الجمهورية الجزَائِرية الديمقرَاطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزَارة التعليم العَالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جَامعة عمَار ثليجي بِالأَغوَاط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قِسم الرِيَاضِيَات و الإِعلَام آَلي
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Domaine : Mathématique et Informatique
Filiére : Mathématique
Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Zohra HAZEL

Thème

Sur les opérateurs positifs

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Dr. Salaheddine ALLAOUI	**Président**
Dr. Djamel Ouchenane	**Examinateur**
Mr. Abdeljebar BOUREGAA	**Examinateur**
Dr. Amar BELACEL	**Encadreur**

Année universitaire 2015/2016

Dedicaces

Je dédie ce travail à. . .

A ma très chère mère
Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé d'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon très cher père
Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes très chéres frères
Abderrahmane, Mostapha et Abdelhamid

A ma très chère cousine Amina
En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mes chères amies Nacira, Imane, Sabrine, Halima et Khedidja.

A mes chers collègues.
Et à tous ceux qui m'aiment.

Zohra

Remerciement

Tout d'abord et du fond du cœur, je remercie vivement mon encadreur Dr Amar Belacel d'avoir dirigé mon mémoire, s'est toujours montré à l'écoute, et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

je remercie tous les membres de jury pour avoir bien voulu donner de leur temps pour lire ce travail et faire partie des examinateurs.

Sans oublier de remercier également tous les professeurs du département de mathématiques et informatique qui nous ont enseigné sans hésiter à nous faire passer leurs informations.

Je remercie aussi mes parents pour leur soutien et leur amour, ainsi que nos frères, nos camarades, nos amis et toutes les personnes qui nous ont aidé durant nos études universitaires. Et pour finir, un grand merci aux personnes qui nous ont soutenus pour réaliser ce modeste travail.

Table des matières

Introduction générale

Ce mémoire est constitué de trois chapitres, qui sont liés entre eux, pour définir les opérateurs linéaires, plus précisément les opérateurs linéaires positifs , et Les opérateurs linéaires positivement p-sommants.

Le **chapitre 1** représente un rappel sur quelques notions élémentaires, en particulier toutes les définitions des termes qui seront utilisés dans le chapitre 2 et le chapitre 3.

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude des espaces réticulés, les opérateurs sous-linéaires et quelques propriétés comme l'extention du théorème de Hahn-Banach au cas des opérateurs sous-linéaires et la relation entre les opérateures linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Dans le **chapitre 3** on a étudié les opérateurs linéaires positifs sur l'espace de Banach réticulé et quelques propriétés importantes pour les opérateurs sous-linéaires positifs et linéaires positivement p-sommants.

Notations	Significations
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Corps des scalaires
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des scalaires réels positifs
X, Y	Espacesde Banach
$E,\ F,\ G$	Espaces de Banach réticulé
E^*	Dual topologique de l'espace E
$B_E = \{x \in E; \parallel x \parallel \leq 1\}$	Boule unité fermé de E
$B_{E^*} = \{x \in E; \parallel x \parallel \leq 1\}$	Boule unité fermé de E^*
$\langle x, x^* \rangle$	Crochet de dualité entre E et E^*
$C(K)$	Espace des fonctions continues sur le compact K
$B(X, Y)$	l'espace des opérateurs bornés $u : X \longrightarrow Y$
$SL(X, F)$	l'espace des opérateurs sous-linéaires $T : X \longrightarrow F$
$SB(X, F)$	l'espace des opérateurs sous-linéaires bornés $T : X \longrightarrow F$
L_p	Espace de Lebesgue
$\Lambda_p(X, B)$	l'espace des opérateurs positivement p-sommants
$C_p(X, B)$	l'espace des opérateurs p-concaves
$\Pi_p(X, B)$	l'espace des opérateurs p-absolument
$Y(\ell_p^n)$	$= \{(y_i)_{i=1}^n \subset Y; \lVert\Big(\sum_{i=1}^n \mid y_i \mid^p\Big)^{1/p}\rVert_Y < +\infty\}$

Table 1 – Tableau des notations

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les ensembles

Définitions 1.1.1. *On définit un ensemble comme étant une collection d'objets qui sont ou bien énumérés ou bien liés entre eux par une propriété commune. Les exemples suivants illustrent la définition d'un ensemble :*

(a) *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *des nombres naturels,i.e. les entiers positifs.*

(b) *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers positifs et négatifs.*

(c) *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels.*

(d) *L'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels.*

– *Les objets d'un ensemble* E *sont dits les éléments ou les points de* E*. Si* x *est un élément d'un ensemble* E*, on dit que* x *appartient à* E *et on note*

$$x \in E.$$

La négation de $x \in E$ *sera notée par* $x \notin E$*.*

– *Un ensemble* E *est dit ensemble vide si et seulement si il n'admet aucun élément. L'ensemble vide est noté par* $\emptyset$*.*

– *Un ensemble* E *est dit un singleton si et seulement si il admet un et un seul élément* x*. Dans ce cas, le singleton* E *est noté par* $E = \{x\}$*. Plus généralement, si* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sont* n *objets, alors*

$$E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

est l'ensemble dont les éléments sont les différents $x_1, x_2, \cdots, x_n$*.*
Soient A *et* B *deux ensembles donnés.*

– *Si tout élément de* A *est un élément de* B*, alors on dit que* A *est inclus dans* B *ou encore* B *contient* A*, on note*

$$A \subset B.$$

– *Si* $A \subset B$ *et* $B \subset A$*, alors on dit que* A *et* B *sont égaux ou identiques et on note*

$$A = B.$$

Si $A \subset B$ *et* $A \neq B$*, alors on dit que* A *est un sous-ensemble propre de* B*.*

- *Soit E un ensemble, alors l'ensemble des parties de E, noté par $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble constitué par tous les sous-ensembles ou parties de E. On a l'équivalence*

$$A \in \mathcal{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E.$$

En particulier, on a

$$\emptyset \subset E \in \mathcal{P}(E).$$

Exemple 1.1.1. (a) *Si $E = \{x\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$.*

(b) *Si $E = \{x_1, x_2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$.*

(c) *Si $E = \mathbb{R}$. alors*

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \in \mathcal{P}(E).$$

1.1.1 Opérations sur les ensembles

Définition 1.1.1. *Soient A et B deux ensembles.*

- *On appelle intersection de A et B, l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de A appartenant aussi à B.*
- *On appelle réunion de A et B, l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de A et de ceux de B.*

Formellement, on a :

- $A \cap B = \{x;\ x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}$,
- $A \cup B = \{x;\ x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$.

Définition 1.1.2. *Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints, et si de plus $E = A \cup B$, on dit que A est le complémentaire de B dans E, ou que A et B sont deux ensembles complémentaires dans E, et on note :*

$$A = \complement_E B \quad \text{ou} \quad B = \complement_E A.$$

On note aussi :

$$A = E \setminus B.$$

Définition 1.1.3. *Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides, alors le produit cartésien de ces deux ensembles, noté par*

$$E = E_1 \times E_2,$$

est défini par :

$$E = \{(x, y); x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Remarque 1.1.1. *$A \times B = B \times A$ si et seulement si $A = B$.*

Exemple 1.1.2. *1. Si $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, alors*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

est un ensemble produit.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{nfois} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, n\}$$

est un ensemble produit.

1.2 Espace vectoriel et espace topologique

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, l'ensemble E et l'ensemble vide $\emptyset$. Soit $\theta \subset \mathcal{P}(E)$

Définition 1.2.1. *Le couple (E, θ) est appelé espace topologique. Si les trois axiomes suivants sont satisfaits :*

1. *E et $\emptyset \in \theta$*
2. $\forall O_1, O_2, \cdots, O_n \in \theta \Longrightarrow \cap_{i=1}^n O_i \in \theta$
3. *Toute réunion d'éléments de θ est un élément de θ.*

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \theta \Longrightarrow \cup_{i\in I} O_i \in \theta.$$

Les éléments de θ sont appelés les ensembles ouverts de E.

Exemple 1.2.1. *Soit $E = \{a, b, c, d\}$ où*

$$\aleph = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

Le couple $(E, \aleph)$ est un espace topologique.

Définition 1.2.2. *Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une première loi entre ses éléments, dite loi interne*

$$+ : E \times E \to E$$

qui vérifie :

$\forall x, y \in E$	$(x + y) \in E$	*stabilité*
$\forall x, y \in E$	$x + y = y + x$	*commutativité*
$\forall x, y, z \in E$	$(x + y) + z = x + (y + z)$	*associativité*
$\exists e \in E, \forall x \in E$	$x + e = e + x = x$	*élément neutre*
$\forall x \in E, \forall x' \in E$	$x + x' = x' + x = e$	*élément symétrique*

Une seconde loi sur E est définie entre ses éléments et des nombres d'un corps $\mathbb{K}$, dite loi externe

$$* : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui vérifie :

$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$\alpha * x \in E$	*stabilité,*
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$\alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$	*associativité,*
$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$\alpha * (x + y) = (\alpha * x) + (\alpha * y)$	*distribution de $*$ sur $+$*
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$(\alpha + \beta) * x = (\alpha * x) + (\beta * x)$	*distribution de $+$ sur $*$,*
$\forall x \in E$	$1_{\mathbb{K}} * x = x$	*élément unite.*

Le triplet $(E, +, *)$ s'appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, les éléments de E s'appellent des vecteurs et on appelle scalaires ceux de $\mathbb{K}$.

Définition 1.2.3. *Un sous ensemble F d'un espace vectoriel $(E;+;*)$ s'appelle sous espace vectoriel et on le note $(F;+;*)$, si il vérifie :*

1. $F \neq \emptyset$.
2. $\forall x, y \in F \qquad x+y \in F$ *stable pour* $+$,
3. $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha * x \in F$.

Exemple 1.2.2.
1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la droite numérique muni de l'addition et de la multiplication habituelle présente un espace vectoriel.

2. Soit Eun espace vectoriel, et soit l'ensemble :

$$\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}\}.$$

On définit l'addition et la multiplication sur cet ensemble par :

$$\forall x \in E, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\forall x \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \, (\alpha * f)(x) = \alpha * f(x).$$

Le tripel $(\mathcal{F}(E, \mathbb{K}), +, *)$ forme un espace vectoriel.

1.2.1 Fonctions

Définition 1.2.4. *Une fonction est une relation entre deux ensembles, le domaine de définition X (ou ensemble des antécédents) et l'ensemble des images Y.*

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.5. *On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute relation f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. D est appelé domaine de définition de f et est notée D_f*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe}\}.$$

Définition 1.2.6. ***(Graphe d'une fonction)*** *Dans un plan rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (généralement orthonormé).*
Les points $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$ constituent la courbe représentative de f, notée G_f .

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

On appelle graphe de f, l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où $x \in D_f$.

Définition 1.2.7. ***(Parité) :***
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

i) f est dite paire si $\forall x \in D_f; (-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

ii) f est dite impaire si $\forall x \in D_f; (-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
Si la fonction est paire ou impaire, son domaine d'étude est réduit de moitié.

Définition 1.2.8. ***(Fonctions bornées)***
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

i) f *est dite majorée (resp. minorée) si l'image de* D_f *par* f *est une partie majorée i.e.* $f(D_f)$ *est une partie majorée de* $\mathbb{R}$ *(resp. minorée) de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, f(x) \leq M \text{ (resp. } \exists m : \forall x \in D_f, f(x) \geq m).$$

ii) f *est dite bornée si* $f(D_f)$ *est une partie bornée de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire*

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f, m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.2.9. ***(Périodicité)***
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ f *est dite périodique et de période* T *si*

i) $\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f$ *et* $x - T \in D_f$

ii) $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$, T *est la plus petite période qui vérifie ii).*

Remarque 1.2.1. *Si* f *est de période* T *alors* $\forall n \in \mathbb{N} : (x+nT) \in D_f, f(x+nT) = f(x)$.

Définition 1.2.10. *Soit* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

i) On dit que la fonction f *est symétrique par rapport à l'axe vertical* $x = a$, *si et seulement si :*

$$\forall x \in D_f : (a-x) \in D_f, (a+x) \in D_f, \text{on a } f(a-x) = f(a+x).$$

ii) On dit que la fonction f *est symétrique par rapport au point* $M(a, f(a))$, *si et seulement si :*

$$\forall x \in D_f : (a-x) \in D_f; (a+x) \in D_f, \text{on a } f(a+x) + f(a-x) = 2f(a).$$

1.2.2 Applications

Définition 1.2.11. ***(Application)***
Soient E *et* F *deux ensembles non vides. Une application* f *de* E *dans* F, *notée* $f : E \longrightarrow F$, *est une loi de correspondance qui permet d'associer à chaque élément* x *de* E, *un et un seul élément* $y \in F$. *L'élément* y *associé à* x *est l'image de* x *par* f.
Le sous-ensemble D_f *de* E *constitué par tous les éléments de* E *qui ont des images par* f *s'appelle l'ensemble de définition de* f. *Le sous-ensemble* $f(E)$ *de* F *constitué par toutes les images* $f(x), x \in E$ *est appelé l'image de* E *par l'application* f.

Définition 1.2.12. ***(Application identité)***
Soit E *un ensemble, alors l'application* Id_E *définie de* E *dans* E *par*

$$Id_E(x) = x,$$

S'appelle l'application identité sur E.

Définition 1.2.13. ***(Loi de composition interne)***
Soit E *un ensemble non vide, toute application* T *définie sur l'ensemble produit* $E \times E$ *à valeurs dans* E *est dite loi de composition interne dans* E. *Cette loi s'écrit sous la forme compacte :*

$$\begin{aligned} T : \quad & E \times E \longrightarrow E \\ & (x, y) \longrightarrow xTy. \end{aligned}$$

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne et soit A un sous-ensemble de E. A est dit stable par T si :

$$\forall x, y \in A \text{ on a } xTy \in A.$$

Définition 1.2.14. ***(Loi de composition externe)***
Soient E et F deux ensembles non vides, toute application T définie sur l'ensemble produit $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E est dite loi de composition externe sur E. Cette loi s'écrit sous la forme compacte :

$$T: \quad \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow F \\ (\lambda, x) \longrightarrow \lambda T x. \end{array}$$

Définition 1.2.15. ***(Application injective, surjective)***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si :

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y,$$

ou encore

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

alors on dit que f est injective ou une injection. f est dite une application surjective ou une surjection si

$$\forall y \in F, \exists\, x \in E \quad \text{tel que } f(x) = y.$$

D'après la définition précédente, on déduit qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Définition 1.2.16. ***(Application bijective et application réciproque)***
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si f est à la fois injective et surjective, alors f est dite application bijective ou bijection. Dans ce cas, on définit l'application réciproque de f qu'on note par f^{-1} et qu'on décrit comme étant l'application de F dans E qui à chaque élément $y \in F$associe l'unique élément $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$.

Définition 1.2.17. ***(Application composée)***
Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. L'application $\phi : E \longrightarrow G$, définie par :

$$\phi = g \circ f \quad : \quad \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longrightarrow g[f(x)], \end{array}$$

s'appelle l'application composée de g et f.

1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.3.1. *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, on appelle norme sur E toute application*

$$\| \,.\, \| : E \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ les condition suivantes :

1. $\| x \|= 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\| \lambda x \|=| \lambda |\| x \|$,

3. $\| x + y \|\leq\| x \| + \| y \|$.

Exemple 1.3.1. *1. Soit* $E = \mathbb{R}^n$*(qui est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*)*
les expression suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ *:*

$$(1) \qquad \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |,$$

$$(2) \qquad \| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{1/2}, \quad où\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$(3) \qquad \| x \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} | x_i |.$$

2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions numériques définies, continues sur* $[0, 1]$*, les expressions suivantes sont des normes sur* E *:*

$$\| f \|_1= \int_0^1 | f(x) |dx,$$

$$\| f \|_2= \sup_{x\in[0,1]} | f(x) |,$$

$$\| f \|_3= \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Définition 1.3.2. *On appelle espace vectoriel normé (noté e.v.n) le couple* $(E, \| \,.\, \|)$ *formé par un espace vectoriel et une norme* $\| \,.\, \|$ *définie sur* E*.*

Définition 1.3.3. *Soit* E *un espace vectoriel normé et soit* G *un sous espace vectoriel de* E *alors* $(G, \| \,.\, \|)$ *est un sous espace vectoriel normé où* $\| \,.\, \|$ *est la norme définie sur* E*.*

Proposition 1.3.1. *Soit* G *un sous espace vectoriel de* E *e.v.n alors* $\overline{G}$ *est un sous espace vectoriel de* E*.*

Démonstration. Soient $x, y \in \overline{G}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors $\exists (x_n)_n \subset G$ et $(y_n)_n \subset G$ telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ alors $\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$. □

1.3.1 Normes équivalentes

Soient $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ deux normes définies sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.4. *Les normes* $\| \,.\, \|_1$ *et* $\| \,.\, \|_2$ *sont dites équivalentes s'il existe deux constantes* α *et* β *telles que* $0 < \alpha < \beta$ *vérifiant*

$$\alpha \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \beta \| x \|_2 \ \forall x \in E.$$

Exemple 1.3.2. *Sur* $\mathbb{R}^n$ *les normes* $\| x \|_1= \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ *et* $\| x \|_\infty= \sup_{1\leq i\leq n} | x_i |$ *sont équivalentes car*

$$\| x \|_\infty \leq \| x \|_1 \leq n \| x \|_\infty.$$

1.3.2 Propriétés des espaces vectoriels normés

Proposition 1.3.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ deux normes sur E alors :*
$\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E.

Remarque 1.3.1. *Pour la démonstration voir [1].*

Proposition 1.3.3. *Soit $\overline{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r, alors $\overline{B(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r)$ où $B(x_0, r)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.*

Démonstration. Comme $B(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r)$ est fermée.
il vient $\overline{B(x_0, r)} \subset \overline{B}(x_0, r)$. Montrons que $\overline{B}(x_0, r) \subset \overline{B(x_0, r)}$, Soit $y \in \overline{B}(x_0, r)$ avec $\| x_0 - y \| = r$ car si $\| x_0 - y \| < r$ il est évident que $y \in \overline{B}(x_0, r)$ soit $\epsilon > 0$, montrons que $B(y, \epsilon) \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$.
Prenons $z = y - \dfrac{\epsilon}{r}(y - x_0) \Rightarrow \| y - z \| = \epsilon$ et $\| z - x_0 \| = \left(1 - \dfrac{\epsilon}{r}\right) r = r - \epsilon$
$\| z - x_0 \| = r - \epsilon < r \Rightarrow z \in B(x_0, r) \Rightarrow B(y, \epsilon) \cap B(x_0, r) \neq \emptyset \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \overline{B}(x_0, r) \subseteq B(x_0, r)$ d'où la proposition. □

1.3.3 Espace Produit-Espace normé de dimension finie

Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times E_2$ alors :

Définition 1.3.5. *E est un espace vectoriel produit normé par :*

$$\| (x_1, x_2) \|_E = \| x_1 \|_{E_1} + \| x_2 \|_{E_2} .$$

Définition 1.3.6. *On dit que f est une application linéaire continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\| f(x) \|_F \leq C \| x \|_E \, \forall x \in E$$

Définition 1.3.7. *f est uniformément continue sur*

$$E \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \, \alpha > 0 \, : \forall x_1, x_2, \| x_1 - x_2 \|_E \leq \alpha \Longrightarrow \| f(x_1) - f(x_2) \|_F \leq \epsilon.$$

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ alors les applications*
$\varphi : E \times E \to E$ et $\psi : \mathbb{R} \times E \to E$ définies par :
$\varphi(x; y) = x + y$ et $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ ou $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont continues.

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$, $\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) = x - x_0 + y - y_0$ et
$\| \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) \| \leq \| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| = \| (x, y) - (x_0, y_0 \| \Rightarrow \varphi$ uniformément continue sur $E \times E$. Soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E, \varphi(\lambda, x) - \psi(\lambda_0, x_0) = (\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0)$
et $\| \psi(\lambda, x) - \psi(\lambda_0, x_0) \| \leq | \lambda - \lambda_0 | \| x \| + | \lambda_0 | \| x - x_0 \| \to 0$ si $(\lambda, x) \to (\lambda_0, x_0) \Rightarrow \psi$ et continue en (λ_0, x_0). □

Définition 1.3.8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n de la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $e_i = (0, 0 \cdots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \cdots, 0, \cdots)$ normé par :*

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i | \text{ où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \, ; \in \mathbb{R}^n \text{ ou } (\mathbb{C}^n).$$

Proposition 1.3.5. *Toute norme $\| x \|$ sur $\mathbb{K}^n$ est uniformément continue .*

Théorème 1.3.1. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

1.4 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.4.1. *On appelle opérateur de E dans F toute application u définie de E dans F par :*

$$\begin{array}{rcl} u : D(u) \subset E & \to & F \\ x & \to & y = u(x). \end{array}$$

L'ensemble $D(u)$ s'appelle domaine de définition de l'opérateur u.

Définition 1.4.2. *L'opérateur u est dite linéaire, si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\begin{array}{rcl} u(x+y) & = & u(x) + u(y), \\ u(\lambda x) & = & \lambda u(x). \end{array}$$

En d'autre terme, u est linéaire si, et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}.\ u(\lambda x + \beta y) = \lambda u(x) + \beta u(y).$$

Remarque 1.4.1. *Dans le cas $F = \mathbb{K}$, on trouve les formes linéaires .*

Définition 1.4.3. *L'opérateur u défini d'un espace normé E dans un espace normé F, est continu au point x_0 sii :*

$$\forall \epsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0 \ telque \parallel x - x_0 \parallel \leq \delta \Rightarrow \parallel u(x) - u(x_0) \parallel \leq \epsilon.$$

Définition 1.4.4. *Un opérateur linéaire u est borné, si il existe un réel $M > 0$ telle que :*

$$\parallel u(x) \parallel_F \leq M \parallel x \parallel_E \forall x \in E.$$

Théorème 1.4.1. *L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné .*

$$u \ est\ continu \Longleftrightarrow u\ est\ born\acute{e}\ .$$

Donc on a,

$$u\ est\ born\acute{e} \Longleftrightarrow \exists M \geq 0, \forall x \in E : \parallel u(x) \parallel_F \leq M \parallel x \parallel_E.$$

La borne inférieure des nombres M vérifiant l'inégalité précédente s'appelle norme de l'opérateur u et se note $\parallel u \parallel$,

$$\parallel u \parallel = \inf\{M \geq 0 : \parallel u(x) \parallel_F \leq M \parallel x \parallel_E\}.$$

Remarque 1.4.2.
1. *Si E et F sont des espaces normés , alors $\mathcal{L}(E, F)$ l' est aussi. $\mathcal{L}(E, F)$ est noté par $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$.*
2. *La somme de deux , trois ou un nomdre fini d'opérateurs est un opérateur .*
3. *Le produit d'un opérateur par un scalaire est un opérateur .*

Théorème 1.4.2. *Pour tout opérateur borné u d'un espace normé dans un espace normé, on a*

$$\parallel u \parallel = \sup_{x \neq 0} \frac{\parallel u(x) \parallel_F}{\parallel x \parallel_E} = \sup_{\parallel x \parallel \leq 1} \parallel u(x) \parallel_F.$$

Définition 1.4.5. *Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné de E dans F, on appelle opérateur dual de u, et on le note par u^*, l'application :*

$$u^* : F^* \to E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^* :< u(x), y^* >_{F\times F^*} = < x, u^*(y^*) >_{E\times E^*} .$$

(F^* : le Dual topologique de l'espace F).

Théorème 1.4.3. *Si u un opérateur linéaire borné, donc u^* l'est aussi et on a :*

$$\| u \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \| u^* \|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} .$$

1.4.1 Formes linéaires

Définition 1.4.6. *On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire définie de E dans $\mathbb{K}$.*
On désigne l'ensemble des formes linéaires définies sur E par $E^* = L(E, \mathbb{K})$ et on l'appelle dual algébrique de E.

Définition 1.4.7. *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors on appelle forme semi-linéaire sur E, Toute application f définie de E dans $\mathbb{C}$ de sorte que*

$$\forall x, y \in E \; f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} \; f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x).$$

($\overline{\lambda}$ désigne le conjugué de λ).

1.5 Espace de Banach

Définition 1.5.1. *Soit E un espace vectoriel normé . On appelle dual topologique de E et on le note par E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de toutes les formes linéaires continues définies sur E. E^* est un espace normé,et on définit la norme de $u \in E^*$ par l'une des formules équivalentes suivantes :*

1. $$\| u \|_{E^*} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{| u(x) |}{\| x \|},$$
2. $$\| u \|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} | u(x) |,$$
3. $$\| u \|_{E^*} = \sup_{\|x\| = 1} | u(x) |,$$
4. $$\| u \|_{E^*} = \inf\{K > 0, | u(x) | \leq K \| x \|\}.$$

Définition 1.5.2. *On dit que la suite $(x_n)_n$ est une suite de cauchy de E(Eest un espace normé)si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q > N_0 \Rightarrow \| x_p - x_q \| \leq \epsilon.$$

Définition 1.5.3. *Un espace vectoriel normé E est dit espace de Banach. Si il est complet c'est-à-dire si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de E est convergente dans E.*

Exemple 1.5.1. *1. La droite réelle constitue un espace de Banach.*

2. *Soit E un espace normé. Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E;F)$ l'est aussi. En particulier, E^* l'espace dual de E est un espace de Banach.*
3. *Soit $1 \leq p < \infty$ un nombre réel, les espaces formés par les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid^p < \infty$$

muni de la norme

$$\| (x_n)_n \|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid^p \right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

est un espace de Banach qu'on le désigne par $\ell_p(\mathbb{R})$ ou tout simplement ℓ_p.

4. *L'espace formé par les suites bornées muni de la norme*

$$\| (x_n)_n \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \mid .$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{R})$ ou tout simplement ℓ_∞. On notera $c_0(\mathbb{R})$ ou c_0 le sous espace fermé de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro.

5. *Soit K un espace topologique compact. On désigne par $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in K} \mid f(x) \mid .$$

6. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ-mesurable. On définit suivant les valeurs du réel p les normes suivantes*

$$\| f \|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega \mid f(t) \mid^p d\mu(t) \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C, \mid f(x) \mid \leq C, \ p.p \ sur \ \Omega\} & p = \infty \end{cases}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalences, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ-mesurables telles que $\| f \|_p < \infty$,Σ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue.

Conséquence 1.5.1. *Tout espace de Banach est de Baire (est une espace métrique complet).*

Théorème 1.5.1. *Soit E un espace de Banach alors si la série de terme général U_n est normalement convergente alors la série de terme général U_n est convergente.*

Démonstration. Si la série de terme général est normalement convergente cela signifie que la série de terme général $\| U_n \|$ est convergente.

Si $T_n = \sum_{k=1}^{n} \| U_k \|$ alors la suite T_n est convergente,

soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

si $q > p$ on a

$$S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} U_k$$

et

$$\| S_q - S_p \| \leq \sum_{k=p+1}^{q} U_k \leq \mid T_q - T_p \mid .$$

or $(T_n)_n$ est une suite de Cauchy,il en résulte que $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy et elle converge donc dans E qui est complet par hypothése. □

1.5.1 Topologie faible et faible-$*$

Soit (x_n) une suite de points d'un espace vectoriel normé E. Soit $f \in E^*$, il se peut arriver que $(f(x_n))$ converge cependant que (x_n) ne converge pas, d'où les deux définitions suivantes. On définit sur l'espace de Banach E, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E; E^*)$ notée w qui est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur E. Soit $(x_n)_n$ une suite de E, et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle x^*, x_n\rangle, \qquad \forall x^* \in E^*.$$

De même, on définit sur l'espace de Banach E^* la topologie faible$-*$, pour chaque x on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible$-*$ notée $\sigma(E^*; E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_x$. Soit $(x_n^*)_n$ une suite de E^*, et $x^* \in E^*$. On dit que $(x_n^*)_n$ converge $*-$faiblement vers x^* si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle x_n^*, x\rangle, \qquad \forall x \in E.$$

Illustrons la notion de la topologie faible par l'exemple fondamentale suivant,
On définit l'espace des suites faiblement $p-$sommables. On dit qu'une suite est faiblement $p-$sommable ($1 \le p \le \infty$) si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x^*, x_n\rangle \mid^p < \infty, \qquad \forall x \in E.$$

L'espace des suites faiblement$p-$sommables noté par

$$\ell_{p,w}(E)$$

est un espace de Banach , où la norme est définie par

$$\| (x_n) \|_{p;w} = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x^*, x_n\rangle \mid^p \right)^{1/p} \tag{1.2}$$

Dans le cas $p = \infty$

$$\ell_{\infty,w}(E) = \ell_\infty(E) \quad \text{où} \quad \| x_n \|_{\ell_{\infty,w}} = \| x_n \|_{\ell_\infty} . \tag{1.3}$$

Remarque 1.5.1. *Le lecteur interessé pourra consulter [4].*

Chapitre 2

Les espaces réticulés et les opérateurs sous-linéaires

Dans ce chapitre, on a défini et étudié les espaces réticulés, les opérateurs sous-linéaires et quelques propriétés comme l'extention du théorème de Hahn-Banach au cas des opérateurs sous-linéaires et la relation entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

2.1 Les espaces réticulés

Définition 2.1.1. *Un espace vectoriel X est ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ telle que pour tout x, y, z dans X on a*

(i)	$x \leq x$	*reflexivité,*
(ii)	$x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y$	*antisymétrique,*
(iii)	$x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$	*transitivité.*

Soient x et y deux éléments de X. Si on a $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont comparables. L'ensemble X est alors dit totalement ordonné si deux éléments quelconques de X sont comparables.
Lorsqu'il est utile de préciser que l'ordre n'est pas total, on parle de relation d'ordre partiel et d'ensemble partiellement ordonné .

Définition 2.1.2. *Soit X un espace vectoriel partiellement ordonné. L'espace X est réticulé (resp. complétement réticulé) si*

$$\forall x, y \in X,\ \sup\{x, y\} \in X,\ (resp. \forall A (\neq \emptyset) \subset X, A \text{ majoré} \Rightarrow \sup A \in X).$$

Définition 2.1.3. *Soit X un espace de Banach réel partiellement ordonné. X est un espace de Banach réticulé (resp. complétement réticulé) si X est réticulé (resp. complétement réticulé) et pour tout x, y dans X, on a*

1− $\| | x | \| = \| x \|$,

2− $| x | \leq | y | \Rightarrow \| x \| \leq \| y \|$.

où $| x | = \sup\{x, -x\}$.
On notera aussi par $x_+ = \sup\{x, 0\}$ et $x_- = \inf\{x, 0\}$. Dans ce cas $x = x_+ - x_-$ et $| x | =$

$x_+ + x_-$.
On posera $E_+ = \{x \in E, x \geq 0\}$.

Exemple 2.1.1. *Les* $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ *sont des espaces complétement réticulés. L'espace* $C(K)(K compact)$ *est un espace réticulé.*

2.2 Quelques définitions importantes

Définition 2.2.1. *L'ensemble* A *est filtrant décroissant si, pour tout* x, y *dans* A*, il existe* $z \in A$ *telle que :*

$$z \leq x \text{ et } z \leq y.$$

Définition 2.2.2. *Un Banach réticulé a la norme continue pour l'ordre si chaque ensemble filtrant décroissant vers zéro. Alors,*

$$\inf\{\| x \|, x \in A\} = 0.$$

Définition 2.2.3. *Un ensemble* $A \subset E$ *est borné pour l'ordre si il existe* $M \geq 0$ *telle que* $| z | \leq M$ *pour tout* $z \in A$.

Définition 2.2.4. *Un espace de Banach réticulé est* σ*-continu pour l'ordre, si et seulement si toute suite bornée pour l'ordre et décroissante est convergente.*

Définition 2.2.5. *Un Banach réticulé* X *serait conditionnellement complet pour l'ordre ou, briévement, complet si chaque ensemble borné pour l'ordre dans* X *a un minimum.*

Proposition 2.2.1. *[12]*
Soit X *un espace de Banach. Alors. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *L'espace* X *est* σ*-complétement réticulé et* σ*- continu pour l'ordre.*

(b) *Toute suite bornée pour l'ordre et croissante dans* X *converge fortement.*

(c) *L'espace* X *est continu pour l'ordre.*

(d) *L'espace* X *est continu pour l'ordre et complétement réticulé.*

On notera par X^* *le dual topologique de* X*. La proposition suivante nous sera utile par la suite et dont on trouvera une démonstration dans [12]. Mais pour la commodité du lecteur nous donnerons la preuve.*

Proposition 2.2.2. *Soit* X *un espace de Banach réticulé. Alors* X^* *est un espace complétement réticule muni de l'ordre suivant. Soit* $x^*, y^* \in X^*$.

$$x^* \leq y^* \Longleftrightarrow x^*(x) \leqslant y^*(x), \qquad \forall x \in X_+,$$

Dans ce cas on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(u) + y^*(x-u); 0 \leq u \leq x\}, \tag{2.1}$$

et

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf\{x^*(v) + y^*(x-v); 0 \leq v \leq x\}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Il est clair que X^* est un espace de Banach complétement réticulé, pour tout $x \in X_+$, on écrit $\mid x^* \mid (x) = \sup\{T(y) : \mid y \mid \leq x\}$. Comme

$$x \vee y = \frac{1}{2}\left(x + y + \mid x - y \mid\right),$$

et

$$x \wedge y = \frac{1}{2}\left(x + y - \mid x - y \mid\right),$$

pour $x, y \in X$, alors

$$\begin{aligned}
(x^* \vee y^*)(x) &= \frac{1}{2}\left(x^*(x) + y^*(x) + \mid x^* - y^* \mid (x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^*(x) + y^*(x) + \sup\{(x^* - y^*)(u) : \mid u \mid \leq x\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sup\{x^*(x) + y^*(x) + x^*(u) - y^*(u) : \mid u \mid \leq x\} \\
&= \sup\{x^*(\frac{1}{2}(x+u)) + y^*(\frac{1}{2}(x-u)) : \mid u \mid \leq x\} \\
&= \sup\{x^*(y) + y^*(x-y) : 0 \leq y \leq x\}.
\end{aligned}$$

De la méme maniére, on peut montrer(2.2). □

Soit maintenant $\{X_i : i \in I\}$ une famille d'espaces réticulés. Alors, il est facile de vérifier que le produit cartésien $\prod_{i \in I} X_i$, est un espace vectoriel réticulé muni de l'ordre

$$\{x_i\}_{i \in I} \leq \{y_i\}_{i \in I} \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \qquad \forall i \in I.$$

Soit $x = \{x_i\}_{i \in I}$ et $y = \{y_i\}_{i \in I}$ dans $\prod_{i \in I} X_i$. Alors

$$x \vee y = \{x_i \vee y_i\}_{i \in I} \; et \; x \wedge y = \{x_i \wedge y_i\}_{i \in I}.$$

2.3 Les opérateurs sous-linéaires

Définition 2.3.1. *Soit T une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé F. On dira que T est sous-linéaire si, pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a :*

$$\begin{cases} a - \; T(\lambda x) = \lambda T(x) & (positivement\ homogène), \\ b - \; T(x+y) \leq T(x) + T(y) & (sous - additive). \end{cases}$$

On note par

$$L(X, Y) = \{des\ applications\ linéaires\ u : X \longrightarrow Y,\ Y\ : espace\,de\,Banach.\}$$

$$SL(X, F) = \{des\ applications\ sous - linéaires\ T : X \longrightarrow F\}$$

et on munit de l'ordre induit par F

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \forall x \in X.$$

Remarque 2.3.1. *Les deux lois de composition usuelles :*

$$\begin{array}{ccc} SL(X,F)\times SL(X,F) & \longrightarrow & SL(X,F) \\ (f,g) & \longrightarrow & f+g \\ \mathbb{R}_+\times SL(X,F) & \longrightarrow & SL(X,F) \\ (\alpha,f) & \longrightarrow & \alpha.f \end{array}$$

sont internes dans $SL(X,F)$.

Remarque 2.3.2. *Si $u\in L(X,F)$ et $T\in SL(X,F)$,on a*

$$u\leq T \Longleftrightarrow -T(-x)\leq u(x)\leq T(x), \forall x\in X$$

En effet,

$$\begin{aligned} \forall x\in X, u(x)\leq T(x) &\Longrightarrow \forall x\in X,\quad u(-x)\leq T(-x)\\ &\Longrightarrow \forall x\in X,\quad u(x)\geq -T(-x)\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x\in X, -T(-x)\leq u(x)\leq T(x).$$

Proposition 2.3.1. *Soit T un opérateur sous-linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé F. On a*

$$T \text{ est continu sur} X \Longrightarrow \exists C>0 : \forall x\in X \text{on a} \| T(x)\|_F \leq C\| x\|_X$$

Dans ce cas on pose

$$\| T\|_{SL(X,F)} = \sup_{\|x\|_X=1} \| T(x)\|_F.$$

Démonstration. Commençons par l'implication directe. On suppose que T est continu sur X. Donc, il est continu en 0 et par conséquent

$$\forall \epsilon>0, \exists \eta>0 : \| x\|\leq \eta \Longrightarrow \| T(x)\|\leq \epsilon,$$

Fixons $\epsilon>0$. On pose pour tout $x\neq 0$

$$z=\eta\frac{x}{\| x\|}.$$

Comme $\| z\|\leq \eta$, par conséquent

$$\| T(z)\| = \frac{\eta}{\| x\|}\| T(x)\|\leq \epsilon.$$

D'où,

$$\| T(x)\|\leq \frac{\epsilon}{\eta}\| x\|.$$

Il suffit de prendre $C=\dfrac{\epsilon}{\eta}$.

L'inverse. On pourra facilement montrer que pour tout x,y dans X , on a

$$
\begin{aligned}
\mid T(x) - T(y) \mid \quad & \leq \quad \sup\{T(x-y), T(y-x)\} \\
& \leq \quad \mid T(x-y) \mid + \mid T(y-x) \mid,
\end{aligned}
$$

alors d'après la Proposition (2.3.1), on aura

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \| T(x-y) \| + \| T(y-x) \| \leq 2C\| x-y \|.$$

Donc, T est $2C$- lipschitzienne et par conséquent continu. □

C'est-à-dire, tout opérateur sous linéaire continu est C-Lipschitzienne.
On note par

$$SB(X,F) = \{des\, opérateurs\, sous - linéaires\, bornés\, T : X \longrightarrow F\}.$$

On rappelle que : l'application $f : X \longrightarrow Y$ est Lipschitzienne s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\| f(x) - f(y) \| \leq C. \| x-y \|,$$

pour tous $x, y \in X$. La constante C s'appelle nombre de Lipschitzienne et notée par $Lip(f)$, où $Lip(f)$ donnée par

$$Lip(f) = \sup_{x,y \in X_{x \neq y}} \frac{\| f(x) - f(y) \|}{\| x-y \|}.$$

Proposition 2.3.2. *Soient X, F deux espaces de Banach dont F réticulé et $T \in SL(X,F)$. Alors*

(*a*) $T \in SL(X,F) \Longrightarrow \exists x_0 \in X : -T(x_0) < T(-x_0)$,

(*b*) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \quad \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$.

Démonstration. *a*) Voir Remarque (2.3.2)

b) En séparant deux cas :

(1) $\lambda > 0$, $T(\lambda x) = \lambda T(x) \leq \lambda T(x)$

(2) $\lambda < 0$, $T(\lambda x) \quad = T(-(-\lambda x))$

$$
\begin{aligned}
& \geq -T(-\lambda x)\ (suivant(a)) \\
& \geq \lambda T(x), \text{ car } (-\lambda > 0).
\end{aligned}
$$

Ce qui fallait démontré. □

Proposition 2.3.3. *Soient X, F deux espaces de Banach dont F réticulé et T dans $SL(X,F)$. Supposons qu'il existe u dans $L(X,F)$ tel que $T \leq u$. Alors*

$$T = u.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} T \leq u &\Longrightarrow T(x) \leq u(x), \forall x \in X, \\ &\Longrightarrow T(-x) \leq u(-x), \forall x \in X, \\ &\Longrightarrow T(x) \leq u(x) \leq -T(-x) \leq T(x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

D'où

$$T(x) = u(x), \quad \forall x \in X.$$

Ce qui donne la démonstration. □

2.4 La relation entre les opérateurs sous-linéaires et les opérateurs linéaires

Définition 2.4.1. *(sous différentiel d'un opérateur sous linéaire)*
Soit X, F deux espaces vectoriels dont F complétement réticulé et T dans $SL(X,F)$. On appelle sous différentiel de T, l'ensemble

$$\nabla T = \{u \in L(X,Y), u \leq T\}.$$

Remarque 2.4.1. *Si F est complétement réticulé, alors $\nabla T \neq \emptyset$.*

L'exemple suivant comfirme la nécessité de la condition, F est complétement réticulé.

Exemple 2.4.1. *Soit X un espace de Banach, X^* le dual topologique de X et $\langle\, , \rangle$ le crochet de dualité entre X et X^* .*
Soit $B = B_{X^*}$. On note par comp (B) l'espace de tous les sous-ensembles compacts non vide de B. On définit $P : X \longrightarrow C(S)$, S est un compact telle que :

$$P_x(t) = \sup \{\langle x, x' \rangle : x' \in T\} \, (x \in X, t \in T \in comp(B)).$$

On remarque que P est un sous-linéaire continu de X dans $C(S)$, en général $C(S)$ est réticulé, mais $\nabla P = \emptyset$, Pour plus de détails voir [8].
Maintenant, on donne le théorème qui établi la relation directe entre les opérateurs sous-linéaires et les opérateurs linéaires.

Théorème 2.4.1. *Soit X, F deux espaces de Banach dont F complétement réticulé et $T : X \longrightarrow F$ un opérateur sous-linéaire continu. Alors,*

a) $\forall x \in X$, $\sup\{\| T(x) \|, \| T(-x) \|\} \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \| u(x) \| \leq \| T(x) \| + \| T(-x) \|$.

b) $\| T \|_{SL(X,Y)} \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \| u \|_{L(X,Y)} \leq 2\| T \|_{SL(X,Y)}$.

Démonstration. *a)* D'après le Corollaire (2.5.2) on a pour tout $x \in X$,

$$T(x) = u_x(x);$$

si en remplaçant x par $(-x)$, on trouve

$$T(-x) = u_{-x}(-x)$$

alors

$$\| T(x) \| = \| u_x(x) \| \; et \; \| T(-x) \| = \| u_x(-x) \|$$

donc

$$\sup\{\| T(x) \|, \| T(-x) \|\} \leq \sup\{\| u_x(x) \|, \| u_{-x}(x) \|\} \leq \sup_{u\in\nabla T} \| u(x) \|.$$

Finalement

$$\forall u \in \nabla T : \| u(x) \| \leq \| T(x) \| + \| T(-x) \| \Longrightarrow \sup_{u\in\nabla T} \| u(x) \| \leq \| T(x) \| + \| T(-x) \|.$$

$b)$ Daprès $a)$ on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad \| T(x) \| &\leq \sup_{u\in\nabla T} \| u(x) \| \\ &\leq \sup_{u\in\nabla T} \| u \|\| x \| \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in X(x \neq 0), \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq \sup_{u\in\nabla T} \| u \| \Longrightarrow \| T \| \leq \sup_{u\in\nabla T} \| u \|.$$

□

Remarque 2.4.2. *Si T est symétrique (i.e.$\forall x \in X, \quad T(-x) = T(x)$). On a pour tout $x \in X$*

$$\| T(x) \|_F = \sup_{u\in\nabla T} \| u(x) \|_F.$$

et

$$\| T \|_{SL(X,F)} = \sup_{u\in\nabla T} \| u \|_{L(X,F)}.$$

Corollaire 2.4.1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$a)$ *u continu, pour tout $u \in \nabla T$.*

$b)$ *T continu.*

2.5 Extention du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires

Théorème 2.5.1. *(**Théorème de Hahn-Banach**)*
Soit X, F deux espaces vectoriels dont F complétement réticulé, $T \in SL(X, F)$ et X_0 un sous-espace vectoriel de X. Soit u dans $L(X_0, F)$ tel que $u \leq T$. Alors, u se prolonge en un opérateur linéaire $v \in L(X, F)$ tel que $v \leq T$.

Proposition 2.5.1. *Soit X, F deux espaces vectoriels dont F réticulé, $T \in SL(X, F)$ et X_0 un sous espace vectoriel de X. Soit u dans $L(X_0, F)$ tel que $u \leq T$. Alors,*
$\exists S : X \longrightarrow F$ sous-linéaire tel que,
$S/X_0 = u$ et $\quad S \leq T$.

Corollaire 2.5.1. *Soit $T : X \longrightarrow F$ sous-linéaire (pas linéaire). Alors, il existe $S : X \longrightarrow F$ sous-linéaire tel que $S \leq T$.*

Démonstration. Soit x_0 dans X tel que

$$-T(-x_0) < T(x_0).$$

On pose

$$\mathbb{R}x_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

et

$$u : \mathbb{R}x_0 \longrightarrow Y$$

telle que

$$u(\lambda x_0) = \lambda T(x_0), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

on a

$$u \leq T$$

En effet

$$u(x) = u(\lambda x_0) = \lambda T(x_0) \leq T(\lambda x_0).$$

D'après la proposition précédente, il existe S tell que :

$$S \leq T \quad et \quad S/\mathbb{R}x_0 = u.$$

□

Corollaire 2.5.2. *Soit X, Y deux espaces de Banach, dont Y complétement réticulé. Soit T dans $SL(X, F)$. Alors*

a)

$$\{u(x)/u \in \nabla T\} = [-T(-x), T(x)]$$

où la notation $[.,.]$ désigne l'intervalle d'ordre.

b) pour tout x dans X, il existe $u_x \in \nabla T$, telle que

$$T(x) = u_x(x), (i.e., le \sup \; est \; atteint \; T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x))$$

Démonstration. $a.1)$ Soit z dans $[-T(-x), T(x)]$. On pose pour tout λ dans $\mathbb{R}$

$$u(\lambda x) = \lambda z$$

alors

$$u \in \nabla(T/\mathbb{R}x)$$

car si $\lambda > 0$, on a

$$u(\lambda x) = \lambda z \leq \lambda T(x) = T(\lambda x)$$

et si $\lambda < 0$, on a

$$u(\lambda x) = \lambda z \leq -\lambda T(-x) \leq T(\lambda x).$$

Donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $u \in \nabla T$ tel que $u(x) = z$.

$a.2)$ Si $u \in \nabla T$, on a d'après ce qui précéde $-T(-x) \leq u(x) \leq T(x)$.

$b)$ Soit $x \in X$. On considére $v_x : \mathbb{R}x \longrightarrow Y$ telle que $v_x(\lambda x) = \lambda T(x)$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$. qui vérifié $v_x \leq T$, suivant le théorème de Hahn-Banach (2.5.1), il existe u_x(linéaire) telle que $u_x(\lambda x) = v_x(\lambda x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, u_x \leq T$, et $u_x(y) = T(y)$ pour tout $y \in X$.

□

Chapitre 3

Les opérateurs sous-linéaires positifs

On étudiera la continuité d'un opérateur sous-linéaire positif croissant à valeurs dans un espace de Banach réticulé, et on adaptera quelques notions comme la concavité et la convexité avec les opérateurs sous-linéaires positifs.

3.1 Les opérateurs linéaires positifs

Dans cette section, on étudiera les opérateurs linéaires positifs et leurs propriétés. Maintenant, on donne la définition d'un opérateur linéaire positif.

Définition 3.1.1. *Soient E, F deux espaces réticulés.*
On dit qu'un opérateur linéaire $u : E \longrightarrow F$ est positif ($u \geq 0$ ou $0 \leq u$) si,

$$u(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in E_+.$$

Proposition 3.1.1. *On dit qu'un opérateur linéaire $u : E \longrightarrow F$ entre deux espaces réticulés est positif si, et seulement si,*

$$u(E_+) \subseteq F_+.$$

Remarque 3.1.1. *Si $u, v \in L(E, F)$, (l'espace des opérateurs linéaires de E dans F muni par l'ordre $u \leq v$),*
alors l'opérateur $u - v$ est positif (c-à-d $[u - v](x) \geq 0$, pour tout $x \in E_+$).

Proposition 3.1.2. *On dit qu'un opérateur $u : E \longrightarrow F$ entre deux espaces réticulés est positif si, et seulement si,*

$$x \leq y \Longrightarrow u(x) \leq u(y), \forall x, y \in E. (\text{i.e. } u \text{ est croissant}).$$

c.à.d

$$u \text{ est linéaire positif} \Leftrightarrow u \text{ est croissant.}$$

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ Si u est positif, alors u est croissant. Car,
soient deux éléments quelconques x, y dans X telle que $x \geq y$ alors,

$$0 \leq u(x - y) = u(x) - u(y) \Longrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Donc u est croissant .

ii) $\Longleftarrow$ On a

$$\forall x, y \in E, x \leq y \; (c.à.d \; y - x \geq 0) \Longrightarrow u(x) \leq u(y) \Longrightarrow 0 \leq u(y) - u(x) = u(y - x).$$

Alors u est positif.

□

Proposition 3.1.3. *Soient X, F, G trois espaces de Banach dont F, G réticulés.On a*

$$\forall T \in SL(X, F) \; et \; \forall u \in L(Y, G) \; (positif) \; \Longrightarrow u \circ T \in SL(X, G).$$

Démonstration. Evidente. □

3.2 Quelques propriétés importantes pour les opérateurs positifs

Définition 3.2.1. *Soit X, F deux espaces de Banach, dont F complétement réticulé. On dit qu'un opérateur $u \in B(X, F)$ est borné pour l'ordre si, $u(B_X)$ est un sous-ensemble borné pour l'ordre dons F.*
Dans ce cas en pose :

$$\ell(u) = \left\| \sup_{x \in B_X} \mid u(x) \mid \right\|.$$

On peut montrer que ℓ est une norme sur $\ell(X, F)$, l'espace des applications bornés pour l'ordre de X dans F.

Proposition 3.2.1. *Si $u \in \ell(X, Y)$ et $w : F \longrightarrow G$ (G Banach complétement réticulé) est un opérateur linéaire positif, alors wu et un opérateur borné pour l'ordre.*

Démonstration. Il est clair que $wu(B_X)$ est un sous-ensemble borné pour l'ordre dans G.
Maintenant. On annonce le théorème important, qui établi l'extention d'un opérateur positif.

□

Théorème 3.2.1. *(**Théorème de Kantorovič**)*

Si l'opérateur $u : E_+ \longrightarrow F_+$ est additive c-à-d
($u(x + y) = u(x) + u(y)$ pour tout x, y dans E_+), alors u se prolonge, d'une façon unique, à un opérateur positif $u : E \longrightarrow F$, telle que

$$u(x) = u(x_+) - u(x_-), \; pour \; tout \; x \in E.$$

Démonstration. Si l'opérateur $v : E \longrightarrow F$ est une extension de u, alors v est positif et $v(x) = u(x_+) - u(x_-)$ pour tout $x \in E$.
u a une extension. S'il a une extension v telle que $v(x) = u(x_+) - u(x_-)$ pour tout $x \in E$.
Ainsi, il reste à montrer est ce que $v(x) = u(x_+) - u(x_-)$ défini un opérateur de E dans F?

1) u additive.
   On a si $x = y - z$ avec $y, z \in E_+$, alors $v(x) = u(y) - u(z)$.
   de $x = x_+ - x_- = y - z$, alors $x_+ + z = y + x_-$, puisque u est additif, on écrit

$$u(x_+) + u(z) = u(y) + u(x_-)$$

   ainsi,

$$v(x) = u(x_+) - u(x_-) = u(y) - u(z).$$

   Et on a pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} v(x+y) &= v([x_+ + y_+] - [x_- + y_-]) \\ &= u(x_+ + y_+) - u(x_- + y_-) \\ &= [u(x_+) - u(x_-)] + [u(y_+) - u(y_-)] \\ &= v(x) + v(y). \end{aligned}$$

2) u homogéne
   Si $0 \leq y \leq x$ prise dans E, alors $u(y) \leq u(x)$ dans F.

$$u(y) \leq u(y) + u(x - y) = u(y + [x - y]) = u(x).$$

   Soit $x \in E_+$ et $\lambda > 0$. Soient deux suites rationnelles $(t_n)_n$ et $(r_n)_n$ avec $0 \leq r_n \uparrow \lambda$ et $t_n \downarrow \lambda$. Et comme u est additif sur E_+, on écrit

$$r_n u(x) = u(r_n x) \leq u(\lambda x) \leq u(t_n x) = t_n u(x),$$

   alors

$$u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

   Finalement, soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en séparant deux cas :

   1) $\lambda \geq 0$, alors

$$v(\lambda x) = u(\lambda x_+) - u(\lambda x_-) = \lambda u(x_+) - \lambda u(x_-) = \lambda v(x)$$

   2) $\lambda < 0$, alors

$$v(\lambda x) = -v(-\lambda x) = -(-\lambda) v(x) = \lambda v(x)$$

   Ce qui fallait démontré.

$\square$

On aura l'extention du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs positifs

3.2.1 Rappel

On dit que G est un sous espace réticulé d'un espace réticulé E si G est un sous espace vectoriel de E et

$$\forall x, y \in G : \sup\{x, y\} \in G.$$

Définition 3.2.2. *Soit E un ensemble partiellement ordonné est dit complétement Dedikend (complétement réticulé) si.*

$$\forall A(\neq \emptyset) \subset E \text{ majoré (resp.minoré), } \sup A \text{ (resp. } \inf A) \text{ existe dans } E.$$

Théorème 3.2.2. *Soit $u : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire positif entre deux espaces réticulés avec F complétement réticulé . Soit G un sous espace réticulé de E, et soit $v : G \longrightarrow F$ un opérateur linéaire vérifie*
$0 \leq v(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in G_+$. Alors, on peut prolonger v à un opérateur linéaire positif de E dans F telle que $0 \leq v \leq u$ dans $L(E, F)$.

Démonstration. On défini le sous-linéaire $p : E \longrightarrow F$ par $p(x) = u(x_+)$, qui vérifie, $v(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in G$. Alors il existe un opérateur v défini sur E tout entier, satisfait $v(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. En plus, si $x \in E_+$, alors

$$-v(x) = v(-x) \leq p(-x) = u((-x)_+) = u(x_-) = u(0) = 0,$$

et

$$0 \leq v(x) \leq p(x) = u(x_+).$$

Ce qui termine la démonstration. □

Les opérateurs linéaires positifs entre Banach réticulés sont continus. Maintenant, on expose une importante propriété pour les opérateurs linéaires positifs.

Définition 3.2.3. *Pour un opérateur $u : E \longrightarrow F$ entre deux espaces réticulés, on peut définir l'opérateur $\mid u \mid$ si, $\sup\{u, -u\}$ existe. par $\mid u \mid = \sup\{u, -u\} \in L(E, F)$.*

Théorème 3.2.3. *Soit $u : E \longrightarrow F$ un opérateur entre deux espaces réticulés. telle que $\sup\{\mid u(y) \mid : \mid y \mid \leq x\}$ existe dans F pour tout $x \in E_+$. Alors $\mid u \mid$existe, et*

$$\mid u \mid (x) = \sup\{\mid u(y) \mid : \mid y \mid \leq x\},$$

pour tout $x \in E$.

Remarque 3.2.1. *Soit $u : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire telle que E, F sont des espaces réticulés, si $\mid u \mid$ existe, alors*

$$\mid u(x) \mid \leq \mid u \mid (\mid x \mid).$$

pour tout $x \in E$.
De $-x \leq \mid x \mid$ et $x \leq \mid x \mid$ nons voyons que $-u(x) \leq u(\mid x \mid)$ et $u(x) \leq u(\mid x \mid)$, et ainsi

$$\mid u(x) \mid \leq u(\mid x \mid) \leq \mid u \mid (\mid x \mid)$$

pour tout $x \in E$.
Les opérateurs linéaires positifs entre les Banach réticulés sont nécessairement continus.

Théorème 3.2.4. *Tout opérateur linéaire positif d'un espace de Banach réticulé dans un espace normé réticulé est continu.*

Démonstration. Soit $u : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire positif, dont E et F sont, successivement, espace de Banach réticulé et espace normé réticulé.
On suppose que u n'est pas continu. Alors il existe une suite (x_n) de E avec $\| x_n \|= 1$ et $\| u(x_n) \|\geq n^3$ pour tout n. On a $| u(x_n) |\leq u(| x_n |)$, on peut prendre $x_n \geq 0$ pour tout n. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\| x_n \|}{n^2} < \infty$ et E est complet, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ converge en norme dans E. Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ Donc, il est clair que $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ pour tout n, et

$$n \leq\| u(\frac{x_n}{n^2}) \|\leq\| u(x) \|< \infty, \textit{ pour tout } n$$

Ceci est impossible. Alors u est continu . □

3.2.2 Les opérateurs sous-linéaires positifs

Définition 3.2.4. *Soit T une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé F.*
On dira que T est sous-linéaire positif si,

i)	$\forall\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X$	$T(\lambda x)$	$=$	$\lambda T(x)$,	*positivement homogéne,*
ii)	$\forall x, y \in X$	$T(x+y)$	$\leq$	$T(x) + T(y)$,	*sous-additive,*
iii)	$\forall x \in X$	$T(x)$	$\geq$	0	*positivité.*

Remarque 3.2.2. *a) Si T est un sous-linéaire positif, alors $| T |$ est un quasilinéaire.*

On dira qu'un opérateur est quasilinéaire si, et seulement si :
1) $\forall\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X \quad | T(\lambda x) |= \lambda | T(x) |$
2) $\forall x \in X, \forall y \in X \quad | T(x+y) |\leq| T(x) | + | T(y) |$.

b) Si u est un opérateur linéaire, alors $| u |$ est un sous-linéaire positif.

Proposition 3.2.2. *Soit X, F, G trois espace de Banach dont F, G réticulés.*

$$\forall T \in SL(X, F) \textit{ et } \forall S \in SL(F, G) \ (\textit{croissant}) \Longrightarrow S \circ T \in SL(X, G).$$

Démonstration. Soit x, y deux éléments quelconques dans X et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
On a :

i) $S \circ T(x+y) = S[T(x+y)] \leq S[T(x) + T(y)]$ (car S est croissant.)
$\leq S \circ T(x) + S \circ T(y)$
ii) $S \circ T(\lambda x) = S[T(\lambda x)] \quad = S[\lambda T(x)] = \lambda(S \circ T)(x)$.

Ce qui fallait démontré. □

Proposition 3.2.3. *Soit T un opérateur sous-linéaire symétrique ($\forall x \in X; \ T(-x) = T(x)$) entre un espace de Banach X et un espace de Banach réticulé Y. Alors, T est sous-linéaire positif*

$$(i.e. \ T \geq 0).$$

Démonstration. Soit x un élément quelconque dans X

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & T(0) \\ & = & T(x-x) \\ & \leq & T(x)+T(-x) \\ & \leq & 2T(x). \end{array}$$

□

Les inégalités de Hölder et Minkowski pour les opérateurs sous-linéaires positifs

Pour la démonstration, nous référons le lecteur intéressé au [9].

Proposition 3.2.4. ***(L'inégalité de Hölder)***
Soient (Ω, Σ, μ) et (Ω', Σ', ν) deux espaces mesurés, soit $C \subset M(\Omega, \mu)_+, M(\Omega, \mu)$ est l'espace des fonctions mesurables sur Ω, un sous-cône, et soit l'opérateur sous-linéaire positif, monotone $T : C \longrightarrow M(\Omega', \nu)_+$. Si $f, g \in M(\Omega, \mu)_+$ telle que $f^p, g^{p'}, 1 \leq p, p' < \infty$, et fg dans C alors,

$$T(fg) \leq (T(f^p))^{1/p}(T(g^{p'}))^{1/p'}; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

dans $M(\Omega', \nu)$.

Proposition 3.2.5. *Dans les même conditions de la proposition précédente, on a :*

$$(T(f+g)^p)^{1/p} \leq (T(f^p))^{1/p} + (T(g^p))^{1/p}$$

dans $M(\Omega', \nu)$.

Lemme 3.2.1. *(**L'inégalité de Young**)*
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $1 < p, q < \infty$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Remarque 3.2.3. *Comment généraliser l'inégalité de Young pour les opérateurs sous-linéaire positif ?*

Lemme 3.2.2. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur sous-linéaire croissant telle que E, F sont des espaces réticulés, si $\mid T \mid$ existe, alors*

$$\mid T(x) \mid \leq \mid T \mid (\mid x \mid)$$

pour tout $x \in E$.
Comme $x \leq \mid x \mid$ et $-x \leq \mid x \mid$ alors d'après la Proposition (2.3.2)-b et la croissance de T, on a

$$\forall x \in E, T(x) \leq T(\mid x \mid),$$

et

$$\forall x \in E, -T(x) \leq T(-x) \leq T(\mid x \mid),$$

et ainsi

$$\mid T(x) \mid \leq T(\mid x \mid) \leq \mid T \mid (\mid x \mid)$$

pour tout $x \in E$

Maintenant, on étudie la continuité d'un opérateur sous-linéaire positif croissant. On adapte la même démonstration qu'en le cas linéaire (voir [7]). Mais (*sans la croissance*), on ignore la réponse.

Proposition 3.2.6. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur sous-linéaire positif et croissant, entre deux espaces de Banach réticulés. Alors . T est continu.*

Démonstration. On suppose que T n'est pas continu. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de E avec $\| x_n \|= 1$ et $\| T(x_n) \| \geq n^3$ pour tout n. On a $| T(x_n) | \leq T(| x_n |)$, on peut prendre $x_n \geq 0$ pour tout n.
Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} < \infty$ et E est complet, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ converge en norme dans E. Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$. Donc, il est clair que $0 \leq \frac{x_n}{n^2} \leq x$ pour tout n, et $T(\frac{x_n}{n^2}) \leq T(x)$, pour tout n, car T est croissant, et comme la norme l'est aussi, on écrit :

$$n \leq \| T(\frac{x_n}{n^2}) \| \leq \| T(x) \| < \infty, \; pour\ tout\ n.$$

Ceci est impossible. Alors T est continu. □

Définition 3.2.5. *(**La définition d'un opérateur sous-linéaire p-régulier**)*
On dira qu'un opérateur sous-linéaire borné T entre deux espaces de Banach réticulés E, F est p-régulier, $1 \leq p < \infty$, si il existe une constante positive C telle que pour tout suite finie $(x_i) \subset E$, on a

$$\| T(x_i) \|_{F(\ell_p^n)} \leq C \| (x_i) \|_{E(\ell_p^n)} \tag{3.1}$$

si p est fini, et si p est infini on prend le sup.

On note par

$$\rho_p(E, F) = \{les\ opérateurs\ sous-linéaires\ p-régulier\}.$$

et

$$\rho_p(T) = \inf\{C, vérifiant\ (3.1)\}.$$

Tout opérateur linéaire borné est $2-$régulier et tout opérateur linéaire positif est p-régulier pour $1 \leq p < \infty$. Car.

a) On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \; où \sum_{i=1}^{n} | a_i |^q \leq 1 \; et \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (suivant\, Krivine)$$

par suite,

$$T\left(\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i). \tag{3.2}$$

Par conséquent.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} | T(x_i) |^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i); \sum_{i=1}^{n} | a_i |^q \leq 1\right\} \leq T\left(\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p}\right).$$

Alors, car la norme est croissante,

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | T(x_i) |^p \right)^{1/p} \right\| \leq \| T \| \left\| \left(\left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p} \right) \right\|.$$

b) On applique (3.2) pour $p = \infty$, donc on a $\sup\limits_{1\leq i\leq n} | x_i | \geq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, *où* $\sum\limits_{i=1}^{n} | a_i | \leq 1$ ce qui donne

$$T \left(\sup_{1\leq i\leq n} | x_i | \right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

donc

$$\sup_{1\leq i\leq n} | T(x_i) | = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i); \sum_{i=1}^{n} | a_i | \leq 1 \right\} \leq T \left(\sup_{1\leq i\leq n} | x_i | \right)$$

alors

$$\left\| \sup_{1\leq i\leq n} | T(x_i) | \right\| \leq \| T \| \left\| \sup_{1\leq i\leq n} | x_i | \right\|.$$

L'exemple suivant indique qu'un opérateur sous-linéaire positif n'est pas 2-régulier .

Exemple 3.2.1.

$$\begin{array}{rcll} S_r : L_2(\Omega, \mu) = L_2(T) & \longrightarrow & L_1(\Omega, \mu) & \textit{telle que } T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ f & \longrightarrow & S_r f(x) = \dfrac{1}{2r} \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} | f(y) |^2 dy, & \forall x \in \mathbb{R} \textit{ et } 0 < r \leq \pi. \end{array}$$

On pose $T_r f = \sqrt{S_r f}$, *l'opérateur* T_r *est sous-linéaire, et l'opérateur* T *défini par :*

$$Tf = \max\{T_r f : 0 < r < \pi\}$$

est sous-linéaire positif mais n'est pas 2-régulier. Pour plus de détails [2].

Définition 3.2.6. *Un opérateur sous-linéaire* $T : X \longrightarrow F$ *est dit p-convexe* $(1 \leq p \leq \infty)$ *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, *les opérateurs*

$$\begin{array}{rcl} T_n : \ell_p^n(X) & \longrightarrow & F(\ell_p^n) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & (T(x_1), \ldots, T(x_n)). \end{array}$$

Sont uniformement bornés par C.
C'est à dire que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)|^p \right)^{1/p} \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)^{1/p} \quad \textit{si } (1 \leq p \leq \infty),$$

$$\left\| \sup_{1\leq i\leq n} | T(x_i) | \right\| \leq C \sup_{1\leq i\leq n} \| x_i \| \qquad \textit{si } p = \infty.$$

Proposition 3.2.7. *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* F *un espace de Banach réticulé. Alors* **i**) $\Leftrightarrow$ **ii**). *Telle que :*

i) *F est un p-concave.*

ii) *Tout opérateur sous-linéaire positif et p-régulier $T : X \longrightarrow F, X$ un Banach réticulé, est un p-concave.*

Démonstration. **ii)** $\Longrightarrow$ **i)** il suffit de prendre $X = F$ et $T = Id_X$.
i) $\Longrightarrow$ **ii)** On suppose que F est un p-concave, c-à-d,

$$\forall f_1, f_2, \cdots, f_n \in F : \left(\sum_{i=1}^{n} \| f_i \|^p\right)^{1/p} \leq K \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^p\right)^{1/p} \right\|.$$

Pour tous $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dans X,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|^p\right)^{1/p} &\leq K \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | T(x_i) |^p\right)^{1/p} \right\|, && \text{suivant } i) \\ \text{p-régulier} \quad &\leq K' \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p} \right\|, && \text{où } K' = K \| T \| . \end{aligned}$$

Donc T est p-concave. □

Corollaire 3.2.1. *Tout opérateur sous-linéaire positif et p-régulier $T : X \longrightarrow L_p, 1 \leq p < \infty$, X un Banach réticulé, est borné.*

Démonstration. On sait que les $L_p, 1 \leq p < \infty$, sont p-concave, et $C_p(L_p) = 1$. Alors, pour tous les vecteurs $x_1, \cdots, x_n \in X$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|_p^p\right)^{1/p} &\leq \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | T(x_i) |^p\right)^{1/p} \right\|_p \\ \text{p-régulier} \quad &\leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p} \right\|_X \end{aligned}$$

Donc T est p- concave.
Et comme les opérateurs sous-linéaires p-concave sont bornés . Alors T est borné. □

Proposition 3.2.8. *Soit X un espace de Banach réticulé et $1 < p < \infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) X est p-convexe.

(ii) pour tout Banach réticulé F, tout opérateur sous-linéaire positif et p-régulier $T : X \longrightarrow F$ est p-convexe.

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a, pour tous vecteurs $x_1, \cdots, x_n \in X$:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | T(x_i) |^p\right)^{1/p} \right\|_F &\leq \| T \| \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p\right)^{1/p} \right\|_X, \quad \text{p-régulier} \\ &\leq C \| T \| \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_X^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Alors T est p-convexe. l'inverse est évident. □

Définition 3.2.7. *Supposons que $1 \leq p < \infty$ et $u \in L(X;Y)$. On dit que l'opérateur u est absolument $p-$sommant, si il existe une constante $C > 0$, et pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^{n}$de X on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} | \langle x_k, x^* \rangle |^p\right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\pi_p(X;Y)$ et on note par $\pi_p(u)$ la borne inférieure des constantes C vérifiant (3.3)

Remarque 3.2.4. *1. En vertu des formules (1.1) et (1.2), la formule (3.3) peut encore s'écrit :*

$$\| (u(x_k))_{k=1}^{n} \|_p \leq C \| (x_k)_{k=1}^{n} \|_{p,w} \tag{3.4}$$

Donc on peut tirer que les opérateurs p-sommants transforment des suites faiblement p-sommantes vers des suites fortement p-sommantes.

Dans le cas $p = \infty$, la formule (3.4) s'écrit :

$$\| (u(x_k))_{k=1}^{n} \|_\infty \leq C \| (x_k)_{k=1}^{n} \|_{\infty,w}$$

et en vertu de (1.3) on aura :

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \| u(x_k) \| \leq C \sup_{1 \leq k \leq n} \| (x_k) \|$$

On conclut que si $p = \infty$ l'ensemble $\pi_\infty(X;Y)$ sera identique à $\mathcal{L}(X;Y)$. Enonçons maintenant une proposition importante qui fait la liaison entre l'espace $\pi_p(X;Y)$ et l'espace $\mathcal{L}(X;Y)$.

Remarque 3.2.5. *Le lecteur interessé pourra consulter [4]*

3.3 Les opérateurs linéaires positivement p-sommants

En cette section nous serons concernés par un concept plus faible qu'un opérateur p-absolument sommant et plus fort qu'un opérateur p-concave.

Définition 3.3.1. *Soit $1 \leq p < \infty$. Un opérateur $T : E \longrightarrow Y$ serait positivement p-sommant si il existe une constante $C > 0$ tels que pour chaque $x_1, \cdots, x_n$ des éléments positifs dans E, on a :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} | \langle \xi, x_i \rangle |^p\right)^{1/p} \tag{3.5}$$

Nous dénoterons par $\Lambda_p(E,Y)$ l'espace des opérateurs positivement p-sommants du Banach réticulé E dans un espace de Banach Y. Cet espace devient un espace de Banach avec la norme $\| \,.\, \|_{\Lambda_p}$ donnée par l'inférieure des constantes dans (3.5).
Pour $p = \infty$, les sommes devraient être remplacées par le sup, et $\| T \|_{\Lambda_\infty} = \| T \|$.

Nous dénoterons également par $\Pi_p(E,Y)$ et $C_p(E,Y)$ les espaces des opérateurs p-absolument sommant et des opérateurs p-concaves respectivement .
Une utilisation simple de la dualité $(\ell_p)^* = \ell^{p'}, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, nous mène à l'égalité utile suivante :

$$\sup_{\|\xi\|_{E^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} | \langle \xi, x_i \rangle |^p\right)^{1/p} = \sup_{\alpha \in U_{p'}^+} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|_E, \tag{3.6}$$

où

$$U_{p'}^{+} = \left\{ \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{n} : \sum_{i=1}^{n} \mid \alpha_i \mid^{p'} \leq 1,\ \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

La proposition suivante établi la relation entre les trois types des opérateurs.

Proposition 3.3.1.

$$\Pi_p(E, Y) \subseteq \Lambda_p(E, Y) \subseteq C_p(E, Y) \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Démonstration. La première inclusion est complètement évidente. Pour voir la seconde, prenons T dans $\Lambda_p(E, Y)$ et $x_1, \cdots, x_n$ dans E,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|_Y^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i{}^{+}) \|_Y^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i{}^{-}) \|_Y^p \right)^{1/p} \\
&\leq \| T \|_{\Lambda_p} \left(\sup_{\alpha \in U_{p'}^{+}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{+} \right\|_E + \sup_{\alpha \in U_{p'}^{+}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-} \right\|_E \right) \\
&\leq 2 \| T \|_{\Lambda_p} \sup_{\alpha \in U_{p'}^{+}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mid x_i \mid \right\|_E
\end{aligned}$$

On a suivant Krivine :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mid x_i \mid \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \text{ pour tous } \alpha \in U_{p'}^{+},$$

et puis

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| T(x_i) \|_Y^p \right)^{1/p} \leq 2 \| T \|_{\Lambda_p} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \right\|_E.$$

Ainsi

$$T \in C_p(E, Y).$$

□

Remarque 3.3.1. *Donnons deux exemples pour se rendre compte que ces inclusions peuvent être strictes.*

Un exemple d'un opérateur p-concave et d'un opérateur non-positive p-sommant peut simplement être l'identité $I : \ell^p \longrightarrow \ell^p$, pour $1 < p \leq 2$. Ce fait peut être montré par la prise $\{(e_n)\}$ comme base habituelle dans ℓ^p et en notant

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| e_i \|^p \right)^{1/p} = n^{1/p}$$

et

$$\sup_{\|\xi\|_{p'} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \mid \langle \xi, e_i \rangle \mid^p \right)^{1/p} = \sup_{\|\xi\|_{p'} \leq 1} \| \xi \|_p \leq \sup_{\|\xi\|_{p'} \leq 1} \| \xi \|_{p'} \leq 1.$$

Maintenant, on donne le théorème de Radon-Nikodym.

Théorème 3.3.1. *Soient m et μ deux mesures définies sur le même espace mesurable (X, F). Si m est telle que $m(E)$ tende vers zéro uniformément lorsque $\mu(E)$ tend vers zéro, c'est-à-dire si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \mu(E) < \eta \Longrightarrow m(E) < \epsilon.$$

Il existe une fonction mesurable Φ à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ telle que

$$m(E) = \int_E \Phi d\mu$$

pour tout ensemble E.

On dit dans ce cas que m est absolument continue par rapport à μ.

Dans la Proposition (3.3.2) au-dessous nous prouverons cela $\Lambda_p(L^1(\mu), Y) = L(L^1(\mu), Y)$ pour tous p, $1 \leq p \leq \infty$. D'autre part si nous considérons Y un espace de Banach sans propriété de Radon-Nikodym.Alors, il existera un opérateur $T : L^1(\mu) \longrightarrow Y$ ce qui n'est pas représentable par une fonction. Par conséquent cet opérateur T ne peut pas appartenir à $\Pi_p(L^1(\mu), Y)$ puisque chaque opérateur p-absolument sommant est faiblement compact et ces derniers toujours des representables.

Proposition 3.3.2. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$.

$$(a)\ \Pi_p(C(\Omega), Y) = \Lambda_p(C(\Omega), Y) = C_p(C(\Omega), Y),$$
$$(b)\ \Lambda_p(L^1(\mu), Y) = L(L^1(\mu), Y).$$

Théorème 3.3.2. $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right) = \Lambda_1\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$, *pour* $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont déjà prouvés. Supposons $1 < p < \infty$ et prenons T dans $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$. Nous allons voir que T appartient au $\Lambda_1\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$.
Considérons la mesure fini et additive $G : A \longrightarrow Y$ défini $G(E) = T(\chi_E)$ pour tous les ensembles mesurables E.
Il est facile de vérifier que G est comptable additif. E maintenant donné dans A et la notation par π_E la partition fini de E, par l'inégalité de Hölder et de 2 on a le suivant :

$$\begin{aligned}
\mid G \mid (E) &= \sup_{\pi_E} \sum_{i=1}^{n} \| G(A_i) \| \\
&= \sup_{\pi_E} \sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(\chi_{A_i}, \mu(A_i)^{-1/p'}\right) \right\| \mu(A_i)^{1/p'} \\
&= \sup_{\pi_E} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(\chi_{A_i}, \mu(A_i)^{-1/p'}\right) \right\|^p \right)^{1/p} \mu(E)^{1/p'} \\
&\leq \mu(E)^{1/p'}.\| T \|_{\Lambda_p}. \sup_{\alpha \in U_{p'}^+} \left\| \alpha_i \chi_{A_i}.\mu(A_i)^{-1/p'} \right\|_{p'} \\
&= \| T \|_{\Lambda_p}.\mu(E)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

De ceci il suit que le $\mid G \mid$ est une mesure positive finie qui est absolument continue en ce qui concerne μ. Par conséquent que le théorème de Radon-Nikodym implique qu'il existe une

fonction $g \geq 0$ dans $L^1(\mu)$ avec $\mid G \mid (E) = \int_E g(t)d\mu$ pour tout E dans A.
Montrons que g appartient à $L^p(\mu)$. En effet, depuis

$$\| g \|_p = \sup\left\{\left|\int_\Omega g(t)s(t)d\mu\right| : s = \sum_{i=1}^n \alpha_i\chi_{E_i}, \| s \|_{p'} \leq 1\right\},$$

alors il est clair que

$$\| g \|_p \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^n \mid G \mid (E_i).\alpha_i : \sum_{i=1}^n \alpha_i^{p'}\mu(E_i) \leq 1, \alpha_i \geq 0\right\}.$$

En vérifiant cette somme on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \mid G \mid (E_i).\alpha_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{\pi_{E_i}} \sum_{i=1}^{j_i} \| G(E_{i,j}) \|\right)\alpha_i \\ &\leq \sup_{\pi_\Omega}\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{j_i} \| G(E_{i,j}) \| \alpha_{i,j}, \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{j_i} \alpha_{i,j}^{p'}\mu(E_{i,j}) \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\| g \|_p \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^m \| G(A_k) \| \beta_k : \sum_{i=1}^n \beta_k^{p'}\mu(A_k) \leq 1, \quad m \in \mathbb{N}, \beta_k \geq 0\right\}$$

$$\begin{aligned}&= \sup\left\{\sum_{i=1}^m \left\|T\left(\chi_{A_k}, \mu(A_k)^{-1/p'}\right)\right\|.\gamma_k, \sum_{i=1}^m \gamma_k^{p'} \leq 1, \quad m \in \mathbb{N}, \gamma_k \geq 0\right\} \\ &\leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=1}^m \left\|T\left(\chi_{A_k}.\mu(A_k)^{-1/p'}\right)\right\|\right) \leq \| T \|_{\Lambda_p}.\end{aligned}$$

De ceci

$$\| g \|_p = \| T \|_{\Lambda_p}.$$

Maintenant depuis $\| T(\chi_E) \| \leq \int_\Omega \chi_E.g(t)d\mu$ nous pouvons obtenir

$$\| T(\Psi) \| \leq \int_\Omega \mid \Psi(t) \mid .g(t)d\mu \; pour\, tous\; \Psi \in L^{p'}(\mu). \tag{3.7}$$

de (3.7) il est facile de vérifier que T appartient à $\Lambda_1(L^{p'}(\mu), Y)$. En effet, donné $\Psi_1, \cdots, \Psi_n \geq 0$ dans $L^{p'}(\mu)$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \| T(\Psi_i) \| &\leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega \mid \Psi_i(t) \mid .g(t)d\mu \\ &= \int_\Omega g(t)\left(\sum_{i=1}^n \Psi_i(t)\right)d\mu \\ Ing.\ Hölder &\leq \| g \|_p.\left\|\sum_{i=1}^n \Psi_i\right\|_{L^{p'}(\mu)}\end{aligned}$$

Par conséquent $\| T \|_{\Lambda_p} = \| T \|_{\Lambda_1}$.
Ce qui fallait démontré. □

Nous écrirons $L^p(\mu, Y)$ pour l'espace des fonctions mesurables sur Ω, où Ω est un espace compact et (Ω, A, μ) est une espace mesuré fini, avec $\| f \|_p = \left(\int_\Omega \| f(t) \|_Y^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$.
Remarquons le résultat de Rosenthal ainsi que le fait,

$$\Pi_2(C(\Omega), L^p(\mu)) = L(C(\Omega), L^p(\mu)) \; pour \; 1 \leq p \leq 2.$$

On a pour n'importe quel espace de Banach Y.

$$\Pi_2(L^p(\mu), Y) = \Pi_1(L^p(\mu), Y)$$

Définition 3.3.2. *Un opérateur quel applique les suites positifs $(x_n)_n$ avec $\sup\limits_{\|\xi\|_{E^*}} \sum | \langle \xi, x_n \rangle |^p < \infty$ dans les suites $\{T(x_n)\}$ tels que $\sum \| T(x_n) \|^p < \infty$ s'appellera un opérateur positivement p-sommant.*

C'est-à-dire T transforme une suite positive faiblement p-sommable en une suite fortement p-sommable.
Au cas où $p = 1$, de tels opérateurs s'appellent sommants ou cône absolument sommant des opérateurs et pour $1 < p < \infty$, il sont été déjà considérés par l'auteur.

Proposition 3.3.3. *a) Si*

$$X_1 \subseteq X_2, \overline{X_1} = X_2, \; 1 \leq p \leq \infty.$$

Alors

$$\Lambda_p(X_2, Y) \subseteq \Lambda_p(X_1, Y), \tag{3.8}$$

b)

$$\Lambda_p(E, Y) \subseteq \Lambda_q(E, Y) \; si \; 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Corollaire 3.3.1. *Si $1 \leq p \leq 2$, alors*

$$\Lambda_2(L^p(\mu), Y) = \Lambda_1(L^p(\mu), Y).$$

Rappelons-nous que Y a la propriété de Radon-Nikodym si, et seulement si chaque opérateur T dans $L(L^1(\mu), Y)$ est représentable par une fonction $f \in L^\infty(\mu, Y)$; dans notre terminologie,

$$\Lambda_\infty(L^1(\mu), Y) = L^\infty(\mu, Y).$$

Ce résultat peut-être prolongé pour chaque valeur de p.
Tout d'abord, chaque fonction f dans $L^p(\mu, Y)$ détermine un opérateur $T : L^{p'}(\mu) \longrightarrow Y$ donné par $T(\Psi) = \int_\Omega f(t)\Psi(t)d\mu$.
C'est calcul simple pour vérifier que T appartient à $\Lambda_1\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$ et donc à $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$.
Ceci singnifie que

$$L^p(\mu, Y) \subseteq \Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right).$$

En outre on a le suivant.

Théorème 3.3.3. *Soit $1 < p \leq \infty$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(a) Y a la propriété de Radon-Nikodym
(b) $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right) = L^p(\mu, Y)$.

Démonstration. Supposons Y vérifie la propriété de Radon-Nikodym et prenons T dans $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$.
En considérant $G(E) = T(\chi_E)$ nous nous sommes avérés dans le théorème (3.3.2) que G est une mesure absolument continue en ce qui concerne μ et avec la variation bornée. La propriété de Radon-Nikodym de Y implique l'existence d'une fonction f dans $L^1(\mu, Y)$ tels que $\mid G \mid(E) = \int_E \| f(t) \| d\mu$ et comme dans la démonstration du théorème (3.3.2) il peut montrer que f appartient à $L^p(\mu, Y)$ et, en outre, T est représentable par f.
Pour voir l'inverse supposons $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right) = L^p(\mu, Y)$ et prenons un opérateur T dans $L(L^1(\mu), Y) = \Lambda_p(L^1(\mu), Y)$. De (3.8) on a T dans $\Lambda_p\left(L^{p'}(\mu), Y\right)$ et donc T est représentable par une fonction dans $L^p(\mu, Y)$, c'est $T(\Psi) = \int_\Omega f(t)\Psi(t)d\mu$ pour chaque fonction simple Ψ.
Enfin, f appartient réellement à $L^\infty(\mu, Y)$ et $T(\Psi) = \int_\Omega \Psi(t)f(t)d\mu$ pour tout Ψ dans $L^1(\mu)$. $\square$

Bibliographie

[1] M. Abdelhafid. *Cours de Topologie*. Office des Publication Universitaires, 1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger).

[2] D. Achour and L. Mezrag. *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators*. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004) 541-552.

[3] D. Achour et L. Mezrag. *Factorisation des opérateurs sous-linéaires par L_{p^∞} et L_{q^1}* Ann. Sci. Math. Quebec 26 (2002) 109-121.

[4] A. Baflah. *Les opérateurs p-sommants*, Mémoire de master. Université de Laghouat, 2014.

[5] A. Belacel. *Sur les espaces de Köthe*, Thèse de magister. Université de M'sila, 2006.

[6] O. Blasco. *Positive p-summing Operators on L_p-spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 100. Number 2, june(1987).

[7] D. Charalanbos Alipantis and Owen Bur Kinshaw. *Positive operators*. Academic press, INC, 1985.

[8] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press ,1995.

[9] M. Haase. *Convexity Inequalities for positive operators*. AAA Preprint series, 2004.

[10] M. Hazi. *Introduction aux espaces normés*. Office des publication universitaires, Place Ben Aknoun (Alger), 7 1994.

[11] A. Karoui. *Cours de mathématiques de première année Algébre*. Centre de Publication Universitaire, Tunis , 2007.

[12] J. Lindenstranss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I and II*. Springer Verlag, Berlin, 1996.

[13] G.Y. Lozanovskii. *On Some Banach lattices*. Siberian Math, J. 10 (1969), 419-430.

[14] L. Mezrag and A. Tiaiba. *On the sublinear operators factoring through L_p Int*. J. Math. Math. Sci. 50 (2004), 2695-2704.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, on a présenté les espaces réticulés et les opérateurs linéaires et sous-linéaires positifs et leurs propriétés fondamentales, on a étudié aussi l'extension du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous linéaires, la relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires, et les opérateurs linéaires positivement $p-$sommants $(1 \leq p < \infty)$.
Mots clés : Opérateur positif, espace réticulé, opérateur $p-$sommant.

Abstract

In this work, we gave the definitions of lattice spaces and linear operators and sub-linear positive and studied their basic properties and the relationship between linear operators and sub-linear, the theorem Hahn-Banach. And linear operators positively p-sommants $(1 \leq p < \infty)$.
Keywords :positive operator, lattice space, p summing operator.