الجمـــــهوريـــــة الجـــزائريـــــة الديـــمقراطيـــــــــة الشـــعبيـــــــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعـالــي والـبـحـث الـعـلـمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيـــــة الـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT Sciences de la Matière

Mémoire de Master

Domaine : Sciences de la matière
Filière de science
Option : Physique Appliquée

Présente Par :
DASSAA Assia

THEME

Généralisation de l'équation de Dirac pour une théorie des champs à haute dérivative

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Nouri Abdallahe	*MCB*	*Président*
Souleh Kouider	*MAA*	*Examinateur*
Redjam Fathi	*MAA*	*Examinateur*
Seffai djamel	*MAA*	*Rapporteur*

Année Universitaire : 2018 - 2019

Remerciements

Je tenons tout d'abord à remercier Allah, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Je remercions l'ensemble des enseignants, qui nous ont

apporté leur aide et qui ont permis grâce à leur contribution à l'élaboration de ce mémoire.

Je remercions en particulier notre encadreur ***Seffai djamel,***

pour nous avoir honorésde son aide dans la direction de ce travail, pour sa confiance et ses conseils ainsi que ses motivations qui ont été pour je un précieux encouragement. Ainsi pour l'inspiration, ***Nouri Abdallahe***

et ***Souleh Kouider*** *et* ***Redjam Fathi*** *aux membres de jury*

Nos plus vifs remerciements s'adressent aussi à tout le cadre administratif Université Amar Telidji , "Département Sciences de la Matière", Ainsi que ...

dédicace

*Je dédié ce travail à Ma famille **Dassaa** aux personnes les plus chéres au monde mes chers parents :*

*A mon pére **Ahmed** : Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien étre . ce travail est fruit de tes sacrifices qui tu as consentis pour mon éducation et ma formation .*

*A ma trés chére mére **Zina ;** tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas ce ssé de m'encourager et de prier pour moi .et puisse dieu ,le tout puissant te préserver t'accorder santé , longue vie et bonheur .je dédie spécial Mon Amie Ames sœurs :**IMANE** et **SIHAM***

*Ames fréres : **DJALLOUL .HACEN.MOHAMD AMINE .MIHOBE .***

*A mes niece : **AHMED .ANESS .HADILE .SURIN .KHALEDE .LINA .AHMED .FARES .LAKHDER .FAROUKE .MOATASIMBALLEH .***

*A Mes amies :**khadidja .Hadjer . Adila** qui a partagée avec moi les moments difficiles de ce travail et son famille .A la promotion de master 2 physique applique .*

ASSIA

sommair

Introduction

Introduction

En physique théorique, la mécanique quantique relativiste est une théorie qui unifie les postulats de la mécanique quantique et le principe de relativité restreinte afin de décrire la dynamique quantique d'une particule relativiste, cette théorie décrit le monde physique à l'échelle atomique et subatomique dans d'un espace-temps (Minkowskien) dans lequel évoluent les champs de matières; l'unification de la mécanique quantique et la théorie de la relativité restreinte à aboutit a la construction de la théorie quantique des champs, et les théories de jauge modernes , qui ont permis d'unifier les trois interactions fondamentales faible, forte et Electromagnétique dans le cadre du modèle standard .

La mécanique quantique relativiste a ainsi débuté avec l'arrivée de l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière décrit une particule relativiste sans spin et présentait quelques difficultés d'interprétation notamment une densité de probabilité non positive. En 1927, Oskar Klein et Walter Gordon introduit l'équation qui porte son nom. Cependant, les physiciens faisant toujours face à d'autres problèmes, ils ont dû développer la théorie quantique des champs, dans laquelle la seconde quantification, où les champs obtenaient le statut d'opérateurs (contrairement à la position et la quantité de mouvement pour la première quantification), prend toute son importance.

L'équation de Dirac est un des piliers de la théorie quantique et du modèle standard de la physique des particules. Elle est écrite en 1928 par le physicien britannique Paul Dirac dans le but de généraliser la démarche de Schrödinger au cas relativiste, et d'éviter les paradoxes et les difficultés liés à l'équation de Klein-Gordon. Cette équation a pu remédier aux problèmes, même bien au-delà, elle s'est montrée capable de prédire des résultats physiques importants, à savoir, l'existence du positron, l'antiparticule de l'électron, le dédoublement des niveaux d'énergie de l'atome d'Hydrogène avec beaucoup plus de précision, etc ...Après la théorie de la "seconde quantification" des champs, elle est devenue l'´equation du champs spinoriel, indispensable pour étudier les processus de création et l'annihilation des particules fermioniques.

L'origine de l'´equation de Dirac vient évidement de la relation de dispersion énergie impulsion bien connue en relativité restreinte, mais surtout du génie de Dirac qui a pensé à une procédure exceptionnelle pour enfin écrire une équation linéaire du premier ordre par rapport au temps, invariante, et symétrique du point de vue relativiste.

Introduction

L’équation de Dirac joue un rôle fondamental en mécanique quantique relativiste, car c’est elle qui régit l’évolution dans le temps du système physique. Depuis la proposition de Dirac de cette équation, les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver des solutions analytiques pour différent système physique. A partir de cette solution on obtient le Spineur qui nous permet de l’identifier le système quantique relativiste étudié. dans le cadre de la théorie quantique relativiste à haute dérivative [1]

Dans le cadre de la théorie des champs à haut dérivative , la résolution des équations les plus fondamentales est un très nécessaire pour avoir l’influence des terme aux dérive supérieur sur les phénomènes fondamentaux. Par exemple La situation des particule relativiste et l’équation de Dirac, Les théories des champs avec les Lagrangiens à haut dérivative est une mode traditionnelle en physique, par exemple la généralisation de L’électrodynamique par Podolski [2,3,4] ; la gravité effective et les tachyons [5]. L'intérêt pour des systèmes mécanique aux dérive d'ordre supérieur est en vie jusqu'à aujourd'hui [6].

Dans ce travail, nous présentons un modèle généralise de l’équation de Dirac base sur la théorie des champs à haut dérivative comme une approche mathématique qui permit d’écrire les effets gravitationnelle en mécanique quantique. Notre objectif est la résolution analytique de l'équation de Dirac avec des termes à la dérive supérieure dans un espace-temps à quatre dimensions, Nous cherchons la modification de ces termes sur la fonction d’onde et les spineure. .

Ce mémoire est organisé à quatre chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, on a exposé le formalisme quadri dimensionnel de la théorie relativiste et les équation fondamentaux en mécanique quantique relativiste l’équation de Klein Gordon et Dirac et sont courant correspondants. Le deuxième chapitre est consacré à la formalisme Ostrogorski. Dans le troisième chapitre on a généralise l’équation de Dirac à partir une densité Lagrangienne à haut dérivative , sont dérive supérieur est limite par le terme $\frac{i\hbar c}{2}\beta\hbar^2\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\square\partial_{\mu}\psi\right)-\left(\square\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)\gamma^{\mu}\psi\right]$ puis en donne les solution dans l’espace des position ; le quatrième chapitre, est réservée à la solution de l’équation de Dirac généralise dans l’espace des impulsions et les spineure. A la fin, nous avons présenté nos conclusions.

Chapitre I : formulation de l’ équation de Dirac

chapitreI :formulation de l’équation de Dirac

I.1 Formalisme quadri-dimentionnel

Dans Cette section nous permet de mieux percevoir, les équations écrites en notations Covariantes. Toute les expressions figurants dans la suite sont écrites en posant : $\hbar = c = 1$

Le formalisme quadri-dimentionnel utilisé en relativité restreinte repose sur la similitude entre les notions de temps et d’espace. L’espace utilisé est celui de Minkowski. C’est un espace quadri-dimentionnel dans lequel le vecteur position (quadri vecteur espace-temps), par exemple, est représenté par [7] :

$$x^{\mu} \equiv (x^0, x^{\mathrm{i}}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), ou:\ x^0 = ct et x^{\mathrm{i}} = (x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z) \tag{1.1}$$

où μ = 0 , 1,2,3 et $i = 1{,}2{,}3$

Dans l’espace de Minkowski la longueur d’un quadrivecteur espace-temps est définie par :

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^{\nu} x^{\mu} = (x^0)^2 - (x^i)^2$$

Ou $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l’espace de Minkowski défini par[7] :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Les quadrivecteurs x^{μ} et x_{μ} sont appelés respectivement quadrivecteur contravariant (indice μ en haut) et quadrivecteur covariant (indice μ en bas). Ils sont relies l’un à l’autre par la relation:

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu}\, x^{\nu} = (x^0, -x^{\mathrm{i}})$$

A noter aussi qu’on peut définir une métrique inverse $g^{\mu\nu}$ telle que:

$g^{\mu\nu}\, g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}$ (symbole de Kronecker)

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il convient de distinguer entre vecteurs covariants (qui se transforment comme $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$), et vecteurs contravariants (qui se transforment comme $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$)

A^{μ}: vecteur contravariant (indice en haut)

A_{μ}: vecteur covariant (indice en bas)

Le passage d'un vecteur covariant à un vecteur contravariant se fait comme suit

$$\begin{cases} A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} \\ A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \end{cases} \quad (1.3)$$

Sommation d'Einstein La convention de sommation d'Einstein ou notation d'Einstein est un raccourci utile pour la manipulation des équations concernant des coordonnées, on somme sur tout les indices repetés Exemple

$A = a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$

Trivecteur, Quadrivecteur, Produit scalaire

$$A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, A), \quad (1.4)$$

$$A^1 = A_x, A^2 = A_y, A^3 = A_z. \quad (1.5)$$

Produit scalaire

$$A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu} = A^0 B_0 - AB \quad (1.6)$$

La norme deA^{μ}

$$A^{\mu} A_{\mu} = (A^{\circ})^2 - A. \quad (1.7)$$

Gradient, opérateurs différentiels on adopte les notations suivantes

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.8}$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right). \tag{1.9}$$

Gradient covariant

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right). \tag{1.10}$$

Gradient contravariant $\partial^\mu = g^{\mu\upsilon}\,\partial_\upsilon$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\,\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla\right). \tag{1.11}$$

Le dalembertien

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta = \square \tag{1.12}$$

En utilisant ∂_μ , l'équation de continuité densité-courant:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0$$

peut s'écrire sous la forme covariante:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Parmi les quadrivecteurs rencontres couramment en physique des particules on peutnoter les quadrivecteurs (système SN):

Energie –impulsion :

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p})$$

Potentiel :

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, A_x, A_y, A_z) = (\phi, \vec{A})$$

Courant :

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho, j_x, j_y, j_z) = (\rho, \vec{j})$$

I.2 Forme linéaire de l'équation de Klein-godron :

2.1 l'équation de Klein-Gordon :

L'année 1926 a connu un extra ordinaire développement, lors de la fusion de relativité restreinte et la mécanique quantique, qui était un centre d'intérêt de beaucoup de physiciens qui voulaient donner une allure relativiste à l'équation de Schrödinger. Le fruit de plusieurs tentatives, donna naissance à l'équation décrivant des particules massives de spin nul. Bien que les noms étaient nombreux cette équation porta celui de Klein-Gordon [7,9] considérée comme l'entrée vers la mécanique quantique relativiste [8,9].

Elle peut être obtenue, en utilisant l'équation relativiste donnant l'énergie d'une particule libre ($\hbar = c = 1$)

$$E^2 = P^2 + m^2$$

Via le principe de correspondance

$$(i\frac{\partial}{\partial t})^2\phi = [(-i\nabla)^2 + m^2]\phi$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = (-i\nabla)^2\phi(x.t) + m^2\phi, \tag{1.13}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t}\phi = (-\nabla^2 + m^2)\phi$$

qui s'écrit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - m^2\right)\phi = 0\,, \tag{1.14}$$

et sous la forme covariante

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi = 0. \tag{1.15}$$

C'est une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. Il faut donc connaitre simultanément ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ à l'instant initial pour queϕ , soit complètement déterminée à tout instant ultérieur.

Si on cherche les ondes planes solutions de l'équation (1.1 3)

$$\phi \propto e^{-i(Et-px)} \tag{1.16}$$

on trouve après substitution

$$E = \pm\sqrt{P^2 + m^2} \tag{1.17}$$

Il existe donc des solutions d'énergie négative $E = -\sqrt{P^2 + m^2}$, qui est une des difficultés de l'adoption de l'équation .

I.3 Le courant correspondant à l'équation de Klein- Gordon :

Pour pouvoir interpréter l'équation d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence ρ et une densité de courant $\vec{j}$ satisfaisant à l'équation de continuité.

On prend l'équation (1.1 5) et on multiplié par ϕ^* (à droite)

$$\phi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi\right) = 0 \tag{1.18}$$

On prend le conjugué de (1.1 5)et on multiplié par ϕ (à gauche)

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + m^2\phi^*\right)\phi = 0 \tag{1.19}$$

La soustraction membre à membre on obtient

$$\phi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu\phi\right) - \left(\partial_\mu\partial^\mu\phi^*\right)\phi = 0 \tag{1.20}$$

$$\partial_\mu[\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^*)\phi] = 0 \tag{1.21}$$

Donc

$$\begin{cases} \rho = \phi^*(\partial^0\phi) - (\partial^0\phi^*)\phi \\ \vec{j} = \phi^*\left(\partial^i\phi\right) - \left(\partial^i\phi^*\right)\phi\,; \quad i = 1,2,3 \end{cases} \tag{1.22}$$

En analysant l'expression de ρ et$\vec{j}$dans (1.22), une remarque s'impose ; la densité n'est pas définie positive, du fait qu'elle dépend d'une dérivée temporelle, qui présente une difficulté majeure qui vient s'ajouter à la présence des énergies négatives.

Pou retenir l'équation de Klein-Gordon, Pauli et Weisskopt [9,10] ont réinterprété le quadrivecteurj^u en multipliant par une charge $(e) \longrightarrow e\mathrm{j}^u$, ceux-ci représentent alors ej comme vecteur densité de courant, et e$\rho(r,t)$est la densité de charge électrique. Par contre, le nombre de particules ne se conserve pas, c'est à dire on peut toujours créer ou annihiler des paires de particules, phénomènes dont seule la théorie des champs quantique rend compte de manière fidèle, ρj peuvent être associés à la différence entre le nombre de charges positives, et le nombre de charges négatives, la théorie. Donc peut être vue, comme une théorie à une charge totale et non pas une théorie à une particule.

I.4 L'équation de Dirac :

Vu l'impossibilité de construire une densité de probabilité défnié positive à partir de l'équation de Klein-Gordon, les physiciens ont cherché à obtenir une équation du premier ordre selon les dérivées par rapport au temps et qui respecte l'invariance de Lorentz, et ce en partant de l'équation de Klein-Gordon. Ce développement était accompli par Dirac en 1928 [11,12]. La première étape consiste à poser un Hamiltonien linéaire dans les dérivées temporelles. Il est normal de supposer que la dépendance de l'hamiltonien selon les dérivées spatiales sera également linéaire.

Dirac essaya de trouver une équation qui possède la forme linéaire comme celle de Schrödinger

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \mathrm{H_s}\psi(x,t) \tag{1.23}$$

et à l'aide de l'expression relativiste de l'énergie

$$E^2 = P^2 + m^2$$

$$(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t})^2\psi = [(-i\nabla)^2 + m^2]\psi$$

On pose

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$H_D = \alpha(-i\nabla) + \beta m. \tag{1.24}$$

et on cherche $\boldsymbol{\alpha}$etβ

$$H_D^2 = [\alpha_\mathrm{i}(-i\nabla_i) + \beta m][\alpha_\mathrm{j}(-i\nabla_\mathrm{j}) + \beta m] \tag{1.25}$$

$$= \underbrace{\alpha_\mathrm{i}\alpha_\mathrm{j}(-i\nabla_i)(-i\nabla_\mathrm{j})}_{1} + \underbrace{\alpha_i\beta(-i\nabla_i)m + \beta\alpha_\mathrm{j}(-i\nabla_\mathrm{j})m + \beta^2 m^2}_{2}$$

Le première terme se laisse développer de la sorte

$$\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{j}}(-i\nabla_i)(-i\nabla_{\mathrm{j}}) = \alpha_i^2(-i\nabla_i)^2 + \alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{j}}(-i\nabla_i)(-i\nabla_{\mathrm{j}}) \quad (1.26)$$

Pour le second terme on trouve

$$\alpha_i\beta(-i\nabla_i)m + \alpha_{\mathrm{j}}\beta(-i\nabla_i)m = (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)(-i\nabla_i)m \quad (1.27)$$

En remplaçant l' expression des deux termes dans (1.25) on obtient

$$\alpha_i^2(-i\nabla_i)^2 + \frac{1}{2}(\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{j}} + \alpha_{\mathrm{j}}\alpha_{\mathrm{i}})(-i\nabla_i)(-i\nabla_{\mathrm{j}}) + (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)(-i\nabla_i)m + \beta^2m^2 \quad (1.28)$$

Par identification on aboutit au système suivant

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = 1 \\ \beta^2 = 1 \\ (\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{j}} + \alpha_{\mathrm{j}}\alpha_{\mathrm{i}}) = 0 \\ (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

La 3ème équation du système de conditions nous permet d'écrire

$$(\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{j}} + \alpha_{\mathrm{j}}\alpha_{\mathrm{i}}) = 0 \longrightarrow \{\alpha_i, \alpha_{\mathrm{j}}\} = 0 \quad (1.30)$$

Où$\{\alpha_i, \alpha_{\mathrm{j}}\}$est l'anti commutateur entre$\alpha_i et \alpha_{\mathrm{j}}$

Tandis que la première nous donne

$$\alpha_i^2 = 1, \alpha_i\alpha_i + \alpha_i\alpha_i = 2 \quad (1.31)$$

De ces deux équations (1.30) et(1.31) on déduit

$$\left.\begin{matrix} \{\alpha_{\mathrm{i}}, \alpha_j\} = 0 i \neq j \\ \{\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}}\} = 2 i = j \end{matrix}\right\} \quad (1.32)$$

On peut facilement vérifier que les matrices αet $\beta sont des matrices hermitiques$
e trace nulle, linéairement indépendantes et de dimension 4. On les définit comme suit

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Où$\boldsymbol{\sigma}$sont les matrices de Pauli et $\boldsymbol{I}$la matrice identité.

Finalement l'équation de Dirac prend la forme

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\alpha(-i\nabla) + \beta m)\psi \qquad (1.34)$$

I.5 Matrices $\boldsymbol{\gamma}$:

Introduisons les matrices $\boldsymbol{\gamma}$ de la manière suivante

$$\gamma^0 = \beta \text{ et } \gamma = \beta\alpha \longrightarrow \alpha = \beta\gamma = \gamma^0\gamma \qquad (1.35)$$

de l'équation (1.34)

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi} = (\alpha(-i\nabla) + \beta m)\psi$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\gamma^0\gamma(-i\nabla) + \gamma^0 m)\,\psi \qquad (1.36)$$

On multplie cette dernière équation parγ^0

$$\mathrm{i}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mathrm{i}}(-i\nabla_i) + \gamma^0\gamma^0 m\right)\psi$$

$$i\gamma^0\partial_0\psi = \left[i\gamma^i\partial_i + m\right]\psi \qquad (1.37)$$

A la fin on obtient

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \qquad (1.38)$$

Les matrices sont données par

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.39)$$

Les matrices γ verifient l'algèbre de Dirac

$$\{\gamma^\mu\,,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \qquad (1.40)$$

I.6 Le courant dans le formalisme de Dirac :

En suivant la même méthode, déjà utilisée dans le calcul du courant associé àl'équation de Schrödinger et à celle de Klein-Gordon, pour écrire l'équation de contnuité corréspondant à l'équation de Dirac, on reprend son Expression

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\alpha\nabla\psi + m\beta\psi \quad (1.41)$$

La formule de l'équation adjointe se met sous la forme

$$i\frac{\partial\psi^+}{\partial t} = i\alpha\nabla\psi^+ + m\beta\psi^+ \quad (1.42)$$

(1.41)-(1.42) nous donne l'équation de continuité

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) + i\nabla(\psi^+\alpha\psi) = 0 \quad (1.43)$$

La densité de probabilité est

$$\rho = \psi^+\psi\,. \quad (1.44)$$

Le courant de continuité est

$$\boldsymbol{j} = \psi^+\alpha\psi \quad (1.45)$$

I.7 Le courant de Dirac (formulation covariante)

On donne

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}, \psi^+ = ({\psi^+}^*_0, {\psi^+}^*_1, {\psi^+}^*_2, {\psi^+}^*_3)$$

On multiplie l'équation trouvée dans (1.38) par ψ^+

$$\psi^+(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi) = 0. \quad (1.46)$$

On multiplie le conjugué de (1.38) par ψ)

$$\left(-i\partial_\mu\psi^+(\gamma^\mu)^+ - m\psi^+\right)\psi = 0 \quad (1.47)$$

par soustraction on obtient

$$i\left[\psi^+\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\psi^+(\gamma^\mu)^+\psi\right] = 0 \quad (1.48)$$

Remarque :on est incapable d'écrire l'équation de continuité sous la forme covariante

Pour contourner cette subtilité, on définit l'adjoint du snipeur ψ comme suit

$$\overline{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0} \qquad , avec\gamma^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

Cette fois ci on multiplie l'équation (1.39) par $\overline{\psi}$ et on obtient

$$i\partial_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi + \partial_{\mu}\overline{\psi}\psi = 0 \tag{1.50}$$

L'équation vérifiée par l'adjoint spineur s'écrira

$$-i\overline{(\partial_{\mu}\psi)\gamma^{\mu}} - m\overline{\psi} = 0 \quad . \tag{1.51}$$

$$-i\partial_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu} - m\overline{\psi} = 0.$$

on multiplie l'équation trouvée dans (1.51) par ψ

$$i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \partial_{\mu}\overline{\psi}\psi = 0 \tag{1.52}$$

on soustrait (1.52) de (1.50) on aboutit à léquation de continuité

$$i\left[\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + (\partial_{\mu}\overline{\psi})\gamma^{\mu}\psi\right] = 0 \tag{1.53}$$

ou encore

$$i\partial_{\mu}\left[\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right] = 0$$

donc la densité de probabilité est

$$J^{0} = \overline{\psi}\gamma^{0}\psi = \psi^{+}\gamma^{0}\gamma^{0}\psi = \psi^{+}\psi \tag{1.54}$$

et le courant de continuité est

$$j^{i} = \overline{\psi}\gamma^{i}\psi \, , \qquad\qquad i = 1,2,3. \tag{1.55}$$

La densité de probabilité est définie positive

ChapitreII : formalisme d'Ostrogorski

Chapitre II : formalisme d' Ostrogradski

II.1-Formulation lagrangienne des champs :

Historiquement la formulation de Lagrange avait pour but de résoudre les problèmes posés par l'existence de certaines liaisons dans les systèmes mécaniques. Lorsque deux particules sont fixées aux extrémités d'une tige rigide, par exemple, leurs positions sont liées. De même il existe une liaison si des particules sont contraintes à se déplacer sur une surface. Les liaisons introduisent deux difficultés dans la formulation de Newton : les coordonnées ne sont plus indépendantes et les forces à l'origine de ces liaisons ne sont pas connues. La première difficulté est surmontée en introduisant les coordonnées généralisée standis que la seconde l'est en formulant le problème de manière à faire disparaitre les forces de liaison. Le formalisme Lagrangien permet de déterminer les équations de mouvement classiques de Lagrange pour des systèmes finis de particules, ou bien pour des systèmes à une infinité de degrés de libertés [13,14,15] (milieux continus).

II.2EquationsdeLagrange :

Pour un système fini de particules, caractérisé par les coordonnées généralisées $q_i$et les vitesses généralisées $\dot{q}_i$(i = 1, 2, ..., n, n étant le nombre de degré de liberté), les équations de mouvement classiques de Lagrange s'obtiennent en appliquant le principe de moindre action. Ce principe stipule que le mouvement du système est tel que l'action est stationnaire au voisinage de la trajectoire réelle. Cela signifie que pour tout système mécanique, caractérisé par un Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, il existe une intégrale définie par[14,15]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{2.1}$$

dite action, qui se voit minimisée pour un mouvement réel entre deux instants $t_1$et t_2.

Pour cela, la variation δSdoit être nulle

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] dt = 0 \tag{2.2}$$

Les variables $q_i(t)$ et $\dot{q}_i(t)$ ne sont pas indépendantes, car entre $t_1$et t_2, la connaissance de$q_i(t)$ détermine $\dot{q}_i(t)$. Pour éliminer $\delta\dot{q}_i$, nous intégrons par partie

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt=\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \tag{2.3}$$

Le premier terme du second membre est nul `a cause des conditions aux bornes,

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0 \tag{2.4}$$

En portant les équations (2.3) et (2.4), dans (2.2), nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt=0 \tag{2.5}$$

Comme les variations δq_iautour de la trajectoire réelle sont arbitraires, pour garantir $\delta S=0$, l'intégrant doit être nul

$$\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i=0 \tag{2.6}$$

Les δq_iétant indépendantes, on déduit les équations

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)=0 \tag{2.7}$$

appelées équations d'Euler-Lagrange

II.3 Impulsions généralisées :

Nous devons chercher la quantité qui se conserve dans le temps lorsque l'espace est homogène (en l'absence de champs extérieurs). Pour un système isolé, les propriétés mécaniques restent inchangées lors d'une translation rectiligne [14,15]

$$q\to\acute{q}=q+\epsilon \tag{2.8}$$

tout en gardant les vitesses $\dot{q}$invariantes. En imposant au Lagrangien de rester invariant,nous obtenons

$$\delta L=L(q+\epsilon,\dot{q},t)-L(q,\dot{q},t)=\frac{\partial L}{\partial q}\epsilon=0 \tag{2.9}$$

En tenant compte des équations de mouvement (2.7), l'équation (2.9) peut se mettre sous la forme

$$\delta L = \epsilon \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.10}$$

signifiant que la quantité

$$\mathcal{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cst \tag{2.11}$$

est une constante de mouvement. Elle représente l'impulsion généralisée totale du système. La composante Passociée à la coordonnée $q$est

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{2.12}$$

II.4Hamiltonien :

Nous devons chercher la quantité qui se conserve lorsque le temps est uniforme. Pour cela, exigeons au Lagrangien de rester invariant lors d'une translation dans le temps. Ce qui signifie que pour une variation dtdu temps [14,15]

$$t \to \acute{t} = t + dt \tag{2.13}$$

la variation du Lagrangien doit être nulle

$$\delta L = L(q, \dot{q}, t + dt) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial t} dt = 0 \tag{2.14}$$

Ainsi, nous obtenons la relation

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{2.15}$$

signifiant que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. On déduit alors

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \tag{2.16}$$

Ou l'équation (2.16) a été utilisée. D'après (2.12), (2.16) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}(p\dot{q} - L) = 0 \tag{2.17}$$

Ainsi la quantité définie par

$$H = p\dot{q} - L \tag{2.18}$$

est une constante de mouvement. On l'appelle Hamiltonien du système.

II.5 Formulation Hamiltonienne :

La formulation de Hamilton a le même contenu physique que celle de Lagrange. Elle fournit une base pour la formulation de Hamilton-Jacobi. Le système de $n$équations différentielles du second ordre de la formulation de Lagrange est remplacé par un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre. La formulation Hamiltonienne2 consiste à retrouver les équations de mouvement à partir d'un Hamiltonien qu'on pourra exprimer en fonction de q_i, $p_i$et t [14,15] grâce à l'équation (2.12) et (2.18)

$$H = H(q_1 \dots q_n ; p_1 \dots p_n ; t) \tag{2.19}$$

Calculons la différentielle totale exacte de l'Hamiltonien

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{2.20}$$

En utilisant l'expression de l'Hamiltonien donnée par (2.18), nous avons

$$dH = \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{2.21}$$

L'identification des deux équations (2.20) et (2.21), nous permet d'obtenir les équations suivantes

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.22}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.24}$$

Ce sont les équations d'Hamilton. Elles représentent les équations de mouvement du système. La paire (p_i, q_i) est dite canoniquement conjuguée.

II.6 Ostrogradski formalisme :

Nous considérons une théorie lagrangienne à haut dérivative pour un système fini de particules , décrit par variables $q(t)$ et les dérivés total des coordonnées généralisées $q(t)$Donc, l'état du système est défini par une forme globale de Lagrangien, qui d'écrit sous la forme [16]

$$L\left[q,\dot{q},\ddot{q},\dots,\overset{(m)}{q}\right] \tag{2.25}$$

Les équations de mouvement classiques de Lagrange s'obtiennent en appliquant le principe de moindre action.

$$\delta S = 0 \tag{2.26}$$

Donc, on peut déduire les équations d'Euler-Lagrange généralisées[16,17,18]

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial L}{\partial \overset{m}{q}} = 0 \tag{2.27}$$

le moment conjugué Pest une constante du mouvement équation (2.11). Donc, en utilisant aussi (2.8), (2.9)et (2.27)on obtient

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cdots - (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

Ainsi, l'équation (2.12) devient

$$P = P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Notons que P est appelé moment conjugué principale et les autres termes sont appelées les moments conjuguées secondaires

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}} + \cdots + (-1)^m \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

$$P_3 = \frac{\partial L}{\partial \dddot{q}} + \cdots - (-1)^m \frac{d^{m-3}}{dt^{m-3}}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

$$P_{i-1} = \frac{\partial L}{\partial \overset{(i-1)}{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(i)}{q}} + \cdots + (-1)^{i-1}(-1)^m \frac{d^{m-i+1}}{dt^{m-i+1}}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(i)}{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(i+1)}{q}} + \cdots + (-1)^i(-1)^m \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

$$P_m = \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}}$$

On peut réécrire moments conjuguées généralise d'une autre forme plus condensée

$$p_m \equiv \frac{\partial L}{\partial q}$$
$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} p_{i+1} (i = 1, \dots, m-1) \tag{2.28}$$

Et les m variables indépendantes

$$q_1 \equiv q$$
$$q_i \equiv \overset{(i-1)}{q} (i = 2, \dots, m) \tag{2.29}$$

Ainsi, L'Hamiltonien s'exprime comme suit [16,17,18]

$$H[q_i, p_i] = \sum_{i=1}^{m} p_i \, \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{i}} - L = \sum_{i=1}^{m-1} p_i q_{i+1} + p_m \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{m}} - L[q_1, \dots q_m ; \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{m}}] \tag{2.30}$$

II.7 Extension en théories des champs :

II.7.1 l'équations d'Euler-Lagrange généralisée :

Soit une densité lagrangienne à haut dérivative, nous avons considéré le lagrangien qui est une fonctions seulement de quantités de champ$\phi(t, x)$ et leur dérivés de premier et de second ordre de la champs et Jusqu'à l'ordre$m$. Maintenant, nous écrire la densité de lagrangien dans le cas générale par . [17,18].

$$\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi] \ , \tag{2.31}$$

On écrira alors l'action sous la forme

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu\nu} \phi, \partial_{\mu\nu a} \phi \dots). \tag{2.32}$$

Considérons une variation de ϕ:

$$\begin{cases} \phi \to \phi + \delta\phi \\ \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi) \\ . \\ . \\ . \\ \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi \to \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi + \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi) \end{cases}$$

Avec $\delta\phi = 0$ sur les bords. La variation de l'action sera alors

$$\delta S = \int d^4x \delta\mathcal{L}$$

$$\delta S = \int d^4x \left[\mathcal{L}\left(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi + \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)\right) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\right]$$

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)} \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)\right]$$

puis en intégrons par partie , Le résultat final implique équations d'Euler-Lagrange généralisée est s'écrit sous la fourme [16,17]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu} \phi)} + \dots + (-1)^m \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)} = 0$$

En peut déduire l'équations d'Euler-Lagrange dans le cas ordinaire au La densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi. \partial_\mu \varphi)$ qui est une fonctions seulement de quantités de champ$\phi(x)$ et leur dérivés de premier ordre de la champs , d'où L'équation d'Euler-Lagrange est donne par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) = 0 \tag{2.33}$$

II.8 formulation de l' Hamiltonien pour la théorie des champs à haut dérivative

Dans la formulation lagrangienne à haut dérivative de la mécanique classique, la dynamique d'une particule est définie au moyen de la fonction de Lagrange

$L\left[q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \overset{(m)}{q}\right]$. La quantités p, c'est l' impulsions conjuguées aux composantes du vecteur position q, sont alors données par[15_18]

$$p_m \equiv \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} p_{i+1} \qquad (i = 1, \dots, m-1)$$

La généralisation à un système de champs dans l'espace-temps, et à une densité lagrangienne avec des dérive supérieur $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi]$est immédiate. Les impulsions conjuguées au champ $\phi(x)$ sont [15_18]

$$\pi^{\mu_1 \cdots \mu_m} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_m}$$

$$\pi^{\mu_1 \cdots \mu_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} - \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{i+1}} \pi^{\mu_1 \cdots \mu_i \mu_{i+1}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_m} - \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{i+1}} \pi^{\mu_1 \cdots \mu_i \mu_{i+1}} (i = 1, \dots, m-1) . \tag{2.34}$$

Si elles n'ont pas aucune signification mécanique directe , ils sont toujours adaptés pour effectuer une transformation de Legendre.

Avec : $Q_1 = \partial_\mu \phi$; $Q_2 = \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi$; … ; $Q_m = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi$

la densité Hamiltonien est donne par

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \partial_\mu Q_1 + \pi^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} Q_2 + \cdots + \pi^{\mu_1 \cdots \mu_m} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} Q_m - \mathcal{L} . \tag{2.35}$$

Alors les équations canoniques sont

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\nu} \;, \quad \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\nu\rho}} \quad , \dots , \partial_\mu \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\mu \mu_1 \cdots \mu_m}} , \tag{2.36}$$

$$\partial_\mu \pi^\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \,, \partial_\nu \pi^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_\mu \phi} \,, \dots , \partial_\sigma \pi^{\sigma \mu_1 \cdots \mu_m} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} \;. \tag{2.37}$$

II.9 Tenseur énergie impulsion et loi de conservation

On considère des transformations infinitésimales [19,20]:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu$$

$$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \qquad (2.38)$$

alors la variation du champ s'écrit

$$\rightsquigarrow \delta\varphi(x) = \varphi(x') - \varphi(x) = a^\mu \partial_\mu \varphi(x) \qquad (2.39)$$

Et par analogie on a

$$\rightsquigarrow \delta\big(\partial_\nu \varphi(x)\big) = \big(\partial_\nu \varphi(x')\big) - \big(\partial_\nu \varphi(x)\big) = a^\mu \partial_\mu \big(\partial_\nu \varphi(x)\big) \qquad (2.40)$$

Nous pouvons maintenant écrire la variation de la densité de lagrangienne

$$\rightsquigarrow \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \qquad (2.41)$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\delta\partial_\nu\varphi \qquad (2.42)$$

On a :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\right)\delta\varphi$$

$$\Rrightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\delta\partial_\nu\varphi \qquad (2.43)$$

$$\Rrightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\delta\partial_\nu\varphi \quad (2.44)$$

$$\Rrightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\delta\varphi\right)(2.45)$$

Et On a

$$\Rrightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)}a^\mu\partial_\mu\varphi\right) = a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} = a_\nu g^{\mu\nu}\partial_\mu\mathcal{L} = a_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{L} \qquad (2.46)$$

et finalement

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial^\mu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}\right) = 0 \tag{2.47}$$

Donc , Le tenseur énergie-impulsion est une quantité conservé [19,20], noté

$$T^{\nu\mu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \partial^\mu \varphi\right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2.48}$$

Alor , en peut généralise Le tenseur énergie-impulsion dans le cas au la densité lagrangienne avec des dérive supérieur $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi]$, On peut donc identifier le tenseur énergie-impulsion, [17] par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_\alpha \phi)} \partial_{\alpha\nu} \phi - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_\alpha \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi)} \partial_{\alpha\beta\nu} \phi - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi} \partial_{\nu\beta} \phi + \partial_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2.49}$$

Il est contrôlé directement par la condition

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.50}$$

Chapitre III : solution de l’équation de dirac généralisée à haut dérivative

Chapitre III : solution de l'équation de Dirac généralisée à haut dérivative

De nos jours, les physiciens essaient reformuler la théorie des champs quantiques en présence de l'effet gravitationnelle, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non renormalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment la non localité qui ce traduire par une théorie des champs à haut dérivative, et il y a un espoir que cette approche peut être éliminée les divergences et qui rendent la théorie des champs quantique renormalisable [21].dans ce chapitre nous avons étudier l'influence des terme de haut dérivative sur l'équation de Dirac.

III.1 : Champ de Dirac

On assume que la densité lagrangienne, de l'équation de Dirac possé de la forme suivante

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi. \tag{3.1}$$

Avec $\overline{\psi} =^{Def} \psi^{+}\gamma^{0} et \gamma^{i} = \begin{cases} \gamma^{0} = \beta \\ \gamma^{i} = \beta\alpha^{i} \end{cases}$;comme on l'a définie un peu plus haut.

On peut aussi écrire la densité lagrangienne (3.1) comme suit

$$\mathcal{L} = \psi^{+}i\partial_{0}\psi + i\psi^{+}\gamma^{0}\gamma^{i}\partial_{i}\psi - m\psi^{+}\gamma^{0}\psi \tag{3.2}$$

ou encore

$$\mathcal{L} = \psi^{+}\left(i\partial_{0} + i\alpha^{i}\partial_{i} - m\beta\right)\psi. \tag{3.3}$$

En introduisant les matricesα^{i}et β à travers les matriceγ^{μ}la densité $\mathcal{L}$ prend une

femme simple, de laquelle on déduit immédiatement que c' est une bonne densité lagrangienne

pour le champ de Dirac on varie $\mathcal{L}$ par rapport à ψ^{+}nous donne

$$i\partial_{0}\psi = (i\alpha^{i}\partial_{i} + m\beta)\psi \equiv H_{D}\psi \tag{3.4}$$

De la même manière, en variant $\mathcal{L}$ par rapport à ψ

$$i\partial_{0}\psi^{+}(i\alpha^{i}\partial_{i} + m\beta) \equiv H_{D}^{+}\psi \tag{3.5}$$

oùH_{D} etH_{D}^{+}, sont respectivement l'ha miltonien et l'adjoint ha miltonien de Dirac.

Les équation du mouvement pour le champ ψ on a l'équation Euler-Lagrange est

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \tag{3.6}$$

En déduire l'équation de Dirac comme suit :

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{3.7}$$

Et pour le champ $\bar{\psi}$ on a :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \tag{3.8}$$

et en déduire l'équation de Dirac pour $\bar{\psi}$ comme suit :

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\bar{\psi} = 0 \tag{3.9}$$

III.2 : Solution

Nous examinons la solution de l'équation de Dirac libre (3.10)(c'est-à-dire l'équation de Dirac sans potentiel) et à nouveau l'écrire sous la forme

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i}\left(\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \hat{\beta}m_0c^2\right]\psi \equiv \widehat{H}_f\psi \tag{3.10}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}_f\psi\left[c\hat{\alpha}\,.\hat{p} + m_0c^2\hat{\beta}\right]\psi \tag{3.11a}$$

Ou l'équation de Dirac sous la forme couvriront est s'écrit :

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{3.11b}$$

Ses états stationnaires se retrouvent à leransatz [7,22].

$$\psi(x,t) = \psi(x)exp[-(i\,/\,\hbar)\varepsilon t] \tag{3.12}$$

Qui transforme (3.10) dans

$$\varepsilon\psi(x) = \boldsymbol{\widehat{H}_f\psi(x)} \tag{3.13}$$

Encore une fois la quantité εdécrit l'évolution temporelle de la d'état stationnaire $\psi(x)$ pour de nombreuses cations ,il est utile de diviser spineur à quatre composants en deux à deux composants spinors $\varphi et \chi$ c'est à dirce

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.14 a}$$

avec

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} et \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.14b}$$

En utilisant la forme explicite(3.18) pour les matrices αet β (3.13), vous pouvez écrire

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} . \hat{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$$

Ou

$$\varepsilon \varphi = c\hat{\sigma} . \hat{p} \chi + m_0 c^2 \varphi$$

$$\varepsilon \chi = c\hat{\alpha} . \hat{p} \varphi - m_0 c^2 \chi \tag{3.15}$$

États avec élan défini p sont

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} exp[(i/\hbar)p.x] \tag{3.16}$$

Les équations (3.15)sont transformés en les mêmes équation pour $\varphi_0 et \chi_0$ mais en remplaçant le $\hat{p}$ opérateurs par les valeurs propres p. Commande par rapport à φ_0 et χ_0 résultats dans le système d'équations

$$(\varepsilon - m_0 c^2) I \varphi_0 - c\hat{\sigma} . \mathcal{P} \chi_0 = 0 \tag{3.17}$$

$$-c\hat{\sigma} . \mathcal{P} \varphi_0 + (\varepsilon + m_0 c^2) I \chi_0 = 0$$

Ce système d'équations linéaire homogène pour $\varphi_0$et $\chi_0$ainsi de suite a des solutions non triviales que dans le cas d'un déterminant qui disparaît des coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m_0 c^2) I & -c\hat{\sigma} . \mathcal{P} \\ -c\hat{\sigma} . \mathcal{P} & (\varepsilon + m_0 c^2) I \end{vmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

Utiliser la relation :

$$(\hat{\sigma}\,.A)(\hat{\sigma}\,.B) = A.BI + i\hat{\sigma}\,.(A \times B) \tag{3.19}$$

L'équation (3.18) se transforme en

$$(\varepsilon^2 - {m_0}^2 c^4)I - c^2(\hat{\sigma}\,.\mathcal{P})(\hat{\sigma}\,.\mathcal{P})=0$$

$$\varepsilon^2 = {m_0}^2 c^4 + c^2 p^2$$

à partir de laquelle suit

$$\varepsilon = \pm E_p,\ E_p = \pm\sqrt{p^2 \mathrm{c}^2 + m_0^2 c^4} \tag{3.20}$$

Les deux singes du facteur évolution temporelle ε correspondent à deux type de solutions de l'équation de Dirac . Nous les appelons des solution positives et négatives , respectivement .De (3.17), pour e fixe

$$\chi_0 = \frac{c(\hat{\sigma}.p)}{m_0^2 c^2 + \varepsilon}\varphi_0 \tag{3.21}$$

Notons le deux spineur $\varphi_0$sous la forme

$$\varphi_0 = U = \binom{u_1}{u_2} \tag{3.22}$$

Avec la normalisation

$$U^+ U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$$

OuU_1, U_2 sont complexes . En utilisant (3.16) et (3.11) , nous obtenons l'ensemble complet de solutions libres positives et négatives de l'équation de Dirac

$$\psi_{p\lambda}(x,t) = N\begin{pmatrix} U \\ \frac{c(\hat{\sigma}.p)}{m_0 c^2 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} \frac{exp\left[i\left(p.x - \overbrace{\lambda E_p}^{\varepsilon} t\right)/\hbar\right]}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \tag{3.23}$$

Ici ,$\lambda = \pm 1$ caractérise les solutions positives et négatives avec le facteur d'évolution temporelle Le facteur $\varepsilon = \lambda E_p$de normalisation N est déterminé à partir de la condition

$$\int \psi_{p\lambda}^{\dagger}\,(x,t)\psi_{\acute{p}\acute{\lambda}}(X,t)d^3X = \delta_{\lambda\acute{\lambda}}\delta(p - \acute{p}) \tag{3.24}$$

Par conséquent ,

$$N^2\left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2(\hat{\sigma}.p)(\hat{\sigma}.p)}{(m_0c^2+\lambda E_p)^2} U\right) = 1$$

Ou en utilisant (3.15)

$$N^2\left(1 + \frac{\hat{\sigma}^2 p^2}{(m_0c^2+\lambda E_p)^2}\right) = 1$$

$$N = \sqrt{\frac{(m_0c^2+\lambda E_p)}{2\lambda E}} \tag{3.25}$$

III.3: Cas aux Troisième derivative

L'équation de Dirac pour une particule de spin-1/2 avec une masse , dans le cas ordinaire est une équation à la première dérive quadri dimensionnelles(∂_μ), dans sous titre en propose une équation en troisième ordre de la dérive quadri dimensionnelles, dans le cadre de la théorie du champs à haut dérivative en définir une lagrangienne sous la forme suivante [23]

$$\mathcal{L}(\psi,\bar{\psi},\partial_\mu\psi,\partial_\mu\bar{\psi}) = \frac{i\hbar c}{2}\{\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \beta\hbar^2[\bar{\psi}\gamma^\mu(\Box\partial_\mu\psi) - (\Box\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi]\} - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{3.26}$$

Ou : $\Box = \partial^\mu\partial_\mu$ est le d'Alembertian operateur

L'équation Euler-Lagrange généralisé pour le spineur$\bar{\psi}$ est défini par :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) + \Box\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\Box\bar{\psi})}\right) = 0 \tag{3.27}$$

En déduire l'équation de Dirac généralise, comme suit :

$$\left(i\hbar\gamma^\mu(1-\beta\hbar^2\Box)\partial_\mu - mc\right)\psi = 0 \tag{3.28}$$

Le terme $i\beta\hbar^3\Box\ \partial_\mu\psi$ c'est le terme de la généralisation, et dans le cas au $\beta \to 0$

En trouve l'équation ordinaire de Dirac ; et L'équation Euler-Lagrange généralisé pour le spineurψ est défini par :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) + \Box\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\Box\psi)}\right) = 0 \tag{3.29}$$

Puits en trouve l'équation de Dirac généralise pour le spineur adjoint $\bar{\psi}$, comme suit :

$$i\hbar\left[(1-\beta\hbar^2\Box)\partial_\mu\bar{\psi}\right]\gamma^\mu + mc\bar{\psi} = 0 \tag{3.30}$$

III.4 :Solutions de l'équation de Dirac modifiée

Dans cette section, la notation et les conventions sont les mêmes que dans [7,23]. Maintenant, nous allons obtenir le solutions d'ondes planes de l'équation de Dirac modifiée (3.28). L'équation de Dirac modifiée (3.28) peut être écrit comme :

$$\left[i\hbar(1+\beta\hbar^2\Box)\tfrac{\partial}{\partial t} + i\hbar c(1+\beta\hbar^2\Box)\hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{\nabla} - mc^2\hat{\boldsymbol{\beta}}\right]\psi = 0 \tag{3.31}$$

Où

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}^i = \hat{\boldsymbol{\beta}}\gamma^i \tag{3.32}$$

Dans l'équation (3.26), σ_i sont les matrices 2×2 de Pauli, Iest la matrice unités de 2×2 et 0 est la matrice nulle de 2×2. Pour résoudre l'équation (3.31), nous utilisons la fonction d'onde suivant

$$\psi(r,t) = \psi(r)exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\varepsilon t\right) \tag{3.33}$$

Ou ε décrit l'évolution temporel de l'etat stationner du spineur $\psi(x)$. si on substiture (3.33) dans (3.31), nous obtenons: [23].

$$\left[\left(1-\beta\tfrac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta\hbar^2\nabla^2\right)(\varepsilon+i\hbar c\hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{\nabla}) - mc^2\right]\psi(r) = 0 \tag{3.34}$$

Le spineur à quatre composants $\psi\,(x)$ se divise en deux spineurs à deux composantsϕ etχ, c.à.d.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Avec

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

En utilisant la forme explicite (3.32) pour les matrices $\hat{\alpha}^i$et $\hat{\beta}$, l'équation (3.35) peuvent être écrites comme

$$\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta\hbar^2\nabla^2\right)\varepsilon\phi=\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta\hbar^2\nabla^2\right)c\sigma\frac{\hbar}{i}\nabla\chi+mc^2\phi \tag{3.37}$$

$$\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta\hbar^2\nabla^2\right)\varepsilon\chi=\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta\hbar^2\nabla^2\right)c\sigma\frac{\hbar}{i}\nabla\phi-mc^2\chi \tag{3.38}$$

Si nous substituons la proposition suivant

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_0\\ \chi_0\end{pmatrix}exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}\right) \tag{3.39}$$

dans les équations (3.38) et (3.39), nous obtiendrons

$$\left[\varepsilon\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)-mc^2\right]\phi_0-c\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)(\sigma p)\chi_0=0 \tag{3.40}$$

$$-c\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)(\sigma p)\phi_0+\left[\varepsilon\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)+mc^2\right]\chi_0=0 \tag{3.41}$$

on a donc un système d'équations linéaire homogène pour $\phi_0$etχ_0, et dans le cas des solutions non trivial, le déterminant des coefficients, est donne par : [23].

$$\begin{vmatrix}\left[\varepsilon\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)-mc^2\right]I & -c\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)(\sigma p)\\ -c\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)(\sigma p) & \left[\varepsilon\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)+mc^2\right]I\end{vmatrix}=0 \tag{3.42}$$

Utiliser l'identité

$$(\sigma.A)(\sigma.B)=A.BI+i\sigma.(A\times B) \tag{3.43}$$

l'équation (3.42) se transforme en

$$(\varepsilon^2-c^2p^2)\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)^2-m^2c^4=0 \tag{3.44}$$

Nous observons que pour $\beta\ \rightarrow\ 0$, l'équation (3.44) conduit au résultat conventionnel

$$\varepsilon^2=c^2p^2+m^2c^4 \tag{3.45}$$

de qui suit

$$\varepsilon=\pm E_p\qquad,\ E_p=\sqrt{p^2\mathrm{c}^2+m^2c^4} \tag{3.46}$$

comme cela devrait être. Les deux signes du facteur d'évolution temporelle ε dans (3.46) correspondent à des solutions d'énergie positive et négative, respectivement ; de l'équation de Dirac. Mais pour le cas $\beta \neq 0$,et en négliger les termes d'ordre β^2nous fournit deux ensembles de résultats[,23].

$$\varepsilon_- = \pm E_p{}^{(-)} \ , \ E_p{}^{(-)} = \sqrt{p^2 c^2 + m_-^2 c^4} \tag{3.47}$$

$$\varepsilon_+ = \pm E_p{}^{(+)} \ , \ E_p{}^{(+)} = \sqrt{p^2 c^2 + m_+^2 c^4} \tag{3.48}$$

où les masses m_-et m_+ sont des masses effectives non dégénérées, et définis comme

$$m_- = \frac{1}{2\sqrt{2\beta}\,c}\left[\sqrt{1 + 2\sqrt{2\beta}mc} - \sqrt{1 - 2\sqrt{2\beta}mc}\right] \tag{3.49}$$

$$m_+ = \frac{1}{2\sqrt{2\beta}\,c}\left[\sqrt{1 + 2\sqrt{2\beta}mc} + \sqrt{1 - 2\sqrt{2\beta}mc}\right] \tag{3.50}$$

Du point de vue de la mécanique quantique, (3.49) et (3.50) indiquent que notre champ de spineur modifié est associé à des particules ayant les masses effectives m_-et m_+. Et Pour éviter les particules de masse complexe, (3.49) et (3.50) on exigent que

$$\beta < \frac{1}{8m^2c^2} \tag{3.51}$$

il faut noter qu'à $\beta = \frac{1}{8m^2c^2}$ les deux masses effectives sont égales, c'est-à-dire$m_- = m_+ = m\sqrt{2}$. de l'équation (3.41) nous obtenons

$$\chi_0 = \frac{c\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)(\sigma p)}{\varepsilon\left(1-\beta\frac{\varepsilon^2}{c^2}-\beta p^2\right)+mc^2}\phi_0 \tag{3.52}$$

Si on note le spineur à deux composants $\phi_0$sous la forme

$$\phi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

avec la condition de normalisation $U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$ et en utilisant (3.34), (3.36), (3.40) et (3.52), nous obtiendrons deux ensembles complets des solutions d'énergie positives et négatives du modèle modifié. Pour l'équation de Dirac généralisé en tant que

$$\Psi_{p\lambda}^{(\mp)}(r,t) = \frac{N^{\mp}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} U \\ \dfrac{c\left(1-\beta\dfrac{{E_p}^{(\mp)^2}}{c^2}+\beta p^2\right)(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p})}{\lambda {E_p}^{(\mp)^2}\left(1-\beta\dfrac{{E_p}^{(\mp)^2}}{c^2}+\beta p^2\right)+mc^2} U \end{pmatrix} exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p.r - \lambda {E_p}^{(\mp)} t\right)\right) \tag{3.50}$$

ou$\lambda = \pm 1$ est caractérise les solutions d'énergie positive et négative pour le Facteurs dévolution du temps $\mathcal{E}_{\mp} = \lambda E_p^{(\mp)}$. Les facteurs de normalisation $N^{(\mp)}$dans (3.50) sont

déterminés à partir des conditions

$$\int \Psi_{p\lambda}^{(\mp)+}(r,t)\Psi_{\acute{p}\acute{\lambda}}^{(\pm)}(r,t)d^3r = \delta_{\lambda\acute{\lambda}}\delta(p-\acute{p}) \tag{3.51}$$

En utilisant les équations (3.54) et (3.55) avec l'identité (3.43), les facteurs de normalisation $N^{(\mp)}$sera déterminé comme

$$N^{(\mp)} = \left\{\frac{\left[\lambda {E_p}^{(\mp)}(1-\beta m_{\mp}^2 c^2)+mc^2\right]^2}{\left[\lambda {E_p}^{(\mp)}(1-\beta m_{\mp}^2 c^2)+mc^2\right]^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2 (1-\beta m_{\mp}^2 c^2)^2}\right\}^2 \tag{3.52}$$

Si on étend le paramètre de masse m_-en (3.49) au premier ordre enβ nous obtiendrons...

$$m_- = m + \beta m^3 c^2 \tag{3.53}$$

En insérant (3.57) dans (3.47) nous trouvons la relation suivante

$$\left({E_p}^{(-)}\right)^2 = m^2c^4 + c^2\boldsymbol{p}.\boldsymbol{p} + 2\beta m^4 c^6 \tag{3.54}$$

qui est une modification de la relation d'Einstein pour une particule libre en relativiste. Après simplification, le spineur de Dirac généralisé $\Psi_{p\lambda}^{(-)}(x,t)$ dans (3.54) peut être s'écrit au premier ordre en β comme

$$\Psi_{p\lambda}^{(-)}(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\lambda {E_p}^{(-)}(1-\beta m^2c^2)+mc^2}{\lambda {E_p}^{(-)}(1-\beta m^2c^2)}} \begin{pmatrix} U \\ \dfrac{c(1-\beta m^2c^2)(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p})}{\lambda {E_p}^{(-)}(1-\beta m^2c^2)+mc^2} U \end{pmatrix} exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p.r - \lambda {E_p}^{(-)} t\right)\right) \tag{3.55}$$

où $E_p^{(-)}$;a été donné en (3.58). Il est clair que pour $\beta \to 0$ le spinor de Dirac généralisé$\Psi_{p\lambda}^{(-)}(x,t)$ (3.59) sera converti en spineur classique Ψpλ (r, t) pour une particule libre en mécanique quantique relativiste[23], c'est-à-dire

$$\Psi_{p\lambda}(r,t) = lim_{\beta\to 0}\,\Psi_{p\lambda}^{(-)}(r,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\lambda E_p + mc^2}{2\lambda E_p}}\begin{pmatrix} U \\ \frac{c(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p})}{\lambda E_p + mc^2}U \end{pmatrix} exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(p.r - \lambda E_p t\right)\right) \quad (3.60)$$

Pour les petites β, la masse effective m_+ (3.51) se réduit à

$$m_+ = \frac{1}{\sqrt{2\beta}\,c} - \frac{m^2}{2}\sqrt{2\beta}c \qquad (3.61)$$

qui diverge pour $\beta \to 0$.

Nous avons donc deux particules massives dans notre théorie, une avec la masse habituelle $m(lim_{\beta\to 0}\, m_-)$ et l'autre une particule de masse lourde $\frac{1}{\sqrt{2\beta c}}(lim_{\beta\to 0}\, m_+)$ ce qui conduit à un nombre indéfini métrique dans notre modèle. Jusqu'à ce que toutes les énergies du système restent en dessous de la production seuil du Particule $\frac{1}{\sqrt{2\beta c}}$-mass, la métrique indéfinie n'entre pas et la théorie obéit à toutes les exigences physiques telles que l'unitarité. Le spineur généralisé de Dirac$\Psi_{p\lambda}^{(+)}(x,t)$ dans (3.54), qui décrit une particule de masse efficace m + est entièrement nouveau et ne présente pas de contrepartie dans l'équation de Dirac conventionnelle.

Chapitre IV : solution de l’équation de Dirac généralisée à haut dérivative dans l’espace des impulsions

Chapitre IV : solution de l'équation de Dirac généralisée à haut dérivative dans l'espace des impulsions

Après avoir rappelé quelque propriétés de l'équation de Dirac ordinaire valable dans le cadre de la relativité restreinte, il est naturel de chercher une équation de Dirac déformée qui va jouer un rôle similaire en théorie des champs a haut dérivative

IV.1 La solution dans l'espace des impulsion

En a déduire l'équation de Dirac généralise, eq (3.24) est donne par [23] :

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}(1-\beta\hbar^{2}\Box)\partial_{\mu}-mc\right)\psi=0 \tag{4.1}$$

Cette équation est l'équation de Dirac déformée décrivant une particule libre dans l'espace des impulsions, écrite pour la première fois par S. K. Moayedi et ses collaborateurs [23]. On remarque que quand $\beta \to 0$, cette équation tend vers l'équation de Dirac (1.38) de la relativité restreinte.

Nous pouvons donc trouver des fonctions propres communes à ces deux opérateurs. On sait que les fonctions propres de l'opérateur impulsion sont des ondes planes, pour cette raison cherchons des solutions de l'équation (4.1). Dans cette chapitre en cherche des solution d'ondes planes sous la forme [20,22] :

$$\psi^{+}(x)=u(p)e^{\frac{-i}{\hbar}px} \tag{4.2}$$

Pour décrire des particule à une énergie positive, et pour les particule à une négative en prendre des solution sous la forme :

$$\psi^{-}(x)=v(p)e^{\frac{i}{\hbar}px} \tag{4.3}$$

Où $u\,(p)$ et $v(p)$ sont des spineurs à quatre composantes indépendantes des coordonnéesx_{μ}. Autrement dit

$$u(p)=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\ v(p)=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Avec :

$\mu_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;$\mu_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;$\nu_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;$\nu_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

d'ou l'on en déduit que le spineur $u(p)$ doit être une solution du système d'équations algébrique

$$\left[(1-\beta p^2)\gamma^\mu p_\mu - mc\right]u(p) = 0 \tag{4.5}$$

$$\left[(1+\beta p^2)\gamma^\mu p_\mu + mc\right]\nu(p) = 0 \tag{4.6}$$

Rappelons que

$$p.x = p_\mu x^\mu = p_0 x^0 - \vec{p}.\vec{x} = \frac{E}{c}ct - \vec{p}.\vec{x} = Et - \vec{p}.\vec{x} \tag{4.7}$$

La compensation dans la formule de Dirac et après simplification nous trouvons

$$\left[(1-\beta p^2)\gamma^0 E - (1-\beta p^2)\gamma^i p_i c - mc^2\right]u(p) = 0 \tag{4.8}$$

$$\left[(1+\beta p^2)\gamma^0 E + (1+\beta p^2)\gamma^i p_i c + mc^2\right]\nu(p) = 0 \tag{4.9}$$

Il s'agit de l'équation de Dirac écrite dans l'espace des impulsions qui décrit une particule libre. C'est un système algébrique homogène de quatre équations, ce qui veut dire que le déterminant de la matrice $(1-\beta p^2)\gamma^\mu p_\mu - mc$ doit être nul pour avoir des solutions différentes de zéro. On ne va pas résoudre directement ce système, on va faire plutôt appel à une transformation spéciale qui fera l'objet du paragraphe qui viendra. Pour l'instant, en regroupant les formules on obtient

$$\begin{pmatrix}(1-\beta p^2)E - mc^2 & -(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i \\ (1-\beta p^2)c\sigma_i p_i & -(1-\beta p^2)E - mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

$$\begin{pmatrix}(1+\beta p^2)E + mc^2 & -(1+\beta p^2)c\sigma_i p_i \\ (1+\beta p^2)c\sigma_i p_i & -(1+\beta p^2)E + mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\\nu_2\end{pmatrix} = 0 \tag{4.11}$$

il est possible d'en déduire le système suivant

$$(1-\beta p^2)E - mc^2 u_1 - (1-\beta p^2)c\sigma_i p_i u_2 = 0 \tag{4.12}$$

$$(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i u_1 - (1-\beta p^2)E - mc^2 u_2 = 0 \tag{4.13}$$

$$(1+\beta p^2)E + mc^2 v_1 - (1+\beta p^2)c\sigma_i p_i v_2 = 0 \tag{4.14}$$

$$(1+\beta p^2)c\sigma_i p_i v_1 - (1+\beta p^2)E + mc^2 v_2 = 0 \tag{4.15}$$

Afin de réécrire L'expression du spineur $u(p)$ associé à l'énergie positive

$$u_2 = \frac{(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1-\beta p^2)E - mc^2} u_1 \tag{4.16}$$

C'est la relation (4.12) nous concluons

$$u_1 = \frac{(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1-\beta p^2)E - mc^2} u_2 \tag{4.17}$$

Et De même pour le spineur $v(p)$ associé à l'énergie négative

$$v_1 = \frac{(1+\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1+\beta p^2)E + mc^2} v_2 \tag{4.18}$$

$$v_2 = \frac{(1+\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1+\beta p^2)E + mc^2} v_1 \tag{4.19}$$

Une solution d'énergie positive est donnée par

$$\psi^+ = u(p)e^{-\frac{i}{\hbar}}px = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}}px$$

$$\psi^+ = N \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1-\beta p^2)E - mc^2} u_1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}}px$$

La première solution que nous choisissons est$u_1 = \binom{1}{0}$ en utilisant la relation (4.16) trouvée

$$u_2 = \frac{(1-\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \binom{1}{0} \tag{4.20}$$

D'où

$$\overrightarrow{\sigma_i}\overrightarrow{p_i} = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z$$

$$\overrightarrow{\sigma_i}\overrightarrow{p_i} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix}$$

En utilisant

$p_\pm$=$p_x \pm ip_y$

l'équation (4.20)devient :

$$u_2 = \frac{(1-\beta p^2)c}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1-\beta p^2}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \begin{pmatrix} P_z C \\ P_+ C \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Donc la fonction d'onde s'écrite

$$\psi_1^+ = \sqrt{\frac{(1-\beta p^2)E - mc^2}{2(1-\beta p^2)E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(1-\beta P^2)P_Z C}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \\ \frac{(1-\beta P^2)P_+ C}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \tag{4.22}$$

La deuxième solution est le$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en utilisant la relation (4.16) on trouve

$$u_2 = \frac{(1-\beta p^2)c}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1-\beta p^2}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \begin{pmatrix} P_- C \\ -P_z C \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Et à partir de

$$\psi_2^+(x) = \sqrt{\frac{(1-\beta p^2)E - mc^2}{2(1-\beta p^2)E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(1-\beta P^2)P_- C}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \\ \frac{-(1-\beta P^2)P_z C}{(1-\beta p^2)E - mc^2} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \tag{4.24}$$

Et une solution d'énergie négative est donnée par :

La première solution que nous choisissons est$\nu_2 = \binom{1}{0}$ et en utilisant la relation (4.18), nous trouvons

$$\nu_1 = \frac{(1+\beta p^2)c\sigma_i p_i}{(1+\beta p^2)E + mc^2}\nu_2$$

$$\nu_1 = \frac{(1+\beta p^2)c}{(1+\beta p^2)E+mc^2}\begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix}\binom{1}{0} = \frac{(1+\beta p^2)}{(1+\beta p^2)E+mc^2}\binom{p_z c}{p_+ c} \quad (4.25)$$

Et à partir de là

$$\psi_1^-(x) = \sqrt{\frac{(1+\beta p^2)E+mc^2}{2(1+\beta p^2)E}}\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta p^2)p_z c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ \frac{-(1+\beta p^2)p_+ c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad (4.26)$$

La deuxième solution nous choisissons$\nu_2 = \binom{0}{1}$ et en utilisant la relation (4.18) nous trouvon

$$\nu_2 = \frac{(1+\beta p^2)c}{(1+\beta p^2)E+mc^2}\begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix}\binom{0}{1} = \frac{(1+\beta p^2)}{(1+\beta p^2)E+mc^2}\binom{p_- c}{-p_z c} \quad (4.27)$$

Et à partir de là

$$\psi_2^-(x) = \sqrt{\frac{(1+\beta p^2)E+mc^2}{2(1+\beta p^2)E}}\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta p^2)p_- c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ \frac{-(1+\beta p^2)p_z c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad (4.28)$$

IV.2 Les relations d'ortho-normalité

Considérons tout d'abord les solutions à énergies positives. Posons :

$$u(p,1) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(1-\beta P^2)p_z C}{(1-\beta p^2)E-mc^2} \\ \frac{(1-\beta P^2)P_+ C}{(1-\beta p^2)E-mc^2} \end{pmatrix},\ u(p,2) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(1-\beta P^2)P_- C}{(1-\beta p^2)E-mc^2} \\ \frac{-(1-\beta P^2)P_z C}{(1-\beta p^2)E-mc^2} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

où$u(p,s)$ ést un spineur à quatre composantes et N est un constante de la renormalisation

On a alors trouvé deux solutions à énergies positives $u(p,1)$et $u(p,2)$ qui sont linéairement indépendantes, normalisées et orthogonales, Afin de normaliser proprement l'équation de Dirac, on se rappelle que $\bar{u}u$est un scalaire, ce qui nous pousse à imposer

$$\bar{u}(p,s)u(p,s') = -\delta_{ss'} \tag{4.30}$$

Cette contrainte se résout facilement et un choix de phase pour N nous permet d'obtenir :

$$N = \sqrt{\frac{(1-\beta p^2)E-mc^2}{2mc^2}} \tag{4.31}$$

Considérons maintenant les deux solutions linéairement indépendantes à énergies négatives. L'énergie ayant le signe opposé, on va construire ces spineurs avec le signe de $\vec{p}$ opposé. En prenant

$$v(p,1) = N\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta p^2)p_z c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ \frac{(1+\beta p^2)p_+ c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v(p,2) = N\begin{pmatrix} \frac{(1+\beta p^2)p_- c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ \frac{-(1+\beta p^2)p_z c}{(1+\beta p^2)E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

De plus,

$$\bar{v}(p,s)v(p,s') = -\delta_{ss'} \tag{4.33}$$

on va donc normaliser $\bar{v}v$,et on retrouve

$$N = \sqrt{\frac{(1+\beta p^2)E+mc^2}{2mc^2}} \tag{4.34}$$

avec la condition d'orthogonalité

$$\bar{u}(p,s)v(p,s') = 0 \tag{4.35}$$

$$\bar{v}(p,s)u(p,s') = 0 \tag{4.36}$$

IV.3-Les operateurs de projecteurs Λ_+, Λ_-

les solutions de l'équation de Dirac vérifient la condition de couche de masse [20,22]

- Pour l'énergie positive

$$(1-\beta k^2)^2 k^2 = m^2 \tag{4.37}$$

- Et Pour l'énergie negative

$$(1+\beta k^2)^2 k^2 = m^2 \tag{4.38}$$

En remplace les solutions dansl'équation de Dirac, devient : $\hbar = c = 1$

$$\left((1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m\right) u(k) = 0 \tag{4.39}$$

$$\left((1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m\right) v(k) = 0 \tag{4.40}$$

Pour construire les solutions des équations (4.39), il est utile d'introduire les projecteurs sur les énergies positives et négatives. On remarque d'abord que [20,22]

$$\not{k} = \gamma^\mu k_\mu \tag{4.41}$$

$$\not{k}\,\not{k} = \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = k^2 I_4 \tag{4.42}$$

$$\left((1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m\right)\left((1+\beta k^2)\gamma^\nu k_\nu + m\right) = \left((1-\beta k^2)(1+\beta k^2)k^2 - m^2\right) I_4 = 0 \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}\left((1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m\right)^2 &= ((1-\beta k^2)^2 k^2 + m^2) I_4 - 2m(1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu \\ &= -2m\left((1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m\right)\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}\left((1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m\right)^2 &= ((1+\beta k^2)^2 k^2 + m^2) I_4 + 2m(1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu \\ &= 2m\left((1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m\right)\end{aligned} \tag{4.45}$$

En conséquence,

$$\Lambda_- = \frac{(1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m}{2m} \tag{4.46}$$

$$\Lambda_+ = -\frac{(1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m}{2m} \tag{4.47}$$

forment un ensemble complet de projecteurs orthogonaux:

$$\Lambda_+{}^2 = \Lambda_+ \,;\; \Lambda_-{}^2 = \Lambda_- \,;\quad \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = 0\,;\quad \Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{\beta k^2\gamma^\mu k_\mu + 2m}{2m}$$

A partir d'un spineur constant w, des solutions aux équations peuvent alors simplement être obtenues en posant

$$u(k) = \Lambda_+\varpi$$

$$v(k) = \Lambda_-\varpi$$

Λ_+ et Λ_-projettent respectivement sur les solutions d'énergie positive $u(k)$ et négative $v(k)$, d'ou leur nom. Comme chaque projecteur sélectionne deux des quatre composantes de ϖ, on trouvera deux solutions indépendantes de type $u(k)$ ainsi que deux de typ$v(k)$.

Pour être plus concret, choisissons des matrices γ^μavec γ^0 diagonale:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & O \\ 0 & -I \end{pmatrix};\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix};\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une particule massive au repos,$k^\mu = (m,\vec{0})$; $\gamma^\mu k_\mu = m\gamma^0$

$$\Lambda_- = \frac{(1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m}{2m} = \begin{pmatrix} \frac{(1+\beta k^2)m+m}{2m} I_2 & O \\ 0 & -\frac{(1+\beta k^2)m-m}{2m} I_2 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

$$\Lambda_+ = -\frac{(1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m}{2m} = \begin{pmatrix} -\frac{(1-\beta k^2)m-m}{2m} I_2 & O \\ 0 & \frac{(1-\beta k^2)m+m}{2m} I_2 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Un ensemble de solutions dans ce référentiel est alors donné par :

$$u^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = u^{(\alpha)} \tag{4.50}$$

$$\nu^{(\alpha)}(m,\vec{0}) = \nu^{(\alpha)} \tag{4.51}$$

Avec :

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};u^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\nu^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\nu^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Pour k quelconque en choisit a l'axe z parallèle à$\vec{k}$,alors$k_\mu = (\omega, 0,0, k_z)$ les spineurs :

$$\Lambda_- = \frac{(1+\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu + m}{2m}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(1+\beta k^2)\omega + m}{2m} & 0 & p & 0 \\ 0 & \frac{(1+\beta k^2)\omega + m}{2m} & 0 & -p \\ -p & 0 & -\frac{(1+\beta k^2)\omega - m}{2m} & 0 \\ 0 & p & 0 & -\frac{(1+\beta k^2)\omega - m}{2m} \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

$$\Lambda_-(p) = \sum_s \nu(p,s)\bar{\nu}(p,s)$$

$$\Lambda_+ = -\frac{(1-\beta k^2)\gamma^\mu k_\mu - m}{2m}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{(1-\beta k^2)\omega - m}{2m} & 0 & p & 0 \\ 0 & -\frac{(1-\beta k^2)\omega - m}{2m} & 0 & -p \\ -p & 0 & \frac{(1-\beta k^2)\omega + m}{2m} & 0 \\ 0 & p & 0 & \frac{(1-\beta k^2)\omega + m}{2m} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

$$\Lambda_+(p) = \sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s)$$

Les travaux de Dirac ont servi comme la base du développement de la théorie de l'électrodynamique quantique (QED, les interactions des fermions (spin $s = \frac{1}{2}$) par le transfert d'une particule d'échange bosonique (spin $s = 1$, le photon). À ce jour, l'évidence expérimentale et sa comparaison avec les calculs de QED a montré la validité de QED avec une haute précision. Et avec la découverte du Higgs en juillet 2012, le modèle standard est confirme comme théorie effective des interactions fondamentales. Néanmoins, quelques écarts et quelques déficits d'interactions pour certaines observable nécessitent le récrés à une nouvelle physique au-delà de ce modèle.

Dans ce sens, noter résultat sur le calcule de la somme $\sum_s u(p,s)\bar{u}(p,s)$ et $\sum_s v(p,s)\bar{v}(p,s)$ dans le cadre de la théorie quantique relativiste à haute dérivative. sera donne un espoir d'avoir une nouvelle résultat Spécifiquement au teste de précision du modèle standard. Ou dans le cadre de la recherche d'une nouvelle physique au-delà de ce modèle.

Conclusion

Conclusion :

Dans le cadre de la théorie des champs à haut dérivative, la situation est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus exactement. En conséquence, la plupart des résultats disponibles sont basés sur la théorie des perturbations. Cela implique qu'un système physique simple dans l'espace de Minkowski peut être changé en une théorie complexe dans un cadre mathématique d'équation aux dérive supérieur.

Dans notre travail, nous avons formulé une généralisation de l'équation de Dirac pour une théorie des champs à haut dérivative dans l'espace de Minkowski. Cette dernière théorie est exprimée par la théorie d'Ostrogorski.

L'objectif de cette mémoire est la résolution de l'équation de Dirac dans le cadre de la théorie quantique relativiste à haute. En effet, cette dernière théorie qui constitue unedéformation sur équations de Dirac, nous avons cherché des solutions sous formed'ondes planes et le résultat fut l'obtention des équations déjà écrites dans l'espace desimpulsions. Cette solution est permit de calcule la correction sur la relation de dispersion. Nous avons obtenu le spectre d'énergie, et le Spineur correspondant.

Référence

Référence bibliogaphiques :

[1] M. Ostrogradsky, Mem. Ac. *St. Petersbourg* VI 4 (1850) 385.

[2] B.Podolski and P. Schwed, *Rev.Mod.Phys.*20(1948)40.

[3]K.S.Stelle,*Gen.Rel.Grav.*9(1978)353.
[4] A.Bartoli and J.Julve, *Nucl.Phys.*B425(1994)277.

[5] D.G.Barci,*C.G.Bollini and M.C.Rocca, Int.J.Mod.Phys.* A10(1995)1737.

[6] B.M.Pimentel and R.G.Teixeira, Preprint hep-th/9704088.

[7] Walter.Greiner; *RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS,Third Edition*; Springer.
[8] James D. *Bjorken, SidneyDavid Drell* , Relativistic quantum mechanics .

[9] TAHRAOUI Louiza *,De l'equation de duffin –kemmer-petiau vers analogue non relativite ,mémoire de masster,universite* A.mira de bejaia,2015.

[10] D. Pauli and V. *Weisskopf, Helv Phys Acta* 7, 709 (1934).

[11] P.A.M. Dirac (1981). *Principles of Quantum Mechanics* (4th ed.). Clarendon Press. ISBN 9-780198-520115.

[12] P.A.M. Dirac (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. Courier Dover Publications. ISBN 0-48641-7131

[13] N. Staumann, *General relativity and relativistic astrophysics*, Springer-Verlag (1984).

[14] Greiner, *Classical mechanics: Systems of particles and hamiltonien dynamics*, Springer .

[15] BOUCHARA Lydia, *Le Postulat d'Equivalence en mécanique quantique : vers une réconciliation entre la théorie de la relativité et la mécanique quantique,* mémoire de magister, universite A.mira de bejaia,2007.

[16] F.J. de Urries and J.Julve; *OSTROGRADSKI FORMALISM FOR HIGHER-DERIVATIVE SCALAR FIELD THEORIES*; arXiv:hep-th/9802115v2.
[17] Joao Magueijo, *Could quantum gravity be tested with high intensity Lasers*? arXiv:gr-qc/0603073v2.

[18] D. Kimberly, J. *Magueijo and J. Medeiros, Phys. Rev*. D70, 084007, 2004.

[19] Harold Erbin, *Théorie des champs classiques*, http://artlibre.org/licence/lal/

[20] Jean-Pierre Derendinger, *Théorie quantique des champs*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

[21] Bouaziz, D., Bawin, M.: Phys. Rev. A 76, 032112 (2007)

[22] LEWIS H. RYDER ; *QUANTUM FIELD THEORY*; Secondedition 1996

[23] S. K. Moayedi, M. R. Setare and H. Moayeri ; *Formulation of the Spinor Field in the Presence of a Minimal Length Based on the Quesne-Tkachuk Algebra*; arXiv:1105.1900v1 [hep-th]

Résumé

Nous construisons un modèle de champ spinoriel à haut dérivative dans l'espace de Minkowski. Notre idée est basée àl'extension de la théorie d'Ostrogorskien théorie des champs quantique.

Notre objectif dans ce travail est de résoudre l'équation de Dirac généralise pour une particule demasse m et de Spin ½ soumis dans le cadre de la théorie des champs à haut dérivative,Dans l'espace des position etdans l'espace des impulsion. Nous avons obtenus lespectre d'énergie, et le Spineur correspondant. nous avons reste à un terme définir par$\left(-i\beta\hbar^{3}\gamma^{\mu}\square\partial_{\mu}\psi\right)$.

Mots clés : l'équation de Dirac, champs à haut dérivative, Spineur

ملخص

نقوم ببناء نموذج حقلspinorie l بمشتقات عليافي فضاء Minkowski. حيث تعتمد فكرتنا على امتداد نظريةOstrogorskiإلى نظرية الحقول المكممة.

الهدف من هذا العمل هو حل معادلة ديراك المعممة في فضاء الاحداثيات و فضاء الزحم،بالنسبة لجسيم كتلته m و سبينه ½; حيث اخترنا مقاربة الحقول ذات المشتقات العليا من اجل تعميم المعادلة كما اخترنا التوقف عند الحد المعرف ب.$\left(-i\beta\hbar^{3}\gamma^{\mu}\square\partial_{\mu}\psi\right)$

الكلمات المفتاحية : معادلة ديراك , نظرية الحقول المكممة ذات مشتقات عليا , سبينور spinorie

Abstract

We construct a high derivative spinor field model in Minkowski space. Our idea is based on the extension of Ostrogorski's theory in quantum field theory. Our object in this work is to solve the Dirac generalization equation for a particle of mass m and Spin ½ submitted under the framework of the high derivative field theory,In the space of the positions and in the space of the impulses.

We obtain the energy spectrum, and the corresponding Spinner.we have remains at a term to define by**:** $\left(-i\beta\hbar^{3}\gamma^{\mu}\square\partial_{\mu}\psi\right)$

Keywords : the Dirac equation , high derivative field ,spinor