$ entre deux espaces topologiques est continue si pour tout ouvert $V \subset N$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(V) \subset M$ est un ouvert. Une application continue $\varphi : M \longrightarrow N$ est un homéomorphisme si en plus elle est bijective et sa réciproque $\varphi^{-1} : N \longrightarrow M$ est aussi continue.*

2.1.2 Variété différentiable

Soit M un ensemble non vide.

Définition 2.5. *M est une variété topologique de dimension n, si :*
- *M est un espace topologique séparé à base dénombrable.*
- *Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p et un homéomorphisme défini par : $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) Le couple (U, φ) est appelé une carte locale de M.
(b) Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont compatibles (équivalentes) si :
1) $U \cap V \neq \phi$.
2) Les applications de changement de carte $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ sont différentiables.

Remarque 2.1. *Si p est un point de U, alors $\varphi(p)$ est un point de $\mathbb{R}^n$. Désignons la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $\varphi(p)$ par $x_i(p)$, alors on a :*

$$\varphi(p) = (x_1(p), ..., x_n(p)).$$

Définition 2.6. *Un atlas différentiable A sur M de dimension n est une famille de cartes $\{(U_i, \varphi_i)_{i\in I}\}$, telle que*

- *Les ouverts U_i recouvrent M, i,e : $M = \bigcup_{i\in I} U_i$.*
- *Toutes les cartes de A sont compatibles deux à deux.*

Définition 2.7. *Un atlas différentiable A sur M est dit maximal s'il n'est pas inclus strictement dans un autre atlas différentiable sur M.*

Lemme 2.1. *Tout atlas différentiable A sur M est contenu dans un atlas différentiable maximal sur M (pour l'inclusion).*

Définition 2.8. *Une variété différentiable de dimension n est une variété topologique de dimension n munie d'un atlas différentiable maximal.*

Définition 2.9. *Une variété différentiable M de dimension n s'appelle orientable (orientée), si elle admet un atlas $A = \{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\}$, tel que tous les application de changement de cartes aient jacobien de même signe.*

Soit M une variété différentiable de dimension n, ($n \in \mathbb{N}^*$) et p un point de M.

2.1.3 Espace tangent-Espace cotangent

Définition 2.10. *On s'intéresse aux courbes qui sont différentiables et qui passent par p :*

$$\begin{array}{rcl} c :]-\varepsilon, +\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c(t) \quad avec \quad c(0) = p. \end{array}$$

Définition 2.11. *Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes en p, si $c_1(0) = c_2(0) = p$ et si pour toute carte locale (U, φ) avec $p \in U$ on a :*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

Remarque 2.2.
i) la définition a un sens car elle ne dépend pas de la carte choisie.
ii) On définit aussi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes qui passent par p : $c_1 \mathcal{R} c_2$, si elles sont tangentes en p.

Définition 2.12. *Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p.*

Définition 2.13. *L'espace tangent à M en p, noté T_pM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.*

2.1.4 Dérivation

On note par $C_p^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, de classe C^∞, définies sur un ouvert de M contenant un voisinage de p.

Définition 2.14. *Une dérivation en p est un opérateur linéaire $D_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. En d'autre terme, D_p est une dérivation si*
$\forall f, g \in C_p^\infty(M)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :
i) $D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p f + \beta D_p g$, (linéarité)
ii) $D_p(fg) = g(p) D_p f + f(p) D_p g$. (la règle de Leibniz)

Lemme 2.2. *Soit (U, φ) une carte centré en p $(\varphi(p) = 0)$. Pour tout fonction $g \in C_p^\infty(M)$, il existe des fonctions $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n \in C_p^\infty(M)$, telles que*

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \chi_i.$$

Si $q \in U$:

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q) \chi_i(q).$$

Proposition 2.1. *Chaque dérivation de $C_p^\infty(M)$ est localement de la forme*

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_{\varphi(p)},$$

où $v_i = D_p(\pi_i \circ \varphi)$, avec

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

On note par $Der\left(C_p^\infty(M), \mathbb{R}\right) = Der\left(C_p^\infty(M)\right)$ l'ensemble de tous les dérivations sur $C_p^\infty(M)$.

Proposition 2.2. *L'ensemble des dérivation $Der(C_p^\infty(M))$ est un espace vectoriel de dimension n. Si (U, φ) une carte locale en p avec les coordonnées locales $(\varphi_1(p), ..., \varphi_n(p)) = (x_1, ..., x_n)$, alors $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ est une base de $Der(C_p^\infty(M))$.*

Théorème 2.1. *L'ensemble T_pM s'identifie à $Der(C^\infty(M)$.*

Démonstration. L'application

$$\begin{array}{rcc} \Psi \quad : T_pM & \longrightarrow & Der(C^\infty(M) \\ X_p = [c] & \longmapsto & \Psi(X_p), \end{array}$$

telle que pour toute $g \in C_p^\infty(M)$:

$$\Psi(X_p)(g) = \frac{d}{dt}\left(g \circ c\right)(0)$$

est une bijection canonique entre T_pM et $Der(C^\infty(M))$. □

Corollaire 2.1. *L'espace tangent T_pM est un espace vectoriel de dimension n.*

Définition 2.15. *L'espace cotangent à M en p, noté T_p^*M ou $(T_pM)^*$, est l'espace vectoriel dual de l'espace tangent T_pM, c-à-d :*

$$T_p^*M = \left\{\alpha_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}, \textit{linéaire}\right\}.$$

Proposition 2.3. *Soit (U, φ) une carte locale en p de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, alors $\{dx_1, ..., dx_n\}$ est une base de T_p^*M, où dx_i est la différentielle de l'application $x_i = \pi_i$.*

2.1.5 Application tangente

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension n et k respectivement et soit $f : M \to N$ une application.

Définition 2.16. *Si (U, φ) est une carte locale de M en p et (V, ψ) est une carte locale de N en f(p) avec $f(U) \subset V$, alors l'application $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle l'expression locale de f relative à des cartes (U, φ) et (V, ψ).*

Définition 2.17. *L'application $f : M \to N$ est différentiable (ou de classe C^k, $0 \leq k \leq \infty$) en p, si l'expression locale de f, notée $\bar{f}$, relative dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) est différentiable (ou de classe C^k, $0 \leq k \leq \infty$).*
On dit que f est différentiable (ou de classe C^k, $0 \leq k \leq \infty$)) si elle est différentiable (ou de classe C^k, $0 \leq k \leq \infty$) en chaque point de M.

Définition 2.18. *L'application :*

$$\begin{array}{rccc} d_pf: & T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}N \\ & X_p & \longmapsto & (d_pf)(X_p), \end{array}$$

définie par $d_pf(X_p)(h) = X_p(h \circ f)$ pour tout $h \in C^\infty(N)$ est appelée la différentielle de f ou l'application tangente en p induite par f.

Définition 2.19. *Le rang de f en p, noté $rang_pf$ est le rang de l'application tangente.*

Remarque 2.3. *Si le rang de f en p reste constant pour tout point de M, alors on le note rang f.*

Définition 2.20. *On dit que f est un immersion en p, si l'application tangent d_pf est injective.*
f est un immersion sur M, si pour tout $p \in M$ l'application d_pf est injective.

Définition 2.21. *On dit que f est un plongement, si :*
• *f est une immersion injective.*
• *$f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme sur son image avec $f(M) \subset N$ muni de la topologie induite par celle de N.*

2.1.6 Fibré tangent-Fibré cotangent

Définition 2.22. *L'ensemble*

$$\begin{aligned} TM &= \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM \\ &= \{(p, X_p) : p \in M,\ X_p \in T_pM\} \end{aligned}$$

est appelé le fibré tangent à M ; On désigne par

$$\begin{array}{rccc} \pi: & TM & \to & M \\ & (p, X_p) & \mapsto & p, \end{array}$$

la projection canonique.

Définition 2.23. *L'ensemble*

$$\begin{aligned} T^*M &= \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M \\ &= \left\{(p, \alpha_p) : p \in M,\ \alpha_p \in T_p^*M\right\} \end{aligned}$$

est appelé le fibré cotangent de M ; On désigne par

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & T^*M & \to & M \\ & (p, \alpha_p) & \mapsto & p, \end{array}$$

la projection canonique.

Théorème 2.2. *Le fibré tangent est une variété différentiable de dimension 2n.*

Définition 2.24. *L'application tangente à f, noté df, est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} df: & TM & \longrightarrow & TN \\ & (p, X_p) & \longmapsto & (f(p), d_p f(X_p)), \end{array}$$

avec $d_p f$ est l'application tangente en p induite par f.

2.1.7 Champ de vecteurs

Définition 2.25. *Un champ de vecteurs sur M est une application différentiable définie par*

$$\begin{array}{rccc} X & : M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & (p, X_p). \end{array}$$

Autrement dit, un champ de vecteurs est une application $X : M \longrightarrow TM$, telle que

$$\pi \circ X = id_M.$$

On note par $\aleph(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Proposition 2.4. *Un champ de vecteurs sur M peut considérer comme une dérivation sur $C^\infty(M)$, c-à-d :*

$$\begin{array}{rccc} X: & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & X(f), \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} X(f): & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & X_p f = d_p f, \end{array}$$

telle que $\forall f, g \in C^\infty(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

i) $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$.

ii) $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

Proposition 2.5. *Tout champ de vecteurs sur M s'exprime localement comme combinaison $C^\infty(U)$-linéaire*

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\varphi(.),$$

avec $v_i \in C^\infty(U)$.

Définition 2.26. ***(Crochet de Lie)*** *Soient X,Y deux champs de vecteurs sur M, on définit le crochet de Lie, noté[.,.], entre X et Y par*

$$[X, Y] = X.Y - Y.X,$$

tel que $[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Proposition 2.6. *Le crochet de Lie est un champ de vecteurs sur M, c-à-d :*

$$[.,.] : \aleph(M) \times \aleph(M) \longrightarrow \aleph(M).$$

De plus, si (U,φ) est une carte locale en p sur M, et soient X,Y deux champs de vecteurs sur M, alors

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où

$$X = \textstyle\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad v_i \in C^\infty(M),$$

$$Y = \textstyle\sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad w_j \in C^\infty(M).$$

Propriétés 2.1. *$\forall X, Y \in \aleph(M), \forall f \in C^\infty(M)$, on a :*
i) $[X, Y] = -[Y, X]$.

ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

iii) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X \quad , \quad [X, fY] = f[X, Y] - X(f)Y$.

2.1.8 Champs de tenseurs et formes différentielles

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. Nous notons E' et F' leur espaces vectoriels duales.

Définition 2.27. *Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E' et $\{f_1, ..., f_n\}$ est une base de F', alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e_i \otimes f^j$.*
Nous pouvons itérer le processus de tensorialisation et définir ainsi $E \otimes ... \otimes E \otimes F \otimes ... \otimes F$, en prenant $F = E'$, nous obtenons alors $E \otimes ... \otimes E \otimes E' \otimes ... \otimes E'$, où E apparaît s fois et E' r fois.
Un tel élément s'écrit $T = T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$, c'est un tenseur de type (s,r).

Définition 2.28. *Le produit tensoriel du tenseur :*

$$S = S^{k_1, \ldots, k_q}_{l_1, \ldots, l_p} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p}$$

avec

$$T = T^{i_1, \ldots, i_s}_{j_1, \ldots, j_r} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S^{k_1, \ldots, k_q}_{l_1, \ldots, l_p} \otimes T^{i_1, \ldots, i_s}_{j_1, \ldots, j_r} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}.$$

Soit M une variété différentiable de dimension n, ($n \in \mathbb{N}^*$) et $p \in M$.

Définition 2.29. *Pour tout $p \in M$, l'espace vectoriel suivant :*

$$T^{(s,r)}_p M = \underbrace{T_p M \otimes ... \otimes T_p M}_{s fois} \otimes \underbrace{T^*_p M \otimes ... \otimes T^*_p M}_{r fois}$$

est l'espace des tenseurs de type (s,r) sur l'espace tangent à M en p.

Définition 2.30. *L'ensemble*

$$T^{(s,r)} M = \bigcup_{p \in M} T^{(s,r)}_p M$$

est l'ensemble des champ de tenseurs de type (s,r).

Définition 2.31. *Un champ de tenseur de type (s,r) sur M est une application différentiable définie par*

$$\begin{array}{rccl} T^{(s,r)} : & M & \longrightarrow & T^{(s,r)} M \\ & p & \longmapsto & T^{(s,r)}_p. \end{array}$$

Expression locale
Au voisinage de $p \in M$ sur une carte (U, φ) dans une base associée à des coordonnées x_i, un tenseur de type (s,r) s'écrit

$$T^{(s,r)}_{|_p} = T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{j_1 |_p} ... \otimes dx_{j_r |_p},$$

où $T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}$ sont des nombres réels.

Définition 2.32. *Une forme de Pfaff sur M est une application différentiable $\alpha : M \longrightarrow T^*M$, telle que $\pi \circ \alpha = Id_M$. Notons par $\Lambda_1(M)$ ou $\Lambda^1(T^*M)$ l'ensemble des formes de pfaff sur M.*

Notation 2.1. *On note par $\Lambda^k(T^*M) = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times \Lambda^k(T_p^*M)$ l'ensemble des couples (p, α_p) avec $p \in M$ et $\alpha_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ est une forme k-linéaire alterné sur T_pM. On désigne par*

$$\begin{array}{rccc} \pi_* : & \Lambda^k(T^*M) & \longrightarrow & M \\ & (p, \alpha_p) & \longmapsto & p \end{array}$$

La projection canonique.

Définition 2.33. *On appelle forme différentielle de degré k ($k \leq n$) sur M une application différentiable $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^k(T^*M)$, telle que $\pi_* \circ \alpha = Id_M$.*
On désigne $\mathcal{A}^k(M)$ l'ensemble k-forme différentielles sur M.

Définition 2.34. *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de M. Une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions lisses (de classe C^∞) $\rho_i : M \to [0,1]$, $i \in I$ telles que pour tout $i \in I$, ρ_i est supportée dans U_i,*

$$\forall p \in M, \sum_{i\in I} \rho_i(p) = 1,$$

et telles que la famille de leurs supports $Supp\, \rho_i = \overline{\{p \in M \mid \rho_i(p) \neq 0\}}$ soit localement finie, c'est-à-dire :

$$\forall K \subset M \text{ compact} \quad \{i \in I \mid Supp\, \rho_i \cap K \neq \varnothing\} \quad \text{est fini.}$$

Théorème 2.3. *Tout recouvrement ouvert d'une variété différentiable admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

Définition 2.35. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés M (de dimension n) et N (de dimension m) et soit $p \in M$. L'application $f^* : \mathcal{A}^k(N) \to \mathcal{A}^k(M)$ ($k \leq \min(n,m)$) définie par*

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}^k(N) \quad f^*\alpha_{|_p}(X_p^1, ..., X_p^k) = \alpha_{f(p)}(d_pf(X_p^1), ..., d_pf(X_p^k))$$

est appelée l'image réciproque de α par f.

Théorème 2.4. *Il existe une et une seule application linéaire $d : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(N)$ graduée de degré plus un, ie $d(\mathcal{A}^k(M)) \subset \mathcal{A}^{k+1}(M)$ telle que :*
i) $\forall \alpha \in \mathcal{A}^k(M)$, $\forall \beta \in \mathcal{A}^l(M)$: $\quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
ii) $d \circ d = 0$.

Définition 2.36. *L'application d est appelée la différentielle extérieure.*

Définition 2.37. *Soit X un champ de vecteurs sur M et $\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$. On appelle produit intérieure de α par X, noté $i_X\alpha$, la forme différentielle de degré (k-1) sur M définie par :*
- *Si k=0 alors $i_X\alpha = 0$.*
- *Sinon, pour tout $X_p^1, ..., X_p^{k-1} \in T_pM$*

$$i_X\alpha_{|_p}(X_p^1, ..., X_p^{k-1}) = \alpha_{|_p}(X_p, X_p^1, ..., X_p^{k-1}).$$

Définition 2.38. *Soit $\alpha = f(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ une forme différentielle de degré n sur $\mathbb{R}^n$ à support compacte. On pose*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n.$$

Définition 2.39. *Soit M une variété différentiable de dimension n, orientable munie d'un atlas différentiable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ et ω une n-forme différentielle sur M. On se donne une partition de l'unité ρ_i subordonnée à un recouvrement $\{U_i\}$, préservant l'orientation. On pose*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_1(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega).$$

Proposition 2.7. ***(Formule de Stockes)*** *Soit ω une forme différentielle de degré $n-1$, à support compact sur la variété orientable M. Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega,$$

où $i : \partial M \to M$ est l'inclusion naturelle.

2.2 Variété Riemannienne

Soit M une variété différentiable de dimension n, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et p un point de M.

2.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 2.40. *Une métrique Riemannienne g sur M est une application*

$$g : \aleph(M) \times \aleph(M) \to C^\infty(M),$$

telle que pour tout $p \in M$

$$\begin{array}{rccc} g_p : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \longmapsto & g_p(X_p, Y_p), \end{array}$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

Exemple 2.1. *Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$, noté g_0, tel que pour tout $X = (x_1, ..., x_n) \in T_p\mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, ..., y_n) \in T_p\mathbb{R}^n$ $(T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n)$:*

$$g_0(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exemple 2.2. *Si $M = \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées cartésiennes (x,y), la métrique euclidienne s'écrit*

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy,$$

c-à-d

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expression locale
Si (U, φ) est une carte sur M, alors

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelées composantes du tenseur métrique relativement à la carte (U, φ).
Si $X = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ alors :

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j.$$

Définition 2.41. *On définit la norme d'un champ de vecteurs X sur M par :*

$$\|X\|_g = \sqrt{g(X, X)}.$$

Si $X = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors

$$\|X\|_g^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i v_j.$$

Proposition 2.8. *Soient (U,φ) et (V,ψ) deux cartes locales avec $p \in U \subset M$ de base locale des champs de vecteur $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$ et $(\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_n})$ respectivement, alors pour tout changement de coordonnées $x \longrightarrow y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$, tel que $\varphi(p) = x = (x_1,...,x_n)$ et $\psi(p) = y = (y_1,...,y_n)$, on a :*

$$g_{ij}(p) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\tilde{g}_{kl}(p),$$

où $g_{ij} = g_p(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})$ et $\tilde{g}_{kl} = g_p(\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_l})$.

Définition 2.42. *Une variété Riemannienne de dimension n est une variété différentiable de dimension n munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 2.3. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire*

$$g_0(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

où $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}^n$.

Image inverse d'une métrique

Soit (N,h) une variété Riemannienne de dimension m et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞.

Définition 2.43. *Si f est une immersion en tout p, l'image inverse de h par f, notée f^*h, est une métrique sur M définie par*

$$f^*h : \aleph(M) \times \aleph(M) \longrightarrow C^\infty M,$$

telle que, pour tout $X,Y \in \aleph(M)$:

$$f^*h(X,Y)_p = h_{f(p)}(d_pf(X_p), d_pf(Y_p)).$$

Expression locale de la métrique inverse f^*h
Soient (U,φ) une carte sur M de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$ et (V,ψ) une carte de N de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_m})$, alors

$$\begin{aligned}(f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_l}{\partial x_j} h\left(\frac{\partial}{\partial y_k},\frac{\partial}{\partial y_l}\right)\circ f.\end{aligned}$$

2.2.2 Connexion Linéaire

Définition 2.44. *Une connexion linéaire sur M (ou dérivée covariante de champ de vecteurs) est une application :*

$$\begin{array}{rccl}\nabla : & \aleph(M)\times\aleph(M) & \to & \aleph(M)\\ & (X,Y) & \to & \nabla_X Y,\end{array}$$

telle que pour tout $X,Y,Z \in \aleph(M)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a :
i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
ii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.
iii) $\nabla_{X+fY}Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z$.

$\nabla_X Y$ est dite la dérivée covariante de Y par rapport à X.

Définition 2.45. *Soit H un champ de vecteurs sur (M,g), la différentielle covariante ∇H de H est une forme bilinéaire définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \nabla H : & \aleph(M) \times \aleph(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla H(X,Y) = \langle \nabla_X H, Y \rangle_g, \end{array}$$

où $\nabla_X H$ désigne la dérivée covariante de H par rapport à X.

Définition 2.46. *Les symboles de Christoffel, notés Γ_{ij}^k, sont les coefficients dans la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ donnés par :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Définition 2.47.

- *Un champ de vecteurs Y est dite parallèle par rapport à la connexion ∇, si*

$$\nabla_X Y = 0, \quad \text{pour tout } X \in \aleph(M).$$

- *∇ est dite compatible avec g (ou parallèle), si :*

$$\nabla g = 0,$$

i.e

$$\nabla_X g(Y,Z) = 0, \quad \text{pour tout } X, Y, Z \in \aleph(M).$$

Définition 2.48. *Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire définie par*

$$\begin{array}{rccc} T : & \aleph(M) \times \aleph(M) & \rightarrow & \aleph(M) \\ & (X,Y) & \mapsto & T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \end{array}$$

Expression locale

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad i.e \quad T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

T est un champ de tenseur de type (1,2).

Remarque 2.4. *Une connexion est dite sans torsion si $T \equiv 0$, i.e $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tout $i, j, k = 1, ..., n$.*

Définition 2.49. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, la connexion linéaire ∇ sur M définie par la formule de Kozul suivante :*

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= X\left(g\left(Y,Z\right)\right) + Y\left(g\left(Z,X\right)\right) - Z\left(g\left(X,Y\right)\right) \\ &\quad + g\left(Z,[X,Y]\right) + g\left(Y,[Z,X]\right) - g\left(X,[Y,Z]\right) \end{aligned}$$

est appelée connexion de Levi-Cevita.

Théorème 2.5. *Si (M,g) est une variété Riemannienne, alors l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g est la connexion de Levi-Civita.*

Proposition 2.9. *Soit (U,φ) une carte locale sur (M,g) et ∇ la connexion de Levi-Civita, les symboles de Christoffel sont donnés par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right\},$$

où g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U,φ).

2.2.3 Courbures

Soit (M,g) une variété Riemannienne munie d'une connexion linéaire ∇.

Définition 2.50. *Un tenseur de courbure R associé à ∇ est une application de classe C^∞ sur M telle que*

$$\begin{array}{lll} R: \ \aleph(M)\times\aleph(M)\times\aleph(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ \qquad (X,Y,Z) & \longmapsto & R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z. \end{array}$$

Définition 2.51. *Le tenseur de courbure du connexion de Levi-Civita ∇ est dite tenseur de courbure Riemannienne .*

Propriétés 2.2. $\forall X,Y,Z,W\in\aleph(M)$ *:*

i) Le tenseur de courbure Riemannienne est un tenseur sur M de type $(3,1)$*.*

ii) $R(X,Y)Z=R(Y,X)Z$.

iii) $g(R(X,Y)Z,W)=g(R(X,Y)W,Z)$.

iv) $R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0$.

v) $g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)$.

vi)
$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= R(X,Y+Z)(Y+Z)-R(X,Y-Z)(Y-Z) \\ &\quad +R(X+Z,Y)(X+Z)R(X-Z,Y)(X-Z). \end{aligned}$$

Définition 2.52. *Soit P un 2-plan de T_xM engendré par X et Y, la courbure sectionnelle de P est définie par*

$$K_x(P)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\|X\|^2\|Y\|^2-g(X,Y)^2}.$$

Remarque 2.5. *Si on remplace X par λX pour $\lambda\neq 0$ et Y par $Y-g(X,Y)X$. On peut donc supposer que $\{X,Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas*

$$K_x(P)=g(R(X,Y)Y,X).$$

Définition 2.53. *On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe $C\in\mathbb{R}$, telle que pour tout $x\in M$ et tout 2-plan P de T_xM, on a :*

$$K_x(P)=C.$$

Définition et propriétés élémentaires du trace Soit E un espace pré-hilbertien de dimension n et $T:E\longrightarrow E$ une application linéaire, alors :
1)Relativement à une base orthonormale $\{e_1,...,e_n\}$ de E, on a :

$$TraceT=trT=\sum_{i=1}^{n}\langle Te_i,e_i\rangle.$$

2)Si $\{e_1,...,e_n\}$ est une base de E et $(a_{ij})_{ij}$ la matrice associée à T, alors

$$trT=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

Définition 2.54. *La courbure de Ricci sur (M,g) est un tenseur de Type* $(0,2)$ *défini par*

$$\begin{array}{rccl} Ric: & \aleph(M)\times\aleph(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \longmapsto & Ric(X,Y)=tr(R(.,X)Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i), \end{array}$$

où (e_i) *est une base orthonormée locale sur M, et*

$$\begin{array}{rccl} R(.,X)Y: & \aleph(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ & Z & \longmapsto & R(Z,X)Y. \end{array}$$

Remarque 2.6. *La courbure de Ricci est une forme bilinéaire symétrique.*

Définition 2.55. *Le tenseur de la courbure de Ricci sur (M,g) est un tenseur de type (1,1) défini par*

$$\begin{array}{rccl} Ricc: & \aleph(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M) \\ & X & \longmapsto & Ricc(X)=\sum_{i=1}^{n} R(X,e_i)e_i, \end{array}$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ *base orthonormée sur M.*

Remarque 2.7. *Pour tout* $X,Y\in\aleph(M)$*, on a :*

$$Ric(X,Y)=g(Ricci(X),Y).$$

Définition 2.56. *Un courbure scalaire sur (M,g) est une fonction définie par*

$$S=tr_gRic=\sum_{i,j=1}^{n} g\,(R(ei,ej)ej,ei),$$

où $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ *une base orthonormée sur M.*

2.2.4 Les opérateurs sur une variété Riemannienne

Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension n, munie de sa connexion de Levi-Civita ∇ et $p\in M$.

Définition 2.57. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \imath: & \Lambda(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ & \omega & \longmapsto & \imath\omega, \end{array}$$

définie par

$$g(\imath\omega,X)=\omega(X)$$

est un isomorphisme $C^{\infty}(M)$*-linéaire.*
L'application

$$\begin{array}{rccl} \imath_p: & T_p^*M & \rightarrow & T_pM \\ & \omega_p & \mapsto & \imath_p(\omega), \end{array}$$

telle que

$$g(\imath_p(\omega_p),X_p)=\omega_p(X_p)$$

est un isomorphisme linéaire entre T_pM *et* T_p^*M*.*

Expression locale
Pour tout $X\in\aleph(M)$ et $\omega\in\Lambda(M)$, on a localement :

$$\imath(\omega)=\sum_{k=1}^{n} g^{ij}\omega_i\frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ est la matrice inverse de $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Définition 2.58. *L'opérateur gradient, noté grad, est défini par*

$$\begin{array}{rccc} grad: & C^\infty(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ & f & \longmapsto & grad(f) = \imath(df), \end{array}$$

où df est la différentielle de f.

Expression locale
Pour une carte (U, φ) sur M avec les champs de base associée $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, alors pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$grad(f) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Proposition 2.10. *Pour tout champ de vecteurs $X \in \aleph(M)$ et tout fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$df(X) = \langle df, X \rangle_g = X(f) = g(grad\, f, X).$$

Propriétés 2.3. *Pour tout $f, h \in C^\infty(M)$, on a :*
i) $grad(f + h) = grad\, f + grad\, h$.
ii) $grad(fh) = h\, grad\, f + f\, grad\, h$.
iii) $(grad\, f)(h) = (grad\, h)(f)$.

D'un champ de vecteurs

Soit $X \in \aleph(M)$ un champ de vecteurs sur (M,g), on a :

$$\begin{array}{rccc} \nabla X: & \aleph(M) & \longrightarrow & \aleph(M) \\ & Y & \longmapsto & \nabla_Y X \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire.
En p, on a :

$$\begin{array}{rccc} (\nabla X)_p: & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & X_p & \longmapsto & (\nabla_{X_p} X)_p \end{array}$$

est une application linéaire.

Définition 2.59. *L'opérateur de divergence, noté div, est défini par :*

$$\begin{array}{rccc} div: & \aleph(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & div(X) = tr_g(\nabla X), \end{array}$$

tel que

$$(divX)(p) = tr_g((\nabla X)_p).$$

Expression locale
En coordonnées locale, on a :

$$divX = \sum_{i=1}^{n} dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Si $(e_i)_{i=1,...,n}$ est une base orthonormé sur M, alors on a :

$$divX = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

D'une forme différentielle

Soit $\omega \in \Lambda(M)$ une 1-forme sur (M,g), on a :

$$\begin{array}{rccc} \nabla\omega : & \aleph(M) & \longrightarrow & \Lambda(M) \\ & Y & \longmapsto & \nabla_Y\omega \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire.
En p, on a :

$$\begin{array}{rccc} (\nabla\omega)_p : & T_pM & \longrightarrow & T_p^*M \\ & X_p & \longmapsto & (\nabla_{X_p}\omega)_p \end{array}$$

est une application linéaire.

Définition 2.60. *La divergence de $\omega \in \Lambda(M)$, noté $div(\omega)$, est une fonction sur M définie par*

$$div(\omega) = tr_g(\nabla\omega),$$

telle que

$$(div(\omega))(p) = tr_g((\nabla\omega)p).$$

Propriétés 2.4. *pour touts $X, Y \in \aleph(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*
a) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$.
b) $div(fX) = f div(X) + X(f)$.

Proposition 2.11. ***Expression locale du divergence***
Pour tout $X \in \aleph(M)$:

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{det(g_{ij})}.$$

Définition 2.61. *La hessienne de $f \in C^\infty(M)$, noté $Hess(f)$, est une application $C^\infty(M)$-bilinéaire, définie par*

$$\begin{array}{rccc} Hess(f) : & \aleph(M)\times\aleph(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & g(\nabla_X\, grad(f), Y). \end{array}$$

Définition 2.62. *L'opérateur Laplacien sur M (de Laplace-Beltrami) est défini par*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & \Delta(f) = div(grad\ f) = tr_g(Hess(f)). \end{array}$$

Propriétés 2.5. *Pour tout $f, h \in C^\infty(M)$, on a :*
1.$\Delta(f+h) = \Delta(f) + \Delta(h)$.
2.$\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g\left(grad\, f, grad\, h\right)$.

Démonstration. Soit $f, h \in C^\infty(M)$:
1).En utilisant les propriétés des opérateurs *grad* et div, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(f+h) &= div\left(grad\left(f+h\right)\right) \\ &= div\left(grad\, f + grad\, h\right) \\ &= div\left(grad\, f\right) + div\left(grad\, h\right) \\ &= \Delta(f) + \Delta(h). \end{aligned}$$

2).En utilisant les propriétés des opérateurs *grad* et div et la formule $X(f) = g(gradf, X)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(f\,h) &= div\left(grad\left(f\,h\right)\right) \\ &= div\left(f\, grad\, h + h\, grad\, f\right) \\ &= f\, div\left(gradh\right) + \left(grad\, h\right)(f) + h\, div\left(grad\, f\right) + \left(grad\, f\right)(h) \\ &= f\Delta\left(h\right) + h\Delta\left(f\right) + 2g\left(grad\, f, grad\, h\right). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.12. ***Expression locale du Laplacien***
Pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\Delta(f) = \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Exemple 2.4. $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique euclidienne g_p. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $X = (X_1, ...X_n) \in \aleph(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\begin{aligned} grad(f) &:= \nabla_g f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ div(f) &:= div_g f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \\ \Delta(f) &:= \Delta_g f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Existence et unicité d'une solution

Dans ce chapitre, sous certaines conditions sur les données initiales et en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité, nous montrons l'existence globale et l'unicité de la solution du problème considéré.

3.1 Notation et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ de frontière régulière Γ. Supposons que Γ est constituée de deux parties fermées et disjointes Γ_0 , Γ_1, d'intérieure non vides, et soit $v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteur unitaire sortant à Γ. Soit $v_A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteur co-normal sur Γ, on définit :

$$\mu = \frac{v_A}{|v_A|_g}.$$

μ est un champ de vecteur normal unitaire sur Γ en fonction de la métrique g. L'objet de ce chapitre est de chercher $u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$(P) \begin{cases} u'' - \Delta_g u + h(\nabla u) + f(u) = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + l(u') = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \ u'(x, 0) = u_1(x) & \text{sur} \quad \Omega, \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues non linéaires.
La deuxième et la troisième équation du problème (P) représentent les conditions aux limites sur $\Gamma_0 \times (0, \infty)$, et sur $\Gamma_1 \times (0, \infty)$ respectivement, où $\frac{\partial u}{\partial \mu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v_j$ et $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.
la quatrième équation c'est des conditions initiales, où les fonctions u_0, u_1 sont des données.
Tout d'abord, on définit l'espace suivant :

$$L^2(\Gamma_1) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \left(\int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

on le munit d'un produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{2,\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} u(x) v(x) d\Gamma,$$

et d'une norme :

$$\|v\|_{2,\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\Gamma.$$

Afin d'étudier le problème (P), nous aurons besoin de préciser quelques notations relatives au problème considéré et de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.
• **Hypothèses.**
$(\mathbf{H}_1)$ La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, vérifie :

$$F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{où} \quad F' = f,$$

$$|f(s)| \leq b_1|s|^\rho + b_2\ , \quad |f'(s)| \leq b_1|s|^{\rho-1} + b_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

où b_1, b_2 des constantes positives et

$$1 \leq \rho \leq \begin{cases} 2, & n \leq 3, \\ \frac{n}{n-2}, & n \geq 4. \end{cases} \tag{3.2}$$

$(\mathbf{H}_2)$ La fonction $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, et il existe des constantes $\beta, L > 0$ telles que :

$$|h(\xi)| \leq \beta\sqrt{a_0}|\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

$$|\nabla h(\xi)| \leq L, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

$(\mathbf{H}_3)$ La fonction $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, croissante et il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$c_1|s|^2 \leq l(s)s \leq c_2|s|^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. ▶ *Un exemple de la fonction f satisfaisant l'hypothèse* $(\mathbf{H_1})$ *est donné par :*

$$f(s) = \gamma|s|^{\rho-1}s \quad \textit{pour}\, \gamma > 0 \quad \textit{et} \quad 1 < \rho \leq \begin{cases} 2, & n \leq 3, \\ \frac{n}{n-2}, & n \geq 4. \end{cases}$$

3.2 Formulation variationnelle

Pour étudier l'existence du solution, nous procédons à obtenir la formulation variationnelle du problème (P). Pour cela, on introduit les espaces suivants :

$$V = \{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0\}\ ,\ W = H^2(\Omega) \cap V.$$

La norme sur V est équivalente à celle de H_0^1 et l'espace W est munie de la norme :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|v\|_V.$$

Soit u solution du problème (P), donc u vérifie

$$u'' - \Delta_g u + h(\nabla u) + f(u) = 0, \tag{3.6}$$

en multipliant (3.6) par un élément $w \in V$, ensuite, intégrant le résultat obtenu sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega u''.wdx - \int_\Omega \Delta_g u.wdx + \int_\Omega h(\nabla u).wdx + \int_\Omega f(u).wdx = 0,$$

en utilisant la formule de Green (3.9), on obtient

$$-\int_\Omega \Delta_g u.wdx = \int_\Omega < \nabla_g u, \nabla_g w >_g dx - \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \mu} wd\Gamma,$$

comme $w \in V$, donc $w = 0$ sur Γ_0 et par les condition de bord on a :

$$-\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \mu} w d\Gamma = \int_{\Gamma_1} l(u') w d\Gamma,$$

et par conséquent

$$\int_\Omega u'' w dx + \int_\Omega < \nabla_g u, \nabla_g w >_g dx + \int_{\Gamma_1} l(u') w d\Gamma + \int_\Omega h(\nabla u) w dx + \int_\Omega f(u) w dx = 0,$$

donc le problème variationnelle du problème (P) s'écrit de la façon suivante :

$$(P_V) \begin{cases} \int_\Omega u'' w dx + \int_\Omega < \nabla_g u, \nabla_g w >_g dx + \int_{\Gamma_1} l(u') w d\Gamma \\ \quad + \int_\Omega h(\nabla u) w dx + \int_\Omega f(u) w dx = 0, \qquad \forall w \in V. \end{cases}$$

Définition 3.1. *On dit que la fonction u est une solution intégrable du problème (P) si : $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et satisfait*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (u\phi'' + \langle \nabla_g u, \nabla_g \phi \rangle_g + h(\nabla u)\phi + f(u)\phi)\, dx dt &= \int_\Omega u_1 \phi(0) dx - \int_\Omega u_0 \phi'(0)\, dx \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_1} l(u') \phi d\Gamma dt, \end{aligned}$$

pour tout $\phi \in C^2(0,T;V)$ avec $\phi(T) = \phi'(T) = 0$.

Lemme 3.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, u une fonction de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et soit H un champ de vecteur sur $(\mathbb{R}^n, g)$, alors on a :*

$$div_g(uH) = u div_g(H) + H(u), \tag{3.7}$$

$$\int_\Omega div_g(H) dx = \int_{\partial\Omega} \langle H, \mu \rangle_g d\Gamma. \tag{3.8}$$

Démonstration. • Il suffit d'applique la formule de Stockes pour $\alpha = i_H \omega$, on obtient

$$\int_\Omega (div_g(H))\omega = \int_{\partial\Omega} i_H \omega,$$

mais comme $j^*(i_H\omega) = \langle H, v \rangle_g \omega_\partial$, où $j : \partial\Omega \to \Omega$ est l'injection naturelle, donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega (div_g(H))\omega &= \int_\Omega d(i_H \omega) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle H, \mu \rangle_g \omega_\partial, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega div_g(H) dx = \int_{\partial\Omega} \langle H, \mu \rangle_g d\Gamma.$$

• En prenant $H = uH$, alors

$$div_g(uH) = u div_g(H) + \langle du, H \rangle_g,$$

comme on a

$$\langle \nabla_g u, H \rangle_g = \langle du, H \rangle_g = H(u),$$

donc

$$div_g(uH) = u div_g(H) + H(u).$$

d'où le résultat. $\square$

Lemme 3.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soient $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, alors on a la formule de Green :*

$$\int_\Omega v\Delta_g u dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\mu} d\Gamma - \int_\Omega \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_g dx. \tag{3.9}$$

Démonstration. On prenant $H = v\nabla_g u$, alors :
D'une part, on a par les propriétés de l'opérateur divergence :

$$\begin{aligned} div_g(H) &= div_g(v\nabla_g u) \\ &= vdiv(\nabla_g u) + \langle dv, \nabla_g u\rangle_g, \end{aligned}$$

par définition de l'opérateur gradient, on obtient

$$vdiv_g(\nabla_g u) + \langle dv, \nabla_g u\rangle = v\Delta_g u + \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_g.$$

D'autre part, par définition de l'opérateur gradient et du dérivée normale extérieure on a :

$$\begin{aligned} \langle H, \mu\rangle_g &= \langle v\nabla_g u, \mu\rangle_g \\ &= v\langle du, \mu\rangle_g \\ &= v\frac{\partial u}{\partial\mu}, \end{aligned}$$

par la formule (3.8) on a :

$$\int_\Omega div(v\nabla_g u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\mu}\, d\Gamma,$$

d'où

$$\int_\Omega \left(v\Delta_g u + \langle \nabla_g u, \nabla_g v\rangle_g\right)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\mu}\, d\Gamma.$$

□

3.3 Existence et unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cités précédemment, l'existence globale et l'unicité d'une solution régulière seront obtenus en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité.

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$ *sont vérifiés. Si* $(u_0, u_1) \in W \times W$ *satisfait* $\frac{\partial u_0}{\partial\mu} + l(u_1) = 0$ *sur* Γ_1, *alors le problème* (P) *admet une unique solution régulière* u *ayant les régularités suivantes :*

$$u \in L^\infty(0,\infty;V), \quad u' \in L^\infty(0,\infty;V) \quad et \quad u'' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

• Pour démontrer ce théorème, on considère le changement de variable suivant :
$v(x,t) = u(x,t) - \phi(x,t)$ où

$$\phi(x,t) = u_0(x) + tu_1(x), \quad (x,t) \in Q \triangleq \Omega \times (0,T),$$

on obtient donc le problème équivalent au problème (P) :

$$(P_1)\begin{cases} v'' - \Delta_g v + h(\nabla v + \nabla\phi) + f(v+\phi) = \mathcal{F} & \text{dans} \quad Q, \\ v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \frac{\partial v}{\partial\mu} + l(v' + \phi') = \mathcal{B} & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ v(0) = v'(0) = 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{F} = \Delta_g\phi$ et $\mathcal{B} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mu}$.

3.3.1 Existence

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment l'existence d'une solution sera obtenu en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité.
La méthode de Faedo-Galerkin consiste à réaliser les trois étapes suivantes :
(i) On construit des solutions "approchées" ;
(ii) On établit sur ces solutions approchées des estimations a priori ;
(iii) On passe à la limite, grâce aux propriétés de compacité.

Solutions approchées

L'espace W est séparable, il existe une suite $w_1, ..., w_m$ ayant les propriétés suivants :

$$\begin{cases} w_i \in W, \quad \forall i; \\ \forall m,\, w_1, w_2, ..., w_m \quad \text{sont linéairement indépendants;} \\ V_m = \langle \{w_1, ..., w_m\} \rangle. \end{cases}$$

On cherche alors $v_m = v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(t) w_j$ solution approchée du problème suivant :

$$\begin{cases} \int_\Omega v_m''(t) w\, dx + \int_\Omega \langle \nabla_g v_m(t), \nabla_g w \rangle_g\, dx + \int_\Omega h(\nabla v_m(t) + \nabla\phi(t)) w\, dx \\ \quad + \int_\Omega f(v_m(t) + \phi(t)) w\, dx + \int_\Gamma l(v_m'(t) + \phi'(t)) w\, d\Gamma \\ = \int_\Omega \mathcal{F}(t) w\, dx + \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) w\, d\Gamma, \quad \forall w \in V_m, \\ v_m(0) = v_m'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

On obtient un système d'équation différentielle non linéaire du deuxième ordre.
Comme la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante, et d'après les arguments standards des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires nous concluons qu'il existe une solution unique locale du système (3.10) dans l'intervalle $[0, t_m]$, t_m dépend de m ayant la régularité suivante :

$$v_m \in L^2(0, t_m; V_m),\ v_m' \in L^2(0, t_m; V_m) \text{ et } v_m'' \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)).$$

L'étape qui suit montre que $t_m = T$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Estimations a priori

Estimate I. On remplace w par $v_m'(t)$ dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v_m''(t) v_m'(t)\, dx + \int_\Omega \langle \nabla_g v_m(t), \nabla_g v_m'(t) \rangle_g\, dx + \int_\Omega h(\nabla v_m(t) + \nabla\phi(t)) v_m'(t)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega f(v_m + \phi) v_m'(t)\, dx + \int_{\Gamma_1} l(v_m' + \phi') v_m'(t)\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}(t) v_m'(t)\, dx + \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) v_m'(t)\, d\Gamma, \end{aligned}$$

et comme on a :

$$\frac{d}{dt} |\nabla_g v_m(x,t)|_g^2 = 2 \langle \nabla_g v_m(t), \nabla_g v_m'(t) \rangle_g,$$

donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \left[|v_m'(x,t)|^2 + |\nabla_g v_m(x,t)|_g^2 + 2F(v_m(x,t) + \phi(x,t)) \right] dx \\ &\quad + \int_\Omega h(\nabla v_m + \nabla\phi) v_m'\, dx - \int_\Omega f(v_m + \phi)\phi'\, dx + \int_{\Gamma_1} l(v_m' + \phi')(v_m' + \phi')\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}(t) v_m'(t)\, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) v_m(t)\, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v_m(t)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} l(v_m' + \phi')\phi'\, d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$, on trouve

$$\int_\Omega f(v_m+\phi)\phi'\,dx \quad\leq\quad b_1\int_\Omega |v_m+\phi|^\rho|u_1|\,dx + b_2\int_\Omega |u_1|\,dx,$$

et par la régularité des données, on a $u_1\in W=V\cap H^2(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, ainsi l'injection $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$ nous assure que

$$\|u_1\|_1\leq\|u_1\|_2,$$

donc $\|u_1\|_1$ est majoré par une constante C (s.r.g, on suppose que $C=1$), alors on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(v_m+\phi)\phi'dx &\leq b_1\int_\Omega |v_m+\phi|^\rho|u_1|dx+b_2\\ &\leq 2^\rho b_1\int_\Omega (|v_m|^\rho|u_1|+|\phi|^\rho|u_1|)\,dx+b_2\\ &\leq K_1\left(\int_\Omega |v_m|^\rho|u_1|dx+\int_\Omega|\phi|^\rho|u_1|dx\right)+K_1,\end{aligned}$$

où $K_1=\max\{2^\rho b_1,b_2\}$, en plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\int_\Omega |v_m|^\rho|u_1|\,dx\leq\left(\int_\Omega|v_m|^{2\rho}\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|u_1|^2\,dx\right)^{\frac12},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(v_m+\phi)\phi'\,dx &\leq K_1\left(\int_\Omega|v_m|^{2\rho}\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|u_1|^2\,dx\right)^{\frac12}+K_1\int_\Omega|u_0+tu_1|^\rho|u_1|\,dx+K_1\\ &\leq K_1\left(\int_\Omega|v_m|^{2\rho}\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|u_1|^2\,dx\right)^{\frac12}+2^\rho K_1\int_\Omega(|u_0|^\rho|u_1|+t^\rho|u_1|^{\rho+1})\,dx+K_1.\end{aligned}$$

Mais,

$$\int_\Omega |u_0|^\rho|u_1|dx\leq\||u_0|^\rho\|_2\|u_1\|_2,$$

et

$$\||u_0|^\rho\|_2=\|u_0\|_{2\rho}^\rho,$$

par l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ on a $\rho\leq\frac{n}{n-2}$ si $n\geq4$ et $\rho\leq2$ si $n\leq3$, donc

$$\|u_0\|_{2\rho}^\rho\leq\|u_0\|_{\frac{2n}{n-2}}^\rho=\|u_0\|_q^\rho,$$

où $q=\frac{2n}{n-2}$ et par l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ on a : $\|u_0\|_q\leq\|u_0\|_{H_0^1}$. Donc dans tous les cas on déduit que

$$\||u_0|^\rho\|_2\leq\|u_0\|_{H_0^1}^\rho,$$

mais, par la régularité des conditions initiales, on a $u_0\in W=V\cap H^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, alors $\|u_0\|_{H_0^1}$ est majorée par une constante C (s.r.g, on suppose que C=1).
De même $u_1\in W\subset H^2(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, donc $\|u_1\|_2$ est majorée par une constante C (s.r.g, on suppose que C=1). De plus

$$\||u_1|^{\rho+1}\|=\|u_1\|_{\rho+1}^{\rho+1}\leq\|u_1\|_{\frac{2n-2}{n-2}}^{\rho+1}=\|u_1\|_q^{\rho+1},$$

où $q=\frac{2n-2}{n-2}$ et par l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ on a : $\|u_1\|_q\leq\|u_1\|_{H_0^1}$, donc dans tous les cas nous avons

$$\||u_1|^{\rho+1}\|\leq\|u_1\|_{H_0^1}^{\rho+1},$$

mais, par la régularité des conditions initiales, on a $u_1 \in W = V \cap H^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, alors $\|u_1\|_{H_0^1}$ est majorée par une constante C (s.r.g, on suppose que C=1).
Il résulte donc

$$\int_\Omega f(v_m+\phi)\phi'\,dx \leq C\left(\int_\Omega |v_m|^{2\rho}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_1|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + Ct^\rho + C,$$

où $C = (2^\rho+1)K_1$, finalement, le théorème d'injection de Sobolev nous assure

$$\int_\Omega |v_m|^{2\rho}\,dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla_g v_m|^2\,dx\right)^\rho,$$

donc

$$\int_\Omega f(v_m+\phi)\phi'\,dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|_g^2\,dx\right)^{\frac{\rho}{2}} + Ct^\rho + C. \tag{3.12}$$

Pour la suite, on utilise la constante $C > 0$ pour dénoter quelques constantes.
La formule de Young et l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ nous assurent que :

$$\int_\Omega h(\nabla v_m(t)+\nabla\phi(t))v'_m(t)\,dx \leq \frac{\beta^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_m(t)+\nabla\phi(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v'_m|^2\,dx. \tag{3.13}$$

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$, on a :

$$\int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')(v'_m+\phi')\,d\Gamma \geq c_1\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1|^2\,d\Gamma, \tag{3.14}$$

et par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ puis on utilise l'inégalité de Hölder, on déduit

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')\phi'\,d\Gamma &\leq c_2\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1||u_1|\,d\Gamma\\ &\leq \eta\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1|^2\,d\Gamma + c_2(\eta)\int_{\Gamma_1} |u_1|^2\,d\Gamma,\end{aligned}$$

et comme $u_1 \in W$ et par le théorème de trace, on a $\|u_1\|_{2,\Gamma_1} \leq \|\nabla_g u_1\|_2$, on déduit que $\|u_1\|_{2,\Gamma_1}$ est majorée par une constante C (s.r.g, on suppose que C=1).
Il résulte donc

$$\int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')\phi'\,d\Gamma \leq \eta\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1|^2\,d\Gamma + c_2(\eta), \tag{3.15}$$

où $\eta > 0$ une constante a détermine ultérieurement.
Par (3.11), (3.14) et (3.15) on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|v'_m(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t)+\phi(t))\right)dx + (c_1-\eta)\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1|^2\,d\Gamma - c_2(\eta)\\ &\leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|v'_m(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t)+\phi(t))\right)dx + \int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')(v'_m+\phi')d\Gamma\\ &\quad -\int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')\phi' d\Gamma\\ &\leq \int_\Omega \mathcal{F}(t)v'_m(t)dx + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}(t)v_m(t)d\Gamma - \int_\Omega h(\nabla v_m+\nabla\phi)v'_m\,dx + \int_\Omega f(v_m+\phi)\phi' dx,\end{aligned}$$

donc moyennant à (3.12) et (3.13), alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|v'_m(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t)+\phi(t))\right)dx + (c_1-\eta)\int_{\Gamma_1} |v'_m(t)+u_1|^2\,d\Gamma\\ &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|_g^2\,dx\right)^{\frac{\rho}{2}} + Ct^\rho + \frac{\beta^2}{2}\int_\Omega |\nabla_g v_m(t)+\nabla_g\phi(t)|_g^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v'_m(t)|^2\,dx\\ &\quad +\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}(t)v_m(t)\,d\Gamma + \int_\Omega \mathcal{F}(t)v'_m(t)\,dx + \int_{\Gamma_1}\mathcal{B}'(t)v_m(t)d\Gamma + c_2(\eta) + C,\end{aligned}$$

et par suite, le théorème de trace assure que $\int_{\Gamma_1} |v_m|^2 d\Gamma \leq C_0 \int_\Omega |\nabla_g v_m|_g^2 \, dx$, donc

$$\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v_m(t) \, d\Gamma \leq \frac{C_0^2}{2} \int_{\Gamma_1} |\mathcal{B}'(t)|^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|^2 \, d\Gamma,$$

de plus par l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a :

$$\int_\Omega \mathcal{F}(t) v_m'(t) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathcal{F}(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |v_m'(t)|^2 \, dx,$$

il résulte donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \Big(|v_m'(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t) + \phi(t)) \Big) \, dx + (c_1 - \eta) \int_{\Gamma_1} |v_m'(t) + u_1|^2 \, d\Gamma \\
&\leq C \left(\int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|_g^2 \, dx \right)^{\frac{\rho}{2}} + C t^\rho + \frac{\beta^2}{2} \int_\Omega |\nabla_g v_m(t) + \nabla_g \phi(t)|_g^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |v_m'(t)|^2 \, dx \\
&\quad + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) v_m(t) \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Omega |\mathcal{F}(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |v_m'(t)|^2 \, dx \\
&\quad + \frac{C_0^2}{2} \int_{\Gamma_1} |\mathcal{B}'(t)|^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|_g^2 \, d\Gamma + c_2(\eta) + C.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On intègre (3.16) de 0 à t et notice $v_m(0) = v_m'(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(|v_m'(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t) + \phi(t)) \Big) \, dx + (c_1 - \eta) \int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_m'(s) + u_1|^2 \, d\Gamma ds \\
&\leq C \int_0^t \left(\int_\Omega |\nabla_g v_m|_g^2 dx \right)^{\frac{\rho}{2}} ds + \frac{C}{\rho + 1} t^{\rho+1} + (1 + 2\beta^2) \int_0^t \int_\Omega |\nabla_g v_m|_g^2 dx ds + 2 \int_0^t \int_\Omega |v_m'(s)|^2 dx ds \\
&\quad + 2\beta^2 \int_0^t \int_\Omega |\nabla_g \phi(s)|_g^2 dx ds + \int_0^t \int_\Omega |\mathcal{F}(s)|^2 dx ds + 2 \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) v_m(t) d\Gamma + C_0^2 t \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \mu} \right|^2 d\Gamma + Ct + C.
\end{aligned}$$

On a $\|\nabla_g \phi\|_2$ et $\|\mathcal{F}\|_2$ sont majorées par des constantes (s.r.g, on suppose que ces constantes sont égaux à 1), et par l'inégalité de Hölder et la régularité des données, on a

$$\begin{aligned}
2 \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t) v_m(t) d\Gamma &\leq \frac{C_0^2}{2\eta} \int_{\Gamma_1} |\mathcal{B}(t)|^2 d\Gamma + 2\eta \int_\Omega |v_m(t)|^2 dx \\
&\leq \frac{C_0^2}{\eta} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \mu} \right|^2 d\Gamma + \frac{C_0^2}{\eta} t^2 \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \mu} \right|^2 d\Gamma + 2\eta \int_\Omega |v_m(t)|^2 dx \\
&\leq \frac{C_0^2}{\eta} (1 + t^2) + 2\eta \int_\Omega |v_m(t)|^2 dx,
\end{aligned}$$

et comme $\frac{\rho}{2} \leq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(|v_m'(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t) + \phi(t)) \Big) \, dx + (c_1 - \eta) \int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_m'(s) + u_1|^2 \, d\Gamma ds \\
&\leq (C + 1 + 2\beta^2) \int_0^t \int_\Omega |\nabla_g v_m|^2 dx ds + \frac{C}{\rho + 1} t^{\rho+1} + 2 \int_0^t \int_\Omega |v_m'|^2 dx ds \\
&\quad + (C_0^2 + C + 2\beta^2 + 1) t + \tfrac{C_0^2}{\eta} t^2 + 2\eta \int_\Omega |v_m'|^2 d\Gamma + C + \frac{C_0^2}{\eta} \\
&\leq (C + 1 + 2\beta^2) \int_0^t \int_\Omega |\nabla_g v_m|_g^2 dx ds + C_1 (t^{\rho+1} + t^2) + C_1 t + C_1,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $C_1 = C_0^2 + C + 2\beta^2 + 1$.
Comme $F(s) \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et pour η suffisamment petit de sort que $c_1 - \eta > 0$, on applique le lemme de Gronwall, on obtient

$$\int_\Omega \Big(|v_m'(t)|^2 + |\nabla_g v_m(t)|_g^2 + 2F(v_m(t) + \phi(t)) \Big) \, dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_m'(t) + u_1|^2 d\Gamma ds \leq C_1, \tag{3.18}$$

où $C_1 > 0$ est une constante indépendante à $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.
Estimate II On commence par estimer $\|v_m''(0)\|_2$. On pose $t = 0$ dans (3.10), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_m''(0) w\, dx + \int_\Omega h(\nabla u_0) w\, dx + \int_\Omega f(u_0) w\, dx + \int_{\Gamma_1} l(u_1) w\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \Delta_g u_0 w\, dx + \int_{\Gamma_1} \left(-\frac{\partial u_0}{\partial \mu}\right) w\, d\Gamma, \quad \forall w \in V_m,\end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial u_0}{\partial \mu} + l(u_1) = 0$ sur Γ_1, alors

$$\int_\Omega v_m''(0) w\, dx + \int_\Omega h(\nabla u_0) w\, dx + \int_\Omega f(u_0) w\, dx = \int_\Omega \Delta_g u_0 w\, dx \quad \forall w \in V_m,$$

on prend $w = v_m''(0)$ dans (3.19), on déduit donc

$$\begin{aligned}\|v_m''(0)\|_2^2 &= \int_\Omega \Delta_g u_0 v_m''(0)\, dx - \int_\Omega h(\nabla u_0) v_m''(0)\, dx - \int_\Omega f(u_0) v_m''(0)\, dx \\ &= \langle \Delta_g u_0 - h(\nabla u_0) - f(u_0), v_m''(0)\rangle_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et donc

$$\|v_m''(0)\|_2^2 \le (\|f(u_0)\|_2 + \|h(\nabla u_0)\|_2 + \|\Delta_g u_0\|_2)\, \|v_m''(0)\|_2.$$

Comme f et h sont de classe C^1 et par la régularité des conditions initiales on sait $u_0 \in W \subset L^2(\Omega)$, alors il résulte qu'il existe une constante positive C_2 indépendante de $m \in \mathbb{N}$ telle que

$$\|v_m''(0)\|_2 \le C_2. \tag{3.19}$$

En dérivant (3.10) par rapport à t et remplaçant w par v_m'', on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|v_m''(t)|^2 + |\nabla_g v_m'|_g^2\right) dx + \int_\Omega (\nabla h(\nabla v_m + \nabla\phi).(\nabla v_m' + \nabla\phi'))\, v_m''\, dx \\ &\quad + \int_\Omega f'(v_m + \phi)(v_m' + \phi') v_m''\, dx + \int_{\Gamma_1} l'(v_m' + \phi')(v_m'')^2\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}'(t) v_m''(t)\, dx + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v_m'(t)\, d\Gamma.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Par l'hypothèse ($\mathbf{H}_2$), on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla h(\nabla v_m + \nabla\phi)(\nabla v_m' + \nabla\phi')) v_m''\, dx &\le \int_\Omega |\nabla h(\nabla v_m + \nabla\phi)||\nabla v_m' + \nabla\phi'||v_m''\, dx \\ &\le L\int_\Omega |\nabla v_m' + \nabla\phi'|\, |v_m''| dx,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla h(\nabla v_m + \nabla\phi)(\nabla v_m' + \nabla\phi')) v_m''\, dx &\le \frac{L}{2}\left(\int_\Omega |\nabla v_m' + \nabla\phi'|^2 dx + \int_\Omega |v_m''|^2 dx\right) \\ &\le L\int_\Omega |\nabla v_m'|^2 dx + L\int_\Omega |\nabla\phi'|^2 dx + \frac{L}{2}\int_\Omega |v_m''|^2 dx,\end{aligned}$$

par la régularité des conditions initiales, on a $\phi' = u_1 \in W$, donc $\|\nabla u_1\|_2$ est majoré par une constante C (s.r.g, on suppose que C=1), donc

$$\int_\Omega (\nabla h(\nabla v_m + \nabla\phi).(\nabla v_m' + \nabla\phi')) v_m''\, dx \le C\left(1 + \int_\Omega |\nabla_g v_m'(t)|_g^2\, dx + \int_\Omega |v_m''(t)|^2\, dx\right), \tag{3.21}$$

où $C \geq L$. De plus, l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ nous assure que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(v_m+\phi)\,(v'_m+\phi')\,v''_m dx &\leq \int_\Omega \left(b_1|v_m+\phi|^{\rho-1}+b_2\right)|v'_m+\phi'|\,|v''_m|\,dx \\
&\leq \int_\Omega \left(2^{\rho-1}b_1\left(|v_m|^{\rho-1}+|\phi|^{\rho-1}\right)\right)+b_2\right)(|v'_m|+|\phi'|)\,|v''_m|\,dx \\
&\leq \int_\Omega C\left(|v_m|^{\rho-1}+|\phi|^{\rho-1}+C\right)(|v'_m|+|\phi'|)\,|v''_m|\,dx,
\end{aligned}$$

où $C=\max\{2^{\rho-1}b_1, \sqrt{b_2}\}$, et donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(v_m+\phi)\,(v'_m+\phi')\,v''_m dx \leq\; & \frac{C}{2}\int_\Omega |v_m|^{2(\rho-1)}|v'_m|^2dx+\frac{C}{2}\int_\Omega |\phi|^{2(\rho-1)}|v'_m|^2dx+\frac{C}{2}\int_\Omega |v_m|^{2(\rho-1)}|\phi'|^2dx \\
&+\frac{C}{2}\int_\Omega |\phi|^{2(\rho-1)}|\phi'|^2dx+\frac{C^2}{2}\left(\int_\Omega |v'_m|^2dx+\int_\Omega |\phi'|^2dx\right) \\
&+(2C+C^2)\int_\Omega |v''_m|^2dx,
\end{aligned}$$

Mais, par la régularité des données et de (3.18), on a :

$$\|u_1\|_2 \leq C,$$

$$\|v'_m\|_2 \leq C,$$

l'inégalité de Hölder et (3.18) nous donnent

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v_m|^{2(\rho-1)}|\phi'|^2dx &\leq \||v_m|^{2(\rho-1)}\|_{\frac{n}{2}}\||u_1|^2\|_{\frac{n}{n-2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla_g v_m|_g^2dx\right)^{\rho-1}\|u_1\|_{\frac{2n}{n-2}} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

de même on a :

$$\int_\Omega |\phi|^{2(\rho-1)}|\phi'|^2dx \leq C,$$

et

$$\int_\Omega |\phi|^{2(\rho-1)}|v'_m|^2dx \leq C.$$

Sans restreindre la généralité, on suppose que ces constantes sont égaux à 1, donc

$$\int_\Omega |f'(v_m+\phi)||v'_m+\phi'||v''_m|\,dx \leq C\left(\int_\Omega |v'_m|^{2\frac{n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{n}}+C\int_\Omega |v''_m|^2dx+C,$$

où $C=2C+C^2$, ainsi par le théorème d'injection de Sobolev on a

$$\int_\Omega |v'_m|^{2\frac{n}{n-2}}dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla_g v'_m|_g^2dx\right)^{\frac{n-2}{n}},$$

alors

$$\int_\Omega f'(v_m+\phi)(v'_m+\phi')v''_m\,dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2dx+\int_\Omega |v''_m(t)|^2dx\right)+C. \tag{3.22}$$

De plus, on a par l'inégalité $ab \leq (|a|^2+|b|^2)$

$$\int_\Omega \mathcal{F}'(t)v''_m(t)dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |v''_m(t)|^2dx+\int_\Omega |\mathcal{F}'(t)|^2dx\right),$$

mais par la régularité des données, on a

$$\|\mathcal{F}'(t)\|_2^2 \leq C,$$

sans restreindre la généralité on suppose que $C = 1$, Donc

$$\int_\Omega \mathcal{F}'(t) v''_m(t) dx \leq C \int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + C. \tag{3.23}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Hölder et le théorème de trace, on obtient

$$\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v'_m(t) d\Gamma \leq \frac{C_0^2}{4\eta} \|\mathcal{B}'(t)\|_{2,\Gamma_1}^2 + \eta \|\nabla_g v'_m(t)\|_2^2,$$

et par la régularité des données, on a

$$\|\mathcal{B}'(t)\|_{2,\Gamma_1} = \left\| \frac{\partial u_1}{\partial \mu} \right\|_{2,\Gamma_1} \leq C,$$

donc

$$\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v'_m(t)\, d\Gamma \leq C \frac{C_0^2}{4\eta} + \eta \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2\, dx. \tag{3.24}$$

En intégrant (3.20) sur (0,t) et par (3.19), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} l'(v'_m(s) + \phi'(s))(v''_m(s))^2 d\Gamma ds \\
&= \int_0^t \int_\Omega \mathcal{F}'(s) v''_m(s) dx ds + \int_{\Gamma_1} \mathcal{B}'(t) v'_m(t) d\Gamma - \int_0^t \int_\Omega (\nabla h(\nabla v_m + \nabla \phi).(\nabla v'_m + \nabla \phi')) v''_m dx ds \\
&\quad - \int_0^t \int_\Omega f'(v_m + \phi)(v'_m + \phi') v''_m dx ds + C + C_2,
\end{aligned}$$

par (3.21), (3.22), (3.23) et (3.24), il résulte

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + (1-\eta) \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} l'(v'_m(s) + \phi'(s))(v''_m(s))^2 d\Gamma ds \\
&\leq \int_0^t C \left(1 + \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2\, dx + \int_\Omega |v''_m(t)|^2\, dx\right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(C \left(\int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2 dx + \int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx\right) + C\right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(C \int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + C\right) ds + C \frac{C_0^2}{4\eta} + C + C_2,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + (1-\eta) \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} l'(v'_m(s) + \phi'(s))(v''_m(s))^2 d\Gamma ds \\
&\leq 3Ct + C\tfrac{C_0^2}{4\eta} + 2C \int_0^t \int_\Omega |\nabla_g v'_m|_g^2 dx ds + 3C \int_0^t \int_\Omega |v''_m|^2 dx ds + C + C_2 \\
&\leq 3Ct + C\tfrac{C_0^2}{4\eta} + 5C \int_0^t \int_\Omega \left(|\nabla_g v'_m|_g^2 + |v''_m|^2\right) dx ds + C + C_2,
\end{aligned}$$

par le lemme de Gronwall ,et comme $l'(s) \geq 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour η suffisamment petit de sort que $1 - \eta$ soit positive, il résulte

$$\int_\Omega |v''_m(t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} l'(v'_m(s) + \phi'(s))(v''_m(s))^2 d\Gamma ds \leq C_3, \tag{3.25}$$

où C_3 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

Passage à la limite

A partir de (3.18) et (3.25), on déduit

$$\begin{cases} (v'_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ (\nabla_g v_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \\ (\nabla_g v'_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n), \\ (v''_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{3.26}$$

Il résulte de (3.26) qu'on peut extraire des sous suites convergentes $\{v'_m\}$, $\{\nabla_g v_m\}$, $\{\nabla_g v'_m\}$ et $\{v''_m\}$ de $\{v'_m\}$, $\{\nabla_g v_m\}$, $\{\nabla_g v'_m\}$ et $\{v''_m\}$ respectivement (de même notation), telles que :

$$v'_m \rightharpoonup v' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,}$$

$$\nabla_g v_m \rightharpoonup \nabla_g v \text{ dans } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n) \text{ faible étoile,}$$

$$\nabla_g v'_m \rightharpoonup \nabla_g v' \text{ dans } L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^n) \text{ faible étoile,}$$

$$v''_m \rightharpoonup v'' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

il résulte en particulier de (3.26) que :

$$\{v''_m\} \text{ et } \{v'_m\} \text{ sont bornées dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

$$\{\nabla_g v_m\} \text{ et } \{\nabla_g v'_m\} \text{ sont bornées dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n),$$

donc

$$v'_m \rightharpoonup v' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faiblement,} \tag{3.27}$$

$$\nabla_g v_m \rightharpoonup \nabla_g v \text{ et } \nabla v_m \rightharpoonup \nabla v \text{ dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n) \text{ faiblement,} \tag{3.28}$$

$$\nabla_g v'_m \rightharpoonup \nabla_g v' \text{ dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n) \text{ faiblement,}$$

$$v''_m \rightharpoonup v'' \text{ dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faiblement.} \tag{3.29}$$

De plus, par (3.18), les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$, on sait que :

$$\begin{cases} \{h(\nabla v_m + \nabla\phi)\} \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ \{f(v_m+\phi)\} \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases} \tag{3.30}$$

il résulte en particulier de (3.30) que

$$\begin{cases} \{h(\nabla v_m + \nabla\phi)\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \{f(v_m+\phi)\} \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \end{cases}$$

donc il existe $\chi, \zeta \in L^2(Q)$ telles que

$$h(\nabla v_m + \nabla\phi) \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.31}$$

et

$$f(v_m+\phi) \rightharpoonup \zeta \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.32}$$

Par (3.25) et l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$, on a :

$$\{l(v'_m+\phi')\} \quad \text{est borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

et en particulier, on a

$$\{l(v'_m + \phi')\} \quad \text{est borné dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

donc il existe $\psi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ telle que

$$l(v'_m + \phi') \rightharpoonup \psi \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.33}$$

Puisque, on a par (3.26) et le théorème de trace :

$$\|v_m(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\int_\Omega |\nabla_g v_m(t)|_g^2\,dx \leq K, \quad \text{et} \int_{\Gamma_1} |v'_m(t)|^2\,dx \leq C\int_\Omega |\nabla_g v'_m(t)|_g^2\,dx,$$

donc il résulte que (v_m) demeure dans un borné de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$.
On sait que l'injection $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ est continue et compacte ce qui nous permet en utilisant le théorème de Lions ([6]) de dire que la suite (v_m) extraite vérifie

$$v_m \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.34}$$

En passant à la limite quand $m \to \infty$ dans (3.10), on obtient

$$v'' - \Delta_g v + \chi + \zeta = \mathcal{F} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q),$$

puisque $v'', \chi, \zeta \in L^2(Q)$, l'inégalité précédente nous donne que $\Delta_g v \in L^2(Q)$ et

$$v'' - \Delta_g v + \chi + \zeta = \mathcal{F} \quad \text{dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.35}$$

Pour la suite on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3. ***(la formule de Green généralisée)*** *La formule de Green est généralisée comme la suite :*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \Delta_g v w\varphi(t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v(t), \nabla_g w\rangle_g \varphi(t)\,dx\,dt &\triangleq \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \mu} w\varphi(t)\,d\Gamma\,dt \\ &\equiv \langle \tfrac{\partial v}{\partial \mu}(\varphi), w\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Démonstration. Pour tout $w \in V$ on a la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega v''_m(t)w\varphi(t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v_m, \nabla_g w\rangle\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega h(\nabla v_m + \nabla\phi)w\varphi(t)\,dxdt \\ &\quad + \int_0^T\int_\Omega f(v_m+\phi)w\varphi(t)\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \mathcal{B}w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m+\phi')w\varphi(t)\,dxdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega \mathcal{F}w\varphi(t)\,dxdt, \qquad\qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T), \\ &v_m(0) = v'_m(0) = 0.\end{aligned} \tag{3.37}$$

En utilisant (3.31), (3.32), (3.33), (3.29) et (3.28), ensuite, passant à la limite dans (3.37) quand $m \to \infty$, on obtient donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega v''(t)w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v(t), \nabla_g w\rangle\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \psi w\varphi(t)\,dxdt \\ &\quad + \int_0^T\int_\Omega \chi w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \zeta w\varphi(t)\,dxdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega \mathcal{F}w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}w\varphi(t)\,dxdt.\end{aligned} \tag{3.38}$$

• D'autre part, en multipliant les deux membres de (3.35) par $w\varphi(t)$ et intégrant le résultat obtenu sur $\Omega \times [0, T]$, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega v'' w\varphi(t)\,dxdt - \int_0^T\int_\Omega \Delta_g v w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \chi w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \zeta w\varphi(t)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_\Omega \mathcal{F} w\varphi(t)\,dxdt,\end{aligned} \tag{3.39}$$

on remplace (3.39) dans (3.38), on obtient donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega \Delta_g v w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v(t), \nabla_g w\rangle\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \psi w\varphi(t)\,d\Gamma dt\\ &= \int_0^T\int_{\Gamma_1} \mathcal{B} w\varphi(t)\,d\Gamma dt.\end{aligned}$$

• En suite, en utilisant le condition de bord sur Γ_1, on trouve

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta_g v w\varphi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v(t), \nabla_g w\rangle\varphi(t)\,dxdt = \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial\mu} w\varphi(t)\,d\Gamma dt,$$

par conséquent

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta_g v w\varphi(t)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \langle\nabla_g v(t), \nabla_g w\rangle_g\varphi(t)\,dx\,dt \triangleq \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial\mu} w\varphi(t)\,d\Gamma\,dt. \tag{3.40}$$

□

Remarque 3.2. *Il résulte donc que* $\frac{\partial v}{\partial\mu} \in \mathcal{D}'(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ *car* $w \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Revenant à la démonstration du théorème, par la remarque 3.2 et (3.35), on a

$$\frac{\partial v}{\partial\mu} + \psi = \mathcal{B} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

et $\psi, \mathcal{B} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ donne que

$$\frac{\partial v}{\partial\mu} + \psi = \mathcal{B} \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \tag{3.41}$$

Nous allons montrer dans la suite les assertions suivantes :
1) $f(v + \phi) = \zeta$;
2) $h(\nabla v + \nabla\phi) = \chi$;
3) $l(v' + \phi') = \psi$.

En remplaçant w par v_m dans (3.10) et intégrant sur [0,T], on obtient

$$\begin{aligned}&\int_Q v_m'' v_m(t)(t)\,dxdt + \int_Q \langle\nabla_g v_m(t), \nabla_g v_m(t)\rangle_g\,dxdt + \int_Q h(\nabla v_m(t) + \nabla\phi(t))v_m(t)\,dxdt\\ &\quad + \int_Q f(v_m(t) + \phi(t))v_m(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v_m'(t) + \phi'(t))v_m(t)d\Gamma dt\\ &= \int_Q \mathcal{F}(t)v_m(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t)v_m(t)d\Gamma dt, \quad v_m(0) = v_m'(0) = 0.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Par (3.18) et (3.25), le théorème d'Aubin-Lions (théorème 5.1 de [6]) assure que

$$v_m \to v \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.43}$$

$$v_m' \to v' \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.44}$$

alors, il résulte de (3.43)

$$v_m \to v \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

et par suite, la continuité de f donne

$$f(v_m+\phi) \to f(v+\phi) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T], \tag{3.45}$$

moyennant à (3.30) , (3.45) et le lemme de Lions (lemme 1.3 [6]), on obtient

$$f(v_m+\phi) \rightharpoonup \zeta = f(v+\phi) \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

d'où la première assertion.
De plus, par (3.31), (3.33), (3.34), (3.43) et en passant à la limite quand $m \to \infty$ dans (3.42), on aboutit à

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_Q |\nabla_g v_m|_g^2\,dxdt &= -\int_Q v''(t)v(t)\,dxdt - \int_Q \chi(t)v(t)\,dxdt - \int_Q f(v(t)+\phi(t))v(t)\,dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_{\Gamma_1}\psi(t)v(t)\,d\Gamma dt + \int_Q \mathcal{F}(t)v(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}(t)v(t)\,d\Gamma dt, \end{aligned}$$

mais, par (3.41), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_Q |\nabla_g v_m|_g^2\,dxdt &= -\int_Q v''(t)v(t)\,dxdt - \int_Q \chi(t)v(t)\,dxdt - \int_Q f(v(t)+\phi(t))v(t)\,dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_{\Gamma_1}\psi(t)v(t)\,d\Gamma dt + \int_Q \mathcal{F}(t)v(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial v}{\partial \mu}+\psi\right)v(t)\,d\Gamma dt, \end{aligned}$$

ensuite par (3.35), on a

$$-\Delta_g v = \mathcal{F} - v'' - \chi - \zeta,$$

donc

$$\lim_{m\to\infty}\int_Q |\nabla_g v_m|_g^2\,dxdt = \int_Q v(t)\Delta_g v(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \mu}v(t)\,d\Gamma dt,$$

la formule de Green généralisé (3.36) nous donne

$$\int_Q v(t)\Delta_g v(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \mu}v(t)\,d\Gamma dt = \int_Q |\nabla_g v(t)|_g^2\,dxdt,$$

d'où

$$\lim_{m\to\infty}\int_Q |\nabla_g v_m|_g^2\,dxdt = \int_Q |\nabla_g v(t)|_g^2\,dxdt. \tag{3.46}$$

Et par suite, il résulte de (3.28) et (3.46) que

$$\nabla_g v_m \to \nabla_g v \quad \text{et} \quad \nabla v_m \to \nabla v \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n), \tag{3.47}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla_g v_m + \nabla_g \phi \to \nabla_g v + \nabla_g \phi \quad &\text{p.p. dans } \Omega \times [0,T], \\ \nabla v_m + \nabla \phi \to \nabla v + \nabla \phi \quad &\text{p.p. dans } \Omega \times [0,T], \end{aligned}$$

par conséquence, la continuité de h assure

$$h(\nabla v_m + \nabla\phi) \to h(\nabla v + \nabla\phi) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

le lemme de Lions ([6]) garantie que :

$$h(\nabla v_m + \nabla\phi) \rightharpoonup \chi = h(\nabla v + \nabla\phi) \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.48}$$

d'où la deuxième assertion.
Pour la troisième assertion, on remplace w par v'_m dans (3.10) et on intègre le résultat obtenu de 0 à T, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_Q v''_m(t)v'_m(t)\,dxdt + \int_Q \langle \nabla_g v_m(t), \nabla_g v'_m(t)\rangle_g\,dxdt + \int_Q h(\nabla v_m(t), \nabla\phi(t))v'_m(t)\,dxdt \\ &\quad + \int_Q f(v_m(t)+\phi(t))v'_m(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))v'_m(t)\,d\Gamma dt \\ &= \int_Q \mathcal{F}(t)v'_m(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \mathcal{B}(t)v'_m(t)d\Gamma dt,\ v_m(0) = v'_m(0). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Puisque

$$v'_m \rightharpoonup v' \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{3.50}$$

$$\nabla_g v'_m \rightharpoonup \nabla_g v' \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^n),$$

moyennant à (3.49) avec (3.34), (3.29), (3.44), (3.47) et (3.48), on déduit

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))v'_m(t)\,d\Gamma dt &= -\int_Q v''(t)v'(t)\,dxdt - \int_Q h(\nabla v(t),\nabla\phi(t))v'(t)\,dxdt \\ &\quad - \int_Q f(v(t)+\phi(t))v'(t)\,dxdt - \int_Q \langle\nabla_g v(t), \nabla_g v'(t)\rangle_g\,dxdt \\ &\quad + \int_Q \mathcal{F}(t)v'(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}(t)v'(t)d\Gamma dt, \end{aligned}$$

par (3.35) et (3.41), on aboutit

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))v'_m(t)\,d\Gamma dt &= -\int_Q v''(t)v'(t)\,dxdt - \int_Q h(\nabla v(t),\nabla\phi(t))v'(t)\,dxdt \\ &\quad - \int_Q f(v(t)+\phi(t))v'(t)\,dxdt - \int_Q \langle\nabla_g v(t), \nabla_g v'(t)\rangle_g\,dxdt \\ &\quad + \int_Q \left(v'' - \Delta_g v + \chi + \zeta\right)(t)v'(t)\,dxdt \\ &\quad + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\mu} + \psi\right)(t)v'(t)d\Gamma dt, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))v'_m(t)\,d\Gamma dt &= -\int_Q \langle\nabla_g v(t), \nabla_g v'(t)\rangle_g\,dxdt - \int_Q \Delta_g v(t)v'(t)\,dxdt \\ &\quad + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\mu} + \psi\right)(t)v'(t)d\Gamma dt, \end{aligned}$$

en appliquant la formule de Green généralisé (3.36), on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))v'_m(t)\,d\Gamma dt = \int_0^T\int_{\Gamma_1}\psi(t)v'(t)d\Gamma dt. \tag{3.51}$$

D'autre part, comme l est monotone, on a :

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left(l(v'_m(t)+\phi'(t)) - l(\varphi)\right)\left(v'_m(t)+\phi'(t)-\varphi\right)d\Gamma dt \geq 0,\ \forall\varphi\in L^2(\Gamma_1),$$

ou d'une façon équivalente

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))\varphi\,d\Gamma dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(\varphi)(v'_m(t)+\phi'(t)-\varphi)d\Gamma dt\\ &\quad\le\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))(v'_m(t)+\phi'(t))\,d\Gamma dt,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\liminf_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))\varphi\,d\Gamma dt+\liminf_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(\varphi)(v'_m(t)+\phi'(t)-\varphi)d\Gamma dt\\ &\le\liminf_{m\to\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1} l(v'_m(t)+\phi'(t))(v'_m(t)+\phi'(t))\,d\Gamma dt.\end{aligned}$$

De plus, (3.33), (3.50) et (3.51) donnent

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\psi(t)-l(\varphi))\,(v'(t)+\phi'(t)-\varphi)d\Gamma dt\ge 0,\quad\forall\varphi\in L^2(\Gamma_1),\tag{3.52}$$

on pose $\varphi=v'+\phi'+\varepsilon\xi$ dans (3.52) pour tout $\xi\in L^2(\Gamma_1)$ et $\varepsilon>0$, on obtient

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\psi(t)-l((v'(t)+\phi'(t))+\varepsilon\xi))(-\varepsilon\xi)d\Gamma dt\ge 0,$$

et donc

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\psi(t)-l((v'(t)+\phi'(t))+\varepsilon\xi))\xi d\Gamma dt\le 0,\quad\forall\xi\in L^2(\Gamma_1).\tag{3.53}$$

Comme l'opérateur $l:L^2(\Gamma_1)\to(L^2(\Gamma_1))'$ est hemi-continue, alors (3.53) implique que

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\psi(t)-l\,(v'(t)+\phi'(t)))\,\xi d\Gamma dt\le 0,\qquad\forall\xi\in L^2(\Gamma_1),$$

d'où

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}(\psi(t)-l\,(v'(t)+\phi'(t)))\,\xi d\Gamma dt=0,\qquad\forall\xi\in L^2(\Gamma_1).$$

Ceci implique que $\psi=l(v'+\phi')$, d'où la troisième assertion.

3.3.2 Unicité

Supposons qu'il existe z_1 et z_2 deux solutions du problème (P). Alors $z=z_1-z_2$ satisfait

$$\begin{aligned}&\int_\Omega z''(t)w\,dx+\int_\Omega\langle\nabla_g z(t),\nabla_g w\rangle_g\,dx+\int_{\Gamma_1}(l(z'_1)-l(z'_2))\,w\,d\Gamma\\ &=\int_\Omega(h(\nabla z_2)-h(\nabla z_1))\,w\,dx+\int_\Omega(f(z_2)-f(z_1))\,w\,dx,\qquad\forall w\in V,\end{aligned}\tag{3.54}$$

on pose $w=z'(t)$ dans (3.54), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega\left(|z'(t)|^2+|\nabla_g z(t)|_g^2\right)\,dx\right\}+\int_{\Gamma_1}(l(z'_1)-l(z'_2))\,z'(t)\,dx\\ &=\int_\Omega(h(\nabla z_2)-h(\nabla z_1))\,z'(t)\,dx+\int_\Omega(f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx,\end{aligned}$$

puisque l est monotone, alors

$$\int_{\Gamma_1}(l(z'_1)-l(z'_2))\,z'(t)\,dx\ge 0,$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left(|z'(t)|^2+|\nabla_g z(t)|_g^2\right)dx\right\} \leq \int_\Omega (h(\nabla z_2)-h(\nabla z_1))\,z'(t)dx + \int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)dx. \tag{3.55}$$

Par l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega (h(\nabla z_2)-h(\nabla z_1))\,z'(t)dx &\leq L\int_\Omega |\nabla z_2-\nabla z_1||z'(t)|\,dx\\ &\leq L\int_\Omega |\nabla_g z(t)||z'(t)|\,dx,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $ab\leq \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$, on obtient

$$\int_\Omega (h(\nabla z_2)-h(\nabla z_1))\,z'(t)dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla_g z(t)|_g^2\,dx+\int_\Omega |z'(t)|^2\,dx\right), \tag{3.56}$$

où $C=\frac{L}{2}$.
En suite, on applique le théorème d'accroissement fini sur la fonction f

$$\int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx=\int_\Omega f'(\frac{z_1+z_2}{2})z(t)z'(t)\,dx,$$

l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ nous donne

$$\int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx\leq \int_\Omega \left(\frac{b_1}{2}\left(|z_1(t)|^{\rho-1}+|z_2(t)|^{\rho-1}\right)+b_2\right)|z'(t)|\,|z(t)|dx,$$

et par l'inégalité $ab\leq \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{b_1}{2}\left(|z_1(t)|^{\rho-1}+|z_2(t)|^{\rho-1}\right)+b_2\right)^2|z(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |z'(t)|^2dx\\ &\leq C\int_\Omega \left(|z_1(t)|^{\rho-1}+|z_2(t)|^{\rho-1}+1\right)^2|z(t)|^2dx+C\int_\Omega |z'(t)|^2dx,\end{aligned}$$

où $C=\max\left\{\frac{b_1^2}{8},\frac{b_2^2}{2},\frac{1}{2}\right\}$. On utilise l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx\leq C\left(\int_\Omega \left(1+|z_1|^{\rho-1}+|z_2|^{\rho-1}\right)^{2q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |z(t)|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+C\int_\Omega |z'(t)|^2\,dx,$$

où $q=\frac{n}{2}, p=\frac{n}{n-2}$, le théorème d'injection de Sobolev donne

$$\int_\Omega |z(t)|^{2p}dx\leq \left(\int_\Omega |\nabla_g z(t)|_g^2dx\right)^p,$$

de plus, par la régularité des solutions, il résulte

$$\int_\Omega (f(z_2)-f(z_1))\,z'(t)\,dx\leq C\left(\int_\Omega |\nabla_g z(t)|_g^2\,dx+\int_\Omega |z'(t)|^2\,dx\right). \tag{3.57}$$

Finalement, on substitue (3.56) et (3.57) dans (3.55), ensuite on intègre sur (0,t), on obtient

$$\int_\Omega \left(|z'(t)|^2+|\nabla_g z(t)|_g^2\right)dx\leq 4C\int_0^t\left(\int_\Omega |\nabla_g z(t)|_g^2\,dx+\int_\Omega |z'(t)|^2\,dx\right)ds,$$

en utilisant le lemme de Gronwall pour $a=0$ et $g=4C$, on obtient

$$0\leq \int_\Omega \left(|z'(t)|^2+|\nabla_g z(t)|^2\right)dx\leq 0,$$

donc, il résulte

$$\int_\Omega |z'(t)|^2\,dx=\int_\Omega |\nabla_g z(t)|_g^2\,dx=0,$$

d'où l'unicité.

3.3.3 Existence d'une solution intégrable

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *et* $(\mathbf{H_3})$. *Si* $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$, *alors* (P) *possède au moins une solution intégrable sur* $C([0,\infty); V) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$.

Démonstration. • Maintenant, on suppose que les donnés du (P) satisfait :

$$(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega).$$

Comme $D(-\Delta_g) = \{u \in V \cap H^2(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\}$ est dense dans V et $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, alors il existe deux suites $\{u_{0m}\} \subset D(-\Delta_g)$ et $\{u_{1m}\} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telles que

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{fortement dans } V, \tag{3.58}$$

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.59}$$

On a :

$$\frac{\partial u_{0m}}{\partial \mu} + l(u_{1m}) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Par la première parte du théorème 3.1, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une solution lisse $u_m : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} u_m'' - \Delta_g u_m + h(\nabla u_m) + f(u_m) = 0 & \text{sur} \quad L^2(0,\infty; L^2(\Omega)), \\ u_m = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u_m}{\partial \mu} + l(u_m') = 0 & \text{sur} \quad L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_1)), \\ u_m(x,0) = u_{0m}, u_m'(x,0) = u_{1m}(x) & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.61}$$

D'après les hypothèses $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$, de même analogue que la preuve d'existence d'une solution régulière, on obtient

$$\int_\Omega |u_m'(t)|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla_g u_m(t)|_g^2 dx + \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u_m'(s)|^2 d\Gamma ds \le C, \tag{3.62}$$

$$\int_0^t \int_\Omega |h(\nabla u_m(s)|^2 dx ds \le C, \tag{3.63}$$

$$\int_0^t \int_\Omega |f(u_m(s))|^2 \, dx ds \le C, \tag{3.64}$$

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} |l(u_m'(s)|^2 d\Gamma ds \le C. \tag{3.65}$$

On pose $z_{mi} = u_m - u_i$, pour tout $m, i \in \mathbb{N}$, où u_m et u_i sont des solutions lisses de (3.61). On suive le même principe du preuve de l'unicité du solution régulière. Il résulte de (3.58) et (3.59) qu'il existe $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$u_m \to u \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]; V), \tag{3.66}$$

$$u_m' \to u' \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]; L^2(\Omega)).$$

D'autre part, par (3.62), (3.63), (3.64) et (3.65), on déduit

$$u_m' \to u' \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)), \tag{3.67}$$

$$h(\nabla u_m) \to \chi \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.68}$$

$$f(u_m) \to \zeta \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.69}$$

$$l(u'_m) \to \psi \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.70}$$

En plus, par (3.66), on sait que

$$u_m \to u \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

et donc la continuité de f assure que

$$f(u_m) \to f(u) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

par (3.64) et le lemme de Lions ([6]), on obtient

$$f(u_m) \to f(u) = \zeta \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

On a :

$$\nabla u_m \to \nabla u \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

donc

$$h(\nabla u_m) \to h(\nabla u) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times [0,T],$$

de (3.63), le lemme de Lions ([6]) déduit que

$$h(\nabla u_m) \to h(\nabla u) = \chi \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

Maintenant, on prouve que $\psi = l(u')$. En effet, on multiplie la première équation du (3.61) par u'_m, puis on intègre dans Ω et donc grâce au condition sur Γ_1, la formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|u'_m(t)|^2 + |\nabla_g u_m(t)|_g^2\right) dx + \int_\Omega h(\nabla u_m(t))u'_m(t)\,dx \\ + \int_\Omega f(u_m(t))u'_m(t)\,dx + \int_{\Gamma_1} l(u'_m(t))u'_m(t)\,d\Gamma = 0,\end{aligned} \tag{3.71}$$

en intégrant (3.71) sur (0,t), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'_m(t)|^2 + |\nabla_g u_m(t)|_g^2\right) dx + \int_0^t\int_\Omega h(\nabla u_m(s))u'_m(s)\,dxds \\ &\quad + \int_0^t\int_\Omega f(u_m(s))u'_m(s)\,dxds + \int_0^t\int_{\Gamma_1} l(u'_m(s))u'_m(s)\,d\Gamma ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_{1m}|^2 + |\nabla_g u_{0m}|_g^2\right) dx.\end{aligned}$$

Moyennant aux (3.58), (3.59), (3.67), (3.68), (3.69) et (3.70), on déduit

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_0^t\int_{\Gamma_1} l(u'_m(s))u'_m(s)d\Gamma ds &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'(t)|^2 + |\nabla_g u(t)|_g^2\right) dx - \int_0^t\int_\Omega h(\nabla u(s))u'(s)\,dxds \\ &\quad - \int_0^t\int_\Omega f(u(s))u'(s)dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_1|^2 + |\nabla_g u_0|_g^2\right) dx.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Supposons que y est une solution intégrable du système :

$$\begin{cases} y'' - \Delta_g y + h(\nabla y) + f(y) = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ y = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} + \psi = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y'(x, 0) = u_1(x) & \text{sur} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.73}$$

donc de même, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Gamma_1} \psi(s) y'(s) d\Gamma ds &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|y'(t)|^2 + |\nabla_g y(t)|_g^2 \right) dx - \int_0^t \int_\Omega h(\nabla y(s)) y'(s)\, dx ds \\ &- \int_0^t \int_\Omega f(y(s)) y'(s) dx ds + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|u_1|^2 + |\nabla_g u_0|_g^2 \right) dx. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Comme u est une solution de (3.73), alors (3.72) et (3.74) nous donnent

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(u_m'(s)) u_m'(s) d\Gamma ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \psi(s) u'(s) d\Gamma ds, \tag{3.75}$$

D'autre part, comme l est monotone, on a :

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(l(u_m'(s)) - l(\varphi) \right) \left(u_m'(s) - \varphi \right) d\Gamma ds \geq 0, \ \forall \varphi \in L^2(\Gamma_1),$$

ou d'une façon équivalente

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Gamma_1} l(u_m'(s)) \varphi \, d\Gamma ds + \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(\varphi)(u_m'(s) - \varphi) d\Gamma ds \\ &\quad \leq \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(u_m'(s))(u_m'(s)) \, d\Gamma ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\liminf_{m \to \infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(u_m'(s)) \varphi \, d\Gamma ds + \liminf_{m \to \infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(\varphi)(u_m'(s) - \varphi) d\Gamma ds \\ &\leq \liminf_{m \to \infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} l(u_m'(s))(u_m'(s)) \, d\Gamma ds. \end{aligned}$$

De plus, par (3.67) et (3.70), alors (3.75) donne

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} \left(\psi(s) - l(\varphi) \right) \left(u'(s) - \varphi \right) d\Gamma ds \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^2(\Gamma_1), \tag{3.76}$$

on pose $\varphi = u' + \varepsilon \xi$ dans (3.76) pour tout $\xi \in L^2(\Gamma_1)$ et $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} (\psi(s) - l((u'(s)) + \varepsilon \xi))(-\varepsilon \xi) d\Gamma ds \geq 0,$$

et donc

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} (\psi(s) - l((u'(s)) + \varepsilon \xi)) \xi d\Gamma ds \leq 0, \quad \forall \xi \in L^2(\Gamma_1). \tag{3.77}$$

Comme l'opérateur $l : L^2(\Gamma_1) \to (L^2(\Gamma_1))'$ est hemi-continue, alors (3.77) implique que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} (\psi(s) - l(u'(s))) \xi d\Gamma ds \leq 0, \qquad \forall \xi \in L^2(\Gamma_1),$$

d'où

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} (\psi(s) - l((u'(s) + \phi'(s))) \xi d\Gamma ds = 0, \qquad \forall \xi \in L^2(\Gamma_1).$$

Ceci implique que $\psi = l(u')$. □

Chapitre 4

Stabilité exponentielle

Dans ce chapitre, en utilisant les outils de la géométrie Riemannienne, nous allons montrer que l'énergie associée au problème (P) décroit exponentiellement en temps au voisinage de l'infini. Tout d'abord, on suppose les hypothèses suivantes :
($\mathbf{H}_4$) On suppose qu'il existe un champ de vecteur sur la variété Riemannienne $(\mathbb{R}^n, g)$, tel que

$$\nabla H(X,X) = c(x)|X|_g^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad X \in \mathbb{R}^n_x = T_x\mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

où $b = \min_{\overline{\Omega}} c(x) > 0$ et $B = \max_{\overline{\Omega}} c(x)$,

$$B < min\left\{b + \frac{2b+3\varepsilon_0}{n}, r\left(b - \frac{\varepsilon_0}{n}\right)\right\}, \tag{4.2}$$

pour tout $\varepsilon_0 \in (0,b)$ et $r > 1$.
De plus, on a :

$$H.v \leq 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad \text{et} \quad H.v \geq \delta > 0 \text{ sur } \Gamma_1 \tag{4.3}$$

pour une constant δ.
($\mathbf{H}_5$) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour $r > 1$, on a

$$2rF(s) \leq sf(s). \tag{4.4}$$

Remarque 4.1. ▶ *La fonction f définie dans le remarque 4.2 satisfait en plus l'hypothèse* ($\mathbf{H_5}$).
▶ *Le condition (4.1) est automatiquement satisfait dans le cas coefficients constants ($(a_{ij}) = \delta_{ij}$) en prenant $H(x) = x - x_0$ pour x_0 fixé et $c(x) = 1$. Dans le cas coefficients variables [12] présente des exemples pour que le condition (4.1) est satisfait sans contraintes sur B.*

Exemple 4.1. *[12] Si $(\mathbb{R}^n, g)$ est une variété Riemannienne complète de courbure sectionnelle positif, il existe une fonction strictement convexe h sur $(\mathbb{R}^n, g)$, on prend*

$$\nabla H(X,X) = Hess(h)(X,X) > 0 \quad \forall X \in T_x\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n,$$

où $Hess(h)$ est la hessienne de h. Donc il existe $a > 0$ telle que (4.1) est vérifiée puisque $\overline{\Omega}$ est compacte.

Soit u une solution du problème (P), on définit la fonction d'énergie par :

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u'(t)|^2 + |\nabla_g u(t)|_g^2 + 2F(u(t))\right)\, dx. \tag{4.5}$$

4.1 Lemmes techniques

Lemme 4.1. *Soit H un champ de vecteur sur $(\mathbb{R}^n)$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ un système des champs orthonormaux sur $\overline{\Omega}$ et $\{w_j\}_{j=1}^n$ son système des champs duales, alors on a :*

$$div_g H = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} H, e_i \rangle_g = \sum_{i=1}^n \nabla H(e_i, e_i). \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur $(\mathbb{R}^n, g)$ et C_{11} l'opérateur de contraction d'un champ de tenseur. On note par ∇H le champ de tenseur de type (1,1). Par définition d'opérateur divergence div_g, on a :

$$div_g H = C_{11}(\nabla H(w_i, e_j) e_i \otimes w_j),$$

mais, par définition du contraction C_{11}, on sait que

$$C_{11}(\nabla H(w_i, e_j) e_i \otimes w_j) = \sum_{i=1}^n \nabla H(w_i, e_i),$$

par la définition de la différentielle covariante, on a

$$\nabla H(w_i, e_i) = \nabla_{e_i} H(w_i),$$

donc

$$div_g H = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} H(w_i),$$

et par linéarité de la dérivée covariante et le champ de vecteur, on déduit

$$\nabla_{e_i} H(w_i) = w_i(\nabla_{e_i} H),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} div_g H &= \sum_{i=1}^n w_i(\nabla_{e_i} H) \langle e_i, e_i \rangle_g \\ &= \langle w_i(\nabla_{e_i} H) e_i, e_i \rangle_g, \end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} div_g H &= \sum_{i=1}^n \langle w_i(\nabla_{e_i} H) e_i, e_i \rangle_g \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} H, e_i \rangle_g \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla H(e_i, e_i). \end{aligned}$$

□

Remarque 4.2. *On déduit du (4.1) de l'hypothèse* $(\mathbf{H}_4)$ *et le lemme 4.1 que*

$$nb \leq div_g H \leq nB \quad sur \quad \overline{\Omega}. \tag{4.7}$$

En effet,
On a :

$$div_g H = \sum_{i=1}^{n} \nabla H(e_i, e_i),$$

d'autre part on a $\nabla H(e_i, e_i) = c(x)|e_i|_g^2$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ donc

$$b|e_i|_g^2 < \nabla H(e_i, e_i) < B|e_i|_g^2,$$

on somme en i, on obtient

$$nb < div_g H < nB.$$

Lemme 4.2. *Soit H un champ de vecteur sur $(\mathbb{R}^n, g)$, alors pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\langle \nabla_g u, \nabla_g (H(u)) \rangle_g(x) = \nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u)(x) + \frac{1}{2}(|\nabla_g u|_g^2 H)(x) - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2(x) div_g(H)(x). \qquad (4.8)$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $(e_1, ..., e_n)$ un système des champs normal en x. Comme H est un champ de vecteur alors il existe des fonctions $h_1, ..., h_n$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i,$$

en plus, pour tout u, on a :

$$H(u) = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i(u), \qquad (4.9)$$

et

$$\nabla_g u = \sum_{i=1}^{n} e_i(u) e_i \quad \text{et} \quad |\nabla_g u|_g^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_j(u))^2, \qquad (4.10)$$

où $e_i(u)$ est la différentielle covariante de u par rapport à e_i pour la métrique g.
De plus, par définition de la différentielle covariante, on a :

$$\begin{aligned} \nabla H(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i} H, e_j \rangle_g \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_i(h_k) e_k + h_k \nabla_{e_i} e_k, e_j \rangle_g, \end{aligned}$$

comme $\{e_i\}_{i=1,...n}$ forme un système des champs normal (i.e $\langle e_k, e_j \rangle_g = \delta_{kj}$ et $\nabla_{e_i} e_k = 0$), alors

$$\nabla H(e_i, e_j) = e_i(h_j), \qquad (4.11)$$

donc, par définition de produit scalaire, on a :

$$\langle \nabla_g u, \nabla_g (H(u)) \rangle_g \;\; = \textstyle\sum_{j=1}^{n} e_j(u) e_j(H(u)),$$

par (4.9), on a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g u, \nabla_g (H(u)) \rangle_g &= \sum_{j=1}^{n} e_j(u) \left(\sum_{i=1}^{n} e_j(h_i) e_i(u) + \sum_{i=1}^{n} h_i e_j e_i(u) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} e_j(h_i) e_i(u) e_j(u) + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \left(\sum_{j=1}^{n} e_j(u) e_j(u) \right), \end{aligned}$$

il résulte par (4.11) et (4.9) que

$$\sum_{i,j=1}^{n} e_j(h_i) e_i(u) e_j(u) + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \left(\sum_{j=1}^{n} e_j(u) e_j(u) \right) = \nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2} H(|\nabla_g u|_g^2),$$

par le théorème de divergence, on a :

$$H\left(|\nabla_g u|_g^2\right) = div_g\left(|\nabla_g u|_g^2 H\right) - |\nabla_g u|_g^2 div_g(H),$$

finalement, on conclut donc

$$\nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}H(|\nabla_g u|_g^2) = \nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u) + \frac{1}{2}div_g(|\nabla_g u|_g^2 H) - \frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2 div_g(H),$$

où $e_ie_j(u)(x) = e_je_i(u)(x)$ sont les second différentielles covariantes de u. □

Lemme 4.3. *Le problème (P) sous l'énergie définie par (4.5) est non dissipatif (i.e l'énergie n'est pas décroissante).*

Démonstration. En dérivant (4.5), on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega 2u''u' + 2\langle \nabla_g u, \nabla_g u'\rangle_g + 2f(u)u'\,dx \\ &= \int_\Omega 2u'(u'' + f(u)) + 2\langle \nabla_g u, \nabla_g u'\rangle_g\,dx, \end{aligned}$$

et d'après la première équation en (P), on a :

$$u'' + f(u) = \Delta_g u - h\left(\nabla u\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_\Omega \left(2u'(\Delta_g u - h(\nabla u)) + 2\langle \nabla_g u, \nabla_g u'\rangle_g\right)\,dx \\ &= \int_\Omega \left(2u'\Delta_g u - 2u'h(\nabla u) + 2\langle \nabla_g u, \nabla_g u'\rangle_g\right)\,dx, \end{aligned}$$

on applique la formule de Green (3.9) et puisque $u = 0$ sur Γ_0, on obtient donc

$$\int_\Omega \left(u'\Delta_g u + \langle \nabla_g u, \nabla_g u'\rangle_g\right)\,dx = \int_{\Gamma_1} u'\frac{\partial u}{\partial \mu}\,d\Gamma,$$

donc

$$E'(t) = \int_{\Gamma_1} 2u'\frac{\partial u}{\partial \mu}\,d\Gamma - \int_\Omega 2u'h(\nabla u)\,dx,$$

par le condition sur Γ_1, on a :

$$\int_{\Gamma_1} u'\frac{\partial u}{\partial \mu}\,d\Gamma = -\int_{\Gamma_1} u'l(u')\,d\Gamma,$$

et par suite

$$E'(t) \leq 2\int_\Omega |u'||h(\nabla u)|\,dx - 2\int_{\Gamma_1} u'l(u')\,d\Gamma,$$

l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ et (3.3) nous donnent

$$2\int_\Omega |u'||h(\nabla u)|\,dx - 2\int_{\Gamma_1} u'l(u')\,d\Gamma \leq 2\beta\int_\Omega |u'||\nabla_g u|_g\,dx - 2c_2\int_{\Gamma_1} |u'|^2\,d\Gamma,$$

en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on obtient

$$\int_\Omega |u'||\nabla_g u|_g\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'|^2 + |\nabla_g u|^2\right)\,dx,$$

ce qui donne

$$E'(t) \leq \beta \int_{\Omega} \left(|u'|^2 + |\nabla_g u|^2\right) \, dx - 2c_2 \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \, d\Gamma, \tag{4.12}$$

et par suite

$$E'(t) \leq \beta E(t) - 2c_2 \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \, d\Gamma, \tag{4.13}$$

l'inégalité (4.13) conclut que le problème (P) n'est pas dissipatif. □

Comme le problème (P) sous l'énergie définie par (4.5) est non dissipatif, on définit une nouvelle énergie par :

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon p(t), \tag{4.14}$$

où

$$p(t) = 2 \int_{\Omega} u'(x,t) H(u)(x,t) \, dx + (nb - \varepsilon_0) \int_{\Omega} u'(x,t) u(x,t) \, dx \tag{4.15}$$

pour $\varepsilon_0 \in (0, b)$.

Lemme 4.4. *E_ε est équivalente à E, c-à-d : il existe deux constantes positives β_1,β_2, telles que*

$$\beta_1 E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq \beta_2 E(t). \tag{4.16}$$

Démonstration. On remarque que

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon(t) - E(t)| &= \varepsilon |p(t)| \\ &\leq \varepsilon \left(2 \int_{\Omega} |u'(x,t) H(u)(x,t)| \, dx + (nb - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |u'(x,t) u(x,t)| \, dx \right), \end{aligned}$$

en suite, par le théorème du représentation de Riesz on a $H(u) = \langle H, \nabla_g u \rangle_g$, donc

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left(2 \int_{\Omega} |u'(x,t) \langle H, \nabla_g u \rangle_g| \, dx + (nb - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |u'(x,t) u(x,t)| \, dx \right),$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} |\langle H, \nabla_g u \rangle_g| &\leq |H|_g |\nabla_g u|_g \\ &\leq M |\nabla_g u|_g, \end{aligned}$$

où $M = \max_{\overline{\Omega}} |H|_g$, donc

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left(2M \int_{\Omega} |u'(x,t)| \, |\nabla_g u|_g dx + (nb - \varepsilon_0) \int_{\Omega} |u'(x,t) u(x,t)| \, dx \right),$$

d'après l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$, on obtient

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon M \int_{\Omega} \left(|u'|^2 + |\nabla_g u|_g^2\right) dx + \frac{nb - \varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} \left(|u'|^2 + |u|^2\right) dx,$$

par l'inégalité $\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \bar{c} \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx$, on obtient

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \left(\varepsilon M + \bar{c}\frac{nb - \varepsilon_0}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx + \left(\varepsilon M + \frac{nb - \varepsilon_0}{2}\right) \int_{\Omega} |u'|^2 dx,$$

on prend $C_1 \geq M + \bar{c}\frac{nb - \varepsilon_0}{2\varepsilon}$, ce qui donne

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon C_1 E(t),$$

d'où le résultat. □

Lemme 4.5. *La fonction $p(t)$ définie par (4.15) vérifie pour tout $t \geq 0$:*

$$p'(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t). \tag{4.17}$$

où

$$I_1(t) = \int_\Omega u' \left[2H(u') + (nb - \varepsilon_0)u'\right] dx, \qquad I_2(t) = \int_\Omega \Delta_g u \left[2H(u) + (nb - \varepsilon_0)u\right] dx,$$

$$I_3(t) = -\int_\Omega h(\nabla u) \left[2H(u) + (nb - \varepsilon_0)u\right] dx, \quad I_4(t) = -\int_\Omega f(u) \left[2H(u) + (nb - \varepsilon_0)u\right] dx.$$

Démonstration. En dérivant (4.15), on obtient

$$p'(t) \;=\; 2\int_\Omega u'' H(u)\, dx + 2\int_\Omega u' H(u')\, dx + (nb - \varepsilon_0)\left(\int_\Omega u'' u\, dx + \int_\Omega |u'|^2\, dx\right),$$

par la première équation de (P), on a :

$$\begin{aligned} p'(t) \;&=\; 2\left(\int_\Omega \Delta_g u H(u)\, dx - \int_\Omega h(\nabla u) H(u)\, dx - \int_\Omega f(u) H(u)\, dx + \int_\Omega u' H(u')\, dx\right) \\ &\quad + (nb - \varepsilon_0)\int_\Omega \left(\Delta_g u - h(\nabla u) - f(u)\right)\, dx + (nb - \varepsilon_0)\int_\Omega |u'|^2\, dx \\ &=\; I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t). \end{aligned}$$

□

Lemme 4.6. *La fonction $I_1(t)$ est majorée comme la suite*

$$I_1(t) \leq M\int_{\Gamma_1} |u'|^2\, d\Gamma - \varepsilon_0 \int_\Omega |u'|^2\, dx, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.18}$$

où $M = \max_{\overline{\Omega}} |H|_g$.

Démonstration. Par la règle de Leibniz et le lemme 3.1, on obtient

$$I_1(t) = \int_\Omega \left(div_g\left(|u'|^2 H\right) - |u'|^2 div_g H\right)\, dx + \int_\Omega (nb - \varepsilon_0)|u'|^2\, dx,$$

le lemme 3.1 et le fait que $u = 0$ sur Γ_0 nous donnent

$$\int_\Omega div_g\left(|u'|^2 H\right)\, dx \;=\; \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \langle H, \mu\rangle_g\, d\Gamma,$$

on obtient donc

$$I_1(t) = \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \langle H, \mu\rangle_g\, d\Gamma - \int_\Omega (div_g H - nb)\, |u'|^2\, dx - \varepsilon_0 \int_\Omega |u'|^2\, dx,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \langle H, \mu\rangle_g\, d\Gamma \;&\leq\; \int_{\Gamma_1} |u'|^2 |H|_g |\mu|_g\, d\Gamma \\ &\leq\; M\int_{\Gamma_1} |u'|^2\, d\Gamma. \end{aligned}$$

Il résulte donc

$$I_1(t) \leq M\int_{\Gamma_1} |u'|^2\, d\Gamma - \int_\Omega (div_g H - nb)\, |u'|^2\, dx - \varepsilon_0 \int_\Omega |u'|^2\, dx,$$

et puisque $div_g H \geq nb$, donc

$$I_1(t) \leq M\int_{\Gamma_1} |u'|^2\, d\Gamma - \varepsilon_0 \int_\Omega |u'|^2\, dx.$$

□

Lemme 4.7. *La fonction $I_2(t)$ est estimée par :*

$$I_2(t) \le (nB-(n+2)b+2\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx + M_1\int_{\Gamma_1}|u'|\,d\Gamma, \quad \forall t\ge 0, \tag{4.19}$$

avec M_1 est une constante a déterminé ultérieurement.

Démonstration. On utilise la formule de Green (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}I_2(t) &= 2\left(\int_{\partial\Omega} H(u)\frac{\partial u}{\partial\mu}\,d\Gamma - \int_\Omega \langle\nabla_g(H(u)),\nabla_g u\rangle_g\,dx\right)\\ &\quad + (nb-\varepsilon_0)\left(\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\mu}\,d\Gamma - \int_\Omega\langle\nabla_g u,\nabla_g u\rangle\,dx\right)\\ &= 2\left(\int_{\partial\Omega}\langle\nabla_g uH(u),\mu\rangle_g\,d\Gamma - \int_\Omega\langle\nabla_g(H(u)),\nabla_g u\rangle_g\,dx\right)\\ &\quad + (nb-\varepsilon_0)\left(\int_{\partial\Omega}\langle u\nabla_g u,\mu\rangle_g\,d\Gamma - \int_\Omega|\nabla_g u|_g^2\,dx\right),\end{aligned}$$

par le lemme 3.1, on a :

$$\int_{\partial\Omega}\langle\nabla_g uH(u),\mu\rangle_g\,d\Gamma = \int_\Omega div_g(\nabla_g uH(u))\,dx,$$

et

$$\int_{\partial\Omega}\langle u\nabla_g u,\mu\rangle_g\,d\Gamma = \int_\Omega div_g(u\nabla_g u)\,dx,$$

donc

$$\begin{aligned}I_2(t) &= 2\left(\int_\Omega div_g(\nabla_g uH(u))\,dx - \int_\Omega\langle\nabla_g(H(u)),\nabla_g u\rangle_g\,dx\right)\\ &\quad +(nb-\varepsilon_0)\left(\int_\Omega div_g(u\nabla_g u)\,dx - \int_\Omega|\nabla_g u|_g^2\,dx\right).\end{aligned}$$

Comme $u=0$ sur Γ_0 et par le lemme 4.2, on obtient

$$\int_\Omega\langle\nabla_g(H(u)),\nabla_g u\rangle_g\,dx = \int_\Omega\left(\nabla H(\nabla_g u,\nabla_g u)+\frac{1}{2}div_g(|\nabla_g u|_g^2 H)-\frac{1}{2}|\nabla_g u|_g^2 div_g H\right)\,dx,$$

mais, sur Γ_0 ou Γ_1 on a :

$$\nabla_g u = \langle\nabla_g u,\mu\rangle_g\mu = \frac{\partial u}{\partial\mu}\mu,$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial\mu}H(u) = \frac{\partial u}{\partial\mu}\langle\nabla_g u,H\rangle_g = \langle\nabla_g u,\mu\rangle_g^2\langle H,\mu\rangle_g = |\nabla_g u|_g^2\langle H,\mu\rangle_g,$$

donc

$$\begin{aligned}I_2(t) &= -2\int_\Omega\nabla H(\nabla_g u,\nabla_g u)\,dx + \int_\Omega(div_g H - nb+\varepsilon_0)\,|\nabla_g u|_g^2\,dx\\ &\quad +\int_{\Gamma_1}\left(2\frac{\partial u}{\partial\mu}H(u)-|\nabla_g u|_g^2\langle H,\mu\rangle+(nb-\varepsilon_0)u\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)\,d\Gamma+\int_{\Gamma_0}|\nabla_g u|_g^2\langle H,\mu\rangle_g\,d\Gamma.\end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}2\frac{\partial u}{\partial\mu}H(u)\,d\Gamma &\le \int_{\Gamma_1}2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right||H|_g|\nabla_g u|_g\,d\Gamma\\ &\le \int_{\Gamma_1}\left(\frac{\delta}{a_1}|\nabla_g u|_g^2+\frac{a_1}{\delta}M^2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|^2\right)\,d\Gamma,\end{aligned}$$

où a_1 et δ sont des constantes positives.
Donc, la dernière inégalité nous donne

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq -2\int_\Omega \nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u)\,dx + \int_\Omega (div_g H - nb + \varepsilon_0)|\nabla_g u|_g^2\,dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_1}\left(\frac{\delta}{a_1}|\nabla_g u|^2 + \frac{a_1}{\delta}M^2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|^2 + (nb-\varepsilon_0)u\frac{\partial u}{\partial\mu} - |\nabla_g u|^2\langle H,\mu\rangle_g\right)\,d\Gamma. \end{aligned}$$

Mais, on a sur Γ_1

$$\langle H,\mu\rangle_g = \frac{1}{|v_A|_g}H.v > \frac{\delta}{a_1},$$

et par $(\mathbf{H}_4)$, on a

$$\nabla H(\nabla_g u, \nabla_g u) = c(x)|\nabla_g u|_g^2 \geq b|\nabla_g u|_g^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq \int_\Omega \left(div_g H - (n+2)b - \varepsilon_0\right)|\nabla_g u|^2\,dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_1}\left(-\frac{\delta}{a_1}|\nabla_g u|_g^2 + (nb-\varepsilon_0)u\frac{\partial u}{\partial\mu} + \frac{\delta}{a_1}|\nabla_g u|_g^2 + \frac{a_1}{\delta}M^2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|^2\right)\,d\Gamma, \end{aligned}$$

par la remarque 4.2, il résulte

$$I_2(t) \leq (nB - (n+2)b + \varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla_g u|^2 dx + \int_{\Gamma_1}\left(\frac{a_1}{\delta}M^2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|^2 + (nb-\varepsilon_0)u\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)\,d\Gamma. \tag{4.20}$$

En estimant le dernier terme du deuxième membre d'inégalité au-dessus, alors, on utilise le condition de bord sur Γ_1 puis l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ et l'inégalité de Hölder et finalement l'inégalité $\int_{\Gamma_1}|u|^2\,d\Gamma \leq \tilde{c}\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx$ pour tout $u \in V$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1}\left((nb-\varepsilon_0)u\frac{\partial u}{\partial\mu} + \frac{a_1}{\delta}M^2\left|\frac{\partial u}{\partial\mu}\right|^2\right)\,d\Gamma &= -\int_{\Gamma_1}\left((nb-\varepsilon_0)ul(u') - \frac{a_1}{\delta}M^2|l(u')|^2\right)\,d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_1}(nb-\varepsilon_0)|u||l(u')|\,d\Gamma + \frac{a_1}{\delta}M^2\int_{\Gamma_1}|l(u')|^2\,d\Gamma \\ &\leq c_2(nb-\varepsilon_0)\int_{\Gamma_1}|u||u'|\,d\Gamma + \frac{c_2a_1}{\delta}M^2\int_{\Gamma_1}|u'|^2\,d\Gamma \\ &\leq c_2(nb-\varepsilon_0)\int_{\Gamma_1}\left(\eta|u|^2 + \frac{1}{4\eta}|u'|^2\right)\,d\Gamma \\ &\quad + \frac{c_2a_1}{\delta}M^2\int_{\Gamma_1}|u'|^2\,d\Gamma \\ &\leq \tilde{c}c_2(nb-\varepsilon_0)\eta\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx \\ &\quad + \left(\frac{c_2(nb-\varepsilon_0)}{4\eta} + \frac{c_2a_1M^2}{\delta}\right)\int_{\Gamma_1}|u'|^2 d\Gamma \\ &= \varepsilon_0\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx + M_1\int_{\Gamma_1}|u'|^2\,d\Gamma, \end{aligned}$$

où $\eta = \frac{\varepsilon_0}{\tilde{c}c_2(nb-\varepsilon_0)}$ et $M_1 = \frac{c_2(nb-\varepsilon_0)}{4\eta} + \frac{c_2a_1M^2}{\delta}$.
Par conséquent, l'estimation (4.20) donne

$$I_2(t) \leq (nB - (n+2)b + 2\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx + M_1\int_{\Gamma_1}|u'|^2\,d\Gamma.$$

□

Lemme 4.8. *L'intégrale $I_3(t)$ satisfait l'estimation suivante*

$$I_3(t) \le \beta(2M + \bar{c}nb) \int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx, \quad \forall t \ge 0, \tag{4.21}$$

où $\bar{c}$ est un constante positive vérifie

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \le \bar{c} \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 \, dx, \quad \forall u \in V.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_3(t) &= -\int_\Omega h(\nabla u)\left(2H(u) + (nb - \varepsilon_0)u\right) \, dx \\ &\le 2\int_\Omega |H(u)||h(\nabla u)| \, dx + (nb - \varepsilon_0) \int_\Omega |u||h(\nabla u)| \, dx, \end{aligned}$$

mais, par la théorème de représentation de Riesz $H(u) := \langle \nabla_g u, H \rangle_g$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega |h(\nabla u)||H(u)| \, dx &= 2\int_\Omega |h(\nabla u)||\langle \nabla_g u, H \rangle_g| \, dx \\ &\le 2\int_\Omega |h(\nabla u)||\nabla_g u|_g |H|_g \, dx \\ &\le 2M \int_\Omega |h(\nabla u)||\nabla_g u| \, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$I_3(t) \le 2M \int_\Omega |h(\nabla u)||\nabla_g u| \, dx + (nb - \varepsilon_0) \int_\Omega |u||h(\nabla u)| \, dx,$$

l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ nous assure

$$I_3(t) \le 2\beta M \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 \, dx + \beta(nb - \varepsilon_0) \int_\Omega |u||\nabla_g u|_g \, dx,$$

en appliquant l'inégalité $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on aboutit

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_g u|_g |u| \, dx &\le \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx + \bar{c}\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\bar{c}\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx + \bar{c}\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx\right) \\ &= \bar{c}\int_\Omega |\nabla_g u|^2 \, dx, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} I_3(t) &\le 2\beta M \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 \, dx + \beta\bar{c}(nb - \varepsilon_0) \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 \, dx \\ &\le \beta(2M + \bar{c}nb) \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 \, dx. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.9. *L'intégrale $I_4(t)$ vérifie l'inégalité suivante*

$$I_4(t) \le (nB - (nb - \varepsilon_0)r) \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \, d\Gamma, \quad \forall t \ge 0. \tag{4.22}$$

Démonstration. Par (4.4), on obtient

$$I_4(t) \quad \leq \quad -(nb-\varepsilon_0)r\int_\Omega 2F(u)\,dx - \int_\Omega 2H\left(F(u)\right)\,dx,$$

le lemme 3.1 nous donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega H\left(F(u)\right)\,dx &= \int_\Omega \left(div_g\left(F(u)H\right) - F(u)div_g H\right)\,dx\\ &= \int_\Omega div_g\left(F(u)H\right)\,dx - \int_\Omega F(u)div_g H\,dx\\ &= \int_{\Gamma_1} F(u)\langle H,\mu\rangle_g\,d\Gamma - \int_\Omega F(u)div_g H\,dx,\end{aligned}$$

donc

$$I_4(t) \leq -\int_\Omega \left(\left(nb-\varepsilon_0\right)r - div_g H\right)2F(u)\,dx - \int_{\Gamma_1} 2F(u)\langle H,\mu\rangle_g\,d\Gamma.$$

Mais comme F est positive et F(0)=0, on obtient

$$\int_\Omega \left(div_g H - (nb-\varepsilon_0)r\right)2F(u)\,dx - \int_{\Gamma_1} 2F(u)\langle H,\mu\rangle_g\,d\Gamma \leq \int_\Omega \left(div_g H - (nb-\varepsilon_0)r\right)2F(u)\,dx,$$

et par la remarque 4.2, on a :

$$div_g H \leq nB,$$

donc, il résulte

$$I_4(t) \leq \left(nB - (nb-\varepsilon_0)r\right)\int_\Omega 2F(u)\,dx.$$

□

4.2 La décroissance exponentielle

La stabilité exponentielle de la solution du problème (P) est assurée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit u une solution du problème (P), supposons que f vérifie (3.1) et (4.4). En plus, on suppose que h satisfait (3.3) et les hypothèses $(\mathbf{H}_2)$, $(\mathbf{H}_3)$ et $(\mathbf{H}_4)$ sont vérifiées. Alors l'énergie de (P) définie par (4.5) décroit exponentiellement vers 0, c-à-d : il existe deux constantes positives c et ω satisfassent l'inégalité suivante*

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $0 < \beta < \frac{\varepsilon_0}{2M+\bar{c}nb}$, on combine (4.18), (4.19), (4.21), (4.22) et (4.15), on trouve

$$\begin{aligned}p'(t) \leq{}& (M+M_1)\int_{\Gamma_1} |u'|^2\,d\Gamma + \left((nB-(n+2)b+2\varepsilon_0) + \beta(2M+\bar{c}nb)\right)\int_\Omega |\nabla_g u|_g^2\,dx\\ &+ (nB-(nb-\varepsilon_0)r)\int_\Omega 2F(u)\,dx - \varepsilon_0\int_\Omega |u'|^2\,dx,\end{aligned}$$

on pose $\gamma := \min\{(n+2)b - nB - 3\varepsilon_0, (nb-\varepsilon_0)r - nB, \varepsilon_0\}$ qu'est positive par $(\mathbf{H}_3)$, donc

$$p'(t) \leq -\gamma E(t) + (M+M_1)\int_{\Gamma_1} |u'|^2\,d\Gamma. \tag{4.23}$$

En utilisant (4.14), on obtient

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon p'(t),$$

mais par (4.23), on a :

$$E'_\varepsilon(t) \leq -(\varepsilon\gamma - \beta)E(t) - (2c_2 - \varepsilon(M + M_1)) \int_{\Gamma_1} |u'|^2 \, d\Gamma,$$

on choisit $\varepsilon > 0$ de sorte que $2c_2 - \varepsilon(M + M_1) > 0$, lorsque ε est fixé, on prend $\beta > 0$ pour que $\varepsilon\gamma - \beta$ soit positive, on obtient donc

$$E'_\varepsilon(t) \leq -C_2 E(t), \tag{4.24}$$

finalement par les inégalités (4.24) et (4.16), on déduit que

$$E'_\varepsilon \leq -C_2\beta_1 E_\varepsilon = -K E_\varepsilon, \tag{4.25}$$

où $K = C_2\beta_1 \geq 0$, donc

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)e^{-Kt},$$

en utilisant (4.16) pour la deuxième fois, on obtient

$$E(t) \leq \frac{E_\varepsilon(0)}{\beta_1} e^{-Kt},$$

d'où la décroissance exponentielle du (P). □

Remarque 4.3. *Si $\Delta_g = \Delta$, le problème obtenu, (P_c), est un cas particulier du (P), donc on le associe par l'énergie suivante*

$$\tilde{E}(t) = \int_\Omega \left(|u'(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 + 2F(u(t)) \right) dx, \tag{4.26}$$

il est dissipatif sous l'énergie équivalente

$$\tilde{E}(t) + 2\varepsilon \int_\Omega u'(x,t)(x - x_0).\nabla u(x,t) \, dx + \varepsilon(n - \varepsilon_0) \int_\Omega u'(x,t)u(x,t) \, dx, \tag{4.27}$$

pour $\varepsilon_0 \in (0,1)$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Le corollaire ci-dessous assure la décroissance exponentielle de (P_c).

Corollaire 4.1. *Soit $u \in C([0,\infty); V) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$ une solution de (P_c), supposons que les conditions (3.4), (3.5), (4.4), (3.1) et (3.3) pour $a_0 = 1$ et β sont satisfait, alors l'énergie $\tilde{E}(t)$ de (P_c) définie par (4.26) décroit exponentiellement, c-à-d*

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{c}\tilde{E}(0)e^{-\tilde{\omega}t}, \quad \forall t \geq 0,$$

pour tout constantes $\tilde{c}$, $\tilde{\omega}$ indépendant de t.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré une équation d'ondes semi-linéaire avec des coefficients variables et des conditions aux limites non linéaire. En se basant sur les approximations de Faedo-Galarekin ainsi que la méthode de compacité, nous avons analysé la question d'existence et l'unicité de solution intégrable et régulière pour ce problème. Finalement, nous avons obtenu la stabilité exponentielle de la solution par introduire une nouvelle énergie équivalente du système et en utilisant la méthode de multiplicateur d'énergie dans la variété riemannienne.

Bibliographie

[1] A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] A. Guesmia, *A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems*, SIAM J. Control Optim. 42 (2003) 24-52.

[3] B. Guo, Z. Shao, *On exponential stability of a semilinear wave equation with variable coeffcients under the nonlinear boundary feedback*, Nonlinear Anal. TMA, 71, (2009), 5961-5978.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Halsted Press, 1983.

[5] J. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Vol. 1, 2, Dunod Paris (1968).

[6] J. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Paris, 1969.

[7] Laurent Schwartz, *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

[8] M. Aassila, M. Cavalcanti, *On nonlinear hyperbolic problems with nonlinear boundary feedback*, Bull. Bleg. Math. Soc. Simon Stevin 7(2000) 521-540.

[9] M. Djaa, *Introduction à la géométrie riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés*, 2017.

[10] M. Taylor, *Partial Differential Equations I :Basic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[11] P. Bernard, *Géométrie Différentielle*, 2015.

[12] P. Yao, *On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients*, SIAM J. Control Optim. 37 (1999) 1568-1599.

[13] V. Humilière, *Géométrie différentielle*, cours de M_1 2018-2019.

[14] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization : The Multiplier Method*, John Wiley and Sons. Ltd., Chichester, 1994

[15] V. Komornik, E. Zuazua, *A Direct Method for Boundary Stabilization of the Wave Equation*, J. math. Pures et Appl. 69, (1990), 33-54.