



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**Université Amar Téliidji de Laghouat**  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques et Informatique

# PROJET DE FIN D'ETUDE (Licence)

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques

## Thème

---

*Résolution analytique de l'équation de Laplace dans un domaine borné  
bidimensionnel*

---

**Présentée par :**

*M<sup>elle</sup>* M. SAHRAOUI et *M<sup>elle</sup>* N. E. BENGUIT

**Encadré par :** Dr. NOUIRI Brahim

Année universitaire 2014/2015

# Remerciements

*E*n remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamé et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide de l'encadrement Monsieur NOUIRI Brahim, Maître de conférences à l'université de Laghouat. Je tien à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt. Ce projet a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat ; mes remerciements s'adressent a Monsieur Lagraa Nacereddine chef de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce projet. Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce projet. Nos remerciement s'adresse également à tous les professeurs pour leurs générosités et la grande passience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles. Nos profonds remerciements aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet principalement à nos chers parents ainsi qu'à toute nos famille et nos amis pour leur grand soutien.

## **Dédicace**

*A mon père aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont 'il cesse de me combler que dieu leur procure bonne santé et longue vie.*

*A la lumière de mes jours pour sa douceur et sa gentillesse maman que j'aime.*

*A celui que j'aime beaucoup qui m'a soutenue tout au long de ce projet :mon oncle Abdelhamid ,et bien sur à mes frères :Brahim, Yacine et mon petit Moussa sans oublier mes grandes mère ,mes tantes, mes oncles et mes cousines .*

*A toutes mes familles :Sahraoui , Mahroug erras , Miker et Metidji.et à mes amis spécialement ma promotion math 2015.*

*A mes sœurs de cœur Fatima et Hanane ,à mon binôme Nour El Houda que j'aime beaucoup. Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit élaborer .je vous ont remercie.*

**MAMA**

## **Dédicace**

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.*

*Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à mon frères Yacine et Mes sœurs Hafida et Hayat, à mon grand-père et mes grandes mère à toutes mes familles BENGUIT et HAZEL*

*je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements.*

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études, mes aimables amis, et sœurs de cœur, toi Mama Sahraoui et Ahlam Djoudi et à mes chères cousines.*

**NOUR EL HOUDA**

# Résumé

*Dans ce projet, nous avons résolu analytiquement l'équation de Laplace dans un domaine borné en dimension deux par la méthode de séparation des variables. Notre projet se décompose en deux chapitres :*

- ☞ Équation de Laplace dans un rectangle,*
- ☞ Équation de Laplace dans un disque.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Équation de Laplace dans un rectangle</b>	<b>2</b>
1.1	Équation de Laplace avec condition de Dirichlet . . . . .	3
1.2	Équation de Laplace avec condition de Neumann . . . . .	8
1.3	Problème d'existence et d'unicité . . . . .	10
1.3.1	Principe de Maximum . . . . .	11
1.4	Équation de Poisson . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Équation de Laplace dans un disque</b>	<b>15</b>
2.1	Équation de Laplace en coordonnées polaires . . . . .	16
2.2	Problème de Dirichlet . . . . .	17
2.3	Problème de Neumann . . . . .	22
2.4	Équation de Laplace pour un anneau circulaire . . . . .	23

# Introduction générale

*En analyse vectorielle, l'équation de Laplace est une "équation aux dérivées partielles elliptique" du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien et mathématicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne. L'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et mécanique quantique. Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions harmoniques. La technique de séparation de variables consiste à accepter que toute fonction représentant un potentiel solution de l'équation de Laplace peut s'écrire comme un produit de fonctions dépendant chacune d'une seule coordonnée. On arrive alors à transformer l'équation de Laplace (dérivées partielles) en un système d'équations différentielles ordinaires, dont la solution est censée être plus aisée. Il est évident que cette technique dépend fortement du système de coordonnées considéré.*

*Notre objective dans ce projet est la résolution analytique de l'équation de Laplace dans un domaine borné par la méthode de séparation des variables. Notre projet se décompose en deux chapitres :*

- ☞ Dans le premier chapitre, on établit les conditions de Dirichlet et de Neumann , pour résoudre le problème on utilise la méthode de séparation des variables .pendant la recherche de la solution on se rencontre avec les EDOs de second ordre avec des coefficients constants .*
- ☞ Dans le second chapitre, on fait le changement de variables de coordonnées Cartésiennes vers les coordonnées polaires , en suit la même technique pour résoudre le problème mais on se rencontre avec les EDOs de second ordre avec des coefficients variables on les changés à des EDOs de second ordre avec des coefficients constants pour facilement à résolut .*

# **Chapitre 1**

## **Équation de Laplace dans un rectangle**

## 1.1 Équation de Laplace avec condition de Dirichlet

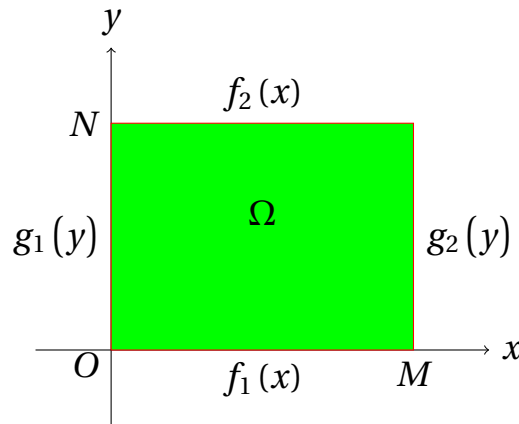
Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on appelle solution  $u$  du problème de Dirichlet une fonction  $u \in H_0^1$  telle que :

$$-\Delta u = f$$

au sens des distributions .

Soit  $\Omega = [0, M] \times [0, N]$  un rectangle de  $\mathbb{R}^2$  où  $M, N > 0$ . On considère le problème suivant : Trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, N) = f_2(x) \text{ pour } 0 \leq x \leq M, \\ u(0, y) = g_1(y), u(M, y) = g_2(y) \text{ pour } 0 \leq y \leq N. \end{cases} \quad (1.1)$$



Tel que :  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  sont des données.

Le problème (1.1) peut être décomposé en quatre problèmes ayant chacun seule condition non-homogène plutôt que quatre :

**Problème 1.1.** Trouver  $u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution d'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

et vérifiée les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = f_1(x) \text{ et } u_1(x, N) = 0 \text{ pour } x \in [0, M], \\ u_1(0, y) = 0 \text{ et } u_1(M, y) = 0 \text{ pour } y \in [0, N]. \end{cases} \quad (1.3)$$

**Problème 1.2.** Trouver  $u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution d'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

et vérifiée les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} u_2(x, 0) = 0 & \text{et } u_2(x, N) = f_2(x) & \text{pour } x \in [0, M], \\ u_2(0, y) = 0 & \text{et } u_2(M, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, N]. \end{cases} \quad (1.5)$$

**Problème 1.3.** Trouver  $u_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution d'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

et vérifiée les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} u_3(x, 0) = 0 & \text{et } u_3(x, N) = 0 & \text{pour } x \in [0, M], \\ u_3(0, y) = g_1(y) & \text{et } u_3(M, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, N]. \end{cases} \quad (1.7)$$

**Problème 1.4.** Trouver  $u_4 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solution d'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8)$$

et vérifiée les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} u_4(x, 0) = 0 & \text{et } u_4(x, N) = 0 & \text{pour } x \in [0, M], \\ u_4(0, y) = 0 & \text{et } u_4(M, y) = g_2(y) & \text{pour } y \in [0, N]. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Remarque 1.1.** Comme l'équation de Laplace est linéaire, on peut écrire la solution  $u$  de problème (1.1) comme une somme de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  c'est à dire

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4.$$

Pour résoudre Problème 1.1, on utilise la méthode de séparation des variables, on pose  $u_1(x, y) = F(x)G(y)$  et nous remplaçons dans (1.2), nous obtenons :

$$F''G + FG'' = 0 \implies \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = \lambda$$

Ainsi, nous avons les deux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$F'' - \lambda F = 0 \quad \text{et} \quad G'' + \lambda G = 0$$

Avec les conditions de Dirichlet (1.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_1(x, N) = F(x)G(N) = 0 &\implies G(N) = 0; \\ u_1(0, y) = F(0)G(y) = 0 &\implies F(0) = 0; \\ u_1(M, y) = F(M)G(y) = 0 &\implies F(M) = 0. \end{aligned}$$

1. On résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} F'' - \lambda F = 0, \\ F(0) = F(M) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

(a) Si  $\lambda > 0$ , alors on pose  $\lambda = \mu^2$  et on a :

$$r^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \mu \Rightarrow F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Avec les conditions  $F(0) = F(M) = 0$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\mu M} + Be^{-\mu M} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow A = B = 0.$$

Alors,  $u_1(x, y) = 0$  donc contradiction avec la condition de Dirichlet

$$u_1(x, 0) = f_1(x) \neq 0.$$

(b) Si  $\lambda = 0$ , alors on a :

$$F(x) = Ax + B \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Donc, avec les conditions  $F(0) = F(M) = 0$ , nous avons :

$$\begin{cases} F(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \\ F(M) = 0 \Rightarrow A = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow u_1(x, y) = 0$$

Alors,  $u_1(x, y) = 0$  donc contradiction avec la condition de Dirichlet

$$u_1(x, 0) = f_1(x) \neq 0.$$

(c) Si  $\lambda < 0$ , on pose  $\lambda = -\mu^2$ , on a :

$$r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\mu \Rightarrow F(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Avec les conditions  $F(0) = F(M) = 0$ , nous avons :

$$\begin{cases} F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \\ F(M) = 0 \Rightarrow B \sin(\mu M) = 0 \Rightarrow \mu = k\pi / M \text{ où } k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

Alors, l'équation (1.10) admet infinité des solutions données par :

$$F_k(x) = B \sin\left(\frac{k\pi}{M}x\right) \text{ où } B \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{Z}^*.$$

$$\begin{cases} F(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0 \\ F(M) = A \cos(\nu M) + B \sin(\nu M) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B \sin(\nu M) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\nu M) = 0 \implies \nu = \frac{n\pi}{M}, \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2$$

et

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \text{ où } n \in \mathbf{Z}, n \neq 0.$$

Si nous considérons maintenant la seconde équation  $G'' + \lambda G = 0$  avec  $G(N) = 0$  dans le cas où  $\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2$ . où  $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ , nous obtenons :

$$G_n(y) = C e^{\left(\frac{n\pi y}{M}\right)} + D e^{\left(-\frac{n\pi y}{M}\right)}.$$

Mais nous avons aussi

$$G_n(N) = 0 \implies C e^{\left(\frac{n\pi N}{M}\right)} + D e^{\left(-\frac{n\pi N}{M}\right)} = 0 \implies D = -C e^{\left(\frac{2n\pi N}{M}\right)}.$$

En substituant ceci dans la solution  $G_n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} G_n(y) &= C e^{\left(\frac{n\pi y}{M}\right)} - C e^{\left(\frac{2n\pi N}{M}\right)} e^{\left(-\frac{n\pi y}{M}\right)} \\ &= C e^{\left(\frac{n\pi N}{M}\right)} \left[ e^{\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)} - e^{\left(-\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)} \right] \\ &= 2C e^{\left(\frac{n\pi N}{M}\right)} \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right). \end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons que

$$a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right).$$

est une solution du problème 1.1 ; et nous avons remplacé

$$B_n 2C e^{\left(\frac{n\pi N}{M}\right)}.$$

Par  $a_n$ . En utilisant le principe de superposition, nous obtenons que

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right)$$

Est aussi une solution du Problème 1.1.

En est une solution si et seulement si

$$u_1(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right) = f_1(x) \quad \forall x \in [0, M];$$

C'est à dire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sinh\left(-\frac{n\pi N}{M}\right)$$

est la série de Fourier impaire de  $f_1(x)$  :

$$\begin{cases} \omega = \frac{\pi}{M} & T = \frac{2\pi}{\omega} & T = 2l \\ \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{l} & \Leftrightarrow & l = \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} u_1(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right). dx \\ &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^M u_1(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right). dx \\ &= \frac{2}{M} \int_0^M u_1(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right). dx \end{aligned}$$

$$a_n = \left(\frac{2}{M} \sinh(-n\pi N/M)\right) \int_0^M f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right). dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$$

Nous avons ainsi obtenu une solution formelle du Problème 1.1. En procédant de façon similaire, nous obtenons des solutions formelles aux Problèmes 1.2 jusqu'à 1.4. Ces solutions sont

$$u_2(x, y) = \sum_0^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{M}\right)$$

avec

$$b_n = \left(\frac{2}{M \sinh(n\pi N/M)}\right) \int_0^M f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right). dx$$

Pour Problème 1.2 ,

$$u_3(x, y) = \sum_0^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-M)}{N}\right)$$

avec

$$c_n = \left(\frac{2}{N \sinh(-n\pi M/N)}\right) \int_0^M g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right). dx$$

Pour Problème 1.3 et

$$u_3(x, y) = \sum_0^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{M}\right)$$

avec

$$d_n = \left(\frac{2}{N \sinh(n\pi M/N)}\right) \int_0^M g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right). dx$$

Pour Problème 1.4. Ainsi la solution formelle du problème du départ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et les conditions à la frontière

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), u(x, N) = f_2(x), \\ u(0, y) &= g_1(y), u(M, y) = g_2(y) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N \end{aligned}$$

est

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) \left[ a_n \sinh\left(\frac{n\pi(y-N)}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{N}\right) \left[ c_n \sinh\left(\frac{n\pi(x-M)}{N}\right) + d_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{N}\right) \right] \end{aligned}$$

avec  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  comme précédemment.

## 1.2 Équation de Laplace avec condition de Neumann

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N \\ u_y(x, 0) = h(x), u_y(x, N) = i(x); u_x(0, y) = j(y), u_x(M, y) = k(y) \end{cases}$$

Tel que :  $h, i, j$  et  $k$  sont des données.

**Remarque 1.2.** On note que la solution du problème de **Neumann** peut écrire comme une somme de  $u_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , i.e :  $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ , alors il suffit de trouver une seule  $u_i$ , puis on trouve les autres similairement

**Problème 1.5.**

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u_{1y}(x, 0) &= H(x) \text{ et } u_{1y}(x, N) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_{1x}(0, y) &= 0 \quad \text{et } u_{1x}(M, y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

**Problème 1.6.**

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u_{2y}(x, 0) &= 0 \quad \text{et } u_{2y}(x, N) = I(x) \quad \text{pour } x \in [0, M], \\ u_{2x}(0, y) &= 0 \quad \text{et } u_{2x}(M, y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0, N]. \end{aligned}$$

**Problème 1.7.**

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_y(x, N) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, M], \\ u_x(0, y) = j(y) \quad \text{et} \quad u_x(M, y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in [0, N]. \end{aligned}$$

**Problème 1.8.**

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_y(x, N) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, M], \\ u_x(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad u_x(M, y) = K(y) \quad \text{pour} \quad y \in [0, N]. \end{aligned}$$

Par exemple, on trouve Problème 1.7. D'abord, on va voir la séparation de solutions  $u(x, y) = F(x)G(y)$  en liant cette solution séparée dans l'équation donnée.

$$F''G + FG'' = 0; \quad \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = \lambda F'' = \lambda F \quad \text{et} \quad G'' = -\lambda G$$

Nous allons observer que les deux premières conditions aux limites de 1.7, implique :

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = F(x)G'(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad G'(0) = 0 \\ u_y(x, N) = F(x)G'(N) = 0, \quad \Rightarrow \quad G'(N) = 0 \end{aligned}$$

Pendant la recherche de la solution, nous avons ainsi le problème suivant :

$$\begin{aligned} G'' &= -\lambda G \\ G'(0) &= G'(N) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2, \quad G_n(y) = \text{Cos}\left(\frac{n\pi y}{N}\right), \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{pour } \lambda_0 = 0, \quad F'' = 0 \quad \Rightarrow \quad F_0(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}x.$$

$$\text{pour } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2 \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

$$F'' = \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2 F \quad \Rightarrow \quad F_n(x) = A_n e^{(n\pi x/N)} + B_n e^{(-n\pi x/N)}.$$

On note que les quatre conditions aux limites de 1.7 implique :

$$u_x(M, y) = F(M)G'(y) = 0, \quad \Rightarrow \quad F'(M) = 0$$

Ce qui donne les conditions pour les coefficients de  $A_n, B_n$ .

$$F'_0(M) = 0 \Rightarrow \frac{B_0}{2} = 0.$$

et  $F'_n(M) = 0$  donne

$$A_n \frac{n\pi}{N} e^{n\pi M/N} - B_n \frac{n\pi}{N} e^{-n\pi M/N} = 0 \Rightarrow B_n = A_n e^{2n\pi M/N}.$$

Ainsi,

$$F_n(x) = A_n e^{(n\pi x/N)} + A_n e^{2n\pi M/N} e^{(-n\pi x/N)} = A_n (e^{(n\pi x/N)} + e^{(-n\pi(x-2M)/N)})$$

Maintenant on utilise  $F_n(x)$  et  $G_n(y)$ , donc on peut écrire la série de solutions comme

$$u(x, y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (e^{(n\pi x/N)} + e^{(-n\pi(x-2M)/N)}) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right).$$

Finalement, les conditions aux limites non-homogènes de 1.7 implique :

$$u_x(0, y) = j(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{N} e^{n\pi M/N} (1 - e^{2n\pi M/N}) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right).$$

D'où

$$A_n \frac{n\pi}{N} (1 - e^{2n\pi M/N}) = j_n, \quad \text{ou} \quad A_n = \frac{j_n}{(1 - e^{2n\pi M/N}) n\pi / N},$$

Où

$$j_n = \frac{2}{N} \int_0^N j(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Substitution des coefficient  $A_n$  dans la série 1.7 donne la solution :

$$u(x, y) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{(1 - e^{2n\pi M/N}) n\pi / N} (e^{(n\pi x/N)} + e^{(-n\pi(x-2M)/N)}) \cos\left(\frac{n\pi y}{N}\right).$$

### 1.3 Problème d'existence et d'unicité

Pour prouver l'existence et l'unicité du problème de Laplace avec les conditions de Dirichlet ; il faut d'abord proposer le principe de maximum .

### 1.3.1 Principe de Maximum

Si  $u$  est une fonction deux fois continument dérivable ( fonction harmonique ) qui vérifie  $\Delta u = 0$  dans l'ouvert  $\Omega$  , et  $u$  n'est pas constante, alors  $u$  atteint son maximum sur le bord  $\Omega$  .

**Théorème 1.1.** *Supposons que  $u(x, y)$  fonction harmonique dans la frontière de domaine  $D$  et continue dans  $A = D \cup B$  , alors  $u$  atteint son maximum dans la frontière du domaine  $B$  de  $D$ .*

#### preuve

On pose le maximum de  $u$  sur  $B$  est  $M$ , on va supposer que le maximum de  $u$  en  $A$  n'est pas atteinte en tout points de  $B$ , puis il doit être atteinte à certain points  $P_0(x_0, y_0)$  en  $D$ .

Si  $M_0 = u_0(x_0, y_0)$  signifie le maximum de  $u$  en  $D$ , alors  $M_0$  doit également être le maximum de  $u$  en  $A$ .

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M_0 - M}{4R^2} \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right]$$

Où le point  $P(x, y)$  est en  $D$  et où  $R$  est le rayon d'un cercle contenant  $D$ , noter que :

$$v_0(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M_0;$$

Nous avons :

$$v(x, y) \leq M + \frac{M_0 - M}{2} = \frac{1}{2}(M + M_0) < M \text{ en } B$$

Ainsi  $v(x, y)$  comme  $u(x, y)$  doit atteindre son maximum à un point en  $D$ , il résulte de la définition de  $v(x, y)$

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + \frac{M_0 - M}{R^2} = \frac{M_0 - M}{R^2} > 0 \quad (1.11)$$

Mais pour  $v$  être un maximum en  $D$

$$v_{xx} \leq 0 \quad ; \quad v_{yy} \leq 0$$

mais

$$v_{xx} + v_{yy} \leq 0$$

qui contredit l'équation 1.11, d'où le maximum de  $u$  doit être atteint en  $B$  .

**Existence** : la solution consiste à démontrer l'Existence ; maintenant on va démontrer l'unicité .

**Unicité** :

**Théorème 1.2.** *La solution de problème de Dirichlet s'il existe, il est unique.*

**preuve**

Laissez  $u_1(x, y)$  et  $u_2(x, y)$  doit être deux solutions de problème de Dirichlet, puis  $u_1(x, y)$  et  $u_2(x, y)$  satisfaisant :

$$\Delta u_1 = 0 \quad \Delta u_2 = 0 \quad \text{en } D \quad u_1 = f \quad u_2 = f \quad \text{en } B$$

Comme  $D$  c'est l'intérieur du domaine et  $B$  sa frontière, et  $u_1(x, y)$  et  $u_2(x, y)$  sont des fonctions harmonique en  $D$ ,  $(u_1 - u_2)$  est aussi une fonction harmonique en  $D$ ; mais  $(u_1 - u_2) = 0$  sur  $B$ .

On établit maintenant le principe de maximum, on obtient  $u_1 - u_2 = 0$ , à tout les points intérieurs de  $D$ .

Ainsi, nous avons  $u_1 = u_2$ .

Donc; la solution est unique.

## 1.4 Équation de Poisson

On considère l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) & \text{dans } D, \\ u(x, y) = g(x, y), & \text{sur } B. \end{cases}$$

Tel que :  $D$  c'est l'intérieur du domaine et  $B$  sa frontière .

On suppose que la solution peut être écrite sous la forme :

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

Ou  $v$  est une solution particulière de l'équation de Poisson et  $w$  est la solution de l'équation homogène, c-à-d :

$$\begin{cases} \nabla^2 w(x, y) = 0, \\ \nabla^2 v(x, y) = f(x, y). \end{cases}$$

Quand  $v$  est établie, la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 & \text{dans } D, \\ w(x, y) = -v(x, y) + g(x, y) & \text{sur } B. \end{cases}$$

Peut être déterminée, la méthode habituelle pour trouver une solution particulière ou  $f(x, y)$  est un polynôme de degré " n " de rechercher un polynôme de degré " n+2 " avec des coefficients indéterminés.

Par exemple ; nous considérons le problème de torsion :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2, & 0 < x < M; 0 < y < N, \\ u(0, y) &= 0 ; u(M, y) = 0 ; u(x, 0) = 0 ; u(x, N) = 0; \end{aligned}$$

Nous laissons  $u = v + w$ . Maintenant soit  $v$  de la forme suivante :

$$v(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2.$$

Substituons cette formule dans l'équation de Poisson, on obtient :

$$2D + 2F = -2.$$

La façon la plus simple de satisfaire à cette équation est de choisir

$$D = -1 \quad \text{et} \quad F = 0.$$

Les coefficients restants sont arbitraires. Donc ; nous prenons :

$$v(x, y) = ax - x^2$$

$v(x, y)$  se réduit à zéro sur les cotés  $x = 0$  et  $x = M$ . Prochainement ; on trouve  $v$  à partir de :

$$\begin{aligned} \nabla^2 w &= 0, & 0 < x < M; 0 < y < N, \\ w(0, y) &= -v(0, y) = 0, \\ w(M, y) &= -v(M, y) = 0, \\ w(x, 0) &= -v(x, 0) = -(ax - x^2), \\ w(x, N) &= -v(x, N) = -(ax - x^2). \end{aligned}$$

On conclut d'après les étapes précédentes dans le problème de Dirichlet dans un rectangle la solution suivante :

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right).$$

Appliquant les conditions non-homogènes aux limites.

$$w(x, 0) = -(ax - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right),$$

$$w(x, N) = -(ax - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cosh\left(\frac{n\pi N}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right).$$

D'ou l'on trouve :

$$a_n = \frac{2}{M} \int_0^M (x^2 - ax) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-8M^2}{\pi^3 n^3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Et

$$\left( a_n \cosh\left(\frac{n\pi N}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi N}{M}\right) \right) = \frac{2}{M} \int_0^M (x^2 - ax) \sin\left(\frac{n\pi x}{M}\right) dx$$

D'ou; la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson est donnée par :

$$u(x, y) = (a - x)x$$

$$- \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \sinh(2n-1) \frac{\pi(N-y)}{M} + \sinh(2n-1) \frac{\pi y}{M} \right] \sinh(2n-1) \frac{\pi x}{M}}{\sinh(2n-1) \frac{\pi N}{M} (2n-1)^3}$$

## **Chapitre 2**

# **Équation de Laplace dans un disque**

## 2.1 Équation de Laplace en coordonnées polaires

On considère l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec le changement des variables suivant :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad - \frac{y}{x^2 + y^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{r \cos \theta}{r} \left[ \frac{r \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{r \sin \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right] + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad - \frac{r \sin \theta}{r^2} \left[ \frac{r \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{r \sin \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] + \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^4} \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \frac{x}{x^2 + y^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \\
&= \frac{r \sin \theta}{r} \left[ \frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{r \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right] + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \frac{r \cos \theta}{r^2} \left[ \frac{r \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{r \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] - \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \\
&= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
&\quad - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[ \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r} \right] \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \left[ \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{r^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

donc, l'équation de Laplace en coordonnées polaires est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

## 2.2 Problème de Dirichlet

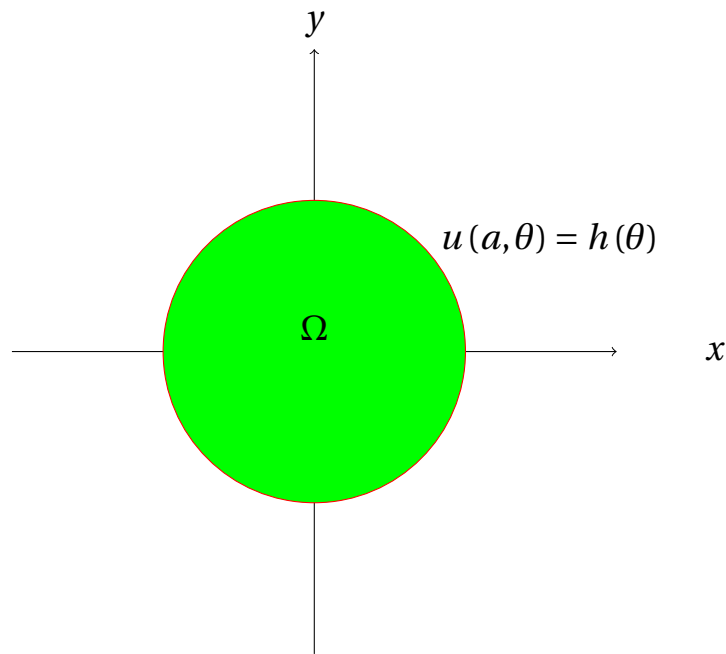
Soit  $\Omega$  un disque ouvert défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ où } a > 0\}.$$

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\ u(r = a, \theta) = h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Où  $h$  est une fonction périodique.



On pose  $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ ; avec la méthode de séparation des variables; on obtient :

$$F''G + \frac{1}{r} [F'G] + \frac{1}{r^2} [FG''] = 0$$

En divisant par  $u(r, \theta)$ ; on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} &= 0 \\ \frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} &= -\frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} \\ r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} &= -\frac{G''}{G} = \lambda \end{aligned}$$

On obtient deux équations :

$$\begin{cases} r^2 F'' + r F' - \lambda F = 0 \\ G'' + \lambda G = 0 \end{cases}$$

1. On suppose que  $\lambda < 0$ :

On pose :  $\lambda = -\mu^2$

$$\begin{aligned} G'' - \mu^2 G = 0 &\Rightarrow L^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow L_{1,2} = \pm \mu \\ G_\mu(\theta) &= A_\mu e^{\mu\theta} + B_\mu e^{-\mu\theta} \end{aligned}$$

Les conditions périodiques à la frontière implique :

$$\begin{aligned} G_\mu(0) &= G_\mu(2k\pi) \\ G_\mu(0) &= A_\mu e^0 + B_\mu e^0 = A_\mu + B_\mu \\ G_\mu(2k\pi) &= A_\mu e^{\mu 2k\pi} + B_\mu e^{-\mu 2k\pi} \end{aligned}$$

$$A_\mu + B_\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_\mu e^{\mu 2k\pi} + B_\mu e^{-\mu 2k\pi}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A_\mu > 0 \\ 0 & \text{si } A_\mu = 0 \\ -\infty & \text{si } A_\mu < 0 \end{cases}$$

Alors ;  $A_\mu = 0$  et  $A_\mu + B_\mu = 0$  ceci implique que  $B_\mu = 0$  ; il est contradiction avec les conditions à la frontière.

2. On suppose que  $\lambda = 0$  alors

$$G''(\theta) = 0 \Rightarrow G(\theta) = A + B\theta \quad A \text{ et } B \text{ sont des constantes}$$

La frontière périodique implique que :

$$\begin{aligned} A &= G(0) = G(2k\pi) = A + 2Bk\pi \\ &\Rightarrow 2Bk\pi = 0 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Donc si  $\lambda = 0$ , alors  $G(\theta) = A$  constante ; mais  $G(\theta)$  en fonction de  $\theta$  et la condition à la frontière est une fonction alors ; est une contradiction avec les conditions à la frontière.

3. On suppose que  $\lambda > 0$

On pose  $\lambda = \mu^2$

$$\begin{aligned} G'' + \mu^2 G &= 0 \Rightarrow L^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow L_{1,2} = \pm i\mu \\ &\Rightarrow G_\mu(\theta) = A_\mu \cos(\mu\theta) + B_\mu \sin(\mu\theta) \end{aligned}$$

Cela montre la période moins ou nul de  $G$  c'est  $\frac{2\pi}{\mu}$  sauf  $G(\theta) = 0$  ainsi la condition limite périodique implique que  $G(\theta) \neq 0$  puis :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\mu} n &= 2\pi \quad \text{ou } \mu = n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \\ \lambda &= \lambda_n = n^2 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Et pour chaque de ces valeurs de  $\lambda$ , non trivial  $2\pi$  solutions périodiques sont constants multiple de :

$$G_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

Ou  $A_n, B_n$  sont des constantes .

Maintenant , on résoudre le problème pour le non trivial solution avec  $\lambda = \lambda_n = n^2$

$$r^2 F'' + r F' - n^2 F = 0$$

On pose :

$$r = ae^z \Rightarrow z = \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} &= \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dz} \\ \frac{d^2F}{dr^2} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{d^2F}{dz^2} \frac{dz}{dr} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{d^2F}{dz^2} \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} \end{aligned}$$

$$r^2 \frac{d^2F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - n^2 F = \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{dF}{dz} + \frac{dF}{dz} - n^2 F = 0$$

Alors on a :

Si  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2F}{dz^2} - n^2 F = 0 &\Rightarrow L^2 - n^2 = 0 \Rightarrow L_{1,2} = \pm n \\ F(z) &= C_1 e^{nz} + C_2 e^{-nz} \end{aligned}$$

Si  $n = 0$

$$\begin{aligned} F''(z) &= 0 \\ F(z) &= C_1 + C_2 z \\ F(z) &= \begin{cases} C_1 + C_2 z & \text{pour } n = 0 \\ C_1 e^{nz} + C_2 e^{-nz} & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$C_1, C_2$  sont des constants.

$$F(r) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)^n & \text{pour } n = 0 \\ C_1 \ln\left(\frac{r}{a}\right)^n + C_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)^{-n} & \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (F(r)) = \infty = F(a) = C_1$$

$C_2 = 0$ , en fixant  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 0$

On obtient :

$$F(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \ln\left(\frac{r}{a}\right)^n & \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Si  $n = 0$

$$\begin{aligned} u_0(r, \theta) &= A_0 \cos(0) + B_0 \sin(0) \\ &= A_0 \end{aligned}$$

Si  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= \left(\frac{r}{a}\right)^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ \Rightarrow u(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \end{aligned}$$

On établit la condition à la frontière :

$$h(\theta) = u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

Les coefficients  $A_0$ ,  $A_n$  et  $B_n$  sont :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cdot d\theta. \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) \cdot d\theta. \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) \cdot d\theta. \end{aligned}$$

## 2.3 Problème de Neumann

On considère maintenant le problème de Neumann dans un disque :

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < a \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = k(\theta) & r = a \end{cases} \quad (2.1)$$

Tout d'abord ; on propose **la formule de Green**

On a  $u$  la solution de problème de Neumann :

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{sur } B \end{cases}$$

$$\iint_D (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) . ds = \int_B \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) . ds$$

Tel que :  $v \in H_0^1$ .

On pose :  $v = 1$  ; alors  $\nabla^2 v = 0$  dans  $D$  et  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  sur  $B$  donc ; la résultat est :

$$\iint_D \nabla^2 u . ds = \int_B \frac{\partial u}{\partial n} . ds \quad (2.2)$$

En substituons (2.1) dans (2.2) l'équation donnons :

$$\int_B k . ds = 0 \quad (2.3)$$

Et on peut l'écrire d'une autre façon :

$$\int_0^{2\pi} k(\theta) . d\theta = 0$$

La solution de l'équation de Laplace dans un disque dans le problème de Dirichlet :

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} \left( \frac{r}{a} \right)^{n-1} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

Appliquant les conditions à la frontière ; on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$$

Donc les coefficients de  $A_n, B_n$  sont :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) . d\theta = 0 \\ A_n &= \frac{a}{n\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) \cos(n\theta) . d\theta \\ B_n &= \frac{a}{n\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) \sin(n\theta) . d\theta \end{aligned}$$

## 2.4 Équation de Laplace pour un anneau circulaire

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u(a, \theta) = u_0 \\ u(b, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

A fin se limité à une seule condition non-homogène ; nous choisissons le changement de variable  $v(r, \theta) = u(r, \theta) - u_0$  , ce qui mène aux conditions aux limites suivantes :

$$v(a, \theta) = 0 \quad v(b, \theta) = f(\theta) - u_0;$$

Comme le problème est périodique de période  $2\pi$  , on a les conditions homogènes supplémentaires :

$$v(r, \theta) = v(a, \theta + 2\pi); \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial v(r, \theta + 2\pi)}{\partial \theta}$$

Maintenant ; on applique la séparation de variables  $v(r, \theta) = F(r) G(\theta)$

$$F''G + \frac{1}{r} [F'G] + \frac{1}{r^2} [FG''] = 0$$

En divisant par  $u(r, \theta)$  ; on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} &= -\frac{1}{r^2} \frac{G''}{G} \\ \Leftrightarrow r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} &= -\frac{G''}{G} = \mu^2 \end{aligned}$$

– **EDO en  $F(r)$**

On obtient l'EDO suivante pour  $F(r)$  :

$$r^2 F'' + r F' - \mu^2 F = 0$$

Il s'agit d'une équation d'Euler : une équation linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non-constants, pour la résolution, on pose  $r = e^z$  c-à-d  $z = \ln(r)$  on écrit ensuite l'EDO du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients constants en fonction de  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} &= \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dz}, \\ \frac{d^2 F}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dz} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dz} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left( \frac{dF}{dz} \right) \frac{dz}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dz^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dF}{dz} \end{aligned}$$

En introduisant ces résultats dans l'EDO, on trouve :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - \mu^2 F(z) = 0$$

1. pour  $\mu^2 > 0$ , on a

$$\begin{aligned} F(z) &= C_1 e^{\mu z} + C_2 e^{-\mu z} \\ \Rightarrow F(r) &= C_1 r^\mu + C_2 r^{-\mu} \end{aligned}$$

En appliquant la condition aux limites homogènes  $F(a) = 0$ , on trouve :

$$C_1 a^\mu + C_2 a^{-\mu} \Leftrightarrow C_2 = -C_1 a^{2\mu}$$

Ce qui nous donne

$$F(r) = C_1 [r^\mu - a^{2\mu} r^{-\mu}]$$

2. pour  $\mu = 0$ , l'EDO devient :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = 0$$

et donc

$$F(z) = C_{01}z + C_{02} \Leftrightarrow F(r) = C_{01} \ln r + C_{02}$$

L'application de la condition aux limites  $F(a) = 0$  donne :

$$C_{01} = -\frac{C_{02}}{\ln a}$$

Ce qui mène à la solution :

$$F(r) = C_{02} \left[ 1 - \frac{\ln r}{\ln a} \right]$$

– **EDO en  $G(\theta)$**

$$\frac{d^2 G}{d\theta^2} + \mu^2 G = 0$$

1. pour  $\mu^2 > 0$ , on a :

$$G(\theta) = D_1 \cos(\mu\theta) + D_2 \sin(\mu\theta)$$

L'application de l'une ou de l'autre condition aux limites  $G(\theta) = G(\theta + 2\pi)$

ou  $\frac{dG}{d\theta}(\theta) = \frac{dG}{d\theta}G(\theta + 2\pi)$  donne la résultat suivant :

$$\mu = n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. Pour  $\mu = 0$

$$G(\theta) = D_{01}\theta + D_{02}$$

Et les conditions aux limites ; elles nous donnent  $D_{01} = 0$

– **une constante de séparation négative donne la solution trivial**

Si on prend une constante de signe opposé au cas étudié ci-dessus, l'équation en  $G$  devient :

$$-\frac{G''}{G} = -L^2$$

Dont les solutions seraient de la forme :

$$G(\theta) = E_1 e^{L\theta} + E_2 e^{-L\theta}$$

En appliquant les conditions aux limites ; on obtient  $E_1 = E_2 = 0$ .

– **Solution du problème homogène :**

La solution la plus générale , combinaison linéaire de toutes les solutions trouvées du problème homogène est donc :

$$u(r, \theta) = A_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)) (r^n - a^{2n} r^{-n})]$$

Où les constants  $A_0, A_n$  et  $B_0$  " absorbent " les constantes  $D_{02}, C_{02}, D_1, D_2, C_1$

– **Condition non-homogène :**

La solution du problème doit également satisfaire la condition non-homogène  $u(b, \theta) = f(\theta) - u_0$  ce qui s'écrit :

$$f(\theta) - u_0 = A_0 \left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)) (b^n - a^{2n} b^{-n})] \quad (2.4)$$

Ceci peut réécrit :

$$f(\theta) - u_0 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n, \theta)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 \left(1 - \frac{\ln b}{\ln a}\right) \\ a_n &= A_n (b^n - a^{2n} b^{-n}) \\ b_n &= B_n (b^n - a^{2n} b^{-n}) \end{aligned}$$

Maintenant nous pouvons calculer les constantes  $a_0, a_n, b_n$

Pour calculer  $a_0$  , on utilise :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) .d\theta = 0; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) .d\theta = 0 \quad \forall n$$

On obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - u(0)) .d\theta = a_0 + 0 + 0$$

Pour calculer  $a_n$  on utilise les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) .d\theta &= 0 \quad \forall n; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) .d\theta &= 0 \quad \forall n, m; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) .d\theta &= 0 \quad \forall n \neq m; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) .d\theta &= 1 \quad \forall n = m \neq 0; \end{aligned}$$

En multipliant la condition par :

$$\frac{1}{\pi} \sin(m\theta)$$

et en l'intégrant de  $-\pi$  à  $\pi$  on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - u_0) \sin(m\theta) .d\theta = 0 + a_m + 0$$

Ce qui nous fournit  $a_m$  et donc  $A_m$

Pour calculer  $b_n$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) .d\theta = 0 \quad \forall n;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) .d\theta = 0 \quad \forall n, m;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) .d\theta = 0 \quad \forall n \neq m;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) .d\theta = 1 \quad \forall n = m \neq 0;$$

En multipliant la condition par :

$$\frac{1}{\pi} \cos(m\theta)$$

et en l'intégrant de  $-\pi$  à  $\pi$  on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - u_0) \cos(m\theta) .d\theta = 0 + 0 + b_m$$

Ce qui nous fournit  $b_m$  et donc  $B_m$

la solution est décrite à l'équation 2.4 avec ces valeurs pour les coefficients  $A_0, A_n$  et  $B_n$

# Bibliographie

- [1] V. Grigoryan. *Harmonic functions in rectangles and cubes*. Math 12AB, 2012.
- [2] K. Heong Kwa. *Laplace's Equation in circular Regions*. 2012.
- [3] I. De Visscher R. Comblen. *Exercices résolus sur les équations aux dérivées partielles*.
- [4] L. Debnath T. Myint-U. *Linear partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston, 2007.
- [5] R. Vaillancourt. *Mathématiques de l'ingénieur*. Polycopié, 2012.