REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
جامعة عمار ثليجي بالأغواط

FACULTÉ DES SCIENCES
كلية العلوم

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique

Par M^{elle} BELABBACI Chafika

Thème

ETUDE DES ESPACES DE SOBOLEV

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

M^{r} B. BEN ABDERRAHMANE	Prof	UATL	Président
M^{me} Y. BOUKHATEM	MAA	UATL	Rapporteur
M^{r} B. NOUIRI	MCB	UATL	Examinateur
M^{r} A. RAHMOUN	MAA	UATL	Examinateur

Année universitaire 2012/2013

ملخص

هذا العمل يهدف إلى دراسة شاملة حول فضاءات صوبولاف بما فيها من الخواص الأساسية لمختلف هذه الفضاءات.
ندرس أهم النظريات لصوبولاف و كذلك النظريات حول التطابق المستمر و المتراص, متراجحات صوبولاف و مؤثرات الامتداد و الاقتصار و مفهوم الأثر. تقدم تطبيقات.

الكلمات المفتاحية : فضاءات صوبولاف, التطابق المستمر, التطابق المتراص, الأثر, ريليخ , نايمان , مؤثرات الامتداد , الاقتصار.

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude systématique des espaces de Sobolev : Propriétés fondamentales des différents cas d'espaces de Sobolev ; principaux théorèmes d'injections continues et compactes ; inégalités de Sobolev ; opérateurs de prolongement et de restriction ; traces.

Des applications aux problèmes aux limites sont étudiées.

Mots clés : Espaces de Sobolev, injection continue, injection compacte, trace, Rellich, Neumann.

Abstract

In this work we study fundamental properties of different Sobolev spaces including the main results as the embedding continuous and compact mappings theorems, the Sobolev inequalities, the extension and restriction operators and traces. Some applications are given.

Key words: Sobolev spaces, embedding continuous mapping theorem, embedding compact mapping theorem, Sobolev inequalities, trace, Rellich, Neumann.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M^{me} Y. BOUKHATEM, mon encadreur, pour son suivi, ses conseils, les corrections qu'elle a apportées et les différentes remarques qu'elle a faites. J'exprime mes sincères remerciements à M^{r} B. BEN ABDERRAHMANE de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance, ainsi qu'à M^{r} B. NOUIRI et M^{r} A. RAHMOUN pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail. Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé et encouragé. Enfin, que tous mes enseignants aussi bien de mon cursus scolaire qu'universitaire soient remerciés.

Table des matières

Notations

E'	dual de E,
E''	bidual de E,
$L^1_{Loc}(\Omega)$	espace des fonctions localement intégrables,
$supp\, f$	support de la fonction f,
$f * g$	produit de convolution de f et g,
$mes(\Omega)$	mesure de Lebesgue de Ω,
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonction C^∞ à supports compacts ,
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$	espace de Schwartz ,
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$	espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$	multi–indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}, \forall i$,
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$	dérivée partielle d'ordre α,
p.p	presque partout,
$\hookrightarrow$	l'injection identique est continue,
$\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}$	transformée de Fourier de la fonction f,
Δu	laplacien de u,
∇u	gradient de u,
$(.,.)_E$	produit scalaire sur E,
$\langle .,. \rangle$	dualité,
$\oplus$	somme directe,
$\mathscr{L}(E)$	espace des applications linéaires et continues de E dans E,
$\overline{B}(0, \varepsilon)$	boule fermée de centre 0 et de rayon ε,
$l.i.m$	limite dans L^2,
$\lVert . \rVert_E$	norme de l'espace E.

Introduction.

Au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens s'étaient rendus compte que les espaces C^1, C^2, etc ... n'étaient pas le cadre approprié pour étudier les solutions des équations aux dérivées partielles. Le mathématicien russe S.L. Sobolev (1908 –1989) a introduit des espaces fonctionnels, actuellement connus sous l'appelation "espaces de Sobolev", comme outil puissant fournissant le cadre adéquat pour la résolution des problèmes aux limites engendrés par des équations aux dérivées partielles.

Ce mémoire est consacré essentiellement à l'étude des espaces de Sobolev. Cette étude a touché les différents types d'espaces de Sobolev : $W^{m,p}(\Omega), W^{-m,p}(\Omega), W_{\circ}^{m,p}(\Omega)$ et $H^s(\Omega)$ (s réel) où Ω peut aussi bien être l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier, ou un demi–espace, ou encore un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Cette étude a porté aussi bien sur les propriétés fondamentales comme les différentes structures d'espaces de Banach et de Hilbert, les théorèmes de densité etc ...; que sur les questions importantes liées aux théorèmes d'injections et de prolongement d'une part, et aux opérateurs de restriction et de traces, d'autre part. C'est ainsi que les théorèmes de Sobolev, Rellich et Kondrashov et d'autres sont exposés et établis. De même la théorie des traces est largement abordée.

Comme application les méthodes hilbertiennes et la formulation variationnelle sont étudiées. Ces méthodes s'adaptent à une large classe de problèmes aux limites. Certains problèmes de Sturm–Liouville, ainsi que le problème de Neumann sont étudiés en détails.

Passons à la description du mémoire composé de cinq chapitres, de cette introduction et d'une conclusion.

Le premier chapitre porte sur tous les rappels et compléments indispensables pour les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré aux définitions et propriétés fondamentales de différents espaces de Sobolev ; aux théorèmes de densité ; et à d'autres résultats.

Le chapitre trois est consacré aux théorèmes d'injections continues et d'injections compactes pour différents espaces de Sobolev de fonctions définies dans des domaines divers. Ce chapitre porte également sur les inégalités de Sobolev. Ainsi le problème de régularité de classe C^k est traité.

Dans le chapitre quatre l'étude a porté sur les opérateurs de restriction et de traces aussi bien sur un demi–espace, que sur un ouvert Ω assez régulier, par morceaux. Une autre caractérisation des espaces $H_{\circ}^m(\Omega)$ est donnée.

Enfin le dernier chapitre est consacré aux applications.

Chapitre 1

Rappels et compléments

1.1 Rappels sur les espaces L^p et le produit de convolution

Ce chapitre porte sur les rappels et compléments nécessaires et indispensables pour traiter les autres chapitres. Pour la rédaction les ouvrages [8], [9], [4], [13], [3], [14], [2] et [7] ont été utilisés.

1.1.1 Espaces L^p

Définition 1.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On dit que f est essentiellement bornée sur Ω s'il existe une constante c positive telle que $|f(x)| \leq c \quad p.p.$*

La plus petite de ces constantes est appelée le sup essentiel de f. On le note par $ess. \sup |f(x)|$.

Définition 1.1.2. *Soit $p \geq 1$ et Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. On appelle espace de Lebesgue de puissance d'ordre p l'espace, noté $L^p(\Omega)$, des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant :*

1. $\left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad si \ 1 \leq p < +\infty,$
2. $ess. \sup |f(x)| < +\infty \quad si \ p = +\infty.$

Proposition 1.1.1. *L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:*

$$f \mapsto \begin{cases} \|f\|_{L^p(\Omega)} & = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ si \ 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} & = ess. \sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)|, \ si \ p = +\infty, \end{cases}$$

est une norme, qui fait de $L^p(\Omega)$ un espace de Banach, séparable pour p fini. De plus $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

(qui s'écrit $\displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)\,dx$ *pour les fonctions réelles).*

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p. i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Young)**.** *Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Démonstration. La fonction *log* est concave. Donc

$$log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geq \frac{log\, a^p}{p} + \frac{log\, b^{p'}}{p'} = log\, ab.$$

D'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

□

Proposition 1.1.4 (Inégalité d'interpolation)**.** *Soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

La preuve est traitée dans [1].
Pour $g \in L^{p'}(\Omega)$ fixé, l'application $\widetilde{\varphi} : f \to \displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,dx$ définit une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ car d'après l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Si $f \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ alors $\widetilde{\varphi} \to 0$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Pour $1 \leq p < +\infty$ la réciproque est assurée par le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 (Riesz)**.** *Soit T une forme linéaire et continue sur $L^p(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que*

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \textit{ pour toute fonction } f \in L^p(\Omega).$$

Remarques 1.1.1.

1. $L^1(\Omega) \subsetneqq [L^\infty(\Omega)]'$.
2. $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ est réflexif i.e. $[L^p(\Omega)]'' = L^p(\Omega)$.

Proposition 1.1.5. *Si Ω est de mesure finie alors*
i) $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.
ii) $\forall q \geq p \quad L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Démonstration. i) Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L^p(\Omega)} \text{ où } c = (mes\,\Omega)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.1}$$

Comme $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ alors $\|f\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, et par conséquent $f \in L^1(\Omega)$. Si $f \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ alors $f \to 0$ dans $L^1(\Omega)$ d'après l'inégalité (1.1) et par conséquent si $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ alors $f_n - f \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ et donc $f_n - f \to 0$ dans $L^1(\Omega)$ c'est à dire $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$.
ii) Soit $f \in L^q(\Omega)$. On utilise l'inégalité de Hölder, et on prend $g(x) = 1$, $h(x) = |f(x)|^p$. Prenons $r = \dfrac{q}{p}$ et s telle que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h(x)g(x)|\,dx = \int_\Omega |f(x)|^p\,dx &\leq \||f|^p\|_{L^r(\Omega)}\,\|1\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq \||f|^p\|_{L^r(\Omega)}\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

Or,

$$\||f|^p\|_{L^r(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} = \|f\|^p_{L^q(\Omega)}.$$

Donc $\displaystyle\int_\Omega |f|^p\,dx \leq \|f\|^p_{L^q(\Omega)}\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{s}}$ c'est à dire $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq k\,\|f\|_{L^q(\Omega)}$ où $k = ((mes(\Omega))^{\frac{1}{s}})^{\frac{1}{p}}$. Par conséquent si $f \in L^q(\Omega)$ alors $f \in L^p(\Omega)$. La continuité se démontre comme dans le point i). □

Corollaire 1.1.1. *Toute fonction $f \in L^p(\Omega), (p \geq 1)$ est dans $L^1_{Loc}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit K un compact de Ω, comme $f \in L^p(\Omega)$ alors $f \in L^p(K)$ et donc d'après la proposition (1.1.5) $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$. □

Conséquence : Pour tout ouvert Ω, toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ définit une distribution régulière par $\langle f, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 1.1.6. *L'application identité définie de $L^p(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est injective. Par conséquent il y a une bijection entre $L^p(\Omega)$ et son image de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc $L^p(\Omega)$ est isomorphe à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. 1) La linéarité est évidente.
2) Supposons que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour montrer que $f = 0$ il suffit de montrer que le produit de dualité $\langle f, g\rangle = 0, \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega)$.
Soit $g \in L^{p'}(\Omega)$ quelconque. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$ alors il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to g$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Par suite $\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ et donc

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int_\Omega f(x)\left\{g(x) - \varphi_n(x)\right\}\,dx.$$

i.e. $\int_\Omega f(x)g(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\left\{g(x) - \varphi_n(x)\right\}dx,$
c'est à dire

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega f(x)\{g(x) - \varphi_n(x)\}\,dx\right| \le \int_\Omega |f(x)(g(x) - \varphi_n(x))|\,dx \\ &\le \|f\|_{L^p}\|g - \varphi_n\|_{L^{p'}} \to 0,\end{aligned}$$

car $\varphi_n \to g$ dans $L^{p'}(\Omega)$. □

Pour compléter cette proposition on a :

Proposition 1.1.7. *L'injection canonique $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue*

i.e. $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega) \Rightarrow f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de prouver que si $f_n \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ alors $f_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Supposons que $f_n \to 0$ dans $L^p(\Omega)$ i.e.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge N_0, \|f_n\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Montrons que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f_n, \varphi\rangle \to 0$ i.e.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \ge N_1, |\langle f_n, \varphi\rangle| < \varepsilon, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, N_1 = N_0 : \forall n \ge N_1\, |\langle f_n, \varphi\rangle| \le \|f_n\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$.
D'où, puisque $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \quad$ alors $\langle f_n, \varphi\rangle \to 0$. □

1.1.2 Produit de convolution

Définition 1.1.3. *Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. La fonction $x \mapsto h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est appelée, lorsqu'elle existe, produit de convolution de f et g et est notée $f * g$.*

De même, en dimension N, $h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$.

Théorème 1.1.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors $f * g$ existe et $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.*

Démonstration. Montrons ce théorème pour $p = 1$. Pour $p \in]1, +\infty[$, on refait le même raisonnement avec la fonction $|f(x-y)|\,|g(y)|^p$.
On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx \overset{p.p}{=} |g(y)|\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty\,.$$

De plus

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,dy \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty\,.\end{aligned}$$

Donc $(x, y) \to f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Par conséquent, d'après le théorème de Fubini, $(x, y) \to f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N_y)$, pour presque tout x i.e.
$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dx < \infty$ p.p en x et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dxdy,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dx \right| dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx.\end{aligned}$$

i.e. $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. □

Support d'une convolution

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f s'annule sur un ouvert $\omega_i \subset \Omega$ si $f \overset{p.p}{=} 0$ sur ω_i. On dit aussi que ω_i est un ouvert d'annulation de f.
Soit ω le plus grand d'ouvert d'annulation de f ($\omega = \cup_i \omega_i$).

Définition 1.1.4. *$supp\, f = \Omega \setminus \omega$.*

Remarque 1.1.2. Si $supp\, f$ et $supp\, g$ sont compacts alors $supp(f * g)$ est aussi compact.
On peut établir les propositions suivantes :

Proposition 1.1.8. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors on a*

1. *$f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*
2. *$D^\alpha(f * \varphi) = D^\alpha \varphi * f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}$.*

Proposition 1.1.9. *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$ à support compact et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * g$ existe et $f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$.*

1.2 Régularisation et troncature

Définition 1.2.1. *On appelle famille régularisante une famille de fonctions ρ_ε vérifiant :*

1. *$\rho_\varepsilon(x) \geq 0$, $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*
2. *$supp\, \rho_\varepsilon \subseteq \overline{B}(0, \varepsilon)$.*
3. *$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$.*

Dans la pratique on utilise les "suites régularisantes ". Il suffit de prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ dans $\rho_\varepsilon(x)$ pour avoir des suites régularisantes :

Théorème 1.2.1. *Les suites régularisantes existent.*

Démonstration. Soit $\alpha > 0$, $\theta_\alpha(x) = \begin{cases} exp\left(\dfrac{-\alpha^2}{\alpha^2 - \|x\|^2}\right) & \text{, si } \|x\| < \alpha; \\ 0 & \text{, si } \|x\| \geq \alpha, \end{cases}$

avec $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2$. On vérifie directement que $\theta_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$; $\forall \alpha, D^\alpha \theta_\alpha(x) = 0$ si $\|x\| = \alpha$ et $supp\, \theta_\alpha = \overline{B}(0, \alpha)$. Par conséquent

$$\theta_\alpha(x - y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^N), \quad supp\, \theta_\alpha(x_y) = \overline{B}(y, \alpha).$$

Prenons $\rho_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \theta_\varepsilon(x)$, où la constante positive c_ε est choisie de sorte que la $3^{\text{ième}}$ condition soit satisfaite c'est à dire que

$$c_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \theta_\varepsilon(x)dx\right)^{-1} = \left(\int_{\overline{B}(0,\varepsilon)} \theta_\varepsilon(x)dx\right)^{-1}.$$

□

Remarque 1.2.1. La régularisation permet d'avoir des fonctions C^∞.

Définition 1.2.2. *Une suite $(\tau_n)_n$ est dite tronquante ssi*

1. $\tau_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,
2. $\tau_n(x) = 1$ *pour* $\|x\| \leq n$,
3. $\tau_n(x) = 0$ *si* $\|x\| \geq n+1$.

τ_n peut être obtenue à partir de fonctions vérifiant les deux premières conditions d'une suite régularisante. Mais on peut en construire, par exemple $\tau(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{, si } \|t\| \leq 1; \\ 0 \leq \tau(t) \leq 1 & \text{, si } \|t\| \in]1,2[; \\ 0 & \text{, si } \|t\| \geq 2. \end{cases}$$

On prend alors $\tau_n(x) = \tau\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Ces dernières fonctions vérifient les propriétés suivantes :

a) $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^N, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_n(x) = 1, \forall x \in K$ et $\forall n > N_0$.

b) $\tau_n(x)$ sont uniformément bornées, ainsi que toutes leurs dérivées, sur $\mathbb{R}^N$: $\forall \beta, \quad \exists C_\beta > 0 \quad \left|D^\beta \tau_n(x)\right| \leq C_\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ i.e.

$$\forall \beta,\ \exists C_\beta > 0 : \forall n \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left|D^\beta \tau_n(x)\right| \leq C_\beta.$$

La troncature permet, pour une fonction $f \in E$, d'avoir une fonction $\tau_n f$ à support compact.

Proposition 1.2.1. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p < \infty$, $(\rho_n)_n$ une suite régularisante. Alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.*

La preuve est traitée dans [12] et [1].

1.3 Rappels sur la transformation de Fourier

1.3.1 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'espace de Schwartz, espace des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide. Notons par $\mathcal{F}[\varphi](\xi) \equiv \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}\varphi(x)dx$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ la transformée de Fourier de φ, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, avec $x\xi = x_1\xi_1 + ... + x_N\xi_N$. On a alors les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F}[D^\alpha \varphi](\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$.
2. $\partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \varphi(x)](\xi)$.
3. $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme isométrique (à un facteur près) de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ muni de la structure pré hilbertienne de L^2. De plus
$$\|\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2 \text{ (égalité de Parseval).}$$

4. L'isomorphisme inverse est donné par

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

5. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-iy\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^N \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(-y)\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^N \varphi(-y) \equiv (2\pi)^N \check{\varphi}(y).
\end{aligned}$$

1.3.2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ l'isomorphisme précédent se prolonge de manière unique $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \underset{p\to+\infty}{l.i.m} \int\limits_{K_p} f(x)e^{-ix\xi}\, dx\,,$$

où $(K_p)_p$ est une suite croissante de compacts (dans $\mathbb{R}^N$) tendant vers $\mathbb{R}^N$. De plus $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = \underset{p\to+\infty}{l.i.m} \dfrac{1}{(2\pi)^N} \displaystyle\int\limits_{K_p} \widehat{f}(x)e^{ix\xi}d\xi.$

1.3.3 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Définition 1.3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier de f notée $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$, est définie par*

$$< \mathcal{F}f, \varphi >=< f, \mathcal{F}\varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

On démontre alors

Proposition 1.3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Alors*
i) $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
ii) $\mathcal{F}\mathcal{F}f = (2\pi)^N\check{f}$, où $< \check{f}, \varphi >=< f, \check{\varphi} >$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

1.4 Rappels sur les espaces compacts

1.4.1 Compacité et compacité relative

On rappelle qu'un espace métrique E est dit compact si tout recouvrement ouvert de E contient un sous–recouvrement fini. Une partie $A \subset E$ est dite relativement compacte si sa fermeture est un espace compact, pour la métrique induite. La notion de compacité est une notion plus forte que celle de la séparabilité, et plus forte que celle de la complétude. Nous rappelons ici les résultats fondamentaux sans démonstration sur la compacité, énoncés dans le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 ([8] ou [2])**.** *Soit E un espace métrique. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *E est compact.*
2. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E contient une sous–suite convergente.*
3. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E admet un point d'accumulation.*
4. *E est complet et, pour tout $\varepsilon > 0$, E admet un ε–réseau fini c'est à dire qu'il existe une partie finie $R \subset E$ telle que $\forall x \in E, \exists a \in \mathbb{R} \quad d(x,a) < \varepsilon$, d étant la distance sur E.*

Comme conséquences de ce théorème, on obtient des critères de compacité relative. On énonce ces critères sous forme de théorème voir [8], [4].

Théorème 1.4.2. *Soit E un espace métrique et A une partie de E. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :*

1. *A est relativement compacte.*
2. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A contient une sous–suite convergente dans E.*
3. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A admet un point d'accumulation dans E.*

Signalons aussi le théorème suivant dû à Hausdorff :

Théorème 1.4.3. *Soit E un espace métrique et A une partie de E. Alors*

1. *Pour que A soit relativement compacte il faut que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans E un ε–réseau fini pour A.*
2. *Si E est complet pour que A soit relativement compacte il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans E un ε–réseau fini pour A.*

1.4.2 Cas de certains espaces fonctionnels

Nous rappelons ici les critéres de compacité dans les espaces des fonctions continues, et dans les espaces de Lebesgue. Il s'agit des théorèmes d'Ascoli–Arzéla, et des théorèmes de Riesz–Fréchet–Kolmogorov. Nous donnons seulement des variantes simples de ces théorèmes.

Définition 1.4.1. *Soit $E \subset C^0([a,b])$. E est dite équicontinue (également continue) en $\xi \in [a,b]$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in E, \forall x \in [a,b] \quad (d\,|x-\xi| < \delta \Rightarrow |u(x)-u(\xi)| < \varepsilon).$$

Elle est dite équicontinue sur $[a,b]$ si elle l'est en tout point $\xi \in [a,b]$.

Théorème 1.4.4 (Ascoli–Arzéla)**.** *Une partie $E \subset C^0([a,b])$ est relativement compacte si et seulement si*

1. *E est bornée : $\exists c > 0, \forall u \in E \quad \|u\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u(x)| \leq c$.*
2. *E est également continue.*

Théorème 1.4.5 (M. Riesz–Fréchet–Kolmogorov). *Soit $E \subset L^p[a,b]$. Alors E est relativement compacte si et seulement si :*

1. *E est bornée ($\exists c > 0, \forall u \in E, \|u\|_{L^p} \leq c$).*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \tau, \forall u \in E, |\tau| < \delta \Rightarrow \|u(x+\tau) - u(x)\|_{L^p} < \varepsilon$.*

On rappelle la définition d'un opérateur compact.

Définition 1.4.2. *Soient E, F deux espaces normés, et L un opérateur linéaire défini de E dans F. On dit que L est compact si pour toute partie bornée A de E, $L(A)$ est relativement compacte dans F.*

1.5 Divers autres résultats

1.5.1 Théorème de représentation de Riesz

Commençons par le résultat suivant :

Théorème 1.5.1 (de projection). *Soit M un sous espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors $H = M \oplus M^\perp$.*

Théorème 1.5.2 (de Riesz). *Toute forme linéaire et continue f sur H s'exprime à l'aide du produit scalaire. Il existe un unique élément $u \in H$ (u dépend de f) tel que*

$$f(x) = (u, x), \quad \forall x \in H.$$

De plus $\|f\| = \|u\|_H$ (ici $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$).

Démonstration. Soit $N = Ker\, f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Comme f est continue alors N est fermé.
1) Si $N = H$ alors, $\forall x, f(x) = 0 = (0, x), \quad \forall x \in H$.
2) Si $N \neq H$ alors, d'après le théorème précédent, il existe $N^\perp, y \neq 0$. Posons $u = \overline{f(x)} \dfrac{y}{\|y\|^2}$. On vérifie que u répond au problème. □

1.5.2 Théorème de Hahn–Banach

Soit E un espace vectoriel réel et p une fonction positivement homogène et sous–additive i.e.
i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0$.
ii) $p(x + x') \leq p(x) + p(x'), \quad \forall x, x' \in E$.
(par exemple une norme ou une semi–norme).
On a alors

Théorème 1.5.3 (Hahn–Banach). *Soit M un sous–espace vectoriel de E et $f : M \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M$. Alors il existe $F : E \to \mathbb{R}$ linéaire qui prolonge f et telle que $F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E$.*

Remarques 1.5.1.

1. Le théorème reste valable dans le cas complexe. Dans ce cas la positivité homogène de p s'écrit :

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Les inégalités précédentes sont à remplacer par $|f(x)| \leq p(x)$ et $|F(x)| \leq p(x)$.

2. Le prolongement F n'est, en général, pas unique.
3. En pratique le théorème de Hahn Banach est utilisé lorsque F est unique. C'est le cas, par exemple, quand M est un sous–espace dense d'un espace vectoriel normé E et f est continue (F sera aussi continue).

1.5.3 Théorème de la partition de l'unité.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.5.1. *Un recouvrement ouvert dénombrable $(\Omega_i)_i$ est dit localement fini si tout point de Ω appartient seulement à un nombre fini d'ouverts $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \ldots$.*

Définition 1.5.2. *Soit $(\Omega_i)_i$ un recouvrement ouvert dénombrable localement fini de Ω. On appelle partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement une suite de fonctions $(\alpha_i)_i$ vérifiant :*

1. $\forall i, \quad \alpha_i \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, *supp* $\alpha_i \subset \Omega_i$.
2. $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega.$
3. *Tout compact K de Ω rencontre seulement un nombre fini de supp α_j.*

Il existe plusieurs énoncés du théorème assurant l'existence d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement donné. Nous utilisons la formulation suivante (voir [1] p 160 et les références citées) :

Théorème 1.5.4 (Partition de l'unité)**.** *Soit Γ un compact de $\mathbb{R}^N$, $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \backslash \Gamma$ et $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ recouvrant Γ, $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$. Alors il existe une partition de l'unité $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ subordonnée au recouvrement $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$ de $\mathbb{R}^N$.Lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et Γ est le bord de Ω, $\Gamma = \partial\Omega$, $\alpha_{0\,|\Omega}$ est une fonction C^∞ à support dans Ω.*

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

Toute fonction de $L^p(\Omega)$ définit une distribution régulière et admet donc des dérivées généralisées, de n'importe quel ordre. Cette remarque est à la base de la définition des espaces de Sobolev. Ce chapitre est consacré aux définitions et aux propriétés fondamentales de ces espaces ($W^{m,p}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega), W^{-m,p'}(\Omega), H^s(\mathbb{R}^N)$) : structures d'espace de Banach et de Hilbert ; théorèmes de densité ; théorèmes de caractérisation des espaces $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ et $W^{-m,p'}(\Omega)$. Pour la rédaction de ce chapitre les ouvrages [3] et[1] ont été essentiellement utilisés.

2.1 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$

2.1.1 Définition. Propriétés fondamentales.

Définition 2.1.1. *Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, m entier positif et $p \geq 1$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

($D^\alpha u$ est comprise au sens des distributions).

Ainsi $u \in W^{m,p}(\Omega)$ signifie que u et toutes ses dérivées généralisées $D^\alpha u \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m$ sont dans $L^p(\Omega)$. Plus précisément, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement s'il existe m fonctions $v_1, ..., v_m \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega u D^j \varphi \, dx = (-1)^j \int_\Omega v_j \varphi \, dx \quad , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall j = 1, 2, ..., m.$$

Dans le cas particulier où $p = 2$ $W^{m,2}(\Omega)$ sera noté $H^m(\Omega)$. Notons que l'espace $W^{0,p}(\Omega)$ est l'espace $L^p(\Omega)$ et que $H^0(\Omega)$ est l'espace $L^2(\Omega)$.
Exemple. La fonction définie sur $\Omega =]-1, 1[$ par $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$.
En effet, u est continue et bornée sur Ω. Elle appartient donc à $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Sa dérivée au sens des distributions vaut la fonction de Heaviside restreinte à $]-1, +1[$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Or H est bornée sur Ω, et donc $H \in L^p(\Omega)$ pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$. Ainsi, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Notons que $H \notin W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, car $H' = \delta_0$ la mesure de Dirac en 0 qui ne peut pas être identifiée à une fonction de $L^p(\Omega)$.

Proposition 2.1.1. *i) L'application $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & si\ 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & si\ p = +\infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

est une norme sur l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

ii) L'application définie par :

$$\begin{array}{ccl} H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ (u \quad , \quad v) & \to & (u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \end{array} \tag{2.2}$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$.

Démonstration. i) La preuve est immédiate, en se rappellant que $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur l'espace $L^p(\Omega)$.

ii) La preuve est évidente puisque chaque terme est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. $\square$

Théorème 2.1.1. *1. $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme (2.1) est un espace de Banach.*

2. $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable pour $p \in [1, \infty[$.

3. $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire (2.2) est un espace de Hilbert.

Démonstration. 1) L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé. Démontrons qu'il est complet.
Soit $(u_k)_k$ une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall k, l > n_0 \Rightarrow \|u_k - u_l\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Par définition de la norme dans $W^{m,p}(\Omega)$, cela signifie que $\forall \alpha, |\alpha| \leq m$ la suite $(D^\alpha u_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Comme $L^p(\Omega)$ est complet alors il existe des fonctions $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha u_k \to u_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$ et $u_k \to u_0$ dans $L^p(\Omega)$. La continuité de l'injection $L^p(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ assure que si une suite converge dans $L^p(\Omega)$, elle converge aussi au sens des distributions. Par conséquent $D^\alpha u_k \to D^\alpha u_0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une part ; et d'autre part, pour les mêmes raisons $D^\alpha u_k \to u_\alpha$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. D'après l'unicité de la limite $D^\alpha u_0 = u_\alpha$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Donc u_0 et toutes ses dérivées sont dans $L^p(\Omega)$ c'est à dire $u_0 \in W^{m,p}(\Omega)$.
Vérifions que $u_k \to u_0$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. On a :

$$\|u_k - u_0\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(u_k - u_0)\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Chaque terme de la somme s'écrit sous la forme

$$\|D^\alpha(u_k - u_0)\|^p_{L^p(\Omega)} = \|D^\alpha u_k - u_\alpha\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

2)Faisons une preuve pour $m = 1$ et p quelconque. Par définition $u \in W^{1,p}(\Omega)$ signifie que $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \in L^p(\Omega)$. Considérons alors

$$\begin{array}{rcl} T : W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & [L^p(\Omega)]^{N+1} \\ u & \longmapsto & Tu = \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right). \end{array}$$

On verifie que T est une isométrie. Par suite, comme $L^p(\Omega)$ est séparable alors $[L^p(\Omega)]^{N+1}$ est aussi séparable. Donc $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous espace fermé de $[L^p(\Omega)]^{N+1}$. Il est donc séparable, et par conséquent $W^{1,p}(\Omega)$ est aussi séparable.
3) Il suffit de vérifier que la norme provient d'un produit scalaire. On voit que

$$(u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)}.$$

$\square$

Proposition 2.1.2. *i) Soit $m' \ge m$. Alors $W^{m',p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. De plus l'injection canonique est continue.*

ii) Si Ω est borné et $p \le q$ alors $W^{m,q}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$. De plus l'injection canonique est continue.

Démonstration. i) La preuve est immédiate car $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \le \|u\|_{W^{m',p}(\Omega)}$.
ii) La preuve est aussi immédiate, puisque $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. $\square$

Théorème 2.1.2. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Donnons une démonstration pour $H^1(\mathbb{R}^N)$.
Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Montrons qu'il existe une suite $(u_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour cela on suit les deux étapes suivantes :
Troncature (voir chapitre 1)
Soit $\tau_n(x)$ une suite tronquante. La fonction $\tau_n u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, de plus supp $\tau_n u$ est compact car $\tau_n u = 0$ si $\|x\| \ge 2n$.

$$\|\tau_n u - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int\limits_{\|x\| \le 2n} |\tau_n u - u|^2 \, dx + \int\limits_{\|x\| \ge 2n} |\tau_n u - u|^2 \, dx.$$

Le premier terme vaut 0 car $\tau_n = 1$, et le deuxième terme aussi car $\tau_n = 0$ si $\|x\| \ge n+1$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De même pour les dérivées

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial(\tau_n u)}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \left\|\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\tau\left(\frac{x}{n}\right)u + \tau_n \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\le \left\|\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\tau\left(\frac{x}{n}\right)u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left\|\tau_n \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

D'après la deuxième condition d'une suite tronquante, le premier terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$; le deuxième terme tend aussi vers 0. Puisque $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors,

on peut refaire la première étape avec $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ à la place de u. Donc, le sous–espace de $H^1(\mathbb{R}^N)$ formé par des fonctions à support compact est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.
Régularisation (voir chapitre 1)
Soit $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ à support compact. Montrons qu'il existe une suite $(v_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante. Prenons $v_n = \rho_n * v$. Par conséquent v_n est à support compact et $v_n \in C^\infty$, donc $v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. De plus on a $v_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\forall j, \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ car $v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$. D'après la proposition (1.2.1) $v_n \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j} \to \dfrac{\partial v}{\partial x_j}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent on a bien $v_n \to v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.
On conclut que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ alors $w_n = \tau_n.\rho_n * u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $w_n \to u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. □

La preuve faite pour $p = 2$ reste valable pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et reste aussi valable pour $m \geq 1$. Dans ce dernier cas on utilise la formule de Leibnitz généralisée.

$$D^\alpha (u.v) = \sum_{|\delta|+|\beta|=|\alpha|} C_{|\alpha|}^{|\beta|} D^\beta u.D^\delta v.$$

Proposition 2.1.3. *L'opérateur de dérivation D^α est une application continue de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$, quel que soit $|\alpha| \leq m$.*

Démonstration. Pour $\alpha = 1$ montrons que l'application $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ définit de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m-1,p}(\Omega)$ est continue. $\forall u \in W^{m,p}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^p_{W^{m-1,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m-1} \left\| D^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \sum_{|\beta|\leq m} \left\| D^\beta u \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|u\|^p_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

□

2.1.2 L'espace $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$

Définition 2.1.2. *On désigne $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Autrement dit, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
Remarques 2.1.1.

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.
2. Pour Ω ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$, en général $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ est un sous espace fermé strict de $W^{m,p}(\Omega)$.

$\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ est alors muni de la norme induite par celle de $W^{m,p}(\Omega)$.

Théorème 2.1.3 (Inégalité de Friedrichs)**.** *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in H^m_\circ(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive qui ne dépend que de Ω telle que*

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Prouvons ce théorème pour $m = 2$, (pour m quelconque, on fait une démonstration par récurrence). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < a\}$ un cube quelconque contenant Ω . Prolongeons φ par 0 sur $Q \setminus \Omega$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(Q \setminus \Omega)$ et représentons φ par

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_N) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) dt.$$

On a alors, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_1, x_2, ..., x_N)| &\leq \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right| dt \\
&\leq \left(\int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{x_1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (2a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{a} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc, $|\varphi(x)|^2 \leq 2a \displaystyle\int_{-a}^{a} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 dt.$

En intégrant cette dernière inégalité par rapport à $x_2, x_3, ..., x_N$ entre $-a$ et $+a$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} ... \int_{-a}^{a} \left| \varphi^2(x_1, x_2, ..., x_N) \right| dx_2 ... dx_N &\leq 2a \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} ... \int_{-a}^{a} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 ... dx_N \\
&\leq 2a \int_Q \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 dx_2 ... dx_N.
\end{aligned}$$

Intégrant cette dernière une autre fois par rapport à x_1 entre $-a$ et $+a$, on obtient

$$\int_Q \left| \varphi^2(x) \right| dx \leq 4a^2 \int_Q \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx.$$

Posons $C_\Omega = 4a^2$, donc $\displaystyle\int_\Omega \left| \varphi^2(x) \right| dx \leq C_\Omega \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx$. D'où, par passage à la limite

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'après la proposition (2.1.3), $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in H^1_\circ(\Omega), \forall i, i = 1, \ldots, N$ et par suite

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C'_\Omega \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C'_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, puisque

$$\|f\|^2_{H^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on majore d'abord $\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ par $C_\Omega \sum\limits_{i=1}^{n} \left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$ et ensuite les autres termes en $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$. □

Corollaire 2.1.1. $\|f\|' = \left(\sum\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$ *définit sur $H^m_\circ(\Omega)$ une norme équivalente à celle de $H^m(\Omega)$.*

En effet, on a toujours $\|f\|^2_{H^m(\Omega)} \geq \sum\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)}$.

2.1.3 Caractérisation des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ et $W^{m,p}_\circ(\Omega)$

Proposition 2.1.4. *Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et est à support compact alors $u \in W^{m,p}_\circ(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante, posons $u_n = \rho_n * u$. Donc $(u_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus, d'après la proposition (1.2.1) $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$. D'où $u \in W^{m,p}_\circ(\Omega)$ car c'est la limite d'une suite dans $\mathcal{D}(\Omega)$. □

Lemme 2.1.1. *Soient Ω un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Pour x_0 fixé dans Ω, on pose $u(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Alors u est continue et*

$$\int\limits_\Omega u(t)\varphi'(t)dt = -\int\limits_\Omega f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 2.1.2. Ce lemme montre que la primitive u d'une fonction f de $L^p(\Omega)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ dès que $u \in L^p(\Omega)$.

Démonstration. On vérifie facilement, par l'inégalité de Hölder, que u est absolument continue. Il reste à montrer que $\int\limits_\Omega u\varphi'\,dx = -\int\limits_\Omega f\varphi\,dx$. On a

$$\int\limits_\Omega u\varphi'\,dx = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right) \varphi'(x)dx = -\int\limits_{x}^{x_0} dx \int\limits_{a}^{x_0} f(t)\varphi'(x)dt + \int\limits_{x_0}^{b} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\varphi'(x)dt.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(t)\varphi'(t)dt &= -\int_a^{x_0} f(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)dx\right)dt + \int_{x_0}^b f(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right)dt \\ &= -\int_a^{x_0} f(t)\left(\varphi(t)-\varphi(a)\right)dt + \int_{x_0}^b f(t)\left(\varphi(b)-\varphi(t)\right)dt \\ &= -\int_\Omega f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

□

Lemme 2.1.2. *Soient Ω un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ telle que $\int_\Omega f\varphi'\,dx = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f \overset{p.p}{=} C$.*

Démonstration. Toute fonction f dans $L^p(\Omega)$ définit une distribution régulière. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\langle f, \varphi'\rangle = -\langle f', \varphi\rangle = 0. \text{ Donc } f' = 0 \text{ c'est–à –dire } f \overset{p.p}{=} C.$$

□

Théorème 2.1.4. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $\Omega =]a, b[$ et $p \geq 1$. Alors il existe une fonction $\tilde{u}$ absolument continue dans $\overline{\Omega}$, telle que $u \overset{p.p}{=} \tilde{u}$ sur Ω et*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Démonstration. On fixe $x_0 \in \Omega$ et on pose $\tilde{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(t)dt$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\forall x, y \in \Omega : |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| = \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \|u'\|_{L^p} |x-y|^{\frac{1}{q}}.$$

Quand $x \to y$, $\tilde{u}(x) \to \tilde{u}(y)$. On peut donc la prolonger en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$. D'après le lemme (2.1.1), on a $\int_\Omega \tilde{u}\varphi' = -\int_\Omega u'\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ainsi, $\int_\Omega (\tilde{u} - u)\varphi' = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il résulte du lemme (2.1.2) que $(\tilde{u} - u) \overset{p.p}{=} C$.

La fonction $\tilde{u}(x) = u(x) + C$ a les propriétés désirées. □

Théorème 2.1.5. *Soient Ω un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors* $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = o$ *sur la frontière de* Ω.

Démonstration. Soit $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$. Montrons que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, frontière de Ω.
$u \in W_\circ^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'après le théorème précédent, $u_n(x) - u(x) \overset{p.p}{=} \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} u_n'(t) - u'(t)dt$. D'après l'inégalité de Hölder $|u_n(x) - u(x)| \leq \|u_n' - u'\|_{L^p(\Omega)}(\text{ mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \to 0$. C'est à dire $u_n \to u$ uniformément sur $\overline{\Omega}$. Pour $x \in \overline{\Omega}$, $u_n(x)|_{\partial\Omega} = 0$. D'où $u_{|\partial\Omega} = 0$.
Réciproquement, soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_{|\partial\Omega} = 0$. Montrons que $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$. On fixe une fonction continue h sur $\mathbb{R}$ telle que : $|h(t)| \leq t, \forall t \in \mathbb{R}$ et

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad |t| < 1, \\ t & si \quad |t| > 2. \end{cases}$$

Posons $u_n = \dfrac{1}{n}h(n.u)$ de telle manière que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ d'une part, et d'autre part, supp $u_n \subset \left\{x \in \Omega : |u(x)| \geq \dfrac{1}{n}\right\}$ qui est un compact inclus dans Ω, car $u_n \to u$ et $u_{|\partial\Omega} = 0$. D'après la proposition (2.1.4), on voit que $u_n \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$. □

Remarques 2.1.3.

1. On peut définir $W_\circ^{m,p}(\Omega)$ pour $m > 1$ par :

$$W_\circ^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m,p}(\Omega) : u = Du = ... = D^{m-1}u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

2. Pour $m = 0$, $W_\circ^{0,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^p(\Omega)$. D'une part, on sait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, et d'autre part, pour $u \in L^p(\Omega)$, on la prolonge en $\tilde{u}$ par 0 sur $\mathbb{R} \setminus \Omega$, on refait ensuite la régularisation et la troncature. Autrement dit, si $u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
3. Pour $m \geq 1$, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ alors $\tilde{u} \notin W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ en général, car $D^\alpha \tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ mais ne sont pas, en général, dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus, la suite tronquante $(\tau_n)_n$ vérifiant les propriétés précédentes n'existe pas en général si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.

Proposition 2.1.5. *Soit $u \in W_\circ^{m,p}(\Omega)$ et soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Alors*

1. $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}; \quad \forall i, i = 1, \ldots, N.$
2. $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *et* $\|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Démonstration. Prouvons ces propriétés pour $m = 1$ et $p = 2$.
1) Soit $u \in W_\circ^{1,2}(\Omega)$. Par définition, il existe une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $W^{1,2}(\Omega)$.

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \langle \tilde{u}, \psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\psi(x)dx.$$

Comme $\varphi_n \to u$ dans $W^{1,2}(\Omega)$, en particulier $\varphi_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega \varphi_n(x)\psi(x)dx \to \int_\Omega u(x)\psi(x)dx.$$

Appliquons ceci à $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \left\langle \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \psi \right\rangle &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\psi(x)dx = \lim_n \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\psi(x)dx \\ &= -\lim_n \int_\Omega \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{u}, \psi \right\rangle.\end{aligned}$$

2) puisque $W^{1,2}_\circ(\Omega)$ est un sous espace fermé de $W^{1,2}(\Omega)$. Alors

$$u \in W^{1,2}_\circ(\Omega) \Rightarrow u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i.$$

Appliquant le résultat précédent, on trouve que $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $\widetilde{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)} &= \|\tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

2.2 Espaces de Sobolev $W^{-m,p'}(\Omega)$

Le dual d'un espace de Banach existe toujours, identifions ses éléments dans le cas des espaces de Sobolev.

Définition 2.2.1. *$W^{-m,p'}(\Omega)$ est le dual topologique de $W^{m,p}_\circ(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

C'est à dire $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ si $T : W^{m,p}_\circ(\Omega) \to \mathbb{C}$ est linéaire et continue i.e

$$\exists k > 0, \forall u \in W^{m,p}_\circ(\Omega) : |T(u)| \leq k\,\|u\|_{W^{m,p}_\circ(\Omega)}.$$

Proposition 2.2.1. *Le dual $W^{-m,p'}(\Omega)$, s'identifie à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $W^{-m,p'}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.
Soit T une forme linéaire continue sur $W_\circ^{m,p}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset W_\circ^{m,p}(\Omega)$, alors

$$T \in W^{-m,p'}(\Omega) \Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

i.e. $W^{-m,p'}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrons que cette injection est continue.
$T \to 0$ dans $W^{-m,p'}(\Omega)$ signifie que $T(u) \to 0, \quad \forall u \in W_\circ^{m,p}(\Omega)$.
Or : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = W_\circ^{m,p}(\Omega)$, donc $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0, \quad \forall \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. C'est à dire

$$T(u) \to 0, \quad \forall u \in W^{-m,p'}(\Omega).$$

□

Le théorème suivant caractérise l'espace $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Théorème 2.2.1 (Théorème de Schwartz)**.** $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ *si et seulement s'il existe des fonctions* f_α *dans* $L^{p'}(\Omega)$ *telle que* $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$.

Démonstration. On démontre le théorème pour $p' = 2$. C'est à dire

$$T \in H^{-m}(\Omega) \Leftrightarrow \exists f_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ telle que } T(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha(x).$$

1) Soit $T \in H^{-m}(\Omega) = (H_\circ^m(\Omega))'$. D'après le théorème de Riesz la forme linéaire et continue T sur l'espace de Hilbert $H_\circ^m(\Omega)$ s'exprime à l'aide du produit scalaire : il existe une unique fonction $v \in H_\circ^m(\Omega)$ telle que

$$\langle T, u \rangle = (u, v)_{H^m(\Omega)}, \quad \forall u \in H_\circ^m(\Omega).$$

i.e. $\langle T, u \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_\circ^m(\Omega)$.
En particulier pour $u = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha \varphi \overline{D^\alpha v} dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \overline{D^{2|\alpha|} v} \varphi(x) dx$$

et donc $T = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \overline{D^{2\alpha} v}$. Comme $v \in H_\circ^m(\Omega)$, alors $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ et donc aussi $(-1)^{|\alpha|} \overline{D^\alpha v} \equiv f_\alpha(x) \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m$; et on a bien :

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha(x).$$

2) Inversement. Soit $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha(x)$ avec $f_\alpha \in L^2(\Omega)$. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha, D^\alpha \varphi \rangle$$

définit bien une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Comme $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H_\circ^m(\Omega)$ alors, par passage à la limite, $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha, D^\alpha \varphi \rangle$ définit bien une forme linéaire et continue sur $H_\circ^m(\Omega)$.
Dans le cas général une démonstration analogue peut être faite [3]. □

2.3 Transformation de Fourier et espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$ (et même de $L^p(\mathbb{R}^N)$ en général) définit une distribution tempérée et admet une transformée de Fourier. Il est alors possible de donner des nouvelles définitions des espaces de Sobolev en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier. Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$. Alors $\forall \alpha, |\alpha| \leq m$: f et $D^\alpha f$ admettent des transformées de Fourier .

Proposition 2.3.1. *Soit $f \in H^m(\mathbb{R}^N), \|f\|_m = \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ définit une norme équivalente à celle de $H^m(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^m(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{F}(D^\alpha f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

et

$$\left\|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\|\frac{\xi^\alpha}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme la fonction $\xi \to \dfrac{\xi^\alpha}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}$ $\forall \alpha,\ |\alpha| \leq m$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$, alors il existe des constantes C_α positives telle que : $\left|\dfrac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}\right| \leq C_\alpha$. Par conséquent, il existe $C_1 = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha$ telle que

$$\|f\|^2_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

D'autre part, la fonction $g_m : \xi \to \dfrac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}{(1+|\xi|)^m}$ est bornée sur $\mathbb{R}^N$. Donc il existe une constante K_1 positive telle que, $\dfrac{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}{(1+|\xi|)^m} \leq K_1$. C'est à dire

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} &\leq K_1\,(1+|\xi|)^m \leq K_1 \sum_{i=0}^{m} C^i_m\,|\xi|^i \\ &\leq K_1 \sum_{i=0}^{m} C^i_m (|\xi|^2)^{\frac{i}{2}} \leq K_1 \sum_{i=0}^{m} C^i_m (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_N|^2)^{\frac{i}{2}} \\ &\leq K_1 C_m \sum_{i=0}^{m} (|\xi_1|^2 + ... + |\xi_N|^2)^{\frac{i}{2}}, \end{aligned}$$

où $C_m = \max\limits_{0\leq i\leq m} C_m^i$.
Par suite, si $\xi_1 \neq 0$ (sinon on en choisit $\xi_j \neq 0$)

$$\left(|\xi_1|^2 + ... + |\xi_N|^2\right)^{\frac{i}{2}} = |\xi_1|^i \left[1 + \left(\left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right|\right)^2 + ... + \left(\left|\frac{\xi_N}{\xi_1}\right|\right)^2\right]^{\frac{i}{2}}.$$

En considérons la fonction g_i, analogue de g_m, en dimension $N-1$, on voit qu'il existe K_i' telle que

$$\left[1 + \left(\left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right|\right)^2 + ... + \left(\left|\frac{\xi_N}{\xi_1}\right|\right)^2\right]^{\frac{i}{2}} \leq K_i' \left[1 + \left|\frac{\xi_2}{\xi_1}\right| + ... + \left|\frac{\xi_N}{\xi_1}\right|\right]^i,$$

d'où

$$\left(|\xi_1|^2 + ... + |\xi_N|^2\right)^{\frac{i}{2}} \leq K_i' \left(|\xi_1| + \cdots + |\xi_N|\right)^i.$$

En conclusion

$$\begin{aligned}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} &\leq K_1 C_m \sum_{i=0}^m K_i'(|\xi_1| + ... + |\xi_N|)^i \\ &\leq K_1 C_m \sum_{i=0}^m K_i' \sum_{|\alpha|=i} C_\alpha |\xi_1|^{\alpha_1} ... |\xi_N|^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

Comme $|\xi_1|^{\alpha_1} ... |\xi_N|^{\alpha_n} = |\xi^\alpha|$, alors $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq C' \sum\limits_{|\alpha|=i} |\xi^\alpha|$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\widehat{D^\alpha f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C'' \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Notons que $C' = K_1 C_m C_\alpha \sum\limits_{i=0}^m K_i'$ et $C'' = C'(2\pi)^N$. D'où

$$\|f\|_m \leq C'' \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Corollaire 2.3.1. $f \in H^m(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Ce corollaire montre que $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ dès que $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. Ceci nous amène à la définition de l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$, avec $s \in \mathbb{R}_+$.

Définition 2.3.1. *Pour $s \in \mathbb{R}_+$, on définit*

$$\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$ et $H^m(\mathbb{R}^N)$ sont isomorphes. On identifiera par la suite ces deux espaces.

Lemme 2.3.1. *L'opérateur de dérivation* $D^\alpha : L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *est fermé.*

Rappelons d'abord la définition d'un opérateur férmé.

Définition 2.3.2. *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels normés de* $A : E \to F$ *un opérateur linéaire défini sur* $D(A) \subset E$*. On dit que* A *est fermé si* $\forall (x_n)_n \subset D(A), x_n \to x$ *et* $Ax_n \to y$ *découle que* $x \in D(A)$ *et* $y = Ax$*.*

Il revient au même de dire que le graphe de A, noté $G(A) = \{(x, Ax),\, x \in D(A)\}$, est un sous–espace fermé de l'espace produit $E \times F$ muni de la norme

$$\|(x,y)\|^2_{E\times F} = \|x\|^2_E + \|y\|^2_F\,.$$

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que :
i) $f_n \to f$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.
ii) $D^\alpha f_n \to g$.
Montrons que $D^\alpha f$ existe dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et que $D^\alpha f_n = g$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors on a d'après i)

$$\langle f_n, D^\alpha \varphi\rangle \to \langle f, D^\alpha \varphi\rangle\,,$$

puisque f_n et f définissent des distributions régulières. C'est à dire

$$(-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha f_n, \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha f, \varphi\rangle\,.$$

d'une part, et d'autre part, d'après ii) on a

$$(-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha f_n, \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle g, \varphi\rangle\,.$$

Par conséquent, $D^\alpha f_n = g$ au sens des distributions, et donc $D^\alpha f_n \overset{p.p}{=} g$ au sens de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (chapitre 1). □

Remarque 2.3.1. La démonstration précédente reste valable pour montrer que D^α défini de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ est fermé.

Théorème 2.3.1. *Soit* $f \in \widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$*. Alors*
1. $\forall \alpha, |\alpha| \le m,\ D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
2. $\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Démonstration. 1. Soit $f \in \widehat{H}^m(\mathbb{R}^N)$. Alors $\hat{g}(\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc $g(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(\xi)](x)$ existe dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(\hat{g}_n(\xi))_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{g}_n(\xi) \to \hat{g}(\xi)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Posons $\hat{h}(\xi) = \dfrac{\hat{g}(\xi)}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}$. Alors $\hat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $h_n(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}_n(\xi)](x)$ existe dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. D'après l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned}
\|h_n(x) - f(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\hat{h}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\frac{\hat{g}_n(\xi)}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}} - \frac{\hat{g}(\xi)}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\frac{1}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\hat{g}_n(\xi) - \hat{g}(\xi)\|^2_{L^2\mathbb{R}^N)} \to 0
\end{aligned}$$

c'est à dire il existe une suite $(h_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que : $h_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $(D^\alpha h_n)_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha h_n - D^\alpha h_p\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\widehat{D^\alpha h_n} - \widehat{D^\alpha h_p}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\xi^\alpha(\hat{h}_n - \hat{h}_p)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\frac{\xi^\alpha}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\left(\hat{g_n}(\xi) - \hat{g_p}(\xi)\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq c\,\|\hat{g_n}(\xi) - \hat{g_n}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $h_n(x) \to f(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $D^\alpha h_n(x) \to w$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc, d'après le lemme (2.3.1) et la remarque (2.3.1), $w = D^\alpha f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
2.Grâce à la relation de Parseval on a

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha h_n(x) - D^\alpha f(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|\widehat{D^\alpha h_n}(\xi) - \widehat{D^\alpha f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left\|(i\xi)^\alpha\hat{h}(\xi) - \widehat{D^\alpha f}(\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Comme $\|D^\alpha h_n(x) - D^\alpha f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ on a alors
$\left\|(i\xi)^\alpha\hat{h}(\xi) - \widehat{D^\alpha f}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Donc d'une part, on a

$$(i\xi)^\alpha\hat{h}(\xi) \to \widehat{D^\alpha f}(\xi) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N), \tag{2.3}$$

et d'autre part, $\hat{h_n}(\xi) \to \hat{f}(\xi)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou encore

$$(i\xi)^\alpha\hat{h}_n(\xi) \to (i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N). \tag{2.4}$$

D'après l'unicité de la limite de (2.3) et (2.4), on voit que $(i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi) = \widehat{D^\alpha f}(\xi)$. □

La norme définie sur $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ est donnée par :

$$\|u\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\substack{f\in H^m(\mathbb{R}^N)\\ f\neq 0}} \frac{|\langle u, f\rangle|}{\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}}.$$

Par analogie avec le cas précédent, on montre que $\widehat{H}^{-m}(\mathbb{R}^N)$ est identifiable à $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ et que la norme $\|u\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^N)}$ est équivalente à la norme

$$\|u\|_{-m} = \left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{-m}{2}}\hat{u}(\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N)$, alors $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ est identifiable à un sous espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. De plus, tout $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ est de la forme : $u = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u_\alpha$ avec $u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Comme $H^m(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert, alors son dual $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ l'est aussi. Le produit scalaire sera défini par (voir [13]) :

$$(u, v)_{-m} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\hat{u}(\xi)}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\frac{\overline{\hat{v}(\xi)}}{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}}}\, d\xi.$$

Dans toute la suite $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^N)$ sera noté $H^s(\mathbb{R}^N)$ tout simplement grâce à l'identification précédente. Il est muni de la norme

$$\|u\|_s = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 3

Les théorèmes d'injections

L'objet de ce chapitre est l'étude des théorèmes d'injections continues et injections compactes pour différents espaces de Sobolev de fonctions définies dans divers domaines ($\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N_+, \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^N$). Ces théorèmes sont dûs essentiellement à Sobolev, Rellich, Kondrachov, et permettent d'obtenir un certain type de régularité. Les théorèmes de prolongement des fonctions définies dans un demi–espace ou dans un ouvert régulier sont également étudiés dans ce chapitre ainsi que les inégalités de Sobolev qui donnent des critères de régularité de classe C^k. Pour rédiger ce chapitre on a essentiellement utilisé les ouvrages [13], [3], [1] et [11].

3.1 Théorèmes d'injections continues

3.1.1 Cas de $\mathbb{R}^N$

Puisque $H^{m_1}(\mathbb{R}^N) \subset H^m(\mathbb{R}^N)$, d'après la proposition (2.1.2), et $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{m_1}{2}}$, si $m_1 > m$, alors

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Soient m_1, m deux entiers positifs tels que $m_1 > m$. Alors l'injection identique $H^{m_1}(\mathbb{R}^N) \subset H^m(\mathbb{R}^N)$ est continue.*

Remarque 3.1.1. La démonstration montre que ce résultat reste vrai pour $H^s(\mathbb{R}^N)$. $\forall s_1, s \in \mathbb{R}$: si $s_1 > s$ alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$.
Il s'avère judicieux d'examiner, quelque fois, séparément la dimension $N = 1$ des autres dimensions $N \geq 2$.

Théorème 3.1.1. *L'injection identique $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ est continue pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$.*

En dimension $N \geq 2$, l'analogue de ce théorème est le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 (Morrey)**.** *Soit $p > N$. Alors l'injection identique $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est continue. De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a :*

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \text{ pour presque tout } x \text{ et } y \text{ de } \in \mathbb{R}^N.$$

où $c = c(p, N), \alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

La démonstration est traité dans [1].

Démonstration. (théorème 3.1.1). Le cas $p = \infty$ est immédiat.
Soit $1 \leq p < +\infty$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrons d'abord qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$. Posons

$$G(t) = |t|^{p-1} t \quad \text{et} \quad w(x) = G(\varphi(x)).$$

On vérifie facilement que $w(x)$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$, et que

$$w'(x) = p |\varphi(x)|^{p-1} \varphi'(x).$$

D'où, comme $w(x) = \int_{-\infty}^{x} w'(t)dt$, alors

$$|G(\varphi(x))| = \left| \int_{-\infty}^{x} p |\varphi(t)|^{p-1} \varphi'(t)dt \right|,$$

c'est à dire $\left||\varphi(x)|^{p-1} \varphi(x)\right| = \left| \int_{-\infty}^{x} p |\varphi(t)|^{p-1} \varphi'(t)dt \right|$.

Si $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ alors $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$ et donc $p'(p-1) = p$. Par suite, puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ et donc $|\varphi|^{p-1} \in L^{p'}(\mathbb{R})$ car

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|\varphi(t)|^{p-1}\right)^{p'} dt = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^p dt < \infty.$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_{-\infty}^{x} |\varphi(t)|^{p-1} \varphi'(t)dt \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{x} \left(|\varphi(t)|^{p-1}\right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{-\infty}^{x} |\varphi'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent, $|\varphi(x)|^p \leq p \left\||\varphi(t)|^{p-1}\right\|_{L^{p'}} \|\varphi'(t)\|_{L^p}$. Or,

$$\left\||\varphi(t)|^{p-1}\right\|_{L^{p'}} = \left(\int |\varphi(t)|^{p'(p-1)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|\varphi\|_{L^p}^{p-1}$$

et donc,

$$|\varphi(x)|^p \leq p \|\varphi\|_{L^p}^{p-1} \|\varphi'\|_{L^p} .$$

Utilisons l'inégalité de Young avec $a = \|\varphi\|_{L^p}^{p-1}$ et $b = \|\varphi'\|_{L^p}$. On obtient alors

$$|\varphi(x)|^p \leq p \left(\frac{\|\varphi\|_{L^p}^{p'(p-1)}}{p'} + \frac{\|\varphi'\|_{L^p}^p}{p} \right),$$

c'est à dire

$$|\varphi(x)|^p \leq p\left(\frac{\|\varphi\|_{L^p}^p}{p'} + \frac{\|\varphi'\|_{L^p}^p}{p}\right),$$

d'où,

$$|\varphi(x)|^p \leq p\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}^p .$$

Par suite de la concavité de la fonction logarithme on déduit, en particulier, $\log x \leq \frac{x}{e}$ (situant la courbe de log par rapport à sa tangente au point $(e, 1)$) ; et donc $\frac{\log x}{x} \leq \frac{1}{e}$. Comme conséquence on obtient :

$$|\varphi(x)| \leq p^{\frac{1}{p}}\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}}\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} .$$

D'où

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C\,\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \text{ avec } C = e^{\frac{1}{e}}. \tag{3.1}$$

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Par densité il existe une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Par suite $(\varphi_n)_n$ est de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. D'après l'inégalité (3.1) on a :

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^\infty} \leq C\,\|\varphi_n - \varphi_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} .$$

Par conséquent $(\varphi_n)_n$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On sait que $u(x) \overset{p.p}{=} \int_a^x u'(t)dt$, et donc $\varphi_n(x) - u(x) \overset{p.p}{=} \int_a^x (\varphi_n'(t) - u'(t))dt$, et comme $\varphi_n' \to u'$ dans $L^p(\mathbb{R})$ (car $\varphi_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$) alors, d'après l'inégalité de Hölder, $\varphi_n \to u$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ .Par suite

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &\leq \|u - \varphi_n\|_{L^\infty} + \|\varphi_n\|_{L^\infty} \\ &\leq \|u - \varphi_n\|_{L^\infty} + C\,\|\varphi_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et donc, par passage à la limite,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} . \tag{3.2}$$

$\square$

Remarque 3.1.2. Ce théorème reste valable pour tout intervalle ouvert Ω borné ou non.
Signalons d'autres résultats

Théorème 3.1.3. *(Sobolev, Gagliardo, Nirenburg) Soient $p \in [1, N[$ et p^* tel que $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Alors*

1. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.*
2. *$\exists C = C(N, p)$ telle que $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

La démonstration passe par le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Soient $N \geq 2$ et $f_1, ...f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Pour $(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ et $i \in \{1, 2, ..., N\}$, on pose $\check{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Alors*

1. $f(x) = \prod_{i=1}^{N} f_i(\check{x}_i) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
2. $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}$

Démonstration. Si $N = 2$; $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = f(x_1, x_2) = f_2(x_1) f_1(x_2)$. Ceci implique

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|f_2(x_1)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f_1(x_2)\|_{L^1(\mathbb{R})} .$$

Si $N = 3$; $f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_2, x_3) f_2(x_1, x_3) f_3(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx_3 &= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|\, |f_2(x_1, x_3)|\, dx_3 \\
&\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Intégrant en x_2 et utilisant de nouveau l'inégalité de Schwarz. On obtient, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|\, dx_3 dx_2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

De nouveau appliquons la même procédure : intégrant en x_1 et utilisons la même inégalité, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f_2(x_1, x_3)|^2\, dx_3 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_2, x_3)|^2\, dx_3 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f_3(x_1, x_2)|^2\, dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

On voit donc qu'il suffit de faire une récurrence pour démontrer le lemme. □

Démonstration. du théorème (3.1.3)
1) Cas $p = 1$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a :

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right| dt \equiv f_1(\check{x}_1).$$

De même, pour chaque $i = 1, \ldots, N$ on a :

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N) \right| dt \equiv f_i(\check{x}_i).$$

Multipliant toutes ces inégalités membre à membre on aboutit à :

$$|u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\check{x}_i).$$

Notons que $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{N-1})$, $f_i(\check{x}_i) \geq 0$; et donc $(f_i(\check{x}_i))^{\frac{1}{N-1}} \equiv g_i(\check{x}_i) \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Par suite

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} g_i(\check{x}_i).$$

Par conséquent, d'après le lemme précédent, $g \equiv \prod_{i=1}^{N} g_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} .$$

Comme $\|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i| \right)^{\frac{1}{N-1}}$ alors, d'après l'inégalité précédente, on déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}} .$$

D'où

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} .$$

On a donc bien

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \text{ car } \left(p^* = \frac{N}{N-1} \right).$$

L'inégalité demandée est alors établie pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ alors, par passage à la limite, on montre qu'elle reste vraie pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
2) Pour $1 < p < N$ on fait un raisonnement analogue. □

Corollaire 3.1.1. *Soit $p \in [1, N[$. Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p, p^*]$ avec injection continue.*

Démonstration. Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ alors $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et donc $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$, pour tout $q \in [p, p^*]$. De plus, d'après l'inégalité d'interpolation,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \alpha \in [0,1] \text{ , avec } \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

En appliquant l'inégalité de Young au membre de droite avec les exposants $r = \dfrac{1}{\alpha}$ (et donc $r' = \dfrac{1}{1-\alpha}$), on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \alpha \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} . \end{aligned}$$

Comme on a : $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ alors

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} .$$

□

On établit, de même, le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.2. *On a : $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [N, +\infty[$ avec injection continue.*

3.1.2 Cas d'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$

Théorème 3.1.4 (Rellich)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Alors l'injection identique $H^1_\circ(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. 1) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Notons par $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 à $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. On a déjà vu que, pour $f \in H^1_\circ(\Omega)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f} = \widetilde{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$, $\forall i$. Par conséquent,

$$\tilde{f} \in H^1_\circ(\mathbb{R}^N) \text{ et } \left\|\tilde{f}\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^1(\Omega)}, \forall i = 1, \dots, N.$$

2) Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $H^1_\circ(\Omega)$. Donc $f_n \in L^2(\Omega)$. Soit $\varphi_n(\xi)$ la transformé de Fourier de $\widetilde{f_n}$:

$$\varphi_n(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f_n}(x) e^{-ix\xi} dx = \int\limits_{\Omega} f_n(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Par suite, $\quad \widetilde{f_n}(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$. Écrivons $\widetilde{f_n}(x)$ sous la forme

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi| \leq A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi + \int\limits_{|\xi| > A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

D'autre part aussi bien pour $\tilde{f}_n(x)$ que $\varphi_n(\xi)$, ces fonctions sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc

$$\tilde{f}_n(x) = l.i.m. \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi|\le A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{pour } A \to +\infty.$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A, A > A_0 : \left\| \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi|>A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right\|_{L^2} < \varepsilon.$$

3) Posons $f_n^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi|\le A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi$. Montrons que la suite $(f_n^*(x))_n$ satisfait aux conditions du théorème d'Ascoli Arzèla sur $C^0(\overline{\Omega})$.

i) D'après l'inégalité de Schwarz, on a :

$$|f_n^*(x)| \le \frac{1}{(2\pi)^N} \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} (vol\, S_A)^{\frac{1}{2}}.$$

où $vol\, S_A$ est le volume de la sphère de rayon A. Comme $\varphi_n(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors $|f_n^*(x)| \le C$. Par conséquent

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_n^*(x)| \le C.$$

ii) De la même manière

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f_n^*(y)| &= \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int\limits_{|\xi|\le A} \varphi_n(\xi)(e^{ix\xi} - e^{iy\xi}) d\xi \right| \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi|\le A} |\varphi_n(\xi)| \left|1 - e^{i(y-x)\xi}\right| d\xi \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^N} \max_{|\xi|\le A} \left|1 - e^{i(y-x)\xi}\right| \int\limits_{|\xi|\le A} |\varphi_n(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f_n^*(x) - f_n^*(y)| &\le \frac{1}{(2\pi)^N} \max_{|\xi|\le A} \left|1 - e^{i(y-x)\xi}\right| \|\varphi_n\|_{L^2} (vol\, S_A)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C \max_{|\xi|\le A} \left|1 - e^{i(y-x)\xi}\right|. \end{aligned}$$

La suite $(f_n^*(x))_n$ est donc équicontinue.

Par conséquent, la suite $(f_n^*)_n$ contient une sous–suite $(f_{n_p}^*)_p$ converge uniformément dans $\overline{\Omega}$. Cette sous–suite converge aussi dans $L^2(\Omega)$.

4) Notons que $\widetilde{f}_n(x) = f_n^*(x) + R_n^*(x)$ où $R_n^*(x) = \widetilde{f}_n(x) - f_n^*(x) \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour $x \in \Omega$, $f_n(x) = \widetilde{f}_n(x) = f_n^*(x) + R_n^*(x)$.
Rappelons que

$$R_n^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{|\xi|>A} \varphi_n(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{ et } \|R_n^*(x)\|_{L^2} < \varepsilon', \quad \forall \varepsilon' > 0.$$

et donc aussi pour toute sous–suite de $(R_n^*(x))_n$. Soit $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^2}$.
Pour $n = 1$, $(f_n^*)_n$ contient une sous–suite $(f_{1_n}^*)_n$ de Cauchy (puisque convergente).
De plus $\left\|R_{1_n}^*\right\|_{L^2} < \varepsilon_1$ (et donc aussi $(R_{1_n}^*)_n$ de Cauchy).
La sous–suite $(f_{1_n}^*)_n$ vérifie donc les propriétés suivantes :

i) $(f_{1_n}^*)_n$ de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

ii) $\left\|R_{1_n}^*\right\|_{L^2} < \varepsilon_1$.

Pour $n = 2$, comme $(f_{1_n}^*)_n$ converge dans $L^2(\Omega)$ elle est donc bornée. On peut refaire l'étape précédente avec ε_2. Elle contient une sous–suite notée $(f_{2_n}^*)_n$ telle que

i) $(f_{2_n}^*)_n$ de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

ii) $\left\|R_{2_n}^*\right\|_{L^2} < \varepsilon_2$.

On prend alors $(f_{2_n})_n$: $f_{2_n}(x) = f_{2_n}^*(x) + R_{2_n}^*(x)$.
Pour $n = 3$, on construit $f_{3_n}^*(x)$ et $R_{3_n}^*$ ect...
On vérifie que la sous–suite diagonale $(f_{m_m})_m$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. □

Corollaire 3.1.3. *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, l'injection identique $H_\circ^m(\Omega) \subset H_\circ^{m-1}(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $H_\circ^m(\Omega)$. Alors il existe $c > 0$ telle que :

$$\|f_n\|_{H^m(\Omega)} \leq c, \quad \forall n.$$

Comme $f_n \in H_\circ^m(\Omega)$ alors, par définition même, $D^\alpha f_n \in H_\circ^1(\Omega)$,$\forall \alpha$, $|\alpha| \leq m - 1$.
De plus $D^\alpha : H_\circ^m(\Omega) \to H_\circ^{m-|\alpha|}(\Omega)$ est continue :

$$\|D^\alpha f_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\alpha \|f_n\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m - 1.$$

En conclusion $(D^\alpha f_n)_n$ est bornée dans $H_\circ^1(\Omega)$. D'après le théorème précédent elle contient une sous–suite $(D^\alpha f_{n_p})_p$ convergente dans $L^2(\Omega)$. On peut choisir $(f_{n_p})_p$ commune pour tous les α , $|\alpha| \leq m-1$; et donc $(f_{n_p})_p$ converge dans $H_\circ^{m-1}(\Omega)$. □

Dans ce corollaire, prenant $m - 1$ à la place de m, et ensuite $m - 2$ à la place de $m - 1$, ect... on aboutit au résultat suivant :

Théorème 3.1.5 (Rellich, Sobolev, Kondrashov)**.** *([6],[14]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $m > l$. Alors l'injection identique $H_\circ^m(\Omega) \subset H_\circ^l(\Omega)$ est compacte.*

Notons que ces résultats ne sont plus valables dans les espaces $H^m(\Omega)$ et, plus généralement, dans les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sans conditions supplémentaires sur Ω.
L'injection $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. En effet, considérons la suite $u_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n}}\, \psi\left(\dfrac{x}{n}\right)$ où $\psi(x) = C_\alpha \theta_\alpha(x)$, la fonction θ_α étant celle qui a été introduite dans

le chapitre 1 portant sur les rappels :

$$\theta_\alpha(x) = \begin{cases} exp\left(\dfrac{-\alpha^2}{\alpha^2 - \|x\|^2}\right) & , \|x\| \le \alpha; \\ 0 & , \|x\| > \alpha. \end{cases}$$

On choisit la constante positive C_α de sorte que $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi^2(x)dx = 1$. Des calculs directs montrent que

1. $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.
2. $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R})$.

Montrons que $(u_n, v) \to 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$ il suffit de montrer que $(u_n, \varphi)_{H^1(\mathbb{R})} \to 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$(u_n, \varphi)_{H^1(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right) \widehat{u}_n(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\,.$$

Comme

$$\begin{aligned} \widehat{u}_n(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\sqrt{\frac{1}{n}}\,\psi\left(\frac{x}{n}\right)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\sqrt{\frac{1}{n}} C_\alpha\theta_\alpha\left(\frac{x}{n}\right)dx = C_\alpha\sqrt{n}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iy(n\xi)}\theta_\alpha(y)dy \qquad (x = ny) \\ &= C_\alpha\sqrt{n}\,\widehat{\theta_\alpha}(n\xi), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (u_n, \varphi)_{H^1(\mathbb{R})} &= C_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)\sqrt{n}\widehat{\theta_\alpha}(n\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \quad (n\xi = \mu) \\ &= C_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{n^2}\right)\sqrt{n}\widehat{\theta_\alpha}(\mu)\widehat{\varphi}\left(\frac{\mu}{n}\right)\frac{d\mu}{n} \\ &= C_\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{n^2}\right)\widehat{\theta_\alpha}(\mu)\widehat{\varphi}\left(\frac{\mu}{n}\right)d\mu. \end{aligned}$$

D'où $\left|(u_n, \varphi)_{H^1(\mathbb{R})}\right| \le \dfrac{C_\alpha}{\sqrt{n}}\sup\limits_{\mathbb{R}_\xi}|\widehat{\varphi}|\int\limits_{\mathbb{R}}\left(1 + |\mu|^2\right)\left|\widehat{\theta_\alpha}(\mu)\right|d\mu \to 0$ quand $n \to +\infty$ ($\varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, donc $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$).

Conséquence. Toute sous–suite (u_{n_k}) extraite de $(u_n)_n$ vérifie :

$$\|u_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \quad \text{ et } \quad (u_{n_k}, v)_{H^1(\mathbb{R})} \to 0, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R})$$

Une telle sous–suite ne peut converger dans $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|u_{n_k} - u_{n_m}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|u_{n_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - (u_{n_k}, u_{n_m}) - (u_{n_m}, u_{n_k}) + \|u_{n_m}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= 2 - (u_{n_k}, u_{n_m}) - (u_{n_m}, u_{n_k}) \to 2 \end{aligned}$$

(car $\left|(u_{n_p}, v)_{L^2(\mathbb{R})}\right| \le \left|(u_{n_p}, v)_{H^1(\mathbb{R})}\right| \to 0$).

Théorème d'injection dans les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Théorème 3.1.6. *Soit* $\Omega =]a,b[$ $(a,b \in \mathbb{R})$ *. Alors*

1. *L'injection identique* $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *est compacte,* $\forall p, 1 < p \leq +\infty$.
2. *L'injection* $W^{1,1}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *est compacte,* $\forall p \in [1, +\infty[$.

Démonstration. 1 Soit B bornée de $W^{1,p}(\Omega)$. Alors il existe $K \geq 0$ telle que

$$\forall u \in B, \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K.$$

En particulier, $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ et $\|u'\|_{L^p(\Omega)} \leq K, \quad \forall u \in B$.
Or

$$u(x) \overset{p.p}{=} \int_a^x u'(t)dt, \quad \forall x, a \in \Omega.$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(x)| \leq \|u'\|_{L^p} .(x-a)^{\frac{1}{p'}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p} .$$

Ceci implique

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq K(b-a)^{\frac{1}{p'}},$$

B est donc bornée dans $C^0(\overline{\Omega})$. Avec les mêmes arguments, on a :

$$|u(x) - u'(x)| \leq \left| \int_{x'}^{x} u'(t)dt \right| \leq (|x-x'|)^{\frac{1}{p'}} \|u'\|_{L^p} \leq K |x-x'|^{\frac{1}{p'}} .$$

Par conséquent B est équicontinue dans $\overline{\Omega}$ et donc, d'après le théorème d'Ascoli–Arzèla, B est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega})$.
2 Soit B bornée de $W^{1,1}(\Omega)$. Montrons que :
i) B est bornée dans $L^p(\Omega)$.
ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \tau, \forall u \in B. \left[|\tau| < \delta \Rightarrow \|u(x+\tau) - u(x)\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \right]$.
B étant bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$ il existe alors $K > 0$ telle que

$$\forall u \in B, \quad \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq K.$$

D'où

$$\|u\|_{L^1} \leq K \text{ et } \|u'\|_{L^1} \leq K.$$

i) Montrons que B est bornée dans $L^p(\Omega)$. D'après l'inégalité (3.2) il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}, \forall u \in W^{1,1}(\Omega).$$

et donc, en particulier, $\forall u \in B, \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq CK$. Comme $\Omega =]a,b[$ et

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (b-a) \|u\|^p_{L^\infty(\Omega)},$$

alors

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq CK(b-a)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in B.$$

Montrons le deuxième point ii). On a

$$u(x+\tau)-u(x)=\int\limits_x^{x+\tau}u'(t)dt=\tau\int\limits_0^1 u'(x+\tau\xi)d\xi,\quad \forall x\in\Omega. \text{ D'où}$$

$$|u(x+\tau)-u(x)|\leq|\tau|\int\limits_0^1|u'(x+\tau\xi)|\,d\xi\leq|\tau|\,\|u'\|_{L^1(\Omega)}\leq|\tau|\,\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}\,.$$

Par conséquent, $|u(x+\tau)-u(x)|\leq|\tau|\,K,\forall u\in B$; et donc

$$\int\limits_\Omega|u(x+\tau)-u(x)|^p\,dx\leq(K\,|\tau|)^p(b-a)$$

c'est à dire

$$\|u(x+\tau)-u(x)\|_{L^p(\Omega)}\leq K(b-a)^{\frac{1}{p}}\,|\tau|\,,\forall u\in B.$$

Pour achever la démonstration on applique le théorème de M.Riesz–Fréchet (chapitre 1). □

3.2 Autres théorèmes d'injections

3.2.1 Prolongements à partir de $\mathbb{R}^N_+$

Pour pouvoir utiliser certaines opérations comme la convolution et la transformée de Fourier il faut prolonger u définie sur Ω à tout l'espace $\mathbb{R}^N$. Ce prolongement doit conserver les propriétés de régularité de u : si $u\in W^{m,p}(\Omega)$ le prolongement doit être dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Examinons le cas de $\Omega=\mathbb{R}^N_+$. Pour $p\in[1,\infty]$ on a :

Théorème 3.2.1. *Il existe un opérateur linéaire et continu, $P: W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)\to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$*

1. *$Pu|_{\mathbb{R}^N_+}=u$.*
2. *Il existe une constante $C>0$ telle que $\forall u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$:*
   i) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\leq C\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}$.
   ii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}$.

Démonstration. 1) Posons $Pu(x)=\begin{cases}u(x',x_N), & \text{si } x_N>0;\\ u(x',-x_N), & \text{si } x_N<0.\end{cases}$

Alors par construction $Pu|_{\mathbb{R}^N_+}=u$.

2) i) On a $Pu\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ par conséquent, $Pu\in L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\leq 2\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}\,,\ \text{pour tout, } u\in L^p(\mathbb{R}^N_+). \tag{3.3}$$

ii) Montrons que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(Pu)=P\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\quad\forall i,i=1,...,N-1$ (au sens des distributions). i.e.

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\quad\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu)\varphi(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi(x)dx. \tag{3.4}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}(Pu)\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} Pu(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{-\infty}^{0} Pu(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N - \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{0}^{+\infty} Pu(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{-\infty}^{0} u(x', -x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N - \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', t)\frac{\partial \varphi^-}{\partial x_i}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N \right\},
\end{aligned}$$

où $\quad \dfrac{\partial \varphi^-}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_N)$. Le deuxième membre de l'équation (3.4) donne :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi(x)dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_N)\varphi(x)dx_N + \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_N)\varphi(x)dx_N \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', t)\frac{\partial \varphi^-}{\partial x_i}dx_N + \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_N \right\}.
\end{aligned}$$

On aboutit donc à l'égalité suivante :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Pu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)dx'dx_N = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', -x_N)\right\}dx_N.$$

La fonction $\psi(x) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$ n'est pas en général dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$. Considérons alors la fonction $\eta_k(x_N)\psi(x)$ où $\eta_k(t) = \eta(kt)$ avec $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ définie par :

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{1}{2}; \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

La fonction $\eta_k(x_N)\psi(x)$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $\eta_k(x_N)\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$,

ii) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k\psi) = \eta_k\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$,

iii) $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k\psi)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \eta_k\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}dx.$

On a alors $-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\eta_k \psi)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u \left[\eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right] dx.$

Par suite, par passage à la limite, quand $k \to +\infty$, $-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx.$

D'après l'égalité précédente, on déduit que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Pu\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\psi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi(x)dx,$$

i.e. $\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu) = P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ au sens des distributions.

Reste à montrer que $\frac{\partial}{\partial x_N}(Pu) = \frac{\partial u^1}{\partial x_N}$, au sens des distributions, où

$$u^1(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & x_N > 0, \\ -u(x', -x_N) & x_N < 0. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} Pu\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Pu\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx_N \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} u(x', -x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx_N + \int\limits_{0}^{+\infty} u(x', x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx_N \right\} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_{0}^{+\infty} u(x)\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)\right)dx_N = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\frac{\partial w}{\partial x_N}dx.
\end{aligned}$$

avec $w = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Par conséquent

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial (Pu)}{\partial x_N}\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\frac{\partial w}{\partial x_N}dx.$$

D'autre part $w(x', 0) = 0$ et donc $|w(x)| = \left|x_N\frac{\partial w}{\partial x_N}(x', x_N^*)\right|$, avec $0 < x_N^* < x_N$.

Donc,

$$|w(x)| \leq |x_N| \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\varphi(x', x_N^*) - \frac{\partial}{\partial x_N}\varphi(x', -x_N^*)\right|.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante $C > 0$ telle que $|w(x)| \leq C\,|x_N|$. Comme précédemment $\eta_k(x_N)w(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ et donc

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k w)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\eta_k(x_N)w(x', x_N)dx.$$

Or, $\dfrac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k w) = \eta_k(x_N)\dfrac{\partial w}{\partial x_N} + k\eta'(kx_N)w(x', x_N)$. D'où

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k(x_N)w(x))dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \eta_k(x_N)u(x)\frac{\partial w}{\partial x_N}dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} ku(x)\eta'(kx_N)w(x)dx.$$

Le second terme tend vers 0 quand $k \to +\infty$. En effet

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} ku(x)\eta'(kx_N)w(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N_*} ku(x', t)\frac{\eta'(t)}{k}w(x', t)\,dx\right| \leq MC\int\limits_{\mathbb{R}^N_*} |u(x)|\,dx.$$

où $R^N_* = supp\, w \cap \left(0 < x_N < \dfrac{1}{k}\right)$, $kx_N = t, C$ est la constante précédente, et $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$. Lorsque $k \to +\infty$ alors $x_N \to 0$ et $\displaystyle\int\limits_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u(x)|\,dx \to 0.$

En conclusion

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial w}{\partial x_N}dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} ku\eta'(kx_N)wdx \to \lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial w}{\partial x_N}dx.$$

Par suite,

$$-\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\eta_k w dx = \lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial w}{\partial x_N}dx.$$

Soit $\displaystyle -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}wdx = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial w}{\partial x_N}dx\,;$ ou encore

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}wdx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial w}{\partial x_N}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_N}(Pu)\varphi(x)dx.$$

Comme $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}wdx = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_N}\left(\varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)\right)dx_N = \left\langle \frac{\partial u^1}{\partial x_N}, \varphi\right\rangle.$

Par conséquent on a :
$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}$. Par suite, $\forall i, i = 1, ..., N$.

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left\|P\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)},$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_N}(Pu)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left\|\frac{\partial u^1}{\partial x_N}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Il s'agit de la même constante C partout. Le théorème est établi. □

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit $C^k(\overline{\Omega})$ (respectivement $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) comme l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de $C^k(G)$ (respectivement $\mathcal{D}(G)$) où G est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant $\overline{\Omega}$. On a alors :

Théorème 3.2.2. *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.*

Démonstration. Elle est similaire à celle du théorème (2.1.2) après prolongement des fonctions définies sur $\mathbb{R}^N_+$ à tout l'espace $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ alors $v = Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et donc il existe une suite $v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $v_n \to v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. On vérifie que $v_{n\,|\mathbb{R}^N_+}$ sont dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ et que $v_{n\,|\mathbb{R}^N_+} \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. □

Remarque 3.2.1. On peut démontrer $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N_+)$.
On peut généraliser le théorème précédent. On a le résultat suivant :

Théorème 3.2.3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $P : L^2(\mathbb{R}^N_+) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ linéaire et continu de $H^k(\mathbb{R}^N_+) \to H^k(\mathbb{R}^N) \quad \forall k, k = 0, 1, \ldots, m$ tel que*

1. *$Pu|_{\mathbb{R}^N_+} = u$.*
2. *$Pu \in H^m(\mathbb{R}^N)$.*
3. *$\|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^N_+)}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N_+)$, il suffit de montrer que toute fonction de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ soit prolongeable de manière que les trois propriétés restent valables. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Posons

$$P\varphi = \begin{cases} \varphi(x', x_N), & x_N > 0; \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi\left(x', -\frac{1}{k}x_N\right), & x_N \leq 0. \end{cases}$$

On choisit les λ_k de sorte que $P\varphi \in C^{m-1}(\mathbb{R}^N)$ c'est à dire

$$P\varphi|_{x_N=0^+} = P\varphi|_{x_N=0^-} \text{ et } \left.\frac{\partial^j P\varphi}{\partial x_N^j}\right|_{x_N=0^+} = \left.\frac{\partial^j P\varphi}{\partial x_N^j}\right|_{x_N=0^-}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m-1,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \\ &\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{-1}{k}\right)^j \lambda_k = 1 \quad j = 1, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

On obtient un système de m équations à m inconnues. Son déterminant est le determinant de Vandermonde de $\left(\frac{-1}{k}\right)^j \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$. Il est donc non nul. Le prolongement $P\varphi$ existe donc. Par suite $P\varphi \in H^m(\mathbb{R}^N)$ car la dérivée $\dfrac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial x_N^{m-1}}$ ne présente pas de sauts.

Par suite

$$\begin{aligned}
\|P\varphi\|_m^2 &= \sum_{|\beta|+j\leq m} \int_{\mathbb{R}^N} \left| D_{x'}^{\beta} \frac{\partial^j}{\partial x_N^j} P\varphi \right|^2 dx \\
&= \sum_{|\alpha|=|\beta|+j\leq m} \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} |D^\alpha \varphi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_-^N} \left| \sum_{k=1}^m \lambda_k D^\alpha \varphi \left(x', -\frac{x_N}{k}\right) \right|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

On a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\left| \sum_{k=1}^m \lambda_k D^\alpha \varphi \left(x', -\frac{x_N}{k}\right) \right|^2 \leq m \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \left| D^\alpha \varphi \left(x', -\frac{x_N}{k}\right) \right|^2.$$

Posons $\dfrac{-x_N}{k} = y_N$, donc,

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|+j\leq m} \int_{\mathbb{R}_-^N} \left| \sum_{k=1}^m \lambda_k D^\alpha \varphi \left(x', -\frac{x_N}{k}\right) \right|^2 dx \leq C(m) \sum_{|\alpha|=|\beta|+j\leq m} \int_{\mathbb{R}_+^N} |D^\alpha \varphi(x', y_N)| \, dx' dy_N.$$

Par conséquent, $\|P\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C'(m) \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}_+^N)}^2$.
La démonstration faite pour m s'applique pour tout $0 \leq k \leq m$, m fixé. □

Remarque 3.2.2. Les résultats précédents restent valables pour S_+^N où S_+^N $= S^N \cap \mathbb{R}_+^N$, $\quad S^N = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\}$, avec$|x'|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2$.

3.2.2 Prolongements à partir de Ω

Définition 3.2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Γ ($\Gamma = \partial\Omega$). On dit que Ω est un ouvert régulier de classe C^1 si Γ est une hypersurface (i.e variété de dimension $N-1$) de classe C^1 telle que Ω soit localement situé d'un seul côté de Γ.*

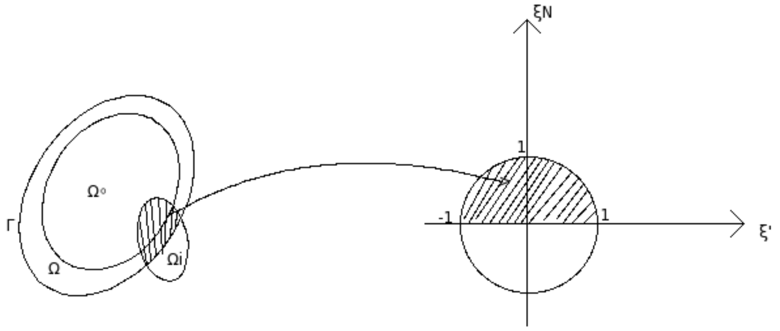
Comme Ω est borné, $\overline{\Omega}$ est compact dans $\mathbb{R}^N$. Il existe donc un nombre fini d'ouverts $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_p$ de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{p} \Omega_i$. On peut choisir Ω_0 tel que $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, et donc $\Omega_1, ..., \Omega_p$ recouvrent entièrement Γ. De plus, il existe $\varphi_i : \Omega_i \to S^N$ telle que

1. φ_i et $\varphi_i^{-1} \in C^1$.
2. $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega) = S_+^N$.
3. $\varphi_i(\Omega_i \cap \Gamma) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : |\xi'| < 1, \xi_N = 0 \text{ où } \xi = (\xi', \xi_N) \text{ et } |\xi'|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i^2 \right\}$.

Définition 3.2.2. *Si φ_i et $\varphi_i^{-1} \in C^m$ alors Ω est dit régulier de classe C^m.*

Pour $p \in [1, \infty]$ on a :

Théorème 3.2.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ régulier de classe C^1. Alors il existe un opérateur linéaire et continu, $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*



1. $Pu|_\Omega = u$.
2. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$:
   i) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{L^p(\Omega)}$.
   ii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Démonstration. Avec les notations précédentes, d'après le théorème de la partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_p$ il existe des fonctions $\alpha_i(x)$, $i = 0, 1, ..., p$ telles que $\alpha_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$ et $\sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega$.
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$u = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i(x) u = \sum_{i=0}^{p} u_i, \text{ où } \quad u_i = \alpha_i(x) u\,.$$

Pour prolonger u on prolonge chaque u_i.
a) Prolongement de u_0 : soit f définie dans Ω notons par $\tilde{f}$ son prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Soit* $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Alors*

$$\widetilde{\alpha f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{\alpha f}\right) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f)}.$$

De plus, on a : $\left\|\widetilde{\alpha f}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Démonstration. Soit $K = supp\,\alpha \subset \Omega$. Alors $\widetilde{\alpha f} = \begin{cases} \alpha f & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus K, \end{cases}$
et donc $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\widetilde{\alpha f}\right|^p dx = \int\limits_{\Omega} |\alpha f|^p\,dx \leq C\,\|f\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty$, où $C = \sup\limits_{x \in K} |\alpha(x)|^p$.

De même pour $\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_i} f$. Par suite $\widetilde{\left(\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_i} f\right)} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
De plus, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\alpha f} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} \alpha f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \varphi) - \varphi \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right\} dx \\
&= -\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right) \varphi dx \\
&= -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f) \varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f)} \varphi dx,
\end{aligned}$$

i.e. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\alpha f}) = \widetilde{\dfrac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}}$ au sens des distributions.
Par conséquent $\widetilde{\alpha f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et on a bien le résultat désiré. $\square$

Appliquons ceci à $u_0 = \alpha_0 u$. On voit donc que $\tilde{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}_0 = \alpha_0 \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i} \tilde{u} \quad \text{et que } \|\tilde{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

b) Prolongement de $u_j : j = 1, ..., p$. On utilise une technique classique qui consiste à utiliser un résultat déjà établi pour S_+^N ou $\mathbb{R}_+^N$ pour passer, par le principe de transport, à Ω. Considérons $u_{|\Omega_i \cap \Omega}$ qu'on transporte sur S_+^N à l'aide des φ_i^{-1}.
Posons $u \circ \varphi_i^{-1}(\xi) = v_i(\xi)$, pour $\xi \in S_+^N$ i.e. $u \circ \psi_i(\xi) = v_i(\xi)$, où $\psi_i = \varphi_i^{-1}$. On peut alors démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *$v_i(\xi) \in W^{1,p}(S_+^N)$ si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (voir [1] p156).*

D'après le théorème (3.2.1) et la remarque (3.2.2), on peut prolonger v_i par Pv_i à S^N. i.e $Pv_i \in W^{1,p}(S^N)$. On refait maintenant le chemin inverse : on retransporte (Pv_i) sur Ω_i à l'aide des φ_i $\left(\psi_i^{-1}\right)$.
i.e

$$(Pv_i)(\varphi_i(x)) \equiv \omega_i(x), \quad x \in \Omega_i.$$

Par la même proposition précédente $\omega_i \in W^{1,p}(\Omega_i)$. De plus sur $\Omega_i \cap \Omega$, $\omega_i = u$; et

$$\|\omega_i\|_{W^{1,p}(\Omega_i)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Enfin posons

$$\check{u}_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x)\omega_i(x) & , x \in \Omega_i\,, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_i\,. \end{cases}$$

D'après la proposition (3.2.1) $\check{u}_i(x) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \check{u}_i = \omega_i$ sur Ω_i et

$$\|\check{u}_i(x)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\omega_i\|_{W^{1,p}(\Omega_i \cap \Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En conclusion on prend

$$Pu = \tilde{u}_0 + \sum_{i=1}^{p} \check{u}_i.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Notons que le théorème reste valable pour $H^m(\Omega)$, si Ω est régulier de classe C^m. Comme conséquences citons le théorème de densité suivant :

Théorème 3.2.5. *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert borné régulier de classe C^m.*

Démonstration. On se restreint au cas $m = 1$.
Soit $u \in H^1(\Omega)$. D'après le théorème (3.2.4), il existe un opérateur $Pu \in H^1(\mathbb{R}^N)$ qui prolonge u. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ il existe alors une suite $(v_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $v_n \to Pu$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $u_n = v_{n\,|\Omega}$. Alors $(u_n)_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. □

Notons enfin les théorèmes d'injections suivants :

Théorème 3.2.6. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, et Ω un ouvert régulier de classe C^1. Alors*

1. *$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ si $1 \leq p \leq N$.*
2. *$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\quad \forall q \in [p, +\infty[$ si $p = N$.*
3. *$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $p > N$.*

Toute les injections sont continues. De plus si $p > N$, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(x')| \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,|x - x'|^\alpha \ \text{ pour presque tous } x \text{ et } x' \in \Omega.$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et $C = C(\Omega, p, N)$. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$.

Démonstration. Soit $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ l'opérateur de prolongement. On applique le théorème (3.1.3) à Pu, le corollaire (3.1.1), et enfin le théorème (3.1.2). □

3.3 Inégalités de Sobolev

En dimension $N = 1$ on a vu, au deuxième chapitre, que les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ ($\forall p \geq 1$) étaient équivalentes aux fonctions absolument continues. On a vu ci dessus en dimension N, que $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ pour $p > N$. On va énoncer quelques résultats de régularité de classe C^k pour les espaces de Sobolev. Ces résultats sont généralement connus sous l'appellation d'inégalités de Sobolev.

Définition 3.3.1. *On dit que $u \in W^{m,p}_{loc}$ si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ pour tout ouvert Ω relativement compact de $\mathbb{R}^N$.*

Lemme 3.3.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et $u \in W^{N,p}_{loc}$. Alors u est équivalente à une fonction continue et*

$$\forall x \in K : \quad |u(x)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \left\{ \int_K |D^\alpha u(y)|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Soit $H(t)$ le fonction de Heaviside.

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Posons $H(x) = H(x_1)H(x_2)\ldots H(x_N)$ et $\beta = \{1, 1, \ldots, 1\}$. On a alors

$$D^\beta H(x) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N} H(x) = D^\beta H = \delta$$

et donc $u = \delta * u = D^\beta H * u = H * D^\beta u$ i.e. $u = H * D^\beta u$.
1) Supposons que $supp\, u = K$ alors $D^\beta u$ est à support compact et $D^\beta u \in L^p(K)$. Donc $D^\beta u \in L^1(K)$ et comme H est bornée alors $H * D^\beta u$ existe et est bornée. De plus

$$u(x) = H(x) * D^\beta u(x) = \int\limits_K D^\beta u(y) H(x-y) dy.$$

D'où

$$|u(x+h) - u(x)| \leq \int\limits_K \left| D^\beta u(y) \right| |H(x+h-y) - H(x-y)|\, dy.$$

Pour $h \to 0, H(x+h-y)$ et $H(x-y)$ ne diffèrent que sur un ensemble dont la mesure tend vers 0 et donc $|u(x+h) - u(x)| \to 0$. Par suite

$$|u(x)| = \left| \int\limits_K D^\beta u(y) H(x-y) dy \right| \leq \int\limits_K \left| D^\beta u(y) \right| dy \leq \left\| D^\beta u \right\|_{L^p} (mes\, K)^{\frac{1}{p'}}.$$

i.e. $|u(x)| \leq C \left\| D^\beta u \right\|_{L^p}$ $\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$.
2) Si $supp\, u$ est quelconque on considère une fonction $\theta \in \mathcal{D}$ telle que $supp\, \theta = K$, et $\theta(x) = 1$ dans un voisinage ω de x. On a alors, d'après 1), θu est équivalente à une fonction continue, et $|\theta u| \leq C \left\| D^\beta \theta u \right\|_{L^p}$. Comme $D^\beta \theta u = \sum\limits_{|\alpha| \leq \beta} D^\alpha u . D^{\beta - \alpha} \theta$, alors

$$\left\| D^\beta \theta u \right\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha| \leq |\beta|} \left\| D^\alpha u . D^{\beta-\alpha} \theta \right\|_{L^p(K)}.$$

D'où, pour $x \in \omega$,

$$|u(x)| = |\theta u(x)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq N} \left(\int\limits_K |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{ car } |\beta| = N),$$

où $C_1 = C_1(C, \theta, D^\alpha \theta)$. □

Corollaire 3.3.1. *Si* $u \in W^{N+k,p}_{loc}$ *alors* u *est équivalente à une fonction de classe* C^k.

On peut généraliser ces résultats comme suit :

Théorème 3.3.1. *$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C_b^k(\mathbb{R}^N)$ si $m - \frac{N}{p} > k$ où*

$$C_b^k(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}^N) : \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u| < \infty \right\}.$$

Démonstration. Pour $p = 2$. Soit $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ alors $\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $k < m - \frac{N}{2}$ alors, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \hat{u}(\xi) d\xi \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |\xi|^2\right)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |\xi|^2\right)^{k-m} d\xi.$$

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + |\xi|^2\right)^{k-m} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left(1 + |\xi|^2\right)^{m-k}} d\xi$ qui converge car $2(m-k) > N$. Donc $\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{k}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $\forall \alpha, |\alpha| \leq k \quad \mathcal{F}[D^\alpha u] \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Donc d'après les propriétés des transformées de Fourier, $D^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F} D^\alpha u]$ sont continues et bornées et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha u| \leq C \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq k.$$

□

Corollaire 3.3.2. *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Alors $W^{m,p}(\Omega) \subset \mathscr{C}^k(\Omega)$ avec injection continue pour $k < m - \frac{N}{p}$ où $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace $C^k(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme des dérivées d'ordre $\leq k$ sur tout compact de Ω.*

Démonstration. Soit $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\varphi u \in W^{m,p}(\Omega)$. D'où $\widetilde{\varphi u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ (le prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ de φu). Par conséquent

$$\widetilde{\varphi u} \in C^k(\mathbb{R}^N), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit K un compact de Ω. En prenant $\varphi = \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui figure dans la démonstration du lemme (3.3.1), on voit que $u \in C^k(K)$. □

On peut étendre ces résultats et démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Alors $W^{m,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ avec injection continue si $mp > N$.*

Corollaire 3.3.3. *Si $k < m - \frac{N}{p}$ alors $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ avec injection continue.*

Chapitre 4

Espaces des traces

Ce chapitre est consacré aux opérateurs de restrictions et de traces aussi bien sur $\mathbb{R}^N_+$ que sur le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert "assez"régulier. Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^N$ on peut calculer sa valeur, par exemple, sur l'hyperplan $x_N = 0$, $f(x', 0)$. Si f est définie seulement p.p sur $\mathbb{R}^N$, alors $f(x', 0)$ n'est plus définie car l'hyperplan $x_N = 0$ est de mesure nulle, et la valeur de f sur un ensemble de mesure nulle peut–être choisie arbitrairement. Cependant on peut lui attribuer un sens pour les fonctions de l'espace H^k, avec $k > \frac{1}{2}$. Comme application, une autre caractérisation des espaces $H^m_\circ(\Omega)$ est donnée après avoir établir les formules de Green. Les ouvrages suivants ont été utilisés [11], [10], [5] et [6].

4.1 Préliminaires

Notons d'abord que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ étant dense dans les espaces $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ il en est de même de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Soit $u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\hat{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)e^{-ix\xi}\, dx$ sa transformée de Fourier. Posons $\gamma_0 u(x) = u(x', 0) \equiv \omega(x')$ (on conserve les notations précédentes $x = (x', x_N), \xi = (\xi', \xi_N)$). $\omega(x')$ représente alors la valeur de $u(x)$ sur l'hyperplan $x_N = 0$. Autrement dit $\omega(x')$ est la restriction de $u(x)$ à $\mathbb{R}^{N-1}$. On dit aussi que $\omega(x')$ est la trace de $u(x)$ sur l'hyperplan $x_N = 0$. Cette notion coïncide donc, pour toute fonction continue, avec la valeur que la fonction prend pour $x_N = 0$.
Passons aux fonctions définies p.p. On sait que la transformée de Fourier est linéaire continue, et réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui–même :

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[u(x)\right]\right] = u(x); \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\xi)]] = \hat{u}(\xi),$$

où $\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\xi)] = \dfrac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$. Par conséquent l'opérateur $(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\mathcal{F}$ est unitaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ c'est à dire qu'il réalise un isomorphisme isométrique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui–même, lorsqu'il est muni de la structure pré–hilbertienne de L^2 car

$$\|\hat{u}\|^2_{L^2} = (2\pi)^N \|u\|^2_{L^2}.$$

La démonstration de la proposition suivante est une simple vérification.

Proposition 4.1.1. *Soit* $\varphi(x', x_N) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Alors*

$$\widetilde{\varphi}(x') = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x', x_N)\, dx_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1}).$$

Comme conséquence on obtient une formule pour le calcul de $\gamma_0\varphi(x)$.
Comme $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x', x_N) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\varphi}(\xi)\right) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N) e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N) e^{ix_N\xi_N}\, d\xi_N \right) d\xi'.
\end{aligned}$$

D'où $\varphi(x', 0) = \gamma_0\varphi(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^{N-1}} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N)\, d\xi_N \right) d\xi'$. Comme $\widehat{\varphi}(\xi', \xi_N) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors d'après la proposition précédente
$\widetilde{\psi}(\xi') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N)\, d\xi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$ et donc $\gamma_0\varphi(x)$ apparaît comme la transformée de Fourier inverse de la fonction $\widetilde{\psi}(\xi')$ en dimension $N-1$. Ce qui veut dire que la transformée de Fourier (en dimension $N-1$) de $\gamma_0\varphi(x)$ est $\widetilde{\psi}(\xi') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N)\, d\xi_N$.
On a aussi

Proposition 4.1.2. *Soit* $\varphi(x', x_N) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Alors*

1. $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N)\, d\xi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$.
2. $\mathcal{F}[\gamma_0\varphi(x)](\xi') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi', \xi_N)\, d\xi_N$.

Théorème 4.1.1. *Soit* $l > \frac{1}{2}$. *Alors il existe une et une seule application linéaire et continue de* $H^l(\mathbb{R}^N)$ *dans* $H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ *dont la restriction à* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *coïncide avec* γ_0. *Cette application sera notée encore par* γ_0.

Démonstration. Par densité il suffit de prouver que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors $\gamma_0 u$ vérifie

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\, \|u\|_{H^l(\mathbb{R}^N)}\ ,$$

où c est une constante indépendante de u. Soit $\gamma_0 u(x) = \omega(x')$, montrons que

$$(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}\left(l-\frac{1}{2}\right)} \widehat{\omega}(\xi') \in L^2(\mathbb{R}^{N-1}),$$

c'est à dire

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(1 + |\xi'|^2\right)^{l-\frac{1}{2}} |\widehat{\omega}(\xi')|^2\, d\xi' < \infty.$$

Comme $\quad \widehat{\omega}(\xi') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi', \xi_N)d\xi_N$, alors

$$\|\gamma_0 u\|^2_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(1+|\xi'|^2\right)^{l-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi', \xi_N)d\xi_N\right)^2 d\xi'.$$

$$|\widehat{\omega}(\xi')| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi', \xi_N)d\xi_N\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}}} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{l}{2}} |\widehat{u}(\xi', \xi_N)|\, d\xi_N.$$

Comme $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors $u \in H^l(\mathbb{R}^N)$ et donc $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{l}{2}} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. D'où

$$|\widehat{\omega}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(1+|\xi|^2\right)^l} d\xi_N \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^l |\widehat{u}(\xi', \xi_N)|^2\, d\xi_N.$$

Posons $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^l} d\xi_N \quad$ et $\quad t = \dfrac{\xi_N}{\sqrt{1+|\xi'|^2}} \quad$ alors

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(1+|\xi'|^2\right)^l} \frac{1}{(1+t^2)^l} \sqrt{1+|\xi'|^2} dt = \frac{1}{\left(1+|\xi'|^2\right)^{l-\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^l}.$$

Comme $l > \frac{1}{2}$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^l}$ converge (vers A) . Par suite

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (1+|\xi'|^2)^{l-\frac{1}{2}} |\widehat{\omega}(\xi')|^2\, d\xi' \leq \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^l |\widehat{u}(\xi', \xi_N)|^2\, d\xi_N d\xi'$$

c'est à dire

$$\|\omega(x')\|^2_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c^2 \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^N)} \quad \text{où} \quad c^2 = \frac{A}{(2\pi)^2}\,.$$

Le théorème est établi. $\square$

Définition 4.1.1. $\gamma_0 : H^l(\mathbb{R}^N) \to H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ *est appelée opérateur de trace ;* $\gamma_0 u$ *est appelée trace de* $u \in H^l(\mathbb{R}^N)$ *sur l'hyperplan* $x_N = 0$.

Remarques 4.1.1.

1. La condition $l > \frac{1}{2}$ est essentielle.
2. $\forall l > \frac{1}{2}$, $\exists\, c > 0\, \|\gamma_0 u\|_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\, \|u\|_{H^l(\mathbb{R}^N)}$.
3. La notion de trace qui intervient dans la pratique est celle sur la frontière du domaine.

4.2 Trace des fonctions de $H^l(\mathbb{R}^N_+)$ sur la frontière

Commençons par la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *L'application $\varphi(x', x_N) \to \varphi(x', 0)$ définie de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ se prolonge par continuité de $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. De plus*

$$\|u(x', 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N_+).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, il suffit de vérifier cette inégalité pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Posons $G(t) = |t|\, t, \quad t \in \mathbb{R}$ et $\omega(x_N) = G(\varphi(x', x_N))$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Par un raisonnement déjà utilisé dans le chapitre 3 on voit que $\omega'(x_N) = 2\,|\varphi(x', x_N)|\, \dfrac{\partial}{\partial x_N}\varphi(x', x_N)$ et donc $\omega(x) = -\displaystyle\int_{x_N}^{+\infty} \omega'(t)dt$.

D'où, $\quad \omega(x_N) = |\varphi(x', x_N)|\, \varphi(x', x_N) = -\displaystyle\int_{x_N}^{+\infty} 2\,|\varphi(x', t)|\, \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x', t)dt$. Par conséquent $|\omega(x_N)| = |\varphi(x', x_N)|^2 = \left| -\displaystyle\int_{x_N}^{+\infty} 2\,|\varphi(x', t)|\, \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x', t)dt \right|$. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz suivie de l'inégalité de Young on obtient :

$$|\varphi(x', 0)|^2 \leq \int_0^{+\infty} |\varphi(x', x_N)|^2\, dx_N + \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\varphi(x', x_N)\right|^2 dx_N\,.$$

D' où, en intégrant en x' sur $\mathbb{R}^{N-1}$, $\|\varphi(x', 0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}$. □

L'analogue du théorème précédent est donné par :

Théorème 4.2.1. *Soit $l > \frac{1}{2}$. Il existe une application linéaire et continue de $H^l(\mathbb{R}^N_+)$ sur $H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ unique prolongement de γ_0, définie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$. Elle est encore notée γ_0, et est appelée application trace de $H^l(\mathbb{R}^N_+)$ dans $H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$.*

Démonstration. D'après le théorème (3.2.1), il existe un opérateur $P : H^l(\mathbb{R}^N_+) \to H^l(\mathbb{R}^N)$ linéaire et continu tel que :

1. $Pu|_{\mathbb{R}^N_+} = u, \quad \forall u \in H^l(\mathbb{R}^N_+)$.
2. $\exists c : \forall k = 0, 1, ..., l : \quad \|Pu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq c\, \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^N_+)}$.

Soit $u \in H^l(\mathbb{R}^N_+)$ et $v = Pu \in H^l(\mathbb{R}^N)$. On a alors, d'après le théorème (4.1.1), $\gamma_0 v \in H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $\|\gamma_0 v\|_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c\, \|v\|_{H^l(\mathbb{R}^N)}$. D'autre part

$$\|v\|_{H^l(\mathbb{R}^N)} = \|Pu\|_{H^l(\mathbb{R}^N)} \leq c\, \|u\|_{H^l(\mathbb{R}^N_+)}\,.$$

Par conséquent, $\|\gamma_0 v\|_{H^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq K\, \|u\|_{H^l(\mathbb{R}^N_+)}\,.$ □

L'opérateur de trace γ_0 est unique comme prolongement linéaire et continu de $\gamma_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$. Ceci découle de la proposition précédente, puisque $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $H^l(\mathbb{R}^N_+)$.

Définition 4.2.1. *On pose $\gamma_0 u = \gamma_0 v (= \gamma_0 P u)$. $\gamma_0 u$ est alors appelé trace de la fonction u de $H^l(\mathbb{R}^N_+)$.*

4.3 Cas des ouverts réguliers

On se restreint aux ouverts bornés Ω réguliers de classe C^1 et aux fonctions de $H^1(\Omega)$. On sait alors que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ ($\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^l(\Omega)$). On peut alors généraliser les théorèmes précédents.
Soit $\Gamma = \partial\Omega$. Notons par $d\sigma$ la mesure induite sur Γ par la mesure de Lebesgue dx dans $\mathbb{R}^N$. Pour cette mesure $d\sigma$ on définit l'espace $L^2(\Gamma)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \equiv \left(\int_\Gamma |u(x)|^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

Avec les notations du chapitre 3, et le théorème de la partition de l'unité on vérifie que

$$u \in L^2(\Gamma) \Leftrightarrow \left(\widetilde{(\alpha_i u) \circ \varphi_i^{-1}} \right)(\xi', 0) \in L^2(\mathbb{R}^{N-1}), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, p,$$

où $\widetilde{(\alpha_i u) \circ \varphi_i^{-1}}$ est le prolongement par 0 de $(\alpha_i u) \circ \varphi_i^{-1}$ dans

$$\mathbb{R}^{N-1} \backslash \{\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}, |\xi'| < 1\},$$

i.e. en dehors de la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^{N-1}$. De plus

$$\left\{ \sum_{i=1}^{p} \left\| \widetilde{(\alpha_i u) \circ \varphi_i^{-1}} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme équivalente à $\|u\|_{L^2(\Gamma)}$ donnée ci –dessus (voir [11]).

Théorème 4.3.1. *L'application $\varphi \to \varphi_{|\Gamma} \equiv \gamma_0 \varphi$ définie de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Gamma)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ (notée encore γ_0).*

Démonstration. 1) il existe une constante $c > 0$ telle que quelle que soit

$$u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) : \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \le c \|u\|_{H^1(\Omega)} \, .$$

En effet, posons $v_i = (\alpha_i u) \circ \varphi_i^{-1} \quad i = 1, 2, ..., p$. On a alors, d'après la proposition (4.2.1)

$$\|\widetilde{v}_i(\xi')\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \le \|\widetilde{v}_i\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \, .$$

D'autre part, il existe $c_i > 0$ telle que $\|\widetilde{v_i}\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leq c_i \|u\|_{H^1(\Omega)}$, d'après les propriétés de φ_i et α_i. Par conséquent

$$\|\widetilde{v_i}(\xi')\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq c_i \|u\|_{H^1(\Omega)} .$$

Comme $\|\widetilde{v_i}(\xi')\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})}$ est équivalente à la norme de $L^2(\Gamma)$ il suffit de prendre

$$c = \left(\sum_{i=1}^{p} c_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

2) Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ le théorème est alors établi, par passage à la limite. □

Remarque 4.3.1. Les résultats précédents, concernant les théorèmes de prolongement de $H^1(\Omega)$ à $H^1(\mathbb{R}^N)$, de densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, la continuité de l'opérateur de trace $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ restent valables pour les ouverts bornés dits réguliers de classe C^1 par morceaux. On appelle ainsi un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ tel que

i) $\varphi_i(\Omega_i \cap \Omega) = B_1 \cap C_i$.

ii) $\varphi_i(\Omega_i \cap \Gamma) = B_1 \cap \partial C_i$.

où B_1 est la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^N$ et C_i est soit $\mathbb{R}^N_+$, soit un cône ouvert de $\mathbb{R}^N_+$, soit le complémentaire d'un cône fermé de $\mathbb{R}^N_+$.

4.4 Applications du théorème de trace

Comme application on caractérise les espaces $H_0^m(\Omega)$.

Théorème 4.4.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ régulier de classe C^1. Alors $H_0^1(\Omega) = Ker\,\gamma_0$, où $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ est l'opérateur de trace sur $\Gamma = \partial\Omega$. Autrement dit*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \gamma_0 u = u_{|\Gamma} = 0 \right\} .$$

Remarque 4.4.1. Ce théorème reste valable pour Ω régulier de classe C^1 par morceaux.

Démonstration. 1) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors, par définition, il existe $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. Comme $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\varphi_{n\,|\Gamma} = 0$ et donc, par continuité de l'opérateur de trace $\gamma_0 : \gamma_0\varphi_n \to \gamma_0 u$ dans $L^2(\Gamma)$. Par suite $\gamma_0 u = 0$.
2) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$, telle que $supp\, u$ compact dans $\mathbb{R}^N_+$ et $u(x', 0) = 0$. Montrons que $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N_+)$. Soit $\widetilde{u}$ le prolongement de u par 0 dans $\mathbb{R}^N \backslash \mathbb{R}^N_+$. Vérifions que $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$ $i = 1, 2, ..., N$ au sens des distributions, et donc $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Utilisons le résultat suivant dont la démonstration sera faite après celle du théorème.

Lemme 4.4.1 (Formules de Green)**.** *Soit $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$. Alors*

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = - \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx \quad i = 1, 2, ..., N-1.$

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial v}{\partial x_N}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} v\,dx - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x',0)v(x',0)\,dx'.$

Considérons alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Par suite

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle \widetilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx. \quad i = 1, \ldots, N.$$

Pour $i = 1, ..., N-1$, et d'après le lemme on a :

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx = \left\langle \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle.$$

i.e $\quad \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad i = 1, ..., N-1.$

Pour $i = N$ on a $\left\langle \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}, \varphi \right\rangle = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\,dx$ et donc, d'après le lemme

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x',0)\varphi(x',0)\,dx' = \left\langle \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_N}}, \varphi \right\rangle,$$

car $u(x',0) = 0,$ par hypothèse . Par conséquent, au sens des distributions, $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$; et $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc $u \in H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$.

3) Soit $v \in H^1(\Omega)$ telle que $v_{|\Gamma} = 0$. Par cartes locales adéquates et partition de l'unité on se ramène au cas précédent. □

Démonstration. du lemme.

1) Soit $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$

a)

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_0^{+\infty} dx_N \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-2}} d\check{x'}_i \int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx_i \right\}, \quad \forall i,\ i = 1, \ldots, N-1;$$

où $\check{x'}_i = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_{N-1})$. Comme

$$\int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i = uv\,|_{x_i=-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i = -\int_{\mathbb{R}} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i,$$

puisque $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, \ldots, N-1.$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial v}{\partial x_N} dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{+\infty} u \frac{\partial v}{\partial x_N} dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left\{ uv \,|_{x_N=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v \frac{\partial u}{\partial x_N} dx_N \right\} dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} v \frac{\partial u}{\partial x_N} dx - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', 0) v(x', 0) dx'.
\end{aligned}$$

2) Soit $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$. Il existe alors $(\varphi_n)_n, (\psi_m)_m \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ telle que $\varphi_n \to u$ et $\psi_m \to v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$. De plus d'après 1)

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \psi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} dx \quad \forall i, i = 1, \ldots, N-1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_N} dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \psi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_N} dx - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi_n(x', 0) \psi_m(x', x) dx'.$$

Comme $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, alors $\varphi_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $\dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
On a un résultat analogue pour ψ_m et v. Par suite

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (u - \varphi_n + \varphi_n) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} \left\{ (u - \varphi_n) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \varphi_n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right) + \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right\} dx.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

De même

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (v - \psi_m + \psi_m) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} \left\{ (v - \psi_m) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \psi_m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) + \psi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right\} dx.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

a) Supposons $i \leq N-1$ et ajoutons (4.1) et (4.2) membre à membre. On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_+} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} (u - \varphi_n) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} (v - \psi_m) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N_+} \varphi_n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} dx \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} \psi_m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(\varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} + \psi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Le dernier terme est nul. Par suite

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N_+} (u-\varphi_n)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |u-\varphi_n|^2\,dx \int_{\mathbb{R}^N_+} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

car $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $\varphi_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^N_+)$. De même $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+}(v-\psi_m)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \to 0$ pour $m \to +\infty$. En outre

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N_+} \varphi_n\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i}dx\right)\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |\varphi_n|^2\,dx \int_{\mathbb{R}^N_+} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i}\right|^2 dx\,.$$

Comme $\varphi_n \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ et donc dans $L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $\dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N_+)$ alors ce terme tend aussi vers 0. De même pour le terme restant. Par conséquent, par passage à la limite on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_{\mathbb{R}^N_+} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \qquad \text{pour } i \leq N-1.$$

b) Ecrivons les inégalités (4.1) et (4.2) pour $i = N$ et ajoutons membre à membre. On obtient la relation (4.3) avec $i = N$.
Le dernier terme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N_+}\left(\varphi_n\frac{\partial \psi_m}{\partial x_N}+\psi_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_N}\right)dx$ n'est pas nul. Il vaut :

$$-\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi_n(x',0)\psi_m(x',0)dx' = -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \gamma_0\varphi_n(x)\gamma_0\psi_m(x)dx' \to -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \gamma_0 u(x)\gamma_0 v(x)dx',$$

car l'opérateur γ_0 est continue de $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$ et donc $\gamma_0\varphi_n \to \gamma_0 u$, $\gamma_0\psi_m \to \gamma_0 v$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\gamma_0 u\gamma_0 v - \gamma_0\varphi_n\gamma_0\psi_m) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\gamma_0 u - \gamma_0\varphi_n)\gamma_0 v - \gamma_0\varphi_n\left(\gamma_0\psi_m - \gamma_0 v\right)\,.$$

D'où

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\gamma_0 u - \gamma_0\varphi_n)\gamma_0 v dx'\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\gamma_0 u - \gamma_0\varphi_n|^2\,dx' \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\gamma_0 v|^2\,dx' \to 0.$$

De même $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \gamma_0\varphi_n(\gamma_0\psi_m - \gamma_0 v)dx' \to 0$. Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial v}{\partial x_N}dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} v\frac{\partial u}{\partial x_N}dx = -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x',0)v(x'0)dx'.$$

Le lemme est complètement démontré. □

Désignons par ν la normale extérieure à Ω et soit $\nu_i = \cos\gamma_i$, γ_i étant l'angle que fait ν avec l'axe Ox_i. On peut alors généraliser le lemme (4.4.1) comme suit :

Théorème 4.4.2 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 par morceaux. Alors, pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v dx + \int_\Gamma uv\nu_i \, d\sigma, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Démonstration. Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ il existe $(\varphi_n)_n, (\psi_m)_m \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ telle que $\varphi_n \to u$ et $\psi_m \to v$ dans $H^1(\Omega)$. Pour les fonctions φ_n, ψ_m on applique la formule classique d'intégration par parties :

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\psi_m dx = -\int_\Omega \varphi_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma \varphi_n\psi_m\nu_i \, ds, \quad \forall i, i = 1, 2, \ldots, N.$$

Exactement comme dans la démonstration du lemme portant sur les formules de Green on procède à un passage à la limite dans la formule précédente pour établir le théorème. □

Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ régulier de classe C^1 par morceaux, et soit $u \in H^2(\Omega)$. On peut alors définir non seulement $\gamma_0 u = u_{|\Gamma}$ mais aussi $\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma$ car $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ et on sait que $\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Gamma)$. De plus la fonction $\nu_i\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Gamma)$ car $\nu_i \in L^\infty(\Gamma)$. Par conséquent la dérivée normale

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \sum_{i=1}^N \nu_i \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_\Gamma \quad \in L^2(\Gamma).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.4.3. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 par morceaux. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \\ & u & \to & (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \end{array}$$

où $\gamma_1 u = \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ *se prolonge en une application de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.*

Cependant si Ω un ouvert borné régulier de classe C^2 par morceaux ce prolongement est unique, car dans ce cas $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$. Par analogie si Ω un ouvert borné régulier de classe C^m par morceaux γ se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de $H^m(\Omega)$ dans $[L^2(\Gamma)]^m$. Comme conséquence on a la formule de Green.

Corollaire 4.4.1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 par morceaux de frontière Γ. Alors $\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma.$$

Démonstration. $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Comme $u \in H^2(\Omega)$ alors $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ et donc, d'après le théorème (4.4.2)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i d\sigma.$$

D'où

$$-\int_{\Omega} \Delta u . v dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma,$$

car $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i.$ □

Chapitre 5

Applications

Dans ce chapitre on expose, de manière gérérale, les méthodes hilbertiennes et la formulation variationnelle de certains problèmes aux limites. On étudie, de manière particulière, différents problèmes de Sturm–Liouville ainsi que le problème homogène de Neumann pour le laplacien. Les ouvrages [3] et [1] ont été utilisés pour la rédaction de ce chapitre.

5.1 Méthodes hilbertiennes. Formulation variationnelle

Soit V un espace de Hilbert réel.

Définition 5.1.1. *Soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme . On dit que*

i) a est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à u et v $(\forall u, v \in V)$.

ii) a est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

iii) a est elliptique ou cœrcive (ou encore définie positive) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 .$$

Lemme 5.1.1. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur V. Alors il existe un isomorphisme $A \in \mathscr{L}(V)$ tel que*

$$a(u,v) = (Au, v)_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Démonstration. Soit $u \in V$ fixé. L'application $v \mapsto a(u,v)$ est alors une forme linéaire et continue sur V. D'après le théorème de Riesz (cf. Rappels), il existe un élément unique $\tilde{u} \in V$ tel que $a(u,v) = (\tilde{u}, v)$.
Posons $\tilde{u} = Au$ et montrons que A est linéaire , continu et bijectif.
Pour tout $u_1, u_2, v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} (A(u_1+u_2), v)_V &= (\widetilde{u_1+u_2}, v)_V = a(u_1+u_2, v) \\ &= a(u_1, v)_V + a(u_2, v)_V = (Au_1, v)_V + (Au_2, v)_V \\ &= (Au_1 + Au_2, v)_V. \end{aligned}$$

D'où $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2$.
De même

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V \; (A(\lambda u), v)_V = a(\lambda u, v) = \lambda a(u, v) = \lambda (Au, v)_V.$$

i.e. $\quad A(\lambda u) = \lambda Au$. Donc A est linéaire.
L'opérateur A est continu. En effet, comme $a(.,.)$ est continue alors

$$\|Au\|_V = \sup_{v \neq 0} \frac{|(Au, v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \leq M \|u\|_V \,,$$

où M est une constante positive.
Puisque a est elliptique et A est continu, alors pour tout $u \in V$

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = (Au, u)_V \leq \|Au\|_V \|u\|_V \,,$$

i.e.

$$\|Au\|_V \geq \alpha \|u\|_V \;, \forall u \in V. \tag{5.1}$$

D'où $Au = 0 \Rightarrow u = 0$. Par conséquent A est injective. Pour montrer que A est surjectif i.e. $Av = Im\, A = \{A(x) \,/\, x \in V\} = V$ on utilise le théorème de la projection (cf. Rappels).
i) Soit $y \in \overline{AV} \Leftrightarrow \exists (v_n)_n \in V : Av_n \rightarrow y$. Par suite, d'après l'inégalité (5.1), on a

$$\|A(v_n - v_m)\|_V \geq \alpha \|v_n - v_m\|_V \,.$$

Donc $(v_n)_n$ est de Cauchy et par suite $(v_n)_n$ converge vers $v \in V$. Puisque A est continu alors $Av_n \rightarrow Av$. Par conséquent $y = Av$ i.e. $\overline{AV} \subset AV$. Donc AV est fermé.
ii) Soit $z \in (AV)^{\perp}$, on a :

$$0 = (Az, z) = a(z, z) \geq \alpha \|z\|^2$$

et donc $z = 0$, c'est à dire $(AV)^{\perp} = 0$. Par conséquent A est surjectif.
Donc A est une bijection de V sur V. Posons $u = A^{-1}v$. $\quad$ i.e. $\quad Au = v$.
L'inégalité (5.1) s'écrit

$$\left\|A^{-1}v\right\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|v\|_V \,, \quad \forall v \in V,$$

i.e. A^{-1} est borné, et donc continu puisqu'il est linéaire car A est linéaire. $\square$

On a le théorème suivant :

Théorème 5.1.1 (Lax–Milgram)**.** *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur V. Soit H un espace de Hilbert tel que $V \subset H$ avec injection continue. Alors l'équation $a(u, v) = (f, v)_H$, pour tout $v \in V$, admet une solution unique $u \in V$ pour chaque $f \in H$.*

Démonstration. La forme définie par :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & (f,v)_H \end{array}$$

est linéaire et continue. En effet, puisque par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que : $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$, $\forall v \in V$, alors on a

$$|(f,v)_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq C\|f\|_H \|v\|_V .$$

Donc, d'après le théorème de Riesz, il existe f_1 unique de V tell que

$$(f,v)_H = (f_1, v)_V, \quad \forall v \in V. \tag{5.2}$$

Comme précédement, on pose $f_1 = Jf$. L'équation (5.2) équivaut donc à

$$a(u,v) = (Jf,v)_V, \quad \forall v \in V.$$

i.e. d'après le lemme $(Au,v)_V = (Jf,v)_V, \quad \forall v \in V$ ou encore $Au = Jf = f_1$ qui admet une solution unique $u = A^{-1}f_1$. □

Dans beaucoup de cas $a(u,v) = (f,v)_H$ se ramène à un problème d'optimisation. Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique sur V.
Posons $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u)$, on a alors

Théorème 5.1.2. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue elliptique et symétrique sur V. Alors le problème de minimisation $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$ admet une solution unique qui est la solution du problème suivant :*
pour toute f donnée, trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V.$$

Démonstration. Soit $u \in V$ la solution de ce dernier problème. Cette solution existe et est unique d'après le théorème (5.1.1). Soit v quelconque dans V. On a alors

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - (f,u+v) \\ &= \frac{1}{2}\{a(u,u) + a(v,v) + 2a(u,v)\} - (f,u) - (f,v) \\ &= \frac{1}{2}\{a(u,u) + a(v,v)\} + (a(u,v) - (f,v)) - (f,u) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \ \text{ car } a(u,v) = (f,v). \end{aligned}$$

Comme $a(.,.)$ est elliptique, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall v \in V, \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$ et donc

$$J(u+v) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 .$$

On voit donc, en posant $u+v = u_1$, que pour toute $u_1 \in V$, $u \neq u_1 \Rightarrow J(u_1) > J(u)$. C'est à dire que u réalise le minimum de J. □

Remarque 5.1.1. Le théorème précédent explique pourquoi le problème de la résolution de l'équation $a(u,v) = (f,v)$ est appelé problème variationnel.
Pour ramener l'équation $a(u,v) = (f,v)_H, \quad \forall v \in V$ à l'équation $Au = f, \quad f \in H$ on utilise le théorème suivant :

Théorème 5.1.3. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur V. Soit H tel que $V \subset H$ avec injection continue et V dense dans H. Alors l'équation*

$$a(u,v) = (f,v)_H, \quad \forall v \in V, \tag{5.3}$$

équivaut à $Au = f$, pour tout $f \in H$, où A est un opérateur linéaire (non borné en général) de domaine $D(A) \subset V$.

Démonstration. Soit $D = \{u \in V : \exists C_u > 0 : \forall v \in V \quad |a(u,v)| \leq C_u \|v\|_H\}$ i.e.
$u \in D \Leftrightarrow v \mapsto a(u,v)$ est continue sur V pour la norme (induite) de H.
D est un sous–espace vectoriel non vide puisqu'il contient la solution de l'équation (5.3).
Soit $u \in D$. La forme linéaire continue $v \mapsto a(u,v)$ définie sur V peut, d'après le théorème de Hahn–Banach, être prolongée en une forme linéaire continue à tout H et, d'après le théorème de Riesz, c'est le produit scalaire d'un élément $\tilde{u} \in H$ avec v i.e. $\quad a(u,v) = (\tilde{u}, v)_H$.
Posant $\tilde{u} = Au$ on définit ainsi l'opérateur A de domaine $D(A) = D$. Si $u \in D$ est solution de l'équation (5.3) alors

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = (Au, v)_H = (f,v)_H,$$

et comme V est dense dans H alors $Au = f$. □

5.2 Problèmes de Sturm–Liouville

Le problème de Sturm–Liouville simplifié est étudié ici, à titre explicatif seulement.
1) Considérons le problème de Sturm–Liouville avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{sur } \Omega = (0,1); \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

où $f \in C^0(0,1)$.
Une solution classique de (5.4) est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ qui le vérifie.

Définition 5.2.1. *On appelle solution faible du problème (5.4) une solution au sens des distributions i.e. une fonction $u \in H^1_\circ(\Omega)$ qui doit vérifier*

$$\langle -u'', \varphi \rangle + \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et donc, par densité, pour tout $\varphi \in H^1_\circ(\Omega)$.

Proposition 5.2.1 (existence et unicité de la solution faible)**.** *Soit* $f \in L^2(\Omega)$*. Il existe alors un unique* $u \in H^1_\circ(\Omega)$ *vérifiant*

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx - \int_0^1 fv\,dx = 0 \quad \forall v \in H^1_\circ(\Omega). \tag{5.5}$$

Démonstration. Posons $H = L^2(\Omega), V = H^1_\circ(\Omega), (f,v)_{L^2(\Omega)} = \int_0^1 fv\,dx$ et

$$a(u,v) = (u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx.$$

Appliquons le théorème (5.1.1) : l'équation $a(u,v) = (f,v)_H$ admet pour tout $v \in H^1_\circ(\Omega)$ une unique solution $u \in H^1_\circ(\Omega)$, pour chaque $f \in L^2(\Omega)$. □

Remarque 5.2.1. Comme a est symétrique, alors on peut appliquer le théorème (5.1.2). La solution u réalise le minimum de $J(v)$ où

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{v'^2 + v^2\right\}\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Proposition 5.2.2. *Toute solution classique est une solution faible.*

Démonstration. Soit u une solution classique du problème (5.4). Multiplions la première équation de (5.4) par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et intégrons par parties. On obtient

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx + \int_0^1 u\varphi\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx,$$

i.e. $\int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi - f\varphi)\,dx = 0$ et donc, par densité, on obtient l'équation (5.5). □

Proposition 5.2.3. *Toute solution faible* $u \in H^1_\circ(\Omega)$ *est régulière en ce sens que* $u \in H^2(\Omega)$*. De plus si* $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *la solution faible* u *est dans* $C^2(\overline{\Omega})$*, et est alors la solution classique.*

Démonstration. 1) Soit $u \in H^1_\circ(\Omega)$ la solution faible. Alors $u \in H^2(\Omega)$.
En effet on a :

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 (f-u)\varphi\,dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

et donc, comme $f - u \in L^2(\Omega)$, $\quad u' \in H^1(\Omega)$. Par conséquent $u \in H^2(\Omega)$.
2) Si $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Posons $\omega = u'$, alors $\omega \in H^1(\Omega)$ et $\omega' \in C^0(\overline{\Omega})$. Donc $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$ comme connu. i.e. $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

3) Cette dernière solution faible $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est la solution classique
En effet
$$\int_0^1 (-u'' + u - f)\varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
alors, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on a : $-u'' + u - f \overset{p.p}{=} 0$ i.e. $-u'' + u = f$, grâce à la continuité. $\square$

Sturm Liouville (général)

2) Considérons le problème suivant :
$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f, & \text{sur } \Omega = (0,1); \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$
où les fonctions $p \in C^1(\overline{\Omega}), q, r \in C^0(\overline{\Omega}), f \in L^2(\Omega)$ sont données.
Ce problème se ramène, par changement de fonction, au cas avec $r = 0$ et pour lequel on peut appliquer le théorème (5.1.1) sans problème de minimisation. En effet, soit R une primitive de $\dfrac{r}{q}$. Posons $\zeta = e^{-R}$ et multiplions la première équation de (5.6) par ζ on obtient :
$$-\zeta p u'' - \zeta p' u' + \zeta r u' + \zeta q u = \zeta f,$$
ou encore
$$-(\zeta p u')' + \zeta q u = \zeta f \quad \text{car } \zeta' p + \zeta r = 0.$$
3) Considérons le problème de Sturm–Liouville avec des conditions aux limites de Neumann homogènes :
$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{sur } \Omega = (0,1); \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$
Ici $u(0)$ et $u(1)$ sont des inconnus et on ne peut pas travailler dans $H^1_\circ(\Omega)$ comme ci–dessus.

Proposition 5.2.4. *i) Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H^2(\Omega)$ unique solution du problème (5.7).*
ii) Si $f \in C^0(\overline{\Omega})$ alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Remarque 5.2.2. On peut préciser que u s'obtient par un problème de minimisation.

Démonstration. Soit u solution classique du problème (5.7). Alors
$$\int_0^1 u'\varphi' \, dx + \int_0^1 u\varphi \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$
et donc, par densité,
$$\int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On applique le théorème (5.1.1) avec $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ et
$a(u,v) = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx$. Il existe alors $u \in H^1(\Omega)$ unique tel que

$$a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme précédemment et de la même manière $u' \in H^1(\Omega)$. i.e. $u \in H^2(\Omega)$ (c'est la régularité de la solution faible). Retournons à la solution classique.
Soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution faible i.e.

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On a alors $u' \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, et donc u', v sont équivalentes à des fonctions absolument continues. De plus $(u'v)'$ existe presque partout et $(u'v)' \overset{p.p}{=} u''v + u'v'$.
D'où $\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u''v\,dx = u'v\,|_0^1$. Par conséquent, l'équation ci–dessus donne

$$\int_0^1 (-u''v + uv - fv)\,dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particulier, pour $v \in H^1_\circ(\Omega)$ on obtient :

$$\int_0^1 (-u''v + uv - fv)\,dx = 0, \quad \forall v \in H^1_\circ(\Omega),$$

et donc aussi quelle que soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'où $-u'' + u - f \overset{p.p}{=} 0$. Par suite
$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$. Donc $u'(0) = u'(1) = 0$. □

5.3 Problème de Neumann pour le laplacien

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{5.8}$$

où $\Gamma = \partial\Omega$ et f est donnée.
Une solution classique de ce problème est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ qui le vérifie.

Définition 5.3.1. *On appelle solution faible du problème (5.8) une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant :*

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (u,v)_{L^2(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Proposition 5.3.1. *Toute solution classique est solution faible.*

Démonstration. D'après la formule classique de Green, pour $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx.$$

$\left(\nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$. On voit que si u est solution classique alors u est d'abord dans $H^1(\Omega)$ et ensuite

$$\int_\Omega v(-\Delta u)\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx,$$

c'est à dire $\int_\Omega v(f-u)\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx,$ ou encore

$$\int_\Omega uv\, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$, alors le résultat précédent reste valable quelle que soit $v \in H^1(\Omega)$. □

Proposition 5.3.2 (Existence et unicité)**.** *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème de Neumann.*

Démonstration. On pose $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx$ et on applique le théorème (5.1.1) avec $V = H = H^1(\Omega)$. □

On peut étudier la régularité de la solution faible. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^2 (ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). On a alors (voir [1])

Proposition 5.3.3 (Régularité de la solution faible)**.** *Pour $f \in L^2(\Omega)$ la solution faible du problème de Neumann est dans $H^2(\Omega)$. De plus, si Ω est de classe C^{m+2} et $f \in H^m(\Omega)$ alors la solution faible du problème de Neumann est dans $H^{m+2}(\Omega)$. En particulier, si $m > \frac{N}{2}$ cette solution est dans $C^2(\overline{\Omega})$.*

Retournons à la solution classique. Soit u la solution faible du problème de Neumann de classe $C^2(\overline{\Omega})$ (c'est le cas de $m > \frac{N}{2}$). On a alors, d'une part, la formule classique de Green

$$\int_\Omega (\Delta u)v\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

et, d'autre part, $\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$ (elle est réalisée pour tout $v \in H^1(\Omega)$). D'où

$$\int_\Omega (-\Delta u)v\, dx + \int_\Omega uv\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, d\sigma = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{5.9}$$

Par conséquent si $v \in C^1_\circ(\Omega)$ (i.e. v à support compact) on obtient :

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in C^1_\circ(\Omega)$$

et donc $-\Delta u + u = f$ sur Ω. Par suite, la relation (5.9) donne

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}),$$

et donc $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$.

Remarque 5.3.1. Comme $a(u,v)$ est symétrique la solution u réalise, d'après le théorème (5.1.2), le minimum de

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2} a(v,v) - (f,v) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_\Omega (v(x))^2 \, dx \right\} - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2 \right) dx - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Conclusion.

L'objectif visé sur les espaces de Sobolev est achevée. Cette étude est utilisée pour la résolution des problèmes aux limites elliptiques, des problèmes d'évolution (chaleur, ondes,…) et d'autres problèmes. Elle est également utilisée dans la théorie des opérateurs pseudo–différentiels, et constitue la base essentielle pour introduire d'autres espaces fonctionnels.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, 1996.

[2] G.Choquet. *Cours d'analyse. Topologie. Tome 2,* Masson et cie, Paris, 1973.

[3] Y. Choquet–Bruhat. *Distributions. Théorie et problèmes.* Masson et cie, Paris, 1973.

[4] A.Kolmogorov, S.Fomine. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Mir, Moscou, 1977.

[5] J.L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Tome 2,* Dunod, Paris, 1968.

[6] V.Mikhaïlov. *Équations aux dérivées partielles.* Mir, Moscou, 1980.

[7] H. Reinhard. *Cours de mathématiques du signal.* Dunod, Paris, 1989.

[8] Laurent Schwartz. *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, Paris, 1970.

[9] Laurent Schwartz. *Analyse hilbertienne.* Hermann, Paris, 1979.

[10] Lacroix–Sonrier, Marie–Thérèse. *Distributions. Espaces de Sobolev. Applications.* Ellipses, Paris, 1998.

[11] Jean–Marie Thomas, Pierre–Arnaud Raviart. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivèes partielles.* Dunod, Paris, 2004.

[12] Patrick Witomski, Claude Gasquet. *Analyse de Fourier et applications.* Dunod, Paris, 2001.

[13] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis.* Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974.

[14] Claude Zuily. *Eléments de distributions et d'équations aux dérivèes partielles.* Dunod, Paris, 2006.