

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار التليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématique et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Analyse Mathématique

Par : KHATOUI Freiha

THÈME

Opérateurs non-bornés et théorie des semi-groupes

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

• Mr. OUCHENANE Djamel.	M.C.A	Président
• Mr. YAZID Fares.	M.C.B	Examinateur
• Mr. YAGOURB Aneur	M.C.A	Encadreur

Année Universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

*premièrement et particulièrement, Je tiens à remercier vivement mon Encadreur monsieur **Dr. Ameur YAGOUB** pour son soutien indéfectible durant la préparation de ce projet dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés et pour les bons choix de sujets concernant ce travail, et je le remercie pour sa patience.*

*Je suis très reconnaissante envers le professeur **OUCHENANE Djamel** pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, le remerciant aussi pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de cette thèse.*

*Je tiens aussi à exprimer mes remerciements au **Dr YAZID Fares** pour avoir accepté d'apprécier mon travail et de m'honorer de leurs présence au sein du jury.*

KHATOUI Freiha.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*A qui Dieu a placé le Paradis sous ses pieds et l'a fait révérence
dans Son Noble Livre (Ma Précieuse Mère) qui la retrouve Ceci est
un témoignage de ma plus profonde gratitude pour son amour
l'encourageant et la soutenant tout au long de mes études, que Dieu
la bénisse*

*A mes chers frères BEN AISSA, YACINE, LAKHDAR et
AHMEDE*

et mes chers soeurs

A tous mes professeurs d'université

A tous mes chères amies.

ملخص.

نعرض في هذه المذكرة بعض المعارف والخصائص الرئيسية للمؤثرات الخطية الغير محدودة في فضاء هيلبرت إلى فضاء هيلبرت آخر. بدأنا ببعض الخصائص على فضاءات هيلبرت. الفصل الثاني من هذه المذكرة مخصص لدراسة الخصائص الأساسية العامة للمؤثرات الخطية الغير محدودة في فضاء هيلبرت. أما في الفصل الثالث فنحن مهتمون بأنصاف المجموعات من المؤثرات الخطية على فضاءات.

الكلمات المفتاحية:

المؤثرات المحدودة، المؤثرات الغير محدودة، أنصاف المجموعات المستمرة بانتظام، أنصاف المجموعات المستمرة بقوة، المولد.

Abstract.

In this thesis we expose some knowledge and main properties of unbounded linear operators from a Hilbert space to another Hilbert space. We started with some preliminaries on the Hilbert spaces. The second chapter of this memory is devoted to the study of the general fundamental properties of unbounded linear operators of a Hilbert space. The third chapter of this thesis, we are interested in semi-groups of linear operators on Hilbert spaces, as an application on unbounded linear operators.

Key words :

Bounded operator, unbounded operator, uniformly continuous semi-group, strongly continuous semi-group, infinitesimal generator.

Résumé.

Dans ce mémoire on expose quelques connaissances et propriétés principales des opérateurs linéaires non-bornés d'un espace de Hilbert vers autre espace de Hilbert. On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces de Hilbert. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude des propriétés fondamentales générales des opérateurs linéaires non-bornés d'un espace de Hilbert. Le troisième chapitre de ce mémoire, on s'intéresse aux semi-groupes d'opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert, comme une application sur les opérateurs linéaires non-bornés.

Mots clés :

Opérateur borné, opérateur non-borné, semi-groupe uniformément continu, semi-groupe fortement continu, générateur infinitésimal.

Table des matières

Résumés.	5
Introduction.	1
1 Préliminaires.	3
1.1 Espaces de Hilbert.	3
1.1.1 Rappels et notions fondamentales	3
1.1.2 Somme directe et complémentaire orthogonal.	5
1.1.3 Bases orthonormales.	6
1.2 Opérateurs linéaires.	6
1.2.1 Opérateurs bornés.	7
1.2.2 Adjoint d'un opérateur.	8
2 Opérateurs non-bornés.	11
2.1 Domaine, graphe et fermeture.	11
2.2 Opérateurs fermés.	13
2.3 produits et sommes d'opérateurs fermés.	15
2.4 Opérateurs symétriques, auto-adjoints.	20
3 Semi-groupes d'opérateurs linéaires.	27
3.1 Semi-groupes uniformément continus.	27
3.2 Semi-groupes de classe C_0	31
3.2.1 Définitions. Propriétés élémentaires.	31
3.2.2 Propriétés générales des C_0 -semi-groupes.	35
3.2.3 Le théorème de Hille - Yosida.	40
3.2.4 C_0 -semi-groupes de contractions.	41
Bibliographie.	45

Introduction.

La théorie des opérateurs non bornés a connu un immense progrès, depuis un siècle déjà, avec la vulgarisation de la théorie des perturbations établie principalement par Kato (voir [11]), pour les opérateurs fermés, puis par Kato et Rellich pour les opérateurs auto-adjoints. Depuis, la théorie des opérateurs non bornés a connu des efforts sans relâche pour mettre à l'oeuvre des outils permettant de dégager toutes les difficultés liées à cette classe. Les opérateurs fermés, sujets d'investigation, viennent souvent de domaines différents (mécanique quantique, analyse semi classique, EDA, EDP,...) mais rassemblent les propriétés mathématiques liées à la terminologie "Théorie des opérateurs". Le prototype de l'opérateur non borné est l'application linéaire $T : H_1 \rightarrow H_2$ d'un sous espace linéaire $D(T) \subset H_1$ le domaine de T à l'espace H_2 . Contrairement à la convention habituelle, ne peut pas être défini l'opérateur T sur tout l'espace H_1 .

La théorie des équations différentielle à coefficient opérationnels non bornés, dans les espaces de Banach est apparue et a commencé à se développer intensivement dans les années cinquante dans les travaux fondamentaux de E. Hill [9] et K. Yosida [21]. Par une méthode de la théorie des semi-groupes qui se développait remarquablement pendant cette période, a été construite de résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle homogène de premier ordre à coefficient opérationnel A ne dépendant pas de t :

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I. \end{cases}$$

Dans ce travail nous étudions quelques propriétés de façon simple de la théorie des opérateurs non-bornés, et comme une application de ces opérateurs, on s'intéressera aux semi-groupes d'opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on va donner les éléments de base de l'analyse fonctionnelle : espaces de Hilbert, les opérateurs linéaires, les opérateurs bornés avec leurs propriétés, leur adjoint.

Dans le deuxième chapitre on présente la théorie élémentaire des opérateurs non bornés et leurs propriétés, en particulier celle des opérateurs fermés, extensions, fermables et aussi l'opérateur adjoint, symétriques et auto-adjoints d'un opérateur non borné dans les espaces de Hilbert.

Dans le troisième chapitre on présente les semi-groupes d'opérateurs linéaires comme une application pour les opérateurs non-bornés, nous étudierons deux cas : semi-groupes uniformément continus et semi-groupe fortement continu.

Chapitre 1

Préliminaires.

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est composé de deux sections, la première section, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Hilbert, La deuxième section, contient un aperçu sur les opérateurs linéaires bornés. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants : [1, 2, 6, 7, 12, 14, 16, 18].

1.1 Espaces de Hilbert.

L'espace de Hilbert qui a été introduit par David Hilbert en 1909 pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite.

1.1.1 Rappels et notions fondamentales .

Définition 1.1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive c'est-à-dire :*

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sesquilineaire} & : \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H} \quad \begin{cases} \langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \end{cases} \\
 \text{et } \forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} : & \quad \begin{cases} \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\ \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle \end{cases} \\
 \text{Hermitienne} & : \quad \forall x, y \in \mathcal{H} : \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}. \\
 \text{Définie positive} & : \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.
 \end{aligned}$$

Lemme 1.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire, une fonction positive vérifiant les propriétés suivantes pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Définition 1.1.2. On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Lemme 1.1.2. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$

$$1) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

de plus on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

2) Oú

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2),$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

si $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel En plus on a l'identité de la médiane ou du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Si x et y sont orthogonaux on a l'identité de Pythagore

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 1.1.3. (*Espace de Hilbert* .)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associé

$$\forall x \in \mathcal{H}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Exemple 1.1. soit $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \geq 0} : \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$. L'application

$$\langle x_n, y_n \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad / x_n, y_n \in \ell^2(\mathbb{N})$$

$$(x, y) \longmapsto \sum_{n \geq 0} x_n \overline{y_n},$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Somme directe et complémentaire orthogonal.

Définition 1.1.4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels sur $\mathcal{H}$. On dit que $\mathcal{H}$ est la somme directe orthogonale de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, notée $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus^\perp \mathcal{H}_2$, si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0_{\mathcal{H}}\}$ et $\forall x_1 \in \mathcal{H}_1, x_2 \in \mathcal{H}_2 \quad : \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

Le complémentaire orthogonal d'un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$ est défini par

$$F^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Théorème 1.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace fermé. Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors

1. Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait

$$\|x + y\|^2 = d(x, F) := \inf \{\|x - z\| : z \in F\}.$$

On note $y = P_F(x)$. Ceci définit alors une application

$$P_F : \mathcal{H} \longrightarrow F.$$

2. $P_F(x)$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $x - P_F(x) \perp F$.
3. $\forall x \in \mathcal{H} : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^\perp}(x)\|^2$.
4. L'application $P_F : \mathcal{H} \longrightarrow F$ est linéaire est continue. C'est la projection sur F le long $F^\perp$.
5. Le complémentaire orthogonal $F^\perp$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 1.1.1. Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{H}$ on a $(F^\perp)^\perp = F$. En particulier l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel non-fermé est fermé. En outre F est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

1.1.3 Bases orthonormales.

Définition 1.1.5. On dit qu'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est séparable, s'il existe un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ qui est à la fois dénombrable et dense.

Théorème 1.1.2. Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Définition 1.1.6. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de $\mathcal{H}$ tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie

1. $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$,
2. le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans $\mathcal{H}$.

Lemme 1.1.3. Soit $(e_i)_{i < n}$ une famille orthonormée et soit F le sous-espace engendré (donc $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, mais on ne demande pas que F soit dense). Alors pour tout x :

$$P_F(x) = \sum_{i < n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Théorème 1.1.3. (Existence des bases orthonormales.)

Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale.

Théorème 1.1.4. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale.

Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la série $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$ converge et

$$x = \sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle e_n \quad , \quad \|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

1.2 Opérateurs linéaires.

Définition 1.2.1. Un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vers un espace de Hilbert $\mathcal{H}'$ est une fonction $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ telle que :

- i) pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $A(x + y) = A(x) + A(y)$,
- ii) pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tous $x \in \mathcal{H}$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Nous notons Ax l'image $A(x)$ d'un élément $x \in \mathcal{H}$. L'image de A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}'$

$$R(A) = \text{Im}(A) = \{Ax \quad / \quad x \in \mathcal{H}\},$$

et le noyau de A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$

$$N(A) = \text{Ker}(A) = \{x \in \mathcal{H} \quad / \quad Ax = 0\}.$$

1.2.1 Opérateurs bornés.

Définition 1.2.2. Un opérateur linéaire A défini sur $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_{\mathcal{H}'} \leq C \|x\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad (1.1)$$

on note $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ l'espace vectoriel constitué par toutes les applications linéaires bornées de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$. Lorsque $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ on écrit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ au lieu de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Exemple 1.2. Soit $\mathcal{H} = \ell^2$. L'opérateur

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$S(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, x_5, 3x_6, \dots),$$

est borné car

$$\|Ax\|^2 = |x_1|^2 + 9|x_2|^2 + |x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots,$$

d'où

$$\|Ax\|^2 \leq 9|x_1|^2 + 9|x_2|^2 + 9|x_3|^2 + 9|x_4|^2 + \dots + 9|x_n|^2 + \dots,$$

par conséquent

$$\|Ax\|^2 \leq 9\|x\|^2,$$

donc

$$\exists \quad c = 3 > 0 \quad \text{tel que} \quad \|Ax\| \leq 3\|x\|, \quad \forall x \in \ell^2.$$

D'où A est borné.

Proposition 1.2.1. (Norme d'un opérateur.)

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{H}, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{H}'}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|Ax\|_{\mathcal{H}'}.$$

Notation :

La composée $A \circ B$ de deux opérateurs A et B sera souvent notée AB .

Définition 1.2.3. L'opérateur linéaire A est continu à $x_0 \in \mathcal{H}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \|x - x_0\|_{\mathcal{H}} < \sigma \implies \|Ax - Ax_0\|_{\mathcal{H}'} < \varepsilon.$$

Puis que la continuité de A peut être caractérisée par les suites, A est continu à x_0 si pour toute suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ converge vers x_0 telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_0\|_{\mathcal{H}'} = 0,$$

en effet

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax_0\|_{\mathcal{H}'} &\leq \|x_n - x_0\|_{\mathcal{H}} \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_0\|_{\mathcal{H}'} &= 0. \end{aligned}$$

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces vectoriels normés et $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ un opérateur linéaire. Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur A est continu sur $\mathcal{H}$.*
2. *L'opérateur A est continu au point $0_{\mathcal{H}}$.*
3. *L'opérateur A est borné.*

Proposition 1.2.2. (Propriétés de la norme d'opérateur.)

Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ des espaces vectoriels normés.

- (i) *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, alors, $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*
- (ii) *Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, alors, $A + B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.*
- (iii) *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, alors, $\alpha A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$.*
- (iv) *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$, alors $BA \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'')$ et $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.*

De (1)-(3) de le Théorème 1.2.1, $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.

1.2.2 Adjoint d'un opérateur.

Théorème 1.2.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \forall y \in \mathcal{H}' \quad \langle Ax, y \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur A^ s'appelle l'adjoint de A .*

Exemple 1.3. On considère l'opérateur Shift $S : \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Soient (x_n) et (y_n) dans $\ell^2(\mathbb{N})$, alors

$$\begin{aligned} \langle S^* x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, S y_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle, \end{aligned}$$

donc S^* est défini par

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Proposition 1.2.3. (Propriétés de l'adjoint.)

1. pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ on a

$$(A^*)^* = A \quad \text{et} \quad \|A^*\| = \|A\|,$$

2. si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, alors

$$(AB)^* = B^* A^*,$$

3. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad ; \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*,$$

4. pour tout $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \overline{\lambda} A_1^* + \overline{\mu} A_2^*.$$

Lemme 1.2.1. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est inversible, alors A^* est inversible et on a :

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Corollaire 1.2.1. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on a

$$1. \quad \|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

$$2. \quad A^*A = 0 \iff A = 0.$$

Lemme 1.2.2. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$:

$$1) \ N(A) = R(A^*)^\perp.$$

$$2) \ N(A^*) = R(A)^\perp.$$

$$3) \ N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}.$$

Proposition 1.2.4. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Alors

$$\mathcal{H}' = \text{Ker}(A^*) \oplus^\perp (\text{Im}(A))^\perp,$$

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(A) \oplus^\perp (\text{Im}(A^*))^\perp,$$

où $(\text{Im}(A))^\perp$ et $(\text{Im}(A^*))^\perp$ désignent la fermeture (pour la norme) de $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A^*)$ respectivement.

Proposition 1.2.5. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, G un sous-espace de $\mathcal{H}$ et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Alors $AG \subset G$ si et seulement si $A^*G^\perp \subset G^\perp$.

Définition 1.2.4. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert :

a) Un élément $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est appelé **unitaire** si $A^*A = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ et $AA^* = \text{Id}_{\mathcal{H}'}$.

b) Un élément $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est appelé **isométrique** si $\|A(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

c) Un élément $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé **normal** si $NN^* = N^*N$.

d) Un élément $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé **hermitien** ou **auto-adjoint** si $S = S^*$.

e) Un élément $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé **positif** (notation : $P \geq 0$) si P est autoadjoint et si pour tout $x \in \mathcal{H}$ $\langle P(x), x \rangle \geq 0$.

Chapitre 2

Opérateurs non-bornés.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine était l'espace de départ. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même, le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin. Pour plus de détails on a les ouvrages suivants [5, 20, 13, 8, 4].

2.1 Domaine, graphe et fermeture.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note par $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ muni du produit scalaire $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}}$.

Définition 2.1.1. *Un opérateur dans $\mathcal{H}$ est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$. $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur.*

On note un opérateur par $(A, \mathcal{D}(A))$ mais s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on pourra noter simplement par A .

Exemple 2.1. Soient $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$\{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \text{ espace des fonctions } L^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour } \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)g(x)dx\},$
et $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des fonctions f dans $L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

On définit pour tout, $f \in \mathcal{D}(A)$, $(Af)(x) = xf(x)$.

A est non borné.

Définition 2.1.2. On dit qu'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est à **domaine dense** si $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$.

Définition 2.1.3. On dit qu'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ dans $\mathcal{H}$ est **borné** si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ et $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue.

Exemple 2.2. on pose $\mathcal{D}(A) = \{(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty\}$,

$$A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$$

$$(x_n)_n \longmapsto (Ax_n)_n = (nx_n)_n,$$

alors (A) est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$.

Définition 2.1.4. Le graphe d'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est le sous-espace de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ donné par

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

La norme du graphe de A est définie pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ par :

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|.$$

Nous considérons les opérateurs linéaires sur le produit $\mathcal{H}$ définis par :

$$U(x, y) = (y, x) \quad \text{et} \quad V(x, y) = (y, -x),$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}$. Ces opérateurs sont bijectifs et préservent le produit scalaire de $\mathcal{H}$. Ils vérifient de plus les identités suivantes où I représente l'identité sur $\mathcal{H}$:

$$UV = -VU \quad \text{et} \quad -V^2 = U^2 = I.$$

Remarque 2.1.1. Il n'est pas vrai que tout sous-espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est le graphe d'un opérateur.

On note $p_i : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, les deux projections données respectivement par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

Lemme 2.1.1. Un sous-espace $G \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si

$$((0, y) \in G \implies y = 0). \tag{2.1}$$

Démonstration. Si la propriété 2.1 est vraie alors $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$. Donc, l'application $A : p_1 G \longrightarrow \mathcal{H}$ qui associe à $x \in p_1 G$, l'unique $y \in \mathcal{H}$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. $\square$

Soit A un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{H}$. Alors :

- Le noyau et l'image de A sont respectivement les sous-espaces de $\mathcal{H}$ définie par :

$$N(A) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = 0\},$$

et

$$R(A) = \{Ax : x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

- L'opérateurs usuelles telles que la somme, le produit et le passage à la limite sont toujours définis dans la classe des opérateurs non bornés, on faisant attention aux domaine. En fait ; si B est un autre opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(B)$, on a

$$(A + B)x = Ax + Bx \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B),$$

$$(AB)x = A(Bx) \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(A)\}.$$

- L'opérateur A est inversible si il existe un opérateur borné noté A^{-1} dit l'inverse de A défini de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{D}(A)$ tel que, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ où I désigne l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$.

2.2 Opérateurs fermés.

Définition 2.2.1. (opérateur fermé.)

On dit que A est un opérateur fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Exemple 2.3. Soit A un opérateur non borné défini sur $H^1(]0, 1[)$ avec $A = -i\frac{d}{dx}$ où : $H^1(]0, 1[)$ est l'espace de Sobolev d'indice 1

$$H^1(]0, 1[) : \{f \in L^2(]0, 1[), f' \in L^2(]0, 1[)\}.$$

Alors : A est un opérateur fermé.

Proposition 2.2.1. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) A est fermé.
- (ii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs $x_n \in \mathcal{D}(A)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ dans $\mathcal{H}_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = y$ dans $\mathcal{H}_1$, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.
- (iii) $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ est complet, ou de façon équivalente, $(\mathcal{D}(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. (i) est équivalent à (ii), car (ii) n'est qu'une reformulation de la fermeture du graphe $G(A)$ dans $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

(i) $\longleftrightarrow$ (iii) : Par la définition (2.1.4) de la norme du graphe, l'application $x \longrightarrow (x, Ax)$ de $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ sur le graphe $G(A)$ muni de la norme de la somme directe Hilbert l'espace $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ est isométrique. Par conséquent, $(\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A)$ est complet si et seulement si $G(A)$ est complet, ou de manière équivalente, si $G(A)$ est fermé dans $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ $\square$

Notation 2.2.1. On note par $C(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs fermé a domaine dense dans $\mathcal{H}$.

Corollaire 2.2.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$: s'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{H} \quad \|x\|_2 \leq c \|x\|_1.$$

Théorème 2.2.1. (du graphe fermé.)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application. alors A est continue si et seulement si le graphe $G(A)$ de A est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Démonstration. On considère sur $\mathcal{H}$ la norme $\|\cdot\|_2$ définie par : $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathcal{H}} + \|Ax\|_{\mathcal{H}}$ La norme du graphe. Soit $(x_n) \in \mathcal{H}$ une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon,$$

et on a :

$$\|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\|_{\mathcal{H}} + \|Ax_n - Ax_m\|_{\mathcal{H}},$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \|x_n - x_m\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \\ \|Ax_n - Ax_m\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \end{cases} &\implies \begin{cases} (x_n) \text{ est une suite de Cauchy dans } (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}). \\ (Ax_m) \text{ est une suite de Cauchy dans } (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}). \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \exists x \in \mathcal{H} : x_n \longrightarrow x. \\ \exists y \in \mathcal{H} : x_m \longrightarrow y. \end{cases} \end{aligned}$$

d'où (x_n) converge pour $\|\cdot\|_2$.

D'autre part d'après le corollaire précédent précédent on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|x\|_2 \leq c \|x\|_{\mathcal{H}} \implies \|x\|_{\mathcal{H}} + \|Ax\|_{\mathcal{H}} \leq c \|x\|_{\mathcal{H}} \implies \|Ax\|_{\mathcal{H}} \leq (c - 1) \|x\|_{\mathcal{H}},$$

d'où A est continue. $\square$

2.3 produits et sommes d'opérateurs fermés.

En générale le produit de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermé et ainsi pour la somme.

Théorème 2.3.1. *Soient A et B deux fermés à domaine dense, alors*

1. BA est fermé si $\begin{cases} B \text{ est inversible} \\ \text{ou} \\ A \text{ est borné} \end{cases}$
2. $A + B$ est fermé si B est borné (i.e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Démonstration. 1. On suppose que B est inversible (i.e $B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(BA)$ tel que :

$$x_n \longrightarrow x \quad , \quad BAx_n \longrightarrow y,$$

donc

$$\begin{aligned} BAx \longrightarrow y &\implies B^{-1}BAx_n \longrightarrow B^{-1}y \text{ (car } B^{-1} \text{ est borné)} \\ &\implies Ax_n \longrightarrow B^{-1}y \text{ (car } B^{-1}B \subset I). \end{aligned}$$

Et puisque A est fermé alors,

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad B^{-1}y = Ax \in \mathcal{D}(B) \text{ (car } B^{-1} : \mathcal{D}(B) \longrightarrow \text{Im}B).$$

D'où

$$\begin{cases} Ax \in \mathcal{D}(B) \\ x \in \mathcal{D}(BA) \\ BB^{-1}y = y = BAx, \end{cases}$$

ce qui montre que BA est fermé.

Maintenant on suppose que A est borné. Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(BA)$ tel que :

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad BAx_n \longrightarrow y,$$

puisque A est fermé alors

$$Ax_n \longrightarrow Ax \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Si on pose $z_n = Ax_n$ et $z = Ax$ et on utilisant la fermeture de l'opérateur B on trouve que

$$Bz_n \longrightarrow Bz.$$

C'est-à-dire,

$$Ax \in \mathcal{D}(B) \quad \text{et} \quad y = BAx.$$

D'où BA est fermé.

2. Comme B est borné, alors

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A).$$

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(A + B)$ tel que

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad (B + A)x_n \longrightarrow y,$$

puisque B est borné, alors

$$Bx_n \longrightarrow Bx.$$

D'où

$$y \longleftarrow Bx_n + Ax_n \longrightarrow Bx + Ax$$

$$Ax_n + Bx \longrightarrow y$$

$$Ax_n \longrightarrow y - Bx.$$

Or A est fermé, donc

$$y - Bx = Ax \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

D'où

$$(B + A)x = y \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

C'est-à-dire $A + B$ est fermé.

□

Remarque 2.3.1. Si A est borné, alors A est fermé si et seulement, $\mathcal{D}(A)$ est fermé dans $\mathcal{H}$.

Lemme 2.3.1. Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur fermé, alors $\text{Ker} A$ est fermé.

Démonstration. Soit $x_n \in \text{Ker} A$ une suite convergent vers x dans $\mathcal{H}$. Alors la suite Ax_n est convergente puisqu'elle est identiquement nulle. Comme A est fermé, on en déduit que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = 0$. □

Lemme 2.3.2. Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur fermé et bijectif de $\mathcal{D}(A)$ sur $\mathcal{H}$, alors A^{-1} est également fermé.

Démonstration. Soit $x_n \in \mathcal{H}$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans $\mathcal{H}$ et $A^{-1}x_n \rightarrow y$ dans $\mathcal{H}$. Posons : $z_n = A^{-1}x_n$. Alors $z_n \rightarrow y$ dans $\mathcal{H}$ et $Az_n \rightarrow x$ dans $\mathcal{H}$. Comme A est fermé, il en résulte que $y \in \mathcal{D}(A)$ et $Ay = x$, soit $y = A^{-1}x$.

□

Définition 2.3.1. (Opérateur extension.)

On dit que $(B, \mathcal{D}(B))$ est une extension de $(A, \mathcal{D}(A))$ si $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, (Autrement dit, $G(A) \subset G(B)$).

Proposition 2.3.1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, Soient A, B, C , trois opérateurs non borné sur leurs domaine alors on a

1. $0A \subset 0$.
2. $0 + A = A + 0 = A$.
3. $(C + B) + A = C + (B + A) = C + B + A$.
4. $B + A = A + B$.
5. $(AB)C = A(BC) = ABC$.
6. $\begin{cases} (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ (0A)B = 0(AB) \subset A(0B). \end{cases}$
7. $(A + B)C = AC + BC$.
8. $CA + CB \subset C(A + B)$.
9. $A \subset B \implies CA \subset CB$.
10. $A + B - B \subset A$.

Démonstration.

1. Il est clair que $\mathcal{D}(0) = \mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(0A) = \mathcal{D}(A)$ par conséquent $0A \subset 0$.
2. Évidents.
3. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[(C + B) + A] &= \mathcal{D}(C + B) \cap \mathcal{D}(A) \\ &= \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A) \\ &= \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B + A) \\ &= \mathcal{D}[C + (B + A)]. \end{aligned}$$

D'où $(C + B) + A = C + (B + A) = C + B + A$

4. Évidents.

5. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[(AB)C] &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(AB)\} \\ \mathcal{D}[(AB)C] &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(B), BCx \in \mathcal{D}(A)\} \\ \mathcal{D}[(AB)C] &= \{x \in \mathcal{D}(BC) : ABCx \in \mathcal{D}(A)\} = \mathcal{D}[A(BC)],\end{aligned}$$

ce qui donne $(AB)C = A(BC) = ABC$.

6. On

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[(\alpha A)B] &= \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(\alpha A)\} \\ \mathcal{D}[(\alpha A)B] &= \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(A)\} \\ \mathcal{D}[(\alpha A)B] &= \{x \in \mathcal{D}(\alpha B) : \alpha Bx \in \mathcal{D}(A)\} \quad (\text{car } \alpha \neq 0) \\ \mathcal{D}[(\alpha A)B] &= \mathcal{D}[A(\alpha B)] \quad (\text{car } \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{D}(B) \text{ sont des sous-espaces vectoriels}),\end{aligned}$$

On obtient l'égalité $(\alpha A)B = \alpha(AB)$ par la même procédé.

7. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[(A+B)C] &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(A+B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(A) \text{ et } Cx \in \mathcal{D}(B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(A)\} \cap \{x \in \mathcal{D}(C) : Cx \in \mathcal{D}(B)\} \\ &= \mathcal{D}(AC) \cap \mathcal{D}(BC) = \mathcal{D}(AC + BC).\end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(CA + CB) &= \mathcal{D}(CA) \cap \mathcal{D}(CB) \\ \mathcal{D}(CA + CB) &= \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in \mathcal{D}(C)\} \cap \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(C)\} \\ \mathcal{D}(CA + CB) &= \{x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) : Ax, Bx \in \mathcal{D}(C) \in \mathcal{D}(A)\} \\ \mathcal{D}(CA + CB) &\subset \{x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) : Ax + Bx \in \mathcal{D}(C)\} \\ &\quad (\text{car } \mathcal{D}(C) \text{ est un espace vectoriel}),\end{aligned}$$

par conséquent, $\mathcal{D}(A+B) \supset \mathcal{D}(CA+CB)$ et $C(A+B) \supset CA+CB$.

9. On a $\mathcal{D}(CA) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in \mathcal{D}(C)\}$. et puisque $A \subset B$, alors

$$\mathcal{D}(CA) \subset \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(CB)\}.$$

10. Il est clair que

$$\mathcal{D}(A + B - B) = (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)) \subset \mathcal{D}(A),$$

et

$$(A + B + C)x = Ax \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B),$$

on déduit alors que $A + B - B \subset A$.

□

Définition 2.3.2. (*Opérateur fermable.*)

On dit qu'un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ est fermable s'il possède une extension fermée.

Proposition 2.3.2. *Tout opérateur fermable $(A, \mathcal{D}(A))$ admet une plus petite extension fermée notée $\overline{A}$. De plus, on a*

$$G(\overline{A}) = \overline{G(A)}.$$

Démonstration. Pour toute extension B fermée de A , il existe au moins une, on a $G(A) \subset G(B)$ avec $G(B)$ un fermé de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. D'où, on a $\overline{G(A)} \subset G(B)$. De plus, par lemme 1.1.1 $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{A}$, puisque $(0, y) \in \overline{G(A)} \subset G(A)$ implique que $y = 0$. Enfin, il est clair que $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A puisque $G(\overline{A}) = \overline{G(A)} \subset G(B)$ pour toute extension fermée B de A . □

On remarque aussi que si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur fermable alors

$$\overline{G(A)} = \bigcap_{i \in I} G(A_i),$$

où $(A_i, \mathcal{D}(A_i))_{i \in I}$ est la famille de toutes les extensions fermées de $(A, \mathcal{D}(A))$ (il existe au moins une).

Proposition 2.3.3. *Soit A un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est fermable,
- (ii) pour toute suite $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \rightarrow 0 \in \mathcal{H}$ et $Ax_n \rightarrow y$ on a $y = 0$,
- (iii) $\overline{G(A)}$ est un graphe d'un opérateur, c'est-à-dire : si $(0, y) \in \overline{G(A)}$ alors $y = 0$.

Démonstration. (i) $\rightarrow$ (iii) Soit B un opérateur fermé tel que $A \subseteq B$. Alors $G(A) \subseteq G(B)$, et donc $\overline{G(A)} \subseteq G(B)$. Du lemme (2.1.1) il s'ensuit que $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur. (iii) $\rightarrow$ (i) : Si $\overline{G(A)} = G(B)$ pour un opérateur B , alors $A \subseteq B$, et B est fermé, car $G(B)$ est fermé.

(ii) $\longleftrightarrow$ (iii) : La condition (ii) signifie que $(0, y) \in \overline{G(A)}$ implique que $y = 0$. Par conséquent, (ii) et (iii) sont équivalents par le lemme (2.1.1).

□

Remarque 2.3.2.

1. Tout opérateur fermé est fermable .la réciproque n'est pas vrai.
2. La somme (respectivement le produit) de deux opérateurs fermables n'est pas en général un opérateur fermable.

Exemple 2.4. $A = \frac{d}{dt} : L^2[-1, 1] \longrightarrow L^2[-1, 1]$
 $\mathcal{D}(A) = C^1([-1, 1])$ n'est pas fermé mais fermable.

2.4 Opérateurs symétriques, auto-adjoints.

Définition 2.4.1. Soit A un opérateur fermé de domaine $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des vecteurs $y \in \mathcal{H}$ pour lesquels il existe $f \in \mathcal{H}$ tel que

$$(Ax, y) = (x, f) \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}(A), \quad (2.2)$$

pour tout $y \in \mathcal{D}(A^*)$ on pose $A^*y = f$, ou f est le vecteur vérifiant l'égalité ci-dessus.
 A^* est appelé l'opérateur adjoint de A .

Si A est un opérateur borné, alors A^* est aussi borné et on a

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Théorème 2.4.1. Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non bornée sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathcal{H}$ alors :

- i) A^* est fermé,
- ii) A est fermable si et seulement si $\mathcal{D}(A^*)$ est dense,
- iii) Si A est fermable alors $\overline{A} = A^{**}$ et $(\overline{A})^* = A^*$.

Démonstration. On muni $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ du produit scalaire suivant :

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle (x_1, x_2) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle (y_1, y_2) \rangle_{\mathcal{H}},$$

$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ devient un espace de Hilbert et on défini sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ l'application V par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad V(x, y) = (-y, x),$$

V est une isométrie surjective sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ alors V est un opérateur unitaire sur $\|X\|$

$$V^2 = -Id_{\|X\|}.$$

D'autre part pour tout sous espace vectoriel E de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ on a

$$V(E^\perp) = (V(E))^\perp.$$

En effet, soit $y \in V(E^\perp)$. $\exists X \in E^\perp$ tel que $Y = V(X)$

$\forall Z \in E$ on a $\langle Y, V(Z) \rangle = \langle V(X), V(Z) \rangle = \langle X, Z \rangle = 0$, D'où

$$Y \in (V(E))^\perp \quad \text{et} \quad V(E^\perp) \subset (V(E))^\perp,$$

réciroquement

Soit $Y \in (V(E))^\perp$ donc $\langle Y, V(X) \rangle = 0$, $\forall X \in E$,

$Y \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, $Y = -V^2(Y) = V(-V(Y)) = V(X')$ où $X' = -V(Y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

par conséquent $0 = \langle Y, V(X) \rangle = \langle V(X'), V(X) \rangle = \langle X', X \rangle$ d'où $X' \in E^\perp$ et $Y = V(X') \in (V(E^\perp))$ ainsi

$$(V(E))^\perp \subset V(E^\perp);$$

pour montrer que (i) vérifie $G(A^*)$ est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ pour cela on montre que

$$G(A^*) = (V(G(A)))^\perp.$$

En effet,

$$\begin{aligned} (x, y) \in (V(G(A)))^\perp &\iff \langle (x, y), (-Az, z) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \\ &\iff \langle Az, x \rangle = \langle (z, y) \rangle \quad \forall \mathcal{D}(A) \\ &\iff (x \in \mathcal{D}(A^*)) \quad \text{et} \quad A^*x = y \\ &\iff ((x, y) \in G(A^*)), \end{aligned}$$

d'où $G(A^*) = (V(G(A)))^\perp = V(G(A)^\perp)$

donc $G(A^*)$ est fermé.

(ii) remarquons que $G(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$V^2(G(A)) = G(A)$$

$$\begin{aligned} \overline{G(A)} &= G(A)^{\perp\perp} V^2(G(A))^{\perp\perp} \\ &= \{V^2(G(A))^\perp\}^\perp \\ &= \{[V(V(G(A)))]^\perp\}^\perp \\ &= (V(V(G(A)))^\perp)^\perp \\ &= V(G(A))^\perp, \end{aligned}$$

si $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$ alors A^{**} existe et

$$\overline{G(A)} = V(G(A^*))^\perp = G(A^{**}).$$

Par conséquent A est fermable et $\overline{A} = A^{**}$,

réciroquement si :

Supposons que $\mathcal{D}(A^*)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$ c'est-à-dire $(\mathcal{D}(A^*))^\perp \neq 0$

Soit $\psi \in (\mathcal{D}(A^*))^\perp$, $\psi \neq 0$ par conséquent $(0, \psi) \in (V(G(A^*)))^\perp$.

En effet

$\forall \psi \in \mathcal{D}(A^*)$ on a

$$\langle (0, \psi), (-A\varphi, \varphi) \rangle = \langle (0, -A\varphi) \rangle + \langle (\psi, \varphi) \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle = 0.$$

Or

$$(V(G(A^*)))^\perp = \overline{G(A)}$$

Si $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ alors $\overline{A}0 = \psi = 0$ car $(0, \psi) \in \overline{G(A)}$,

on conclut il ne peut pas existe un opérateur non bornée $\overline{A}$ tel que $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ donc $\overline{A}0 = \psi = 0$ car $\overline{A}$ linéaire ce qui est impossible car $\psi \neq 0$ donc A ne peut pas être un opérateur fermable.

(iii) Si A est fermable alors $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et on a $\overline{A} = A^{**}$ puisque $\overline{A}$ est une extension de A alors

$$\mathcal{D}(A \subset \mathcal{D}(\overline{A})) = \mathcal{D}(A^{**}).$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{D}(\overline{A}), \mathcal{D}(A^{**})$ donc

$$(\overline{A})^* = (A^{**})^* = \overline{A^*} = A^*.$$

□

Proposition 2.4.1. *Soit A un opérateur fermable à domaine dense sur $\mathcal{H}$, alors*

$$Ker(\overline{A})^\perp = \overline{Im(A^*)}.$$

$$Ker(A^*) = Im(A)^\perp.$$

$$Ker(\overline{A}) = Im(A^*)^\perp.$$

$$Ker(A^*)^\perp = \overline{Im(A)}.$$

Démonstration. On :

$$\begin{aligned}
 y \in \text{Im}(A^*)^\perp &\iff (\langle y; A^*x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*)) \\
 &\iff (y \in \mathcal{D}(\overline{A}) \quad \text{et} \quad \langle Ay, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*)) \\
 &\iff y \in \text{Ker}(\overline{A}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \in \text{Im}(A)^\perp &\iff (\langle y; Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)) \\
 &\iff (y \in \mathcal{D}(A^*) \quad \text{et} \quad \langle A^*y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)) \\
 &\iff y \in \text{Ker}(A^*).
 \end{aligned}$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant les orthogonaux. $\square$

Définition 2.4.2. Définir la cartographie

$$\begin{aligned}
 V : \mathcal{H}' \times \mathcal{H}'' &\longrightarrow \mathcal{H}'' \times \mathcal{H}' \\
 (\varphi, \psi) &\longmapsto (\psi, \varphi).
 \end{aligned}$$

Théorème 2.4.2. Soit A , B et BA des opérateurs non bornés à domaines denses, Alors :

- 1) $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.
- 2) A^* est toujours fermé.
- 3) $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.
- 4) $A^*B^* \subset (BA)^*$.
- 5) $(A + B)^* = A^* + B^*$ si B ou A est borné.
- 6) $(BA)^* = A^*B^*$ si B est borné (non pas A).
- 7) si A est injectif, alors $\mathcal{D}(A^{-1})$ est dense dans $\mathcal{H}$ et on a $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Démonstration. Prouvons tous d'abord que pour un opérateur A non borné

$$G(A^*) = (V(G(A)))^\perp.$$

tel que l'opérateur unitaire.

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y \in \mathcal{D}(A^*)$. On a :

$$\begin{aligned}
 \langle (y^*, y), V(x, Ax) \rangle &= \langle (y, A^*y), (-Ax, x) \rangle \\
 &= -\langle y, Ax \rangle + \langle A^*y, x \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors :

$$G(A^*) \subseteq (V(G(A)))^\perp,$$

récioproquement, si $(y, z) \in (V(G(A)))^\perp$ Alors

$$\langle (y, z), (-Ax, x) \rangle = \langle y, -Ax \rangle + \langle z, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Donc

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$$

ce qui donne $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et $z = A^*y$.

D'où

$$(V(G(A)))^\perp \subseteq G(A^*).$$

C'est-à-dire : $G(A^*) = (V(G(A)))^\perp$

1) On a :

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies G(A) \subset G(B) \\ &\implies V(G(A)) \subset V(G(B)) \\ &\implies (V(G(B)))^\perp \subset (V(G(A)))^\perp \\ &\implies G(B^*) \subset G(A^*) \\ &\implies B^* \subset A^*, \end{aligned}$$

2) puisque $A^\perp$ est toujours fermé alors :

$$G(A^*) = (V(G(A)))^\perp \text{ est fermé .}$$

D'où A^* est fermé.

3) On a

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(A^* + B^*) = \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(B^*).$$

Donc pour

$$x \in \mathcal{D}(A + B) \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{D}(A^* + B^*).$$

On aura :

$$\begin{aligned} \langle x, (A^* + B^*) \rangle &= \langle x, A^*y \rangle + \langle x, B^*y \rangle \\ &= \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle \\ &= \langle (A + B)x, y \rangle. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.

- 4) Soit $y \in \mathcal{D}(A^*B^*)$ et $x \in \mathcal{D}(BA)$.

c'est-à-dire

$$y \in \mathcal{D}(B^*) \text{ et } B^*y \in \mathcal{D}(A^*) \text{ et } x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } Ax \in \mathcal{D}(B).$$

D'où $\langle Ax, B^*y \rangle = \langle x, A^*B^*y \rangle$ (car $x \in \mathcal{D}(A)$ et $B^*y \in \mathcal{D}(A^*)$).

Et par conséquent $\langle BAx, y \rangle = \langle x, A^*B^*y \rangle$.

- 5) On a B est borné, alors

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \text{ et } \mathcal{D}(A^* + B^*) = \mathcal{D}(A^*).$$

Soit $y \in \mathcal{D}((A + B)^*)$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$,

on aura :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle (A + B)x, y \rangle - \langle Bx, y \rangle \\ &= \langle x, (A + B)^*y \rangle - \langle x, B^*y \rangle. \end{aligned}$$

D'où $y \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A^* + B^*)$.

- 6) Il est clair que $A^*B^* \subset (AB)^*$. Montrons que $A^*B^* \supset (AB)^*$

Si B est borné, alors $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B^*) = \mathcal{H}$.

Soit $y \in \mathcal{D}((BA)^*)$ et $x \in \mathcal{D}(BA) = \mathcal{D}(A)$, donc

$$\langle Ax, B^*y \rangle = \langle BAx, y \rangle = \langle x, (BA)^*y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(BA),$$

et par conséquent $B^*y \in \mathcal{D}(A^*)$

donc $y \in \mathcal{D}(A^*B^*)$

d'où $(AB)^* \subset A^*B^*$.

- 7) On a $\text{Ker} A^* = (\text{Im} A)^\perp = \{0\}$, donc A^* est injectif. Maintenant, rappelez-vous Définition. (2.4.2), ainsi que les notations et les résultats développés dans la preuve de Théorème (2.4.1), on a

$$G((A^{-1})^*) = U^{-1}(G(A^{-1})^\perp) = U^{-1}(V(G(A))^\perp) = U^{-1}(V(G(A)^\perp)).$$

Mais évidemment on a $U^{-1}V = VU$, on obtient donc

$$G((A^{-1})^*) = VU(G(A)^\perp) = V(G(A^*)) = G((A^*)^{-1}).$$

Cela prouve l'affirmation.

□

Définition 2.4.3. Soit A un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathcal{H}$.

- Si $A \subset A^*$ alors on dit que A est un opérateur symétrique.
- Si $A = A^*$, on dit que A est auto-adjoint.
- Si $\overline{A} = A^*$, on dit que A est essentiellement auto-adjoint.

Remarque 2.4.1. Soit A un opérateur de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathcal{H}$. Alors :

1. Si A est symétrique borné, il est alors adjoint.
2. Si A est symétrique alors $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*)$ ce qui implique que A^* est densément défini. Autrement dit, A est fermable et on a $\overline{A} = A^{**} \subset A^*$. D'où, si A est essentiellement auto-adjoint, alors $\overline{A} = A^{**} \subset A^*$.
3. Si A est auto-adjoint, alors $A = A^{**} = A^*$.
4. Si A est un opérateur auto-adjoint bijectif sur son image dense dans $\mathcal{H}$. Alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi auto-adjoint.
5. A est borné si et seulement si A^* est borné, dans ce cas on a

$$\|A\| = \|A^*\| \quad \text{et} \quad \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Chapitre 3

Semi-groupes d'opérateurs linéaires.

Dans ce chapitre, nous étudierons deux cas, le premier cas semi-groupes uniformément continus et le second cas semi-groupe fortement continu. Les résultats dans ce chapitre et ses preuves sont tirés de [3, 10, 11, 17, 9, 21] et d'autres références.

3.1 Semi-groupes uniformément continus.

Définition 3.1.1. On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$ une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $T(t) = I$.
- ii) $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0$.
- iii) $\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

Définition 3.1.2. On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ l'opérateur linéaire :

$$A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$
$$A = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t}.$$

Lemme 3.1.1. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E dont le générateur infinitésimal est A .

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une application définie par :

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$ quels que soient $t, s \geq 0$. Compte tenu de l'inégalité :

$$\|T(t) - I\| \leq e^{t\|A\|} - 1 \quad \forall t \geq 0,$$

il résulte :

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Donc la famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un semi-groupe uniformément continu.

D'autre part, puisque :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I - tA) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{t} \left(I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{1}{t} \left(1 + t\|A\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 - t\|A\| \right) \\ &= \frac{1}{t} (e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \\ &= \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|} \|A\| - \|A\| \longrightarrow 0 \quad \text{si } t \searrow 0, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A.$$

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A . $\square$

Lemme 3.1.2. *Etant donné un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tel que :*

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un autre semi-groupe uniformément continu engendré par A , nous avons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A,$$

et

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A.$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| = 0.$$

Pour $a \in]0, \infty)$, nous considérons l'intervalle $I_a = [0, a[$. Comme $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continus, nous voyons que les applications :

$$t \longmapsto \|T(t)\|,$$

et

$$t \longmapsto \|S(t)\|,$$

sont continues. Il existe $c_a \in [1, \infty)$ tel que :

$$\sup_{t \in I_a} \{\|T(t)\|, \|S(t)\|\} \leq c_a.$$

Si $\varepsilon > 0$, il existe $t_0 \in I_a$, $t_0 > 0$, tel que :

$$\left\| \frac{T(t) - S(t)}{t} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2}, \quad \forall t \in]0, t_0[.$$

Soit $t \in I_a$ arbitrairement fixé et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{t}{n} \in]0, t_0[$. Alors :

$$\begin{aligned} T(t) - S(t) &= \left[T\left(n\frac{t}{n}\right) \right] - \left[S\left(n\frac{t}{n}\right) \right] \\ &= T\left(n\frac{t}{n}\right)S\left(0\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right) + T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right) \\ &\quad - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right) - \dots - T\left(0\frac{t}{n}\right)S\left(n\frac{t}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right) \right] S\left(k\frac{t}{n}\right), \end{aligned}$$

quel que soit $t \in I_a$.

De l'inégalité :

$$\left\| \frac{T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2},$$

nous obtenons :

$$\left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n},$$

et par suite :

$$\|T(A) - S(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_a \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n} c_a, \quad \forall t \in I_a.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $T(t) = S(t)$, pour tout $t \in I_a$. Mais, comme $a \in]0, \infty)$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t)$, $(\forall) t \in [0, \infty)$. $\square$

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 3.1.1. *Un opérateur $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Corollaire 3.1.1. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Alors :*

- i) *il existe $\omega \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.*
- ii) *l'application $[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est différentiable pour la topologie de la norme et :*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. i) Nous avons :

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour $\omega = \|A\|$, nous obtenons l'inégalité :

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

L'assertion (ii) provient des égalités suivantes :

$$A = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - T(0)}{t - 0},$$

nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t = 0$. Soient $t > 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0.$$

Par conséquent, l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a :

$$\frac{d^+ T(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad \forall t > 0.$$

Soient $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t+h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(-h) \right\| \|T(t+h)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(-h) - I}{-h} - AT(-h) \right\| e^{(t+h)\|A\|}, \end{aligned}$$

d'où il vient :

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = AT(t).$$

Par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons :

$$\frac{d^- T(t)}{dt} = AT(t), \quad \forall t > 0.$$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$ et nous avons :

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

On vérifie que $AT(t) = T(t)A$, $(\forall) t \geq 0$.

□

3.2 Semi-groupes de classe C_0 .

3.2.1 Définitions. Propriétés élémentaires.

Dans le cadre de ce paragraphe, nous introduisons une classe plus générale que la classe des semi-groupes uniformément continus et nous étudions leurs propriétés élémentaires.

Définition 3.2.1. On appelle C_0 -semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$ une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad \forall t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x \quad , \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Définition 3.2.2. On appelle *générateur infinitésimal* d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

par :

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 3.2.1. Il est clair que le *générateur infinitésimal* d'un C_0 -semi-groupe est un opérateur linéaire.

Remarque 3.2.2. Puisque :

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \|x\|,$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$ et tout $t \geq 0$, il en résulte que les semi-groupes uniformément continus sont C_0 -semi-groupes. Mais il existe des C_0 -semi-groupes qui ne sont pas uniformément continus, comme nous pouvons le voir dans le exemple suivant.

Exemple 3.1. Soit :

$\mathcal{C}[0, \infty) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ est uniformément continue et bornée}\}$. Avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}[0, \infty)} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |f(\alpha)|$, l'espace $\mathcal{C}[0, \infty)$ devient un espace de Hilbert. Définissons :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t + \alpha) \quad , \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, \infty).$$

Évidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :

- i) $(T(0)f)(\alpha) = f(0 + \alpha) = f(\alpha)$. Donc $T(0) = I$;
- ii) $(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha), \forall f \in \mathcal{C}[0, \infty)$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$;
- iii)

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t)f - f\|_{\mathcal{C}[0, \infty)} = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |f(t + \alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0,$$

$$\forall f \in \mathcal{C}[0, \infty) \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |(T(t)f)(\alpha)|$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_{\mathcal{C}[0, \infty)} &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |(T(t)f)(\alpha)| \\ &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} |f(t + \alpha)| \\ &= \sup_{\beta \in [t, \infty)} |f(\beta)| \\ &\leq \sup_{\beta \in [0, \infty)} |f(\beta)| \\ &= \|f\|_{\mathcal{C}[0, \infty)}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1, \forall t \geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}[0, \infty)$, nommé le C_0 -semi-groupe de translation à droite. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}[0, \infty) \longrightarrow \mathcal{C}[0, \infty)$ le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si $f \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$Af(\alpha) = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(t + \alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α . Par conséquent : $\mathcal{D}(A) \subset \{f \in \mathcal{C}[0, \infty) \mid f' \in \mathcal{C}[0, \infty)\}$.

Si $f \in \mathcal{C}[0, \infty)$ tel que $f' \in \mathcal{C}[0, \infty)$, alors :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}[0, \infty)} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau) \Big|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)] d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \searrow 0$. Par suite :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}[0, \infty)} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0,$$

d'où $f \in \mathcal{D}(A)$ et :

$$\{f \in \mathcal{C}[0, \infty) \mid f' \in \mathcal{C}[0, \infty)\} \subset \mathcal{D}(A)$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}[0, \infty) \mid f' \in \mathcal{C}[0, \infty)\}$ et $Af = f'$. Comme cet opérateur est non borné, compte tenu du théorème 3.1.1, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 3.2.1. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :

i) il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0, \tau];$$

ii) il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Corollaire 3.2.1. Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, alors l'application :

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{H}$$

est continue sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{H}$

Démonstration. Soient $t_0, h \in [0, \infty)$ et $x \in \mathcal{H}$.

Si $t_0 < h$, nous avons :

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t_0} \|T(h)x - x\|.$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 - h)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega(t_0 - h)} \|T(h)x - x\|.$$

La continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évidente. $\square$

Définition 3.2.3. On dit que le C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est uniformément borné s'il existe $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 3.2.2. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe pour lequel il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, où :

$$S(t) = e^{-\omega t} T(t), \quad \forall t \geq 0,$$

est un C_0 -semi-groupe ayant la propriété :

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, si A est le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, alors le C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $B = A - \omega I$.

Démonstration. Dans les conditions du théorème, il est évident que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe et :

$$\|S(t)\| = \|e^{\omega t} T(t)\| \leq e^{-\omega t} Me^{\omega t} = M, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe uniformément borné. Soit A le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si B est le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{e^{-\omega h} T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{-\omega h} - 1)T(h)x}{h} + \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= -\omega x + Ax \\ &= (A - \omega I)x, \end{aligned}$$

d'où il résulte que $x \in \mathcal{D}(B)$ et $Bx = (A - \omega I)x$. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{e^{\omega h} S(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{\omega h} - 1)S(h)x}{h} + \lim_{h \searrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= (\omega I + B)x \end{aligned}$$

d'où il vient que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = (\omega I + B)x$. Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $B = A - \omega I$. $\square$

Remarque 3.2.3. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe pour lequel il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Si $\omega < 0$, alors nous obtenons :

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent on peut considérer que $\omega \geq 0$. Nous noterons par $\mathcal{SG}(M, \omega)$ l'ensemble des C_0 -semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Avec le théorème (3.2.2) nous voyons que le passage entre la classe $\mathcal{SG}(M, \omega)$ avec $\omega > 0$ et la classe $\mathcal{SG}(M, 0)$ est très simple.

3.2.2 Propriétés générales des C_0 -semi-groupes.

Proposition 3.2.1. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :

$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$. $\square$

Remarque 3.2.4. On voit que :

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A), \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 3.2.3. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{H},$$

est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et nous avons :

$$i) \quad \frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0$$

$$ii) \quad T(t)x - x = \int_1^t T(s)Axd s, \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration. i) Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|, \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad (\forall) t \geq 0.$$

Si $t - h > 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax \right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(h)Ax - Ax\| \right) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax,$$

et :

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

ii) Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons :

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax \quad , \quad (\forall)s \in [0, t], t \geq 0,$$

d'où :

$$\int_0^t T(s)Ax ds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x ds = T(t)x - x \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

□

Théorème 3.2.4. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :

i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;

ii) A est un opérateur fermé.

Démonstration.

i) Soient $x \in \mathcal{H}$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds \in \mathcal{D}(A), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x ds = T(0)x = x.$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$.

ii) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Alors :

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\| ,$$

quel que soit $s \in [0, t]$. Par suite $T(s)Ax_n \rightarrow T(s)y$, pour $n \rightarrow \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$.

D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds$$

ou bien :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds = y.$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé.

□

Nous montrons maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0 -semi-groupes.

Théorème 3.2.5. (l'unicité de l'engendrement.)

Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ deux C_0 -semi-groupes et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A . Alors :

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Définissons l'application :

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors :

$$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0$$

quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x, \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad t \geq 0.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que :

$$T(t)x = S(t)x, \quad (\forall)t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{H},$$

ou bien :

$$T(t) = S(t), \quad (\forall)t \geq 0.$$

□

Théorème 3.2.6. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si :

$$F\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A),$$

et :

$$FAx = AFx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration. $\implies$ Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que :

$$T(t)F = FT(t), \quad \forall t \geq 0,$$

et $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors, nous avons :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)Fx - Fx}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{FT(t)x - Fx}{t} = \lim_{t \searrow 0} F \frac{T(t)x - Fx}{t}.$$

Par conséquent $Fx \in \mathcal{D}(A)$ et on a $AFx = FAx$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

$\Leftarrow$ Soit $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que :

$$F\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A),$$

et

$$AFx = FAx, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, définissons l'application :

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)FT(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors nous avons :

$$\frac{d}{ds}U(s)x = \frac{d}{ds}T(t-s)FT(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}FT(s)x = -AT(t-s)FT(s)x + T(t-s)FAT(s)x = 0,$$

compte tenu de la commutativité. Par conséquent :

$$U(0)x = U(t)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on obtient :

$$T(t)Fx = FT(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$. Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ et $T(t)F, FT(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour tout $t \geq 0$, nous obtenons :

$$T(t)Fx = FT(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{H}$. □

Nous finissons cette section avec une généralisation du théorème (3.2.2)

Théorème 3.2.7. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors :*

- i) $\overline{\mathcal{D}(A^p)} = \mathcal{H}$, quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$;
- ii) A^p est un opérateur fermé, quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$;
- iii) l'application :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{D}(A^p)} : \mathcal{D}(A^p) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^p)} = \sum_{i=0}^p \|A^i x\|$$

est une norme avec laquelle $\mathcal{D}(A^p)$ devient un espace de Hilbert, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

3.2.3 Le théorème de Hille - Yosida.

Dans ce paragraphe nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0 . Il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0 -semi-groupes. Nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires. Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$.

Théorème 3.2.8. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors l'application :*

$$R_\lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Remarque 3.2.5. *On voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a :*

$$\operatorname{Im} R(\lambda; A) = \operatorname{Im} R_\lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$$

$$R(\lambda; A) \mathcal{D}(A) = R_\lambda \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Remarque 3.2.6. *On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda A R(\lambda; A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A . C'est le motif pour lequel on introduit la définition suivante.*

Définition 3.2.4. *La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A)$, pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A .*

Remarque 3.2.7. Evidemment, pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on voit que A_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$. Nous utiliserons cette famille pour montrer l'existence d'un C_0 -semi-groupe engendré par A .

Lemme 3.2.1. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

- i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;
- ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A , alors pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ nous avons :

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq M^2 t e^{\omega t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{H} \text{ et } t \geq 0.$$

Théorème 3.2.9. (Hille - Yosida).

Un opérateur linéaire :

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ si et seulement si :

- i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;
- ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Corollaire 3.2.2. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$, A son générateur infinitésimal et $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A . Alors :

$$T(t)x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad (\forall) x \in \mathcal{H},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.

Démonstration. Elle résulte du théorème de Hille-Yosida. □

3.2.4 C_0 -semi-groupes de contractions.

Dans la suite nous présentons quelques problèmes concernant la classe du C_0 -semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ vérifiant la propriété $\|T(t)\| \leq 1$, pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.2.5. On dit que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe de contractions sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ si $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$.

Lemme 3.2.2. Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$. Alors, l'application :

$$||| \cdot ||| : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$|||x||| = \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} \|T(t)x\|, (\forall)x \in \mathcal{H},$$

est une norme sur $\mathcal{H}$ équivalente avec la norme initiale $\|\cdot\|$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{H}$. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$e^{-\omega t} \|T(t)x\| \leq e^{-\omega t} \|T(t)\| \|x\| \leq M \|x\|.$$

En passant à la borne supérieure par rapport à t , on voit que :

$$|||x||| \leq M \|x\|, \forall x \in \mathcal{H}.$$

D'autre part, nous avons :

$$|||x||| = \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} \|T(t)x\| \geq e^{-\omega 0} \|T(0)x\| = \|x\|, (\forall)x \in \mathcal{H},$$

d'où il résulte que :

$$\|x\| \leq |||x||| \leq M \|x\|, (\forall)x \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent les normes $||| \cdot |||$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes. □

Théorème 3.2.10. Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$, A son générateur infinitésimal et :

$$S(t) = e^{-\omega t} T(t), \forall t \geq 0.$$

Alors :

$$i) \{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0),$$

$$ii) \text{ le } C_0\text{-semi-groupe } \{S(t)\}_{t \geq 0} \text{ a pour générateur infinitésimal l'opérateur } B = A - \omega I.$$

Démonstration. i) Il est clair que la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe. De plus, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\left\| S(t)x \right\| = \sup_{s \geq 0} e^{-\omega s} \|T(s)e^{-\omega t} T(t)x\| = \sup_{\tau \geq t} e^{-\omega \tau} \|T(\tau)x\| \leq \sup_{\tau \geq 0} e^{-\omega \tau} \|T(\tau)x\| = |||x|||, \quad (\forall)x \in \mathcal{H}$$

d'où on obtient :

$$|||S(t)x||| \leq |||x|||, \quad (\forall)x \in \mathcal{H} \text{ et } t \geq 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad (\forall)t \geq 0$$

et, par conséquent, $\{S(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$.

ii) Elle est analogue à celle du théorème 3.2.2.

□

Pour les C_0 -semi-groupes de contractions, on peut formuler la version suivante du théorème de Hille-Yosida.

Théorème 3.2.11. *Un opérateur linéaire :*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$, si et seulement si :

i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;

ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$, on a

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda)^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. i) $\implies$ ii) Comme $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$, nous avons :

$$\|T(t)\| \leq 1, (\forall) t \geq 0.$$

Par suite, on peut prendre $M = 1$ et $\omega = 0$. Avec le théorème de Hille-Yosida, il résulte que : (i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;

(ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$, on a :

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda)^n}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

ii) $\implies$ i) Soit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

un opérateur linéaire vérifiant les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. Avec le théorème de Hille-Yosida, il en résulte que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ pour lequel il existe $M = 1$ et $\omega = 0$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Donc A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.

□

Définition 3.2.6. *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$, linéaire non borné dans $\mathcal{H}$, est dissipatif si*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0, \quad \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 3.2.7. On appelle opérateur m -dissipatif un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) A est opérateur dissipatif ;
- ii) il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\text{Im}(\alpha_0 I - A) = \mathcal{H}$.

Théorème 3.2.12. (Lumer - Phillips)

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$.

L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$. si et seulement si A est un opérateur m -dissipatif.

Proposition 3.2.2. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|A\| \leq 1$. Alors $\{e^{t(A-I)}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de contractions.

Démonstration. Il est évident que $\{e^{t(A-I)}\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu. De plus :

$$\|e^{t(A-I)}\| \leq \|e^{tA}\| \|e^{-t}\| \leq e^{t\|A\|} e^{-t} \leq 1 \quad , \quad \forall t \geq 0$$

□

Bibliographie

- [1] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).
- [2] J. B. Conway, A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [3] E. B. Davies, One-Parameter Semigroups, Academic Press, London, 1980.
- [4] J. Dereziński, Unbounded operators. Lectures Notes, Department of Mathematical Methods in Physics, Warsaw University, Poland 2006.
- [5] R. Diestel. Graph theory. Springer-Verlag New York, 2005.
- [6] Djaa. B. Messirdi, Etude spectrale des Opérateurs de Multiplications .Maghreb. Math .Rev. Volume 8 No 1/2, 1999.
- [7] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Springer, GTM 236, 2007.
- [8] I. Goldberg, Unbounded linear operators, Mc Graw Hill, New York, 1966. Proc.Nati. Acad. Sci. 36. 1950. p35-40.
- [9] E. Hill, P. Phillips, Fonctionnal analysis and semi-groups A.M.S. Coll. Pub.31. 1957.
- [10] K-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995.
- [11] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, vol.132, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, New York, NY :Springer-Verlag, 1980.
- [12] J. Ph. Labrousse, Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)
- [13] M.J.J. Lennon, On Sums and Products of Unbounded Operators in Hilbert Space. Trans. Amer. Math.Soc. 198, 273-285 (1974).
- [14] N. Nikolski, Operators, functions, and systems : an easy reading, vol 1. Mathematical surveys and monographs, vol 92. American Mathematical Society, 2002.
- [15] A. Much, Self-adjointness of deformed unbounded operators, J. Math. Phys.56(2015), .

- [16] M. Rosenblum, et J. Rovnyak, Hardy classes and operator theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.
- [17] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, New York, NY : Springer-Verlag, 1983.
- [18] Wa, Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.
- [19] K. Schmüdgen, Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, Graduate Texts in Mathematics, vol. 265, Springer, Dordrecht, 2012.
- [20] M.H. Stone, On Unbounded Operators in Hilbert Space, J. Ind.Math. Soc. 15,155192 (1951).
- [21] J. Yosida, On differentiability and representation of one parameter semi-groups of linear operators.J. Math. Soc. Japan T.1 N1, P. 15-21, 1948.