REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE

DEPERTEMENT DE GENIE INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en

Mathématiques, Option : Mathématiques

Thème

Transformation de Laplace

Proposé et Encadré par :
Prof: Mokhtari Abdelkader

Présenté par :
- Messaoudi Wahiba
- Hadjari Amel
- Krib Ali

N° d'ordre :……… 2012-PFE/DGI

REMERCIEMENTS

Nos vifs remerciements à notre encadreur Mr .Mokhtari Abdelkader, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particulièrement à Mrs. Smail Brahim, Rahmoun, Chettih Ali, Ouinten Youcef, Benyattou Benabderrahmane, Belabbaci Youcef

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département de Génie Informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat.

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin pour atteindre notre objectif.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail de mémoire à :

Mes parents qui n'ont jamais cessé de m'aider et m'encourager dans la poursuite de mes études.

Ma sœur et mes frères qui m'ont apporté un soutien moral et encourageant.

Mes amies, mes proches et toute ma grande famille.

Wahiba ;

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail premièrement à mon dieu qui m'a donné force et vitalité afin d'avoir pu réaliser mes rêves et l'obtention de ce diplôme ; puis à mes très chers parents en ses tendresses, ses encouragements durant mes études.

A ma deuxième mère Omlkhir.

A mes sœurs : Samira, Fatima et Meriem

A mes frères : Mokhtar, Attalah et Mahmoud

A ma grande famille.

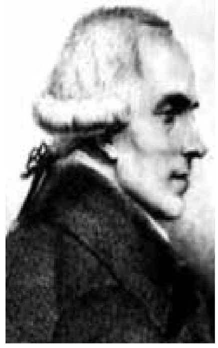
Dans ce travail j'attache une importance à mes amies intimes Rayhana et Nor Elhouda, mes trinômes: Wahiba, Ali et mes amies de Primaire, C M, Lycée, Université.

A ceux qui m'aiment , je dédie ce travail

Amel ;

***Table des matières** :*

1. Historique :



Commençons par un petit peu d'histoire. Pierre-Simon Laplace est né le 23 mars 1749 à Beaumonten-Auge (Calvados). Après avoir terminé ses études à l'université de Caen il se rend à Paris pour mener sa carrière et il meurt le 5 mars 1827. C'était un très grand scientifique qui excellait dans beaucoup de domaines : mathématiques, physique, astronomie. En 1779 il expose pour la première fois une théorie des *fonctionsgénératrices*. Ce "nouveau genre de calcul" permet à Laplace d'intégrer certaines équations différentielles, et c'est à cette occasion qu'il est conduit à introduire sa fameuse "transformée" qu'il utilise ensuite essentiellement dans le domaine des probabilités. Cette nouvelle théorie bénéficie ensuite de l'apport de celle de Fourier dès 1807. Enfin, le physicien britannique autodidacte : Oliver Heaviside a mis au point le calcul symbolique qui donnera à cette théorie la souplesse nécessaire et, à partir du milieu du XX° siècle, la transformée d e Laplace devient d'un usage courant dans le calcul opérationnel, la cybernétique, la théorie de l'information, la conception des circuits électriques, etc...

De point de vue du signal déterministe: le premier problème de la théorie des signaux et systèmes continus est de savoir résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants qui régissent ces systèmes. Fourier se trouvait devant un problème de résolution d'équations différentielles et plus particulièrement celle de la propagation de la chaleur, pour cela il a inventé la décomposition en séries de

Fourier. Ces dernières ne fonctionnent véritablement bien que pour décrire sur *R* des signaux périodiques. La transformée de Fourier est une « amélioration » qui permet de décrire dans un domaine dit fréquentiel des signaux non périodiques mais restreints à un ensemble de signaux dits « signaux stables » ce qui est exprimé mathématiquement par l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$. Grâce aux travaux de

Laplace et de Heaviside, une nouvelle étape va être franchie et le calcul symbolique permet de s'intéresser à une catégorie de signaux encore plus large.

D'un point de vue mathématique, la transformée de Laplace est une nouvelle application.Qui n'a pas été développée spécifiquement pour le traitement de signal mais qui en est un outil essentiel. Elle fait intervenir une nouvelle variable p (s pour les anglo-saxons) qui est une variable complexe. Comme toute application, il existe des conditions mathématiques d'existence et chaque théorème n'est valable que dans un certain domaine de la variable p et dépend aussi du ou des signaux mis en cause. Ce problème est plus délicat que celui posé pour la transformée de Fourier et beaucoup d'utilisateurs l'oublient facilement. Au début de la plupart des théorèmes on est fait l'étude de l'existence de celui-ci, et cela alourdi le cours. on n'a pas voulu au nom de la Simplification faire disparaître ces parties. Dans l'approche de ce mémoire, il n'est pas nécessaire de savoir faire la démonstration, ces parties peuvent donc être ignorées mais il faut être conscient du problème en connaître le résultat sous peine d'utiliser certains théorèmes dans des conditions où ils ne s'appliquent pas. Un second problème est celui de la transformation inverse. Là encore son champ d'applications dépasse largement celui de la théorie du signal.

2. **Introduction :**

Dons cette étude on va aborder une transformation quiest un représentant important d'une grande classe d'opérateurs intégraux .Cette transformation fut introduite par LAPLACE et joue un rôle fondamental dans la théorie du contrôle et qui porte le nom de transformation de Laplace, connue par l'opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe.

Par cette transformation une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique.

Cette transformation a donnée lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

L'objet de cette transformation est de permettre :

- Déterminer les solutions causales d'une équation différentielle linéaire ou d'un système différentiel.
- Déterminer dans des problèmes à support technologique la réponse d'un system linéaire usuel à un signal d'entrée donnés qui sont rencontrés en électricité et en électronique.

3. **Principe** :

Cette transformation peut être présentée comme une solution à l'insuffisance de la transformée de Fourier qui ne s'applique que pour des signaux$L^1(\mathbb{R})$.

L'étude des SLI(système linéaire invariant) peut se faire avec la transformée de Fourier(TF). Pour un signal *x(t)* :
TF[x(t)] =$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-wit}dt$. Cependant, cette transformée n'existe que si x(t) est un signal appartenant à $L^1(\mathbb{R})$(ensemble des signaux stables)

tels que:$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

De ce fait un grand nombrede signaux sont exclus de l'analyse de Fourier.

Un premier exemple : pour a > 0
$e^{-at}e(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ La transformée de Fourier existe.
$e^{-at}e(t) \notin L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ La transformée de Fourier n'existe pas.
Comment contourner le problème précédent ? Par une astuce :
Nous savons calculer : $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sigma t}e^{\propto t}e^{-wit}dt$
Pour (σ-∝) > 0. Cela définit une nouvelle transformée telle que : $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sigma t}e^{\propto t}e^{-wit}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{\propto t}\, e^{-(\sigma - iw)t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{\propto t}e^{-(\sigma - wi)t}\, dt$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{\propto t}e^{-pt}dt$$

Nous introduisons ainsi une variable complexe $p = \sigma + iw$(p en notation anglo-saxonne) et une nouvelle Transformation, la transformée de Laplace (TL)
TL$[x]_p = X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt$

Mais nous avons une restriction : l'intégrale n'existe que pour certaines valeurs de p telles que, dans l'exemple $\sigma > \propto$. Dans le plan complexe de la variable p cette valeur de σ est l'abscisse de convergence (abscisse de sommabilité)

I. La transformation de Laplace :

1. Définition et conditions d'existence

Définition :

Soit $f(t)$une f:$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

et soit $p \in \mathbb{C}$ l'expretion: $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$

S'appelle la transformation de Laplace bilatérale mais cette transformation n'est pas beaucoup utilisée car on considère les signaux qui respectent la causalité

Remarque :

$f$est dite causale si elle est identiquement nulle pour t<0

c-à-d:$f(t) = \begin{cases} f(t) \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ ....sinon} \end{cases}$

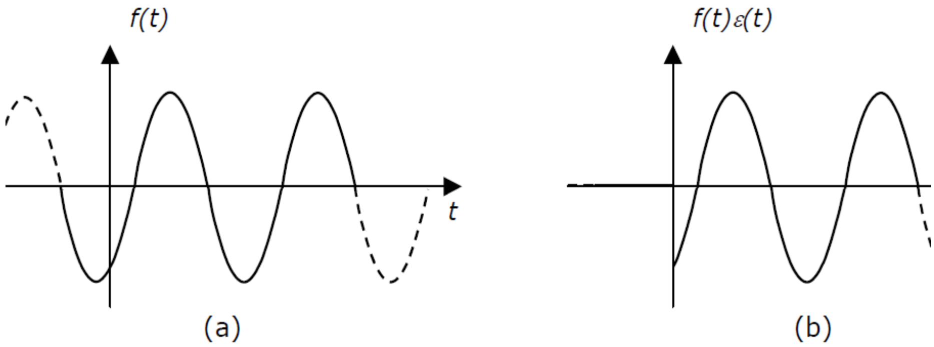


Fig. I.1 a. fonction non-causale b. fonction causale.

Donc on a :

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

puisque f causale donc;$\int_{-\infty}^{0} e^{-pt} f(t) = 0,$

d'ou $F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$

S'appelle la transformation de Laplace unilatérale et on note :

$\mathcal{L}(f(t)) = F(t)$ ou $f \sqsupset F$.

On dit *F* est la transformée de *f.*

Proposition :

soit $f\ :\ \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue . On suppose qu'il existe $p_0 = X_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}\,dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ converge simplement pour tout p tel que $\Re e(p) > X_0$

Preuve :

Posons $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}\,dt \cdot F(p_0) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp_0}\,dt$ est alors convergente.

Soient φ, ψ deux fonctions définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ par t$\varphi(t) = f(t)e^{-tp_0}$

et$\psi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt$

Alors on a :

a)φ est continue car f est continue

b)ψ est continue car elle est dérivable,($\psi'(u) = \varphi(u)$)

c)$\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) = F(p_0) \in \mathbb{C}$ ce qui implique que ψ est bornée

posons $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+} /\psi(u)/ = m$ et sioent $u > 0$ et $p = X + iy \in \mathbb{C}$ tel que $X > X_0$

$$\int_0^u f(t)e^{-tp}\,dt = \int_0^u f(t)e^{-tp}e^{-tp_0}e^{tp_0} = \int_0^u f(t)e^{tp_0}e^{-t(p-p_0)}\,dt = \int_0^u \varphi(t)e^{-t(p-p_0)}\,dt$$

Intégrons par parties :

$U = e^{-t(p-p_0)} \Rightarrow dU = -(p-p_0)e^{-t(p-p_0)}$

$dV = \varphi(t)\,dt \Rightarrow V = \psi$

$$\int_0^u f(t)e^{-tp}\,dt = \psi(t)e^{-t(p-p_0)}]_0^u + (p-p_0)\int_0^u \psi(t)e^{-t(p-p_0)}\,dt$$

$=\psi(u)e^{-u(p-p_0)}+(p-p_0)\int_0^u \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt$

Etudions la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt$

$\left|\int_0^u \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt\right| \leq \int_0^u \left|\psi(t)e^{-t(p-p_0)}\right| dt \leq m\int_0^u e^{-t(X-X_0)}dt=\frac{m\left(1-e^{-U(X-X_0)}\right)}{X-X_0} \leq \frac{m}{X-X_0}$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \int_0^u \left|\psi(t)e^{-t(p-p_0)}\right| dt$ est croissante dans $\mathbb{R}^+$.

Il résulte que :

$\int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt$ est absolument convergente

Comme $\lim_{u\to\infty} e^{-u(X-X_0)} = 0$ (car $X > X_0$)

$\int_0^u f(t)e^{-tp}dt = \psi(u)e^{-u(X-X_0)}+(p-p_0)\int_0^u \psi(t)e^{-u(p-p_0)}dt$ admet une limite si $u \to \infty$.

$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt$ est simplement convergente pour $X > X_o$

Conditions suffisantes d'existence de la transformation de Laplace :

Pour l'existence de la transformation de Laplace de la fonction *f(t)* il suffit que la fonction *f(t)* vérifier les conditions suivantes :

- *f(t)* est continue par morceau sur tout intervalle fermé de la forme *[0, x_0].*
- *f(t)* est nulle pour *x<0.*
- *f(t)* est d'ordre exponentiel.

Définition :

On dira qu'une fonction *f(t)* est d'ordre exponentiel s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}_+$ telle que $|f(t)| \leq \beta e^{\alpha t}$

Avec ces trois conditions on dit que la transformation de Laplace de la fonction *f* existe.

2. Les propriétés de la transformation de Laplace :

- **Linéarité :**

Proposition :

Soit f,g : $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ deux fonction admettent des transformées de Laplace

$\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(g)$ respectivement et soient $a,b \in \mathbb{R}$ Alors :

$\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$

Preuve :

On a :

$$\mathcal{L}(af+bg) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(af(t)+bg(t))dt = a\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt + b\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt$$

$$= a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

- ***Transformée de Laplace de la translation :***

Proposition :

$\mathcal{L}(f(t-a))(p) = e^{-ap}\mathcal{L}(f(t))(p) \text{ et } a > 0$

Preuve :

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt$$

En posant $x = t-a$ on obtient :

$$\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-p(x+a)}dx = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}e^{-ap}dx = e^{-ap}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx = e^{-ap}\mathcal{L}(f(x))(p)$$

- ***Transformée de Laplace de l'homothétie :***

Proposition :

$\mathcal{L}(f(kt))(p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{k}\right) \text{ et } k > 0$

Preuve :

$\mathcal{L}(f(kt))(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)e^{-pt}dt$ On fait le changement de variables: $y = kt$

donc: $dt = \frac{dy}{k}$

$\mathcal{L}(f(kt))(p) = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(y)e^{-p\frac{y}{k}}dy = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(y)e^{-y\left(\frac{p}{K}\right)}dy = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{k}\right)$

- ***Transformée de Laplace des dérivées :***

Proposition :

$$\mathcal{L}(f^n)(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0)$$

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence

Pour n=1 on a :

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$
$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt - f(0) = \mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$

Supposons que $\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0)$

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)})(p) = \mathcal{L}((f')^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f')(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}(f')^{(n-k)}(0)$$
$$= p^n(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f'^{(n-k)}(0)$$
$$= p^{n+1}\mathcal{L}(f)(p) - p^n f(0) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n+1-k)}$$
$$= p^{n+1}\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n+1} p^{k-1}f^{(n+1-k)}(0)$$

- ***Transformée du produit de convolution :***

Le produit de convolution de deux fonctions définie par:

$(f\bigstar g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$

Proposition :

Soients les fonctions $f,g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant $f(t) = g(t) = O$

$\mathcal{L}(f\bigstar g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p)$

Preuve :

$\mathcal{L}(f\bigstar g)(p) = \int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du\right]e^{-tp}dt = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(t-u)g(u)du\right]e^{-tp}dt$

$=\int_0^{+\infty}\left[\int_u^{+\infty} f(t-u)e^{-tp}dt\right]g(u)du$

Dans i'intégrale $\int_u^{+\infty} f(t-u)e^{-tp}dt$,on fait le changement $v = t-u$

Donc on obtient :

$\int_u^{+\infty} f(t-u)e^{-tp}dt = \int_0^{+\infty} f(v)e^{-(u+v)p}dv = e^{-up}\mathcal{L}(f)(p)$(c'est la transformée de translation)

$\mathcal{L}(f\bigstar g)(p) = \int_0^{+\infty} e^{tp}\mathcal{L}(f)(p)g(u)du = \mathcal{L}(f)(p)\int_0^{+\infty} g(u)e^{-up}du = \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p)$

- ***Transformée de Laplace d`une primitive*** :

Proposition :

soit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ une primitive de f On a alors $F' = f$ et $F(0) = 0$ $\mathcal{L}(F)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$

Preuve :

On a $\mathcal{L}(F')(p) = p\mathcal{L}(F)(p) - F(0)=\mathcal{L}(f)(p)$

donc $\mathcal{L}(F)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$

- ***Transformée de Laplace des fonctions périodiques :***

Proposition :

Soit *f* une fonction de période T

$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1-e^{-tp}} \int_0^T f(t)e^{-tp}dt$

Preuve :

$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt$

$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt = \int_0^T f(t)e^{-tp}dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-tp}dt + \int_{2T}^{3T} f(t)e^{-tp}dt + \cdots\cdots\cdots\cdots$

$t = u \quad t = u + T \quad t = u + 2T$

$=\int_0^T f(u)e^{-up}du + \int_0^T f(u+T)e^{-(u+T)p}du + \int_0^T f(u+2T)e^{-(u+2T)p}du + \cdots$

$=\int_0^T f(u)e^{-up}du + \int_0^T f(u+T)e^{-up}e^{-Tp}du + \int_0^T f(u+2T)e^{-up}e^{-2Tp}du + \cdots$

$=\int_0^T f(u)e^{-up}du + \int_0^T f(u)e^{-up}e^{-Tp}du + \int_0^T f(u)e^{-up}e^{-2Tp}du + \cdots$

$=(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots)\int_0^T f(u)e^{-pu}du$

$=(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-npT})\int_0^T f(t)e^{-tp}dt$

$=\frac{1}{1-e^{-TP}}\int_0^T f(t)e^{-tp}dt$

3. ***Transformation de Laplace de quelques fonctions élémentaires :***

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
c	$\frac{C}{P}$ $\quad p > 0.$
t	$\frac{1}{P^2}$ $\quad p > 0.$
t^n	$\frac{n!}{P^{n+1}}$ $\quad p > 0.$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{P}}$ $\quad p > 0.$
e^{-at}	$\frac{1}{P+a}$ $\quad p > 0.$
te^{-at}	$\frac{1}{(P+a)^2}$ $\quad p > 0.$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{P(P+a)}$ $\quad p > 0.$
$at - 1 + e^{-at}$	$\frac{a^2}{P^2(P+a)}$ $\quad p > 0.$
$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\sin(bt)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2+b^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{P^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{P^2+a^2}$ $\quad p > 0.$
$sh(at)$	$\frac{a}{P^2-a^2}$ $\quad p > /a/$
$ch(at)$	$\frac{P}{P^2-a^2}$ $\quad p > /a/$
$e^{-at}sh(bt)$	$\frac{b}{(P+a)^2-b^2}$
$e^{-at}ch(bt)$	$\frac{P+a}{(P+a)^2-b^2}$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$ $\quad a > 0.$
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$ $\quad a > 0.$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$

Tab -1-

II. Transformée inverse de Laplace :

Etant donnée une fonction *F(p)*, est-il possible trouver :

$f\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}\, tq \mathcal{L}(f)(p) = F(p)$? si f existe, est-elle unique ?

On a vu que la transformée, de Laplace de la fonction *f* est :

$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tp} dt$

La fonction $\mathcal{L}(f)(p)$ est appelée image de *f* et *f* est appelée originale de $\mathcal{L}(f)(p)$

1. *Définition :*

Théoréme :

Si *f(t)* est une fonction continue et dérivable, sauf peut-être en un nombre de points, fini dans chaque intervalle fini, ou *f* et *f'* peuvent avoir des discontinuités de première espèce, on a

$f(t) =$ valeur principale de $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} F(p) e^{pt} dp$

Ou Δ est une parallèle à l'axe imaginaire du plan complexe de la variable *p*, dont l'abscisse est supérieure à ∂_0 (pour p = ∂_0 +iy_0 : $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\ dt$ convergente).On peut écrire aussi :

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} F(\partial + iy) e^{(\partial+iy)t} dy,$$

(Formule de Bromwich), ou ∂ est un nombre quelconque supérieur à ∂_0

Preuve :

Nous pouvons écrire

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\partial t} f(t) e^{-ity} dt$$

F(p), ou plutôt *F* $(\partial + iy)$, est, pour une valeur fixée de ∂,la transfomée de Fourier de la fonction égale à

$$\begin{cases} e^{-\partial t} f(t)\, t \text{ pour } t > 0 \\ 0 \text{ ....pour } t < 0 \end{cases}$$

Cette fonction vérifie les hypothèses relatives au théorème d'inversion de l'intégrale de Fourier. On adonc pour *t>0*

$$e^{-\partial t} f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} F(\partial + iy)\, e^{iyt}\, dy,$$

L'intégrale du second membre étant nulle pour *t*<0, On peut écrire

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} F(\partial + iy)\, e^{(\partial+iy)t}\, dy,$$

Comme *F* est une fonction holomorphe, on peut aussi poser $\partial + iy = p$

p décrit, du point d'ordonnée –R au point d'ordonnée +R, la droit Δ parallèle à *oy*et d'abscisse ∂, finalement

$$f(t) = \text{valeur principale de } \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} F(p)\, e^{pt}\, dp$$

On remarquera que, si l'on donne la fonction *f(t)*et ses propriétés, la formule d'inversion permet de retrouver *f(t)* à partir de *F(p)*.si l'on se donne *F(p)* sans autre indication, on ne sait pas d'avancé si l'inversion de *F(p)* sera possible.

Nous ne discuterons pas les conditions d'existence d'un original pour une fonction *F(p)* donnée, il est toujours possible d'essayer d'appliquer la formule de Bromwich.

On remarquera cependant, que, si*F(p)* des points singuliers, ils doivent être tous à gauche de la droite Δ ,puisque *F(p)* est holomorphe pour $x > \partial_0$

2. Les propriétés de la transformation inverse de Laplace :

- **Linéarité :**

Proposition :

$$\mathcal{L}^{-1}(a\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g))(t) = a\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f))(t)+b\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(g))(t)$$

Preuve :

En effet, on sait que

$\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g)$.Vu l'unicité de l'originale

$\mathcal{L}^{-1}(a\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g)) = af+bg = a\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f))+b\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(g))$. Ceci revient à dire que la transformation inverse de Laplace est linéaire.

- **Transformée inverse de Laplace d'une dérivée :**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$. On pose $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}\,dt$ sa transformée de Lapace

On suppose que les conditions de dérivation sous le signe intégrale sont réunies. Alors :

$$(\mathcal{L}(f))'(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}(f(t)e^{-tp})\,dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-tp}\,dt = -\mathcal{L}(tf(t))(p)$$

En composant par $\mathcal{L}^{-1}$,on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}[(\mathcal{L}(f))'](t) = -tf(t)$$

Et par récurrence sur *n*, la dérivée d'ordre *n* :

$$\mathcal{L}^{-1}[(\mathcal{L}(f))^{(n)}](t) = (-1)^n t^n f(t)$$

- **Transformée inverse de Laplace d'une translation :**

On cherche l'originale de $\mathcal{L}(f)(p-a)$

si $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}\,dt$, alors

$$\mathcal{L}(f)(p-a) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t(p-a)}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}e^{ta}\,dt$$

$=\int_0^{+\infty}[f(t)e^{ta}]e^{-ta}dt = \mathcal{L}(e^{ta}f(t))(p)$

d'où ' $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(f)(p-a)](t) = e^{ta}f(t)$

- ***<u>Transformée inverse de Laplace d'une homothétie :</u>***

On cherche l'originale de $\mathcal{L}(f)(kp)$, avec $p \in \mathbb{R}$ et $k > 0$.

Posons $(\mathcal{L}(f_K))(p) = \mathcal{L}(f)(Kp)$

$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt \Rightarrow \mathcal{L}(f)(Kp) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tKp}dt$

On pose $Kt = u$ donc $du = Kdt$ on obtient alors:

$\mathcal{L}(f)(Kp) = \frac{1}{K}\int_0^{+\infty} f(\frac{u}{K})e^{-up}du = \frac{1}{K}\mathcal{L}\left(f_{\frac{1}{K}}\right)(p)$

En composant par $\mathcal{L}^{-1}$ on obtient la relation de la transformée inverse par

$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f_K))(t) = \frac{1}{K}f_{\frac{1}{K}}(t) = \frac{1}{K}f(\frac{1}{K})$

3. <u>Table des transformées inverses de Laplace</u> :

$F(p)$	$\mathcal{L}^{-1}[F(p)]= f(t)$
$\frac{C}{P}$	c
$\frac{1}{P^2}$	t
$\frac{n!}{P^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{P+a}$	e^{-at}
$\frac{a}{P^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{p}{P^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{P^2-a^2}$	$sh(at)$
$\frac{P}{P^2-a^2}$	$ch(at)$

Tab-2-

III. *Applications de la transformée de Laplace:*

1. Équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre *n* à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t)$ pour $t > 0$, et vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = y_0 \,, y'(0) = y'_0 \,, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

Ce genre de problème est déjà résolu de la manière suivante :

Nous cherchons d'abord une solution générale de $(*)$ contenant*n* constantes arbitraires, puis nous déterminons les constantes de manière que les conditions initiales soient vérifiées

Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution en introduisant la transformée de Laplace.

On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation $(*)$:

$$\mathcal{L}(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y) = \mathcal{L}(f(t))(p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

En utilisant les propriétés de linéarité, l'équation $(**)$ devient :

$$a_0 \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \ldots + a_{n-1} \mathcal{L}(y')(p) + a_n \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p)$$

sachant que $\mathcal{L}(y^{(K)})(p) = p^K \mathcal{L}(y)(p) - \sum_{i=1}^{K} p^{i-1} y^{(K-1)}$, $K = 1, 2, \ldots, n$, on remplace

Ces expressions dans l'équation $(**)$ pour aboutir à une équation algébrique du type $\mathcal{L}(y)(p)(\varphi_n(p)) = \mathcal{L}(f)(p) + \Psi_{n-1}(p)$, avec $\varphi_n$un polynome de degré n et

Ψ_{n-1} un polynome de degré $n-1$. L'équation algébrique est: $\mathcal{L}(y)(p) = \frac{\Psi_{n-1}}{\varphi_n(p)} + \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{\varphi_n(p)}$

Pour finir, on utilise la transformée inverse de Laplace pour déterminer la solution*y(t)*

Exemple d'application:

$ax'' + bx' + c = h\cos wt$ et $a, c \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+$ et $h, c \in \mathbb{R}$

Cette équation représente le mouvement rectiligne d'un point de masse a, d'abscisse *x,* rappelé vers l'origine par une force *cx* proportionnelle à la distance, soumis à résistance *bx'* proportionnelle à la vitesse (frottement visqueux) et à une force donnée, fonction périodique sinusoïdale du temps .

On peut aussi donner de l'équation précédente une interprétation électrique.

On considère un circuit comprenant en série une résistance *b*, une capacité 1/c et une inductance a, On applique aux bornes de ce circuit une différence de potentiel alternative*hcoswt,x* est alors la quantité d'électricité contenue à l'instant *t* dans la capacité, et *dx/dt*est l'intensité du courant qui traverse le circuit.

On se propose de détermine *x* pour *t>0,* sachant que, pour *t=0* *x* a une valeur donnée x_0 ,et *x'* une valeur donnée x'_0,Ce sont les conditions initiales habituelles.

Il sera commode de remplacer l'équation donnée par l'équation

$az'' + bz' + cz = he^{iwt}$

$z(0) = x_0$ $z'(0) = x'_0$

On a :

$\mathcal{L}(z(t)) = Z(p)$

$\mathcal{L}(z'(t)) = pZ(p) - x_0$

$\mathcal{L}(z''(t)) = p^2 Z(p) - px_0 - x_0$

$\mathcal{L}(he^{iwt}) = \frac{h}{P - iw}$

$$\mathcal{L}(az'' + bz' + cz) = \mathcal{L}(he^{iwt}) \Leftrightarrow (ap^2 + bp + c)Z(p) - x_0(ap + b) - ax_0 = \frac{h}{P-iw}$$

$$Z(p) = \frac{x_0(ap+b)+ax_0'}{ap^2+bp+c} + \frac{h}{(p-iw)\left(ap^2+bp+C\right)}$$

Pour déterminer l'original *z(t)* de *Z(p)*, la décomposition dépend avant tout des racines de l'équation :

$$ap^2 + bp + c = 0$$

On distingue les cas suivants :

$1)\, b^2 - 4ac > 0$:

On a deux racines réelles négatives :

$$p_1 = -r_1 \quad , \quad p_2 = -r_2$$

Donc :

$$Z(p) = \frac{x_0(ap+b)+ax_0'}{a(p-p_1)(p-p_2)} + \frac{h}{a(p-iw)(p-p_1)(p-p_2)}$$

Après décomposition,*Z(p)* se met sous la forme

$$Z(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{B}{p-iw}$$

A_1, A_2, B S'expriment par les formules :

$$A_1 = \frac{1}{p_1-p_2}\left[x_0\left(p_1 + \frac{b}{a}\right) + x_0' + \frac{h}{a}\frac{1}{p_1-iw}\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{p_1-p_2}\left[x_0\left(p_2 + \frac{b}{a}\right) + x_0' + \frac{h}{a}\frac{1}{p_2-iw}\right]$$

$$B = \frac{h}{a}\frac{1}{(p_1-iw)(p_2-iw)}$$

$1,1)\, h = 0$

On a:

$$z(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$1,2)h \neq 0$

On a

$z(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + Be^{iwt}$

$2)b^2 - 4ac < 0 \, , b \neq 0$:

On a deux racines complexes, avec partie réelle négative :

$p_1 = -r + ia \;\; p_2 = -r + ia$

$2,1)h = 0$

On a, comme dans le premier cas :

$z(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

Mais la forme des solutions est un peu différente,car on doit écrire

$z(t) = e^{-rt}(A_1 e^{iat} + A_2 e^{-iat})$

$2,2)h \neq 0$

Comme dans le premier cas, au terme d'amortissement se superpose un terme sinusoïdal non amorti, On retrouve encore là un phénomène de synchronisation.

$$B = \frac{h}{a(p_1 - iw)(p_2 - iw)} = \frac{h}{-aw^2 + ibw + c} = \frac{h\left(-aw^2 - ibw + c\right)}{\left(aw^2 - C\right)^2 + (bw)^2}$$

On a :

$e^{iwt} = \cos wt + i \sin wt.$

La partie réelle de Be^{iwt} est donc de la forme

$h\delta \cos(wt - \varphi)$

avec

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\left(aw^2 - C\right)^2 + (bw)^2}}$$

$tg\varphi = \frac{bw}{C-aw^2}$

Lorsque les effets de l'amortissement se sont fait sentir, il subsiste donc une vibration sinusoïdale déphasée de φ par rapport à la vibration imposée, Son amplitude est réduite dans le rapport δ par rapport à l'amplitude de la vibration imposée .Si l'on introduit la quantité complexe.

$I(w) = a(iw)^2 + b(iw) + c.$

On a

$\delta = \frac{1}{|I(w)|}$

$\varphi = \arg I(w)$

$I(w)$ est appelée impédance complexe (mécanique ou électrique) du système et $\frac{1}{I(w)}$ en est la fonction transfert.

En résumé, si un système mécanique(ou électrique), caractérisé par les paramètres *a,b,c*,est soumis à une action extérieure sinusoïdale de la forme he^{iwt}

Son mouvement tend ver un régime permanent défini par :

$z(t) = \frac{he^{iwt}}{I(w)}$

3) $b^2 - 4ac < 0$,$b = 0$:

On a deux racines complexes imaginaires pures.

$p_1 = i\gamma$, $p_2 = i\gamma$

$\gamma = \sqrt{\frac{c}{a}}$

$3,1) h = 0$

L'équation différentielle s'écrit

$ax'' + cx = 0$

Elle a pour solution

$x = x_0 \cos \gamma t + \frac{x_0'}{\gamma} \sin \gamma t.$

C'est une oscillation sinusoïdale de pulsation a, En l'absence de résistance proportion nulle à la vitesse (*b=0*) le mouvement étudié est une vibration sinusoïdale non amortie

$3,2) h \neq 0$

Il faut alors distinguer deux cas

1^èr cas $\gamma \neq \omega$:

C'est-à- dire si : $w^2 \neq \frac{c}{a}$

Donc :

$z(t) = A_1 e^{i\gamma t} + A_2 e^{-i\gamma t} + Be^{iwt}.$

avec

$A_1 = \frac{x_2}{2} - i\frac{x_0'}{2\gamma} - \frac{h}{2a\gamma}\frac{1}{\gamma - w}$

$A_2 = \frac{x_0}{2} + i\frac{x_0'}{2\gamma} - \frac{h}{2a\gamma}\frac{1}{\gamma + w}.$

$B = \frac{1}{a}\frac{1}{\gamma^2 - w^2}$

On peut mettre la partie réelle de *z(t)* sous la forme

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

avec $x_1 = x \cos \gamma t + \frac{x_0'}{\gamma} \sin \gamma t.$

$x_2 = \frac{h}{a}\frac{\cos wt - \cos \gamma t}{\gamma^2 - w^2}$

2ème cas $\gamma = \omega$:

Dans ce cas on a :

$z(t) = A_1 e^{iwt} + A_2 e^{-iwt} + Be^{iwt}$

*x(t)*est la superposition d'un terme sinusoidal ordinaire ,et d'un terme contenant le facteur*t*

On peut considérer ce terme comme représentant une oscillation sinusoidale dont l'amplitude augmente indéfiniment avec *t* , proportionnellement à *t.*

Ce terme devient rapidement prépondérant et est caractéristique du phénoméne de résonance pure,L'ampllitude des oscillations,au lieu de s'amortir ou de demeurer permanente, augmente indéfiniment.

4)$b^2 - 4ac = 0$:

On dans ce cas racine double

$p_0 = -\frac{b}{2a}$

donc :

$$Z(p) = \frac{x_0(ap+b)+ax_0^{\prime}}{a(p-p_0)^2} + \frac{h}{a(p-iw)(p-p_0)^2} = \frac{A}{(p-p_0)^2} + \frac{B}{p-p_0} + \frac{C}{p-iw}$$

A ,B ,C étant trois constantes complexes

D'après le dictionnaire d'images on trouve :

$z(t) = Ate^{p_0 t} + Be^{p_0 t} + Ce^{iwt}$

Exemple :

On cherche à résoudre :

$f^{(2)}(t) + 4f(t) = sin(2t)$ .... (1)

Avec les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f^{'}(0) = 0$

On a vu que la transformation de Laplace possède les propriétés suivantes :

<u>Linéarité</u> :

$$\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g)$$

<u>Transformée d'une dérivée</u> :

$$\mathcal{L}\left(f'\right) = p\mathcal{L}(f)-f(0)$$
$$\mathcal{L}\left(f''\right) = p^2\mathcal{L}(f)-pf(0)-f'(0)$$
$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = p^n\mathcal{L}(f)-p^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

Ces propriétés peuvent s'appliquer à une équation différentielle linéaire. Supposons que l'on veuille résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f^{(i)} = \varphi$$

En appliquant la transformation de Laplace à cette égalité on obtient l'équation équivalente suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{L}(f^{(i)}) = \mathcal{L}(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{\mathcal{L}(\varphi)+\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} p^{i-j} f^{(j-1)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}$$

Où $f^{(k)}(0)$ sont les conditions initiales.

Il suffit alors de trouver f en appliquant la transformation inverse sur $\mathcal{L}(f)$. Cette opération se révèle parfois difficile sauf dans le cas où $\mathcal{L}(f)$ est une somme de transformées de Laplace classiques figurant dans un tableau de transformées de Laplace.

Pour résoudre l'équation (1), on applique les propriétés précédentes.

<u>Solution :</u>

On note : $\varphi(t) = sin(2t)$

Le tableau de la transformation de Laplace donne :

$$\mathcal{L}(\varphi)(p) = \frac{2}{p^2+4}$$

L'équation devient :

$$p^2\mathcal{L}(f) - pf(0) - f'(0) + 4\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\varphi)$$

On déduit :

$$[p^2 + 4]\mathcal{L}(f) = \frac{2}{p^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}(f)(p) = \frac{2}{(p^2+4)^2}$$

Il s'agit maintenant de retrouver la fonction$f$, c'est-à-dire d'appliquer la transformation de Laplace inverse. Dans ce cas, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est une fonction rationnelle qu'il suffit de décomposée en éléments simples La lecture inverse du tableau de la transformée de Laplace fournira alors la valeur de f

$$\frac{2}{(p^2+4)^2} = \frac{\frac{1}{16i}}{p-2i} - \frac{\frac{1}{16i}}{p+2i} - \frac{\frac{1}{8}}{(p+2i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{(p-2i)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(p+2i)^2} + \frac{1}{(p-2i)^2}\right)$$

Toutes ces différentes fractions figurent dans la colonne de droite du tableau de transformées de Laplace et permettent de retrouver f

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}\left(te^{-2it} + te^{2it}\right) = \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{t}{4}cos(2t)}$$

2. <u>équations différentielles ordinaires à coefficients variables :</u>

La méthode de la transformée de Laplace peut également être utilisée pour résoudre certaines équations différentielles ordinaires dont les coefficients sont variables .cette méthode en particulièrement puissante dans le cas d'équations différentielles du type :

$$t^m Y^{(n)}(t)$$

Dont la transformée de Laplace est $(-1)^m \frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\}$

Exemple :

Résoudre $tY'' + Y' + 4tY = 0$, Y(0) = 0, Y'(0) =0

On a $\mathcal{L}(tY'') + \mathcal{L}(Y') + \mathcal{L}(4tY) = 0$ on note $\mathcal{L}(Y) = y$

Donc $-\frac{d}{dp}\left(p^2y - pY(0) - Y'(0)\right) + \left(py - Y(0)\right) - 4\frac{dy}{dp} = 0$

C-à-d$(p^2 + 4)\frac{dy}{dp} + py = 0$

D'ou $\frac{dy}{y} + \frac{pdp}{p^2+4} = 0$ et en intégrant$ln\, y + \frac{1}{2}ln(p^2 + 4) = c_1$ ou $y = \frac{c}{\sqrt{p^2+4}}$

En inversant, il vient : $\boldsymbol{Y = cJ_0(2t)}$($\boldsymbol{J_0}$est une fonction de Bessel)

Pour déterminer c remarquons que $Y(O) = cJ_0(0) = c = 3.$

d'où$\boldsymbol{Y = 3J_0(2t)}$

- ***Rappel :***

  Fonction de Bessel :

Nous définissons une fonction de Bessel d'ordre n par

$$\mathcal{J}_n\,(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots\dots\dots..\right\}\right\}$$

Donc voici quelques propriétés importantes :

1- $\mathcal{J}_{-n}(t) = (-1)^n\mathcal{J}_n(t)$ si n est un entier positif

2- $\mathcal{J}_{n+1}(t) = \frac{2\,n}{t}\mathcal{J}_n(t) - \mathcal{J}_{n-1}(t)$

3- $\frac{d}{dt}\{t^n\mathcal{J}_n(t)\} = t^n\mathcal{J}_{n-1}(t)sin = 0$, nous avons $\mathcal{J}'_0(t) = -\mathcal{J}_1$

4- $e^{1/2t(u-\frac{1}{u})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n(t)u^n$ qui est appelé fonction génératrice des fonctions de Bessel

5- $\mathcal{J}_n(t)$ satisfait l'équation différentiel de Bessel :

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - n^2)y(t) = 0$$

Il est commode de définir $\mathcal{J}_n(it) = i^{-n} I_n(t)$ ou $I_n(t)$ est appelée fonction de bissel modifier d'ordre n

La transformée de Laplace de $\mathcal{J}_0$ (at) est : $\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$

Généralement on a : $\mathcal{J}_n(at)$ est l'origine de $\frac{(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}}$

3. Application de la transformation de Laplace aux systèmes différentiels :

Considérons le système différentiel suivant :

.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{nn}x_n + f_1(t) \end{cases}$$

Ou les a_{ik} sont constantes données, et les $f_i(t)$ *n* fonctions données de *t* .C'est un système linéaire à coefficients constants avec seconds membres .Pour le résoudre par la calcul symbolique, on désigne par X_i , F_i ,les images de $x_{i,}f_i$ si l'on cherche la solution telle que , pour *t=0,*x_i*(t)* prenne une valeur donnée x_i*(0) , d*x_i*/dt* a pour image *p*X_i *-*x_i*(0).*On a donc

. $pX_i - \sum a_{iK}X_K = x_i(0) + F_i(p)$

Pour calculer les X_i , on doit résoudre un système algébrique de *n* équations linéaires à *n* inconnues. On obtient ainsi les images des solutions du système correspondant à des conditions initiales fixées, *A* l'aide d'un dictionnaire d'images, on en déduit les X_i

La méthode s'applique en particulier au système homogène

$$\frac{dx_i}{dt} - \sum_{K=1}^{n} a_{iK} x_K = 0$$

.

Exemple d'application :

Trouve la solution du système différentiel

$$\begin{cases} x' = ay + f(t) \\ y' = -ax + g(t) \end{cases}$$

qui s'annule pour *t=0*

solution :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(ay + f(t)) \\ \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(-ax + g(t)) \end{cases} = \begin{cases} pX - aY = F(p) \\ aX + pY = G(p) \end{cases}$$

d'où

$$X = \frac{pF+aG}{p^2+a^2} \quad Y = \frac{-aF+pG}{p^2+a^2}$$

Si $f\ et\ g$étaient explicitement données, on aurait recours, directement ou après réduction, à un dictionnaire d'images pour trouver les expressions de $x(t) et\ y(t)$

Si au contraire $f\ et\ g$sont deux fonction non spécifiées,onprocédera de la manière suivant :

$\frac{aG(p)}{p^2+a^2}$ est le produit de deux fonctions,

ayant pour originaux $g(t)$et $\sin at$l'original de

$\frac{aG(p)}{p^2+a^2}$ est la convolution de ces deux fonctions, soit

$$\frac{aG(p)}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\left(\int_0^t \sin a(t-s) g(s) ds\right)$$

$\frac{aF(p)}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\left(\int_0^t \cos a(t-s) f(s) ds\right)$

On trouve ainsi, après de calculs

$x(t) = \int_0^t [f(s) \cos a(t-s) + g(s) \sin a(t-s)] ds$

$y(t) = \int_0^t [-f(s) \sin a(t-s) + g(s) \cos a(t-s)] ds$

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$ avec les conditions $X(0) = 8$, $Y(0) = 3$

Solution :

En prenant la transformée de Laplace, il vient, si $\mathcal{L}(x) = x$, $\mathcal{L}(y) = \mathrm{y}$,

$px - 8 = 2x - 3$ $\quad on\ a \quad (p-2)x + 3y = 8 \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$

$py - 3 = y - 2x$ $\quad on\ a \quad 2x + (p-1)y = 3 \ldots \ldots (2)$

En résolvant (1) et (2) simultanément,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & p-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix}} = \frac{8p-17}{p^2-3p-4} = \frac{8p-17}{(p+1)(p-4)} = \frac{5}{p+1} + \frac{3}{p-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} p-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix}} = \frac{3p-22}{p^2-3p-4} = \frac{3p-22}{(p+1)(p-4)} = \frac{5}{p+1} - \frac{2}{p-4}$$

D'où **:** $\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}(x) = \boldsymbol{5e^{-t} + 3e^{4t}}$

$\boldsymbol{Y} = \mathcal{L}^{-1}(y) = \boldsymbol{5e^{-t} - 2e^{4t}}$

Conclusion :

Dans ce mémoire on met en évidence la Transformation de Laplace et quelques applications qui permettent d'éclaircir cette dernière.

Ce qui est conclu de ce travail, cette transformation constitue une méthode puissante pour résoudre les équations différentielles, autrement dit elle facilite la résolution des équations différentielles c'est-à-dire il est plus facile de résoudre une équation algébrique que de résoudre une équation différentielle.

Bibliographies:

- ✓ J. BASS, Cours de mathématiques, Tome 2, 5e édition.
- ✓ Murray R. Spiegel, transformée de Laplace, schaum.

Web graphies:

- ✓ http://www.sciences.univ-nantes;fr/physique
- ✓ http://www.espci.fr/ensengement/maths
- ✓ http://www.douillet.info