الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications.

Par :

CHOUIKAT AICHA

Thème

Opérateur de Fredholm et Théorème de Perturbation.

Devant le jury composé de :

AMAR BELACEL	Prof	Université de Laghouat	Président
AMAR BOUGOUTAIA	M.C.A	Université de Laghouat	Encadreur
NAWEL ABDESSELAM	M.C.B	Université de Laghouat	Examinateur

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

"À ma chère mère et mon cher père, merci pour votre encouragement, votre soutien et vos sacrifices qui m'ont permis d'atteindre ce jour."

À ma chère tante et mon cher frère.

Aux professeurs du département de mathématiques.

"À tous ceux qui ont participé à ce travail de près ou de loin."

AICHA CHOUIKAT

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier Allah pour la guidance, la force mentale et la patience nécessaires pour accomplir ce travail.

Ensuite, je devrais exprimer mes sincères et illimités remerciements à mon superviseur, le Dr Amar Bougoutaia, pour son aide constante, ses précieuses suggestions et ses conseils précieux.

Un grand merci et une profonde appréciation aux membres du comité d'évaluation, le Dr Amar Belacel et la Dr Nawel Abdesselam, pour leurs critiques constructives et leurs précieuses observations qui ont contribué au développement de ce travail.

AICHA CHOUIKAT

ملخص

في مجال التحليل الدالي، تحتل مؤثرات فريدهولم مكانة مركزية بسبب خصائصها المميزة وتطبيقاتها في مختلف مجالات الرياضيات والفيزياء. في هذه المذكرة، نقوم بدراسة عميقة لمؤثرات فريدهولم، بدايةً من تعريف طبيعتها وخصائصها الأساسية. كما نستكشف أيضاً العلاقة الوثيقة بينها وبين المؤثرات المضغوطة، مسلطين الضوء على الروابط الأساسية بين هاتين المفاهيم. بالإضافة إلى ذلك، نتناول مفهوم المؤثر المرافق لمؤثرات فريدهولم وأهميته في نظرية المؤثرات. وأخيراً، نتطرق إلى نظرية التذبذب، التي توفر إطاراً قيماً لفهم سلوك مؤثرات فريدهولم تحت التذبذبات الخاصة. تهدف هذه الدراسة العميقة إلى توفير فهم شامل ودقيق لمؤثرات فريدهولم ولدورها الأساسي في التحليل الدالي الحديث.

الكلمات المفتاحية: المؤثر المتراص، المؤثر فريدهولم، نظرية التذبذب، الفضاء المقسوم.

Résumé

Dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, les opérateurs de Fredholm occupent une place centrale en raison de leurs propriétés remarquables et de leurs applications dans divers domaines des mathématiques et de la physique. Dans ce mémoire, nous entreprenons une étude approfondie des opérateurs de Fredholm, en commençant par définir leur nature et leurs caractéristiques fondamentales. Nous explorons également leur relation étroite avec les opérateurs compacts, mettant en lumière les liens essentiels entre ces deux concepts. De plus, nous examinons le concept d'adjoint des opérateurs de Fredholm et son importance dans la théorie des opérateurs. Enfin, nous abordons le théorème des perturbations, qui offre un cadre précieux pour comprendre le comportement des opérateurs de Fredholm sous des perturbations spécifiques. Cette étude approfondie vise à fournir une compréhension complète et rigoureuse des opérateurs de Fredholm et de leur rôle essentiel dans l'analyse fonctionnelle moderne.

Mots-clés : Opérateur compact, Opérateur de Fredholm, Théorème de parturbation, Espace quotient.

Abstract

In the field of functional analysis, Fredholm operators hold a central place due to their remarkable properties and applications in various areas of mathematics and physics. In this thesis, we undertake an in-depth study of Fredholm operators, starting with defining their nature and fundamental characteristics. We also explore their close relationship with compact operators, highlighting the essential links between these two concepts. Additionally, we examine the concept of the adjoint of Fredholm operators and its importance in operator theory. Finally, we address the theory of perturbations, which provides a valuable framework for understanding the behavior of Fredholm operators under specific perturbations. This thorough study aims to provide a comprehensive and rigorous understanding of Fredholm operators and their essential role in modern functional analysis.

Keywords : Compact operator, Fredholm operator, Perturbation theorem, Quotient space.

Table des matières

Table des Notations

$B(X)$	Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X.
B_X	La boule unité fermée de l'espace métrique X.
$L(X,Y)$	Ensemble des applications linéaires de l'espace X dans l'espace Y.
$\mathcal{L}(X,Y)$	Ensemble des applications linéaires continues de l'espace X dans l'espace Y.
I_E	Application identité de l'ensemble E.
$K(X,Y)$	Ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y.
τ_E	Topologie sur l'ensemble E.
$T_{\Vert.\Vert}$	Topologie engendrée par la norme $\Vert.\Vert$.
$\Vert\cdot\Vert_X$	Application norme sur l'ensemble X.
X/M	Le quotient de l'espace X par le sous-espace M.
$\Phi(X,Y)$	L'ensemble des opérateurs de Fredholm de X vers Y.

Introduction

Le mathématicien Fredholm a développé sa théorie à partir du théorème principal connu sous le nom de Alternative de Fredholm qui concerne la résolution de l'équation

$$\lambda f - Tf = g \tag{1}$$

Avec T un opérateur agissant sur X (Par exemple les opérateurs intégraux à noyau). Ce théorème affirme que l'équation (1) admet une solution unique pour tout g appartenant à X ou bien l'équation homogène $\lambda f - Tf = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes ce qui équivaut à co $\dim(Im(T - \lambda I) = n)$ et dans ce cas l'équation non homogène (1) est résoluble si et seulement si g vérifie n conditions d'orthogonalité.

Ce théorème fondamental a donné naissance à la théorie des opérateurs de Fredholm qui donne des informations sur les solutions de l'équation (1) en utilisant $\dim(\ker(T))$ et co $\dim(Im(T))$. Dans ce mémoire nous intéressons à la description de cette classe d'opérateurs et à l'alternative de Fredholm.

Le manuscrit se compose en trois chapitres dont le contenu est comme suit :

Dans le premier chapitre, on aborde les définitions classiques sur les espaces normés et de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous essayons d'applique les propriétés qui déjà vue sur les espaces produits et quotients de sorte que on présente la difficulté de cette étude particulièrement sur les espaces quotients.

Dans Le troisième chapitre, on s'intéresse à la classe des opérateurs de Fredholm dans le cas des opérateurs bornés et quelques concepts liés à cette classe et consacré à l'étude des perturbatios des opérateurs compactes et donne quelques applications.

Chapitre 1

Espaces normés, Espaces de Banach

1.1 Rappels

1.1.1 Espaces métriques

On définie sur $\mathbb{R}$ la distance usuelle suivante

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

Définition 1.1.1. *On rappelle qu'un espace métrique est un couple (X, d) ou X est un ensemble avec d une distance sur X, c'est-a-dire l'application*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que :

1. $\forall (x, y) \in X^2,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
2. $\forall (x, y) \in X^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie).*
3. $\forall (x, y, z) \in X^3,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(Inégalité triangulaire).*

Exemple 1. *Distance usuelle sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$: $d(x, y) = |x - y|$.

Exemple 2. *Étant donné un espace métrique (X, d) : distance produit sur*
$X \times X$, définie par :

$$\delta((x,y),(x',y')) = \max\left(d(x,y), d(x',y')\right).$$

Proposition 1.1.1. ***(Seconde inégalité triangulaire)***

$$\forall (x,y,z) \in X^3,\ |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

Définition 1.1.2. *Dans un espace métrique (X,d), on appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble :*

$$B(a,r) = \{x \in X,\ d(a,x) < r\}.$$

$$\textit{(resp. } B_F(a,r) = \{x \in X,\ d(a,x) \leq r\}).$$

Définition 1.1.3. *Un sous-ensemble A d'un espace métrique (X,d) est borné si et seulement s'il est contenu dans une boule :*

$$\exists\, a \in X,\ \exists\, r > 0 / A \subset B_F(a,r).$$

Une application à valeur dans un espace métrique est bornée si et seulement si son image est bornée.

1.1.2 Produit d'espaces métriques

Soit $(X_k, d_k)_{1 \leq k < n}$ une famille finie d'espaces métriques.

Proposition 1.1.2. *Sur le produit $Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, l'application δ qui à (x,y) associe $\delta(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$, définit une distance, qu'on appelle distance produit.*

Remarque 1.1.1. *Les projections p_i sur les facteurs X_i pour :*
$f : Z \longrightarrow Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, on appelle composantes de f les applications $f_i = p_i \circ f$.

Proposition 1.1.3. *Lorsque Z est un espace métrique, et Y est muni de la métrique produit : f est continue si et seulement si ses composantes le sont.*

Remarque 1.1.2. *Énoncé analogue pour la convergence des suites dans le produit Y.*

Proposition 1.1.4. *Un produit fini d'espaces métriques complets est complet.*

1.1.3 Distances équivalentes

Définition 1.1.4. *Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont équivalentes si et seulement s'il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que :*

$$\forall (x,y) \in X^2,\ k_1 d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq k_2 d(x,y).$$

Cette définition exprime que l'application Id_X est lipschitzienne de (X,d) vers (X,δ), et de (X,δ) vers (X,d).
L'équivalence des distances est une relation d'équivalence.

Définition 1.1.5. *Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont uniformément équivalentes si et seulement si l'application identique Id_X est uniformément continue de (X,d) vers (X,δ), et de (X,δ) vers (X,d).*

Deux distances d et δ sur le même ensemble X sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application Id_X est continue de (X,d) vers (X,δ), et de (X,δ) vers (X,d).

Proposition 1.1.5. *Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

1.2 Espaces normés

Définition 1.2.1. ***(La normes)***
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle une norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
3. $\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Définition 1.2.2. ***(Espaces normés)***
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$.

Exemple 1.2.1. *Les applications définies par :* $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$

a) $N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

b) $N_2(x) = \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

c) $N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$.

Sont des normes dans E^n.

Les applications définies par : $\forall f \in C^0([a,b], E)$.

a) $N_1(f) = \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)dt|$,

b) $N_2(f) = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$,

c) $N_{+\infty}(x) = \|x\|_{+\infty} = \sup\limits_{a\leq t\leq b}(|f(t)|)$,

sont des normes sur $C^0([a,b], E)$.

Les normes N_2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant dans le cas d'espaces vectoriels réels.

1.2.1 Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$, on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β telles que :

$$\alpha\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \beta\|.\|_1 \qquad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces normés $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$.

Théorème 1.2.1. *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.2.3. ***(Semi-normé)***
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une semi-normé sur E est une application p de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie, pour tout $(x,y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Si p est une semi-normé sur E, on dit que le couple (E, p) est un espace vectoriel semi-normé, ou simplement un espace semi-normé.

Exemple 1.2.2.

1. *L'application p définie pour tout $(x, y) \in E^2$ par $p(x, y) = |x^2 - y^2|$ est une semi-normé sur E^2.*
2. *Soit ε l'espace des fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ la fonction p définie sur ε par :*

$$p(\phi) = \int_a^b |\phi(t)|dt,$$

est une semi-normé sur ε.

On a pour les semi-normés une proposition analogue a la précédente pour les écarts, de démonstration immédiate.

Proposition 1.2.1. *Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrisable.*

Preuve. Pour tout $x, y \in E$, on définit la fonction p par

$$p(x, y) = \|x - y\|.$$

On remarque que cette fonction est bien définie une métrique sur E car, on a

$$\begin{aligned} p(x, y) = \|x - y\| &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= y. \end{aligned}$$

Il est évident de voir que la distance (x, y) est symétrique

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| \\ &= p(y, x). \end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|(x - z)\| + \|(z - y)\| \\ &= p(x, z) + p(z, y). \end{aligned}$$

1.2.2 Sous-espaces produits et quotients

Soient $(E_i, \|.\|_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces normés et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace vectoriel produit des E_i.
On vérifie facilement que l'application $\|.\|_\infty$ de E dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = \{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ par

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_i,$$

est une norme sur E. La topologie associée a $\|.\|_\infty$ est la topologie produit sur E. On dit que $\|.\|_\infty$ est la norme produit des normés $\|.\|_i$. Dans la suite, on supposera toujours un espace produit muni de la norme produit.

Proposition 1.2.2. *Soit (E, N_E) un espace normé, on a*

1. *L'application ϕ de $E \times E$ dans E, définie par $\phi(x, y) = x + y$, est 2-lipschitzienne.*
2. *L'application Ψ de $\mathbb{K} \times E$ dans E, définie par $\Psi(A, x) = Ax$, est continue.*

Corrolaire 1.2.1. *Soit (E, N_E) un espace vectoriel normé. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.2.3. *Soit (E, p) un espace vectoriel semi-normé. Le noyau de la semi-normé p est la partie $K = \{x \in E, p(x) = 0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de E. L'application p induit sur l'espace vectoriel quotient E/K une application N bien définie par $N(x) = p(x)$, et N est une norme sur E/K. La distance sur E/K associée a la norme N est la distance quotient de l'écart associe à p.*

1.3 Applications linéaires continues

Ce paragraphe est essentiel, on va donner quelque des propriétés.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Les applications linéaires sont aussi appelées morphismes d'espaces vectoriels.

1. Un automorphisme est une application linéaire bijective de E dans E.

2. Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E.

3. Un isomorphisme est une application linéaire bijective de E dans F.

1.3.1 Espaces d'applications linéaires continues

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On adopte les notations suivantes :

$$L(E,F) = \{f : E \longrightarrow F,\ f \text{ linéaire}\},$$

et

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \longrightarrow F,\ f \text{ linéaire continue }\}.$$

Lorsque $E = F$, on note simplement $L(E) = L(E,E)$ et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$. Donnons tout d'abord diverses conditions équivalentes de continuité pour une application linéaire.

Proposition 1.3.1. *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *f est continue au point 0.*
3. *f est bornée sur la boule unité fermée de E.*
4. *Il existe un réel $a > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq a\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.*
5. *f est lipschitzienne.*

Proposition 1.3.2. *Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. L'application $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathbb{R}_+$, définie par*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F,$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ appelée norme associtée a $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

Remarque 1.3.1. *On vérifie facilement les égalités suivantes valables pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, en pratique, on utilisera très souvent la caractérisation suivante : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf_{a\in\mathbb{R}^+} \{\forall\, x \in E, \|f(x)\|_F \leq a\|x\|_E\}.$$

Proposition 1.3.3. *Soient (E, N_E) et $(F, N_F), (G, N_G)$ trois espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors,*

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G) \quad et \quad \|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}\, \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

1.4 Suites de Cauchy

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ on dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N_\varepsilon\,, \forall\, p\,,\, q > N_\varepsilon \text{ on a : } \|\, x_p - x_q \,\| < \varepsilon.$$

Lemme 1.4.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|.\|)$ contient une sous suite $(x_{nk})_k$ convergente vers x alors la suite $(x_n)_n$ est aussi convergente vers le même élément x.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy alors il vient :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, N_\varepsilon\,, \forall\, p\,,\, q > N_\varepsilon \text{ on a : } \|\, x_p - x_q \,\| < \varepsilon,$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$ on a

$$\forall\, p\,,\, n_k \geq N_\varepsilon : \; \|\, x_p - x_{nk} \,\| < \varepsilon,$$

avec la convergence de la suite $(x_{nk})_k$ vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon \,:\, \|\, x_{nk} - x \,\| < \varepsilon.$$

D'où la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers l'élément x

$$\begin{aligned}\forall p, n_k \geq N_\varepsilon : \|x_p - x_{nk}\| &= \|x_p - x + x_{nk} - x_{nk}\| \\ &\leq \|x_p - x_{nk}\| + \|x_{nk} - x\| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

1.5 Espaces complets

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.
Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in N, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a : } \| x_p - x_q \| < \varepsilon.$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$, tel que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Exemple 1.5.1. *Tout espace métrique discret est complet. En effet, dans un espace métrique discret :*

$$d(u, v) = 1 \text{ si } u \neq v.$$

Donc toute suite de Cauchy est stationnaire et donc convergente.

1.6 Espaces de Banach

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé est complet.

Exemple 1.6.1.

1. *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.*
2. *Soit X et E deux espace de Banach. L'espace vectoriel $B(X, E)$, muni de la norme $\|.\|_1$, est espace de Banach.*
   Si de plus X est un espace topologique, alors $C_b(X, E)$ muni de la norme induite par $\|.\|_1$ (que l'on notera encore $\|.\|_1$) est aussi un espace de Banach.
3. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ continues telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < +\infty$ peut être muni de la norme :*

$$\|f\|^p = \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Est un espace normé alors est de Banach noté $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Lemme 1.6.1. *Tout espace de Banach $(E, \|.\|)$ est fermé.*

Théorème 1.6.1. *Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs A linéaires continus sur E dans F muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.*

Théorème 1.6.2. *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

1.7 Espaces produits

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y) \text{ tels que } \ x \in E \text{ et } \ y \in F\}.$$

Est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ par l'une des normes produits suivantes :

1. $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \ \ \forall x \in E, y \in F.$
2. $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \ \ \forall x \in E, y \in F, 1 < p < +\infty.$
3. $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} \ \ \forall x \in E, y \in F.$

1.8 Opérateurs continus

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante :
pour toute suite $(x_n)_n$ de G converge vers x_0, la suite $(A(x_n))_n$ converge vers $A(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \to +\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.8.1. *L'opérateur A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

Théorème 1.8.1. *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu sur G s'il est continu en un point x_0 de G.*

1.9 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \qquad \forall x \in E. \tag{1.1}$$

Proposition 1.9.1. *La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|A(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\|_E \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Proposition 1.9.2. *La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.*

Théorème 1.9.1. *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.*

Espaces isomorphes

Soient $(E, \|.\|_E)\, et\, (F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F, c'est à dire :

1. A est bijectif sur E dans F.
2. A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Espaces isométriques

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F, c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \quad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Remarque 1.9.1. *La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.*

Inégalité de Holder

Soit p, q, r des nombres de $[1, +\infty]$ vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ (avec la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$). si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ le produit fg appartient à L^r, et on a

$$\|fg\|_{L^r} \;\leq\; \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}.$$

Inégalité de Young

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $p,\ q\ \in]1, +\infty[$ tq $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Inégalité de Minkowski

Soit $p \in [1, +\infty]$ et f et g dans L^p on a

$$\|f + g\|_p \;\leq\; \|f\|_p \,+\, \|g\|_p.$$

Théorème 1.9.2. ***(Ascoli-Arzelà)***
Soit A un sous ensemble de $C(J, E)$, A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est borné, i.e, il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$\|\varphi(x)\| \leq K \textit{ pour tout } x \in J, \textit{ et tout } \varphi \in A.$$

ii) L'ensemble A est équi-continue, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, telle que :

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < \varepsilon \textit{ pour tout } x_1, x_2 \in J, \textit{ et tout } \varphi \in A.$$

L'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact pour tout $x \in X$.

Chapitre 2

Espaces produits, Espaces quotients

2.1 Espaces produits

Problème de la topologie initiale : Soit E un ensemble, (F_i, τ_i) une famille d'espaces topologiques et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications, pour tout $i \in I, f_i$ de E dans F_i. On s'intéresse aux topologies τ sur E telles que chaque f_i soit continue de (E, τ) dans (F_i, τ_i), on notera A l'ensemble de ces topologies. Il est clair que la topologie discrète sur E est dans A et c'est la topologie la plus fine ayant cette propriété. On voit aussi que, si τ est dans A, toute topologie τ sur E plus fine que τ est aussi dans A. Il est donc naturel de s'intéresser a la topologie la moins fine appartenant a A. On a vu que l'intersection d'une famille quelconque de topologies sur E est une topologie sur E. L'intersection des éléments de A est donc pavoisement la topologie la moins fine cherchée. Cette topologie est dite topologie initiale sur E pour les données $(F_i, \tau_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vide et $E = \prod\limits_{i\in I} E_i$ son produit. Il existe alors naturellement une famille $(\mathscr{P}_i)_{i\in I}$ de surjections canoniques de E sur les E_i les projections canoniques. La projection canonique $\mathscr{P}_i$ de E= $\prod\limits_{j\in I} E_j$ dans E_i est l'application qui a $x \in E$ associe $x_i \in E_i$, ou x_i est la i-ieme composante de x, ceci conduit, lorsque les E_i sont des espaces topologiques, a la définition suivante.

Définition 2.1.1. ***(Topologie produit)***
Soit (E_i, τ_i) *une famille d'espaces topologiques,* $E = \prod_{i \in I} E_i$ *leur ensemble produit et pour tout* $i \in I, \mathscr{P}_i$ *la projection canonique de* E *sur* $(E_i)_{i \in I}$. *La topologie produit sur* E *est la topologie initiale sur* E *pour les données* $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ *et* $(\mathscr{P}_i)_{i \in I}$. *C'est donc la topologie la moins fine de* E *pour laquelle toutes les projections* $(\mathscr{P}_i)$ *sont continues. On notera* $\otimes_{i \in I} \tau_i$ *la topologie produit des topologies* τ_i *.*
Dans toute la suite de ce paragraphe, on conserve les notations de la définition, la topologie produit est facile a décrire elle possédé une base particulièrement simple.

Définition 2.1.2. ***(Rectangle élémentaire)***
On appelle rectangle élémentaire de E *toute partie* $\mathscr{R}$ *de* E *de la forme*

$$\mathscr{R} = \bigcap_{j=1} \mathscr{P}_j^{-1} \mathscr{O}_j.$$

Ou les parties $\mathscr{O}_j$ *sont des ouverts de* E_j, *et ou* J *est une partie finie de* I *.*

Remarque 2.1.1. *Une maniéré équivalente de définir un rectangle élémentaire est la suivante un rectangle élémentaire est une partie* $\mathscr{R}$ *de* E *de la forme*

$$\mathscr{R} = \prod_{i=1} \mathscr{O}_i,$$

avec $\mathscr{O}_i = E_i$ *sauf pour un nombre fini d'indices* $i \in I$. *Cette dernière description est plus maniable en pratique et justifie d'ailleurs la dénomination rectangle, la description de la définition précédente est utile dans les démonstrations théoriques.*
La proposition suivante explique en particulier pourquoi, dans la définition des rectangles, on se limite a des parties J *finies.*

Proposition 2.1.1. *L'ensemble* $\mathscr{R}$ *des rectangles élémentaires de* E *est une base de topologie sur* E. *La topologie engendrée par* $\mathscr{R}$ *est la topologie produit. Un ouvert pour la topologie produit est donc une réunion de rectangles élémentaires.*

Exemple 2.1.1. *Soit* $\mathbb{R}^n$ *un rectangle élémentaire est de La forme* $\prod_{i=1}^{n} \bigcup_{k \in K} \left]a_i^k, b_i^k\right[$ *ou, pour tout* $i \in]1, n[$ *et tout* $k \in K$. $a_i^k \in \overline{\mathbb{R}}, b_i^k \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a_i^k < b_i^k$. *Un ouvert pour cette topologie est une réunion quelconque de ces rectangles élémentaires.*

Proposition 2.1.2. *Soit f une application d'un espace topologique $(F, \tau_{\mathfrak{F}})$ dans un espace topologique produit $(\otimes_{i\in I}E,\, \otimes_{i\in I}\tau_i)$. Alors, f est continue si et seulement si, pour tout $i \in I$,*

$$f = p_i \circ f.$$

f est continue.

Attention. *Il n'existe pas de résultat analogue pour les applications définies sur un espace produit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Définie par*

$$g(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)} \ \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } g(0,0) = 0,$$

n'est pas continue en $(0,0)$, mais ses applications partielles $x \longrightarrow g(x,0)$ et $y \longrightarrow g(0,y)$ sont nulles. Donc en particulier continues en 0.

On s'intéresse maintenant aux liens qui existent entre topologie produit et séparation.

Proposition 2.1.3. *Soient I un ensemble quelconque et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques sépares. Alors, l'espace*

$$E = \prod_{i\in I} E_i.$$

Muni de la topologie produit est sépare .

Proposition 2.1.4. *Soit (E, τ) un espace topologique. Alors, (E, τ) est sépare si et seulement si la diagonale*

$$\Delta = \{(x,x) : x \in E\},$$

est un fermé de l'espace produit $E \times E$.

Remarque 2.1.2. *Si $n \geq 3$, il y a plusieurs manières de munir un produit de n espaces topologiques d'une structure topologique. Par exemple, si on donne trois espaces $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, il est possible de munir d'abord $E_1 \times E_2$ de la structure produit, puis $(E_1 \times E_2) \times E_3$ de la structure produit, ou directement $E_1 \times E_2 \times E_3 \ldots$. On admet que tous ces procédés sont équivalents, dans le sens ou ils donnent la même topologie.*

2.2 Espaces quotients

Commençons par rappeler la définition algébrique d'un quotient d'espace vectoriel.

Définition 2.2.1. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et W un sous-espace de V, alors le quotient de groupes abéliens V/W, dont l'ensemble sous-jacent est $\{v+W : v \in V\}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé espace quotient, muni de la loi interne :*

$$\begin{aligned} + : V/W \times V/W &\longrightarrow V/W \\ (v+W, v'+W) &\longrightarrow (v+W)+(v'+W) = (v+v')+W, \end{aligned}$$

et de la loi externe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{.} : \mathbb{K} \times V/W &\longrightarrow V/W \\ (\lambda, v+W) &\longrightarrow \lambda\boldsymbol{.}(v+W) = (\lambda v)+W, \end{aligned}$$

le $\mathbb{K}$-homomorphisme.

$$\begin{aligned} \Pi_W : V &\longrightarrow V/W \\ v &\longrightarrow v+W. \end{aligned}$$

Est appelé application quotient ou projection canonique.
Nous rappelons que si W est un sous groupe d'un groupe V, on peut définir une relation d'équivalence $\sim w$ en posant $v \sim wu$ si et seulement si $u - v \in W$. Les classes d'équivalence sont les $v+W$ tels que $v \in V$ et l'on note V/W l'ensemble de ces classes d'équivalence. C'est un groupe si $W < V$.
Considérons maintenant un espace normé $(X, \|.\|_X)$ et $M \subseteq X$ un sous-espace nous cherchons à savoir si la norme. $\|.\|_X$ induit une norme sur le quotient X/M. Une façon naturelle de définir une distance entre deux classes (à gauche) consiste à utiliser la distance entre sous-ensembles d'un espace métrique :

$$d(x+M, y+M) = \inf\{\|v-w\|_X \ : \ v \in x+M \, et \, w \in y+M\}.$$

Remarquons que

$$d(x+M, y+M) = d(x, y+M) = \inf\{\|v-w\|_X \ : \ w \in y+M\}.$$

(Ou la deuxième d représente la distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique), étant donné que $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned}
\{v - w : v \in x + M,\, w \in y + M\} &= \{(x + m_1) - (y + m_2) \,:\, m_1, m_2 \in M\} \\
&= \{x - (y + m_1 - m_2) \,:\, m_1, m_2 \in M\} \\
&= \{x - (y + m) \,:\, m \in M\} \\
&= \{x - w \,:\, x \in y + M\}.
\end{aligned}$$

En outre, si l'on veut que l'application d ci-dessus définie une métrique, il est nécessaire que le sous-espace M soit fermé car si $x \in \widetilde{M}/M$, on obtient que

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) = 0.$$

Or $x \in \widetilde{M}/M$ implique que $x \notin M$ et donc $]\, x+M \neq 0+M$. Ainsi M doit être fermé si d veut avoir une chance de satisfaire les axiomes de métrique. Maintenant, si nous voulons que d soit la métrique engendrée par une norme, cette dernière norme doit nécessairement mesurer la distance entre une classe et le point zéro de X/M. Nous pouvons donc poser la définition suivante :

Définition 2.2.2. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. La norme quotient de l'espace X/M est l'application*

$$\begin{aligned}
\|.\|_{X/M} : X/M &\longrightarrow \mathbb{F} \\
x + M &\longrightarrow \|x + M\|_{X/M} = d(x + M, 0 + M).
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. *Pour tout $x \in X$ nous avons :*

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M),$$

et

$$d(x + M, 0 + M) = d(0, x + M) \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|x + M\|_{X/M} &= \inf\{\|x - m\|_X : m \in M\} \\
&= \inf\{\|x + m\|_X : m \in M\}.
\end{aligned}$$

Vérifions que $\|.\|_{X/M}$ est bien une norme au sens de la Définition 1.2.1.

Théorème 2.2.1. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors la norme quotient $\|.\|_{X/M}$ est une norme.*

Preuve. Soit $x, y \in X$, et $\lambda \in \mathbb{F}$.

1. Le sous-espace M étant fermé, on a que

$$0 = \|x + M\|_{X/M} = d(x + M, 0 + M) = d(x, M),$$

si et seulement si $X \in M$ et seulement si $x + M = 0 + M$.

2. Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda\,(x+M)\,\|_{X/M} &= \|\,(\lambda x) + M\|_{X/M} = d\,(\lambda x, M) \\ &= d\,(\lambda x, \lambda M) \quad \text{puisque } M \text{ est stable par loi externe} \\ &= |\lambda|\; d\,(x, M) = |\lambda| \|x + M\|_{X/M}, \end{aligned}$$

et

$$\|0\,(x+M)\,\|_{X/M} = \|0 + M\|_{X/M} = 0 = |0|\|x + M\|_{X/M}.$$

Ainsi,

$$\|\lambda\,(x+M)\,\|_{X/M} = |\lambda|\|x + M\|_{X/M}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \text{ et } \forall x \in X.$$

3. Par définition de la norme quotient et en appliquant l'inégalité triangulaire à $\|.\|_X$ obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|\,(x+M) + (y+M)\,\|_{X/M} &= \|\,(x+y) + M\|_{X/M} \\ &\leq \|x + y + m_1 + m_2\|_{X/M} \ : \ \forall m_1, m_2 \in M \\ &\leq \|x + m_1\|_{X/M} + \|x + m_2\|_{X/M}. \end{aligned}$$

Ainsi en prenant l'infimum sur les $m_1, m_2 \in M$ de ces deux dernières normes, on obtient que

$$\|\,(x+M) + (y+M)\,\|_{X/M} = \|x + M\|_{X/M} + \|x + M\|_{X/M}.$$

De ce fait $\|.\|_{X/M}$ satisfait l'inégalité triangulaire et il s'agit donc bien d'une norme.

Proposition 2.2.1. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors,*

(1) $\|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X$ *pout tout $x \in X$.*

(2) Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\widetilde{x} \in X$ tel que

$$\widetilde{x} + M = x + M \quad \textit{et} \quad \|\widetilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon.$$

Preuve.

(1) Nous avons

$$\|x + M\|_{X/M} = d(x, M) = \inf\{\|x - M\|_X \ : \ m \in M\} \leq \|x - 0\|_X = \|x\|_X.$$

(2) Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, par définition de l'infimum, il existe $m \in M$ tel que

$$\begin{aligned} \|x - m\|_X &< \inf\{\|x - v\|_X, v \in M\} + \varepsilon \\ &= d(x, M) + \varepsilon \\ &= \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Posons $\widetilde{x} = x - m$, Alors

$$\|\widetilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon.$$

De plus, $m \in M$ entraine que $m + M = 0 + M$ et

$$\widetilde{x} + M = (x - m) + M = (x - 0) + M = x + M.$$

Nous pouvons maintenant montrer que les quotients par des sous-espaces fermés des espaces de Banach ont le bon goût d'être complets eux aussi.

Théorème 2.2.2. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace de Banach $(X, \|.\|_X)$. Alors, $\left(X/M, \|.\|_{X/M}\right)$ est aussi un espace de Banach.*

Preuve. Soit $\{X_N + M\}$ une suite de Cauchy dans X/M. Il suffit de prouver que $\{X_N + M\}$ admet une sous-suite convergente, ce qui implique que la suite elle converge vers la même limite. Essayons donc d'extraire une sous-suite convergente. Remarquons d'abord que si $x, y \in X$ sont tels que $\|(x - y) + M\|_{X/M} < \delta > 0$, alors le point (2) de la Proposition 2.2.1, il existe $y \in X$ tel que $(x - y) + M \in X + M$ et $\|(x - y)\|_X < \delta$. Par définition d'une suite de Cauchy, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que quelque soit $n \geq n_1$, $\|(x_{n_1} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-1}$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$, tel que quelque soit $n \geq n_2$, $\|(x_{n_2} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-2}$. Et ainsi de suite, il existe pour tout $m > 0$,
$n_m \in \mathbb{N}$, $n_m \geq n_{m-1}$ tel que quelque soit
$n \geq n_m$, $\|(x_{n_m} - x_n) + M\|_{X/M} < 2^{-m}$.
Autrement dit, la sous-suite $\{x_{nk}\}$ de $\{x_n + M\}$ définie ci-dessus est telle que :

$$\|(x_{nk} - x_{nk+1}) + M\|_{X/M} < 2^{-k} \text{ pour tout } k > 0.$$

Ainsi par la remarque mentionnée, il existe $\widetilde{x}_{n_2} \in X$ tel que :

$$(x_{n1} - \widetilde{x}_{n_2}) + M = (x_{n_1} - x_{n-2}) + M \text{ et } \|(x_{n_1} - \widetilde{x}_{n_2})\|_X < 2^{-1}.$$

Alors comme $x_{n_2} + M = x_{n_2} + M$ on peut dire, $\widetilde{x}_{n_2} = x_{n_2}$.
De même, il existe $\widetilde{x}_{n_3} \in X$ tel que $(x_{n_2} - \widetilde{x}_{n_3}) + M = (x_{n_2} - x_{n_3}) + M$ et
$\|(x_{n_2} - \widetilde{x}_{n_3}) + M\|_X < 2^{-2}$.
Alors comme $\widetilde{x}_{n_3} + M = x_{n_3} + M$ on peut poser, sans perte de généralité, $\widetilde{x}_{n_3} = x_{n_3}$. Ainsi par une induction sur k, on obtient que $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_X < 2^{-k}$. Il en découle que $\{x_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans X. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors pour $p > 1 - \log_2 \varepsilon$ et pour tout $m > p \geq q$ on a :

$$\begin{aligned}
\|x_{n_m} - x_{n_q}\|_X &\leq \|x_{n_m} - x_{n_{m-1}}\|_X + \cdots + \|x_{n_{q+1}} - x_{n_q}\|_X \\
&\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^{(1-\log_2 \varepsilon)}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi par complétude de X, la suite (x_{n_k}) converge vers un certain $x \subseteq X$ lorsque $k \to +\infty$. Par conséquent,

$$\|(x_{n_k} + M) - (x + M)\|_{X/M} = \|(x_{n_k} - x) + M\|_{X/M} \leq \|x_{n_k} - x\|_X \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Donc la sous-suite $\{x_{n_k} + M\}$ converge vers $x + M$ et de ce fait la suite totale $\{x_n + M\}$ converge vers la même limite.

Proposition 2.2.2. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$, si X et M sont complets, alors l'espace X/M est aussi complet .*

Preuve. Tout d'abord, supposons que X est complet, alors X/M est complet par le théorème précédent et M est en particulier complet en tant que sous-espace fermé de X. Il reste à voir que si M et X/M sont complets, cela implique que X est aussi complet. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. Alors par le point (1) de la Proposition 2.2.1

$$\|x_n - x_m + M\|_{X/M} \leq \|x_n - x_m\|_X \quad \text{pour tout } m, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $x_n + M$ est une suite de Cauchy dans X/M, qui est complet, et de ce fait converge vers un certain $y + M \in X/M$. Le point (2) de la Proposition 2.2.1 entraine alors que pour tout $n \in N$, il existe $y_n \in X$ tel que $y_n + M = (x_n - y) + M$ (autrement dit

$x_n - y - y_n \in M$) et $\|y_n\| < \|(x_n y) + M\|_{X/M} + 2^{-n} \to 0$ lors que $n \to +\infty$. Ainsi y_n converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ étant convergentes, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq n_1 : \|x_n - x_m\|_X < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m, n \geq n_1 : \|y_n - y_m\|_X < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $m, n \geq \max\{m, n\}$:

$$\|(x_n - y - y_n) - (x_m - y - y_m)\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_X = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $x_n - y - y_n$ est une suite de Cauchy dans M et par complétude de M, elle admet une limite $z \in M$.

Finalement,

$$x_n = \underbrace{x_n - y - y_n}_{\underset{n \longrightarrow +\infty}{\to z}} + \underbrace{y_n}_{\underset{n \longrightarrow +\infty}{\to 0}} + y \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} z + y,$$

autrement dit X est complet.

Lemme 2.2.1. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$, et $\pi : X \to X/M$, l'application quotient associée, Alors*

$$\pi(U_X) = U_{X/M}.$$

Preuve. "$\subseteq$" Soit $x \in U_X$, alors d'après la Proposition 2.2.1,

$$\|\pi(x)\|_{X/M} = \|x + M\|_{X/M} \leq \|x\|_X \leq 1,$$

donc $\pi(x) \in X/M$ et $\pi(U_x) \in U_{X/M}$.

"$\supseteq$" Soit $x + M \in U_{X/M}$, alors par le point (2) de la Proposition 2.2.1, il existe $\tilde{x} \in X$ tel que

$$\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + M = x + M \text{ et } \|\tilde{x}\|_X < \|x + M\|_{X/M} + \varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

En d'autres terme, il existe $\tilde{x} \in U_{X/M}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + M = x + M$. Par conséquent, $U_{X/M} \supseteq \pi(U_x)$.

Proposition 2.2.3. *Soit X et M comme dans le lemme ci-dessus. Alors, l'application quotient $\pi : X \to X/M$ est un opérateur linéaire borné et ouvert. De plus, si*

$$M \neq X \textit{ alors } \|\pi\| = 1.$$

Preuve. L'application π est linéaire par la définition des lois interne et externe sur X/M. D'après le lemme précédent 2.2.1 l'image par π de U_X est un sous-ensemble borné de X/M, ce qui implique, par linéarité, que π est borné. Pour voir que π est ouvert, il faut voir que l'image par π de tout sous-ensemble ouvert de X est un sous-ensemble ouvert de X/M.
Soit U un ouvert de X et $x \in U$, alors il existe $r > 0$ tel que $U \supseteq x + rU_X$.
Ainsi,

$$\pi(U) \supseteq \pi(x + rU_X) = \pi(x) + rU_{X/M},$$

d'après le Lemme 2.2.1, Autrement dit $\pi(U)$ est ouvert dans X/M et π est une application ouverte.
Si $M \subseteq X$, alors X/M est différent de l'espace vectoriel trivial. Ainsi, π étant borné, $\|\pi\| = \sup\{\|\pi(x)\| | x \in S_X\} = 1$ par Lemme 2.2.1.

Nous allons maintenant voir que sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut obtenir deux propriétés qui sont les analogues pour les espaces normés de la propriété universelle du quotient et du premier théorème d'isomorphe algébriques.

2.3 Propriété universelle de l'espace quotient.

Soit X et Y des espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire. Soit encore $M \subseteq \ker(T)$ un sous-espace fermé de X et $\pi : X \to X/M$ l'application quotient. Alors, il existe un unique opérateur linéaire $S : X/M \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$.
Autrement dit le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "T"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & Y \\
X/M \arrow[ur, dashed, "\exists! S"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus, $Im(S) = Im(T)$, S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte ; S est borné si et seulement si T est borné et si T est borné, alors

$\|S\| = \|T\|$.

Preuve. L'existence et l'unicité d'une application linéaire $S : X/M \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$ et de même image que T constitue la propriété universelle algébrique du quotient.
Montrons que S est une application ouverte si et seulement si T est une application ouverte : Supposons d'abord que S soit une application ouverte. π est aussi une application ouverte par la Proposition 2.2.1, par conséquent, $T = S \circ \pi$ est aussi une application ouverte en tant que composition de deux applications ouvertes.
Réciproquement, supposons que T soit une application ouverte et soit U un ouvert de X/M. Alors,

$$S(U) = S(\pi(\pi^1(U))) = T(\pi^1(U)) \cdot \pi^1(U).$$

Est un ouvert de X puisque π est continu et donc $U = T(\pi^1(U))$ est un ouvert de Y puisque T est ouverte. Par conséquent S est une application ouverte.
Montrons que S est borné si et seulement si T est borné. Par le Lemme 2.2.1
$\pi(U_X) = U_{X/M}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sup\{\|S(x+M)\| \ : \ x + M \in U_{X/M}\} &= \sup\{\|S(\pi(x))\| \ : \ x \in U_X\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in U_X\}.\end{aligned}$$

Ainsi S est borné si et seulement si T est borné et on a, alors $\|S\| = \|T\|$.

Théorème 2.3.1. ***D'isomorphe***
Soit X et Y des espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Supposons de plus que $Im(T)$ fermé de Y. Alors :

$$X/\ker(T) \cong T(X).$$

Preuve. Le noyau de T est fermé en tant que l'image par une application continue fermé $\{0_Y\}$ de Y. Nous pouvons donc considérer l'espace quotient $X/\ker(T)$ ainsi que l'unique opérateur induit $S : X/\ker(T) \to Y$ tel que $T = S \circ \pi$, fourni par la propriété universelle du quotient. Il vient,

$$\begin{aligned}\ker(S) &= \{x + \ker(T) \ : \ x \in X \, et \, S \circ \pi(x) = 0\} \\ &= \{x + \ker(T) \ : \ x \in \ker(T)\} \\ &= \{0 + \ker(T)\}.\end{aligned}$$

L'opérateur S est donc un opérateur linéaire borné et injectif de l'espace de Banach $X/\ker(T)$ dans l'espace de Banach $T(X)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

Proposition 2.3.1. *Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire de rang fini entre deux espaces normés. Alors, T est continu si et seulement si $\ker(T)$ est un fermé de X.*

Preuve. Il suffit de montrer que T est borné si et seulement si $\ker(T)$ est un fermé de X. Si T est borné, alors son noyau est fermé en tant que l'image par T d'un sous-ensemble fermé $\{0_Y\}$ de Y.
Réciproquement, supposons que $\ker(T)$ est fermé. Alors nous pouvons prendre le quotient $X/\ker(T)$ et considérons l'application $S : X/\ker(T) \to Y$ fournie par la propriété universelle de $X/\ker(T)$. Alors, $S(x + \ker(T)) = 0$ si et seulement si $T(x) = 0$ pour $x \in \ker(T)$. Ainsi $\ker(S) = \ker(T) = 0_X/\ker(T)$ et S est de ce fait injectif. Par hypothèse, $Im(T)$ est de dimension finie, par conséquent, l'injectivité de l'opérateur linéaire S implique que $X/\ker(T)$ est aussi de dimension finie. Donc S est borné, ce qui implique, toujours d'après la propriété universelle du quotient, que T est borné aussi.

Chapitre 3

Opérateur de Fredholm

3.1 Concepts liés aux opérateurs de Fredholm

3.1.1 La somme directe et projection

Comme nous le verrons par la suite, certains opérateurs de Fredholm peuvent être obtenus à partir de projections. C'est pourquoi nous consacrons cette section.

Définition 3.1.1. [4] ***(Somme directe extérieure d'espaces normés)***
Supposons que $X_1, \ldots, X_n$ des espaces vectoriels. La somme directe de $X_1, \ldots, X_n$ est l'espace vectoriel obtenu par le produit cartésien $X_1 \times \cdots \times X_n$ et muni des deux opérations suivantes :

1. $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
2. $\alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Supposons maintenant que $X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces vectoriels normés munis des normes $\|.\|_{X_1}, \ldots, \|.\|_{X_n}$. Leur somme directe (extérieure) est l'espace vectoriel produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ muni de la norme suivante :

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \| := \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{X_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient alors un espace vectoriel normé noté $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$.

Définition 3.1.2. [4] ***(Somme directe intérieure d'espaces normés)***
Si $M_1, \ldots, M_n$ sont des sous-espaces fermés d'un espace normé X tel que

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = X \ \textit{et} \ M_j \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}} M_k = \{0\}.$$

Alors, on dit que X est la somme directe (intérieure) de $M_1, \ldots, M_n$.

Définition 3.1.3. [4] ***(Somme directe d'opérateurs)***
Soient $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$, des espaces normés et $T_j : X_j \to Y_j$, des opérateurs linéaires. La somme directe de $T_1, \ldots, T_n$ est l'opérateur :

$$T_1 \oplus \cdots \oplus T_n : X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n,$$

définie par

$$(T_1 \oplus \cdots \oplus T_n)\,(x_1, \ldots, x_n) = (T_1(x_1), \ldots, T_n(x_n)).$$

Avec $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$.

Définition 3.1.4. [4] ***(Projection)***
Soit X un espace de Hilbert. Un élément $p \in \mathcal{L}(X)$ est appelé un opérateur de projection orthogonale s'il est auto-adjoint et idempotent, c'est-à-dire si $p^* = p$ et $p^2 = p$.

Définition 3.1.5. [4] *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace vectoriel normé, A un sous-ensemble de X et B un sous-ensemble de X^*. On appelle ensemble polaire de A dans X (respectivement de B dans X^*) l'ensemble*

$$A^\circ = \{x^* \in X^* \ : \ x^*(x) = 0 \ \textit{pour tout} \ x \in A\},$$

respectivement de

$$^\circ B = \{x \in X \ : \ x(x^*) = 0 \ \textit{pour tout} \ x^* \in B\}.$$

Proposition 3.1.1. [4] *Les ensembles A° et $^\circ B$ sont fermés.*

Preuve. L'ensemble $^\circ B = \cap_{x^* \in X^*} \ker x^*$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.
montrons que A° est fermé.
Soit $\{z_n^*\}$ une suite dans A° qui converge vers un certain $z^* \in X$. Alors en particulier, $z_n^*(x) \to z^*(x)$ pour tout $x \in X$. Or $z_n^* \,|\, A = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $z^* \,|\, A = 0$.
Par conséquent, $z^* \in A^\circ$ et c'est à dire A° fermé.

Théorème 3.1.1. *Soit M un sous-ensemble fermé d'un espace normé $(X, \|.\|_X)$. Alors,*

(1) M° est isomorphe à $(X/M)^*$.

(2) M^* est isomorphe à $X^*/\ M^\circ$.

Preuve.

(1) Soit $\pi : X \to X/M$ l'application quotient et soit $T : y^* \to y^*\pi$. Clairement T est un opérateur linéaire de $(X/M)^*$ dans M°. Si $x^* \in M^\circ$ alors $M \subset \ker x^*$. Alors la propriété universelle du quotient garanti qu'il existe un unique $y^* \in (X/M)^*$ tel que $x^* = y^*\pi$ et de plus $\|y^*\|_{(X/M)^*} = \|x^*\|_{X^*}$. Autrement dit, T est bijectif et $\|y^*\|_{(X/M)^*} = \|Ty^*\|_{X^*}$. En conséquence, T est même un isomorphisme isométrique de $(X/M)^*$ dans M°.

(2) Soit $T : X^*/M^\circ \to M^*$ l'application qui envoie un élément de $x^* + M^\circ \in X^*/M^\circ$ sur la restriction de x^* à M. Puisque deux éléments $x_1^* + M^\circ$ et $x_2^* + M^\circ$ de X^*/M° sont égaux si et seulement si $x_1^*|M = x_2^*|M$, T est bien définie. Il est aussi injectif par définition et clairement linéaire. Maintenant, si $m^* \in M^*$ et x^*m^* est une extension de Hahn-Banach de m^* à X, alors $T\left(x^*m^* + M^\circ\right) = m^*$, ainsi T est surjectif. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

Lemme 3.1.1. [4] *Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur borné. Alors*

(1) $\ker T^* = (ImT)^\circ$.

(2) $\ker T = {}^\circ(ImT^*)$.

Preuve.

(1)

$$\begin{aligned}
\ker T^* &= \{y^* \in Y^* \,:\, 0 = T^*y^* = y^* \circ T\} \\
&= \{y^* \in Y^* \,:\, y^*|ImT = 0\} \\
&= \{y^* \in Y^* \,:\, y^*(y) = 0 \text{ pour tout } y \in ImT\} \\
&= \{ImT\}^\circ .
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} {}^{\circ}(ImT^*) &= \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x^* \in ImT^*\} \\ &= \{x \in X : 0 = (T^*y^*)x \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\ &= \{x \in X : 0 = y^*(Tx) \text{ pour tout } y^* \in Y^*\} \\ &= \{x \in X : 0 = Tx\} \\ &= \ker T. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. *Il découle du Théoréme 3.1.1 ainsi que du Lemme 3.1.1 que*

$$\overline{ImT} = {}^{\circ}((ImT)^{\circ}) = {}^{\circ}(\ker T^*).$$

3.1.2 Opérateurs à image fermée

Théorème 3.1.2. [4] ***(Théorème de l'image fermée)***
Soient X et Y deux espaces de Banach, alors pour tout $T \in B(X,Y)$ les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) ImT est fermée.

(2) $ImT = {}^{\circ}(\ker T^*)$.

(3) ImT^* est fermée.

(4) $ImT^* = (\ker T)^{\circ}$.

Preuve.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Valide, d'après la remarque précédente 3.1.1.
(1) $\Longleftrightarrow$ (4) D'après le Lemme précédent 3.1.1 $(\ker T)^{\circ} = {}^{\circ}((ImT^*)^{\circ}) \supset ImT^*$.
En vertu du premier théorème d'isomorphisme, nous avons que l'application

$$\begin{aligned} S : &X = \ker T \to ImT \\ &x + \ker T \to T(x), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Maintenant, si $x \in (\ker T)$, alors l'unique application $\overline{x} : (x + \ker T) \to x^*(x)$ définie par la propriété universelle du quotient est un élément de $(X + \ker T)^*$. Par conséquent, $\overline{x} \circ S^{-1} \in (ImT)^*$. Donc il existe $y^* \in Y^*$ tel que $y^*|ImT = \overline{x} \circ S^{-1}$. Ainsi, pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned} (T^*y^*)\,x &= y^*(Tx) = \left(\overline{x} \circ S^{-1}\right)(Tx) \\ &= \left(\overline{x} \circ S^{-1}\right)(S(x + \ker T)) \\ &= \overline{x}\,(x + \ker T)\;\; x^*(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $T^*y^* = x^*$. Par conséquent $(\ker T)^\circ \subset ImT^*$. Et donc $(\ker T)^\circ = ImT^*$.
(4) $\Longrightarrow$ (3) D'après la Proposition Précédente 3.1.1 les ensembles polaires sont des fermés.

3.1.3 Opérateurs compacts

Définition 3.1.6. [14] *Soient X et Y des espaces normés. Un opérateur $T \in L(X, Y)$ est dit compact si, pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, la suite $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y contient une sous-suite convergente. L'ensemble des opérateurs compacts est noté $K(X, Y)$.*
donnons dans cette section quelques propriétés algébriques simples des opérateurs compacts dont nous aurons besoin dans la suite.

Théorème 3.1.3. *Soient X et Y deux espaces normés et $T \in K(X, Y)$. Alors T est borné. Ainsi, $K(X, Y) \subset B(X, Y)$.*

Preuve. Supposons que T n'est pas borné. Alors pour tout entier $n \geq 1$ existe un vecteur unitaire x_n tel que $\|Tx_n\| \geq n$. Puisque la suite $\{x_n\}$ est bornée, par la compacité de T, il existe une sous-suite $\{Tx_{n(r)}\}$ qui converge. Mais ceci contredit le fait que $\|Tx_{n(r)}\| \geq n(r)$, donc T doit être borné.

Théorème 3.1.4. *Soient X, Y, Z des espaces normés.*

(a) Si $S, T \in K(X, Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\alpha S + \beta T$ est compact.

(b) Si $S \in B(X, Y), T \in B(Y, Z)$ et au moins l'un des opérateurs S, T est compact, alors $TS \in B(X, Z)$ est compact.

Preuve.
(a) Soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans X. Puisque S est compact, il exist une sous- suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Sx_{n(r)}\}$ converge dans Y. Ensuite, comme $\{x_{n(r)}\}$ est borné et T étant compact, il existe une sous-suite $\{x_{n(r(s))}\}$ de la suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Tx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. Il s'ensuit que la suite $\{\alpha Sx_{n(r(s))} + \beta Tx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. Donc $\alpha S + \beta T$ est compact.
(b) Soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans X. Si S est compact, alors il existe une sous-suite $\{x_{n(r)}\}$ telle que $\{Sx_{n(r)}\}$ converge dans Y.
comme T est bornée (et donc continue), la suite $\{TSx_{n(r(s))}\}$ converge dans Z. d'ou TS est un opérateur compact.

Maintenant si S est borné mais non compact, alors par la continuitée de S la suite $\{Sx_n\}$ est bornée dans Y. Par la compacité de T, il exist une sous-suite $\{Sx_{n(r)}\}$ telle que $\{TSx_{n(r)}\}$ converge dans Z, d'ou TS est compact.

Définition 3.1.7. [14] *Un opérateur $T : X \to Y$ est dit de rang finie si* $\dim(ImT)$ *est fini et on a :*

$$rg(T) = \dim(ImT).$$

Théorème 3.1.5. [14] *Soient X et Y des espaces normés et T un opérateur borné de X dans Y :*

(1) Si T est de rang fini alors il est compact.

(2) Si l'une de dimension de X ou de Y est finie alors T est compact.

Preuve.

(1) Comme T est de rang fini alors l'espace $Z = ImT$ est normé de dimension finie. De plus, pour toute suite bornée $\{x_n\}_n$ dans X, la suite $\{Tx_n\}$ est bornée dans Z, donc par le théoréme de Bolzano-Weierstrass cette suite doit contenir une sous-suite convergente. D'ou T est compact.

(2)

a) Si la dimension de X est finie, alors $\dim(ImT) = rg(T)$ est finie. Donc d'après la première propriété T est compact.

b) Si la dimension de Y est finie, il est clair que $\dim(ImT)$ est finie car $ImT \subset Y$, par suite T est de rang fini donc compact.

Exemple 3.1.1. *Soit*

$$T : L^2[-\pi, \pi] \to L^2[-\pi, \pi]$$

$$f \to Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y)f(y)\ d(y).$$

On démontre que T est compact.

$$Im(T) = \Big\{Tf(x), f \in L^2[-\pi, \pi], x \in [-\pi, \pi]\Big\}.$$

Soient $x \in [-\pi, \pi]$ et $f \in L^2[-\pi, \pi]$, alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-y) f(y) d(y) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\right) f(y) d(y) \\
&= \cos(x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) f(y) d(y) + \sin(x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y) f(y) d(y).
\end{aligned}
$$

On pose $\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y) f(y) d(y)$ *et* $\beta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(y) f(y) d(y)$. *Donc* $T(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ *avec* α *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

Donc $Tf \in L^2[-\pi, \pi]$, *alors Comme toute fonction de* $L^2()$ *est décomposable en serie de Fourier, alors*

$$
Tf(x) = (a_0/2) \left(\sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \right),
$$

avec α_n *et* β_n *des scalaires, d'ou* ImT *est engendré par* $\{\cos x, \sin x\}$.

Donc $\dim(ImT) = 2 < \infty \Longrightarrow rg(T) < \infty \Longrightarrow T$ *est compact.*

3.2 Opérateur de Fredholm et Semi-Fredholm

Définition 3.2.1. [13] *Soit* A *un opérateur borné d'un espace de Hilbert* H *dans un autre espace de Hilbert* H_0. A *est dit un opérateur semi-Fredholm à droite et noté par* $\Phi_+(H, H_0)$ *(respectivement à gauche et notée par* $\Phi_-(H, H_0)$*) s'il existe un opérateur borné* $B \in B(H, H_0)$ *et un opérateur* K *compact sur* H_0 *(respectivement sur* H*) tels que* $AB = I + K$ *(respectivement* $BA = I + K$*).*

Définition 3.2.2. [1] *Soit* X, Y *deux espaces de Banach et* $A \in L(X, Y)$ *un opérateur borné. On dit que* A *est un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $Im(A)$ *est fermé.*
2. $\dim(\ker A)$ *est finie.*
3. $co\dim(Im(A))$ *est fini.*

Où la $co\dim(Im(A)) = \dim(X/ImT)$.

L'ensemble des opérateurs de Fredholm de X *vers* Y *est noté* $\Phi(X, Y)$.

Définition 3.2.3. [1] *On appelle indice de A est on la note $ind(A)$ l'entier relatif :*

$$ind(A) = \dim\ker(A) - co\dim(Im(A)).$$

L'indice de A est $-\infty$ si cette codimension est infinie.

Exemple 3.2.1. *Considérons deux espaces de Banach X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne). Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu.*
On a evidemment que, $\dim(\ker T)$ et $\dim(Co\ker T)$ sont finies et ImT est fermée, étant de dimension finie.
Alors,

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(Co\ker T) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y/ImT) \\ &= \dim(\ker T) - (\dim(Y) - \dim(ImT)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(ImT) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2. ***(Opérateur non Fredholm)***
L'opérateur nul $T : X \to Y$, défini par $T(x) = 0_Y$ pour tout $x \in X$, entre deux espaces de Banach n'est pas un opérateur de Fredholm si la dimension de X ou de Y est infinie.
En effet, si X est de dimension infinie, alors $\ker T = X$ est de dimension infinie et si Y est de dimension infinie $ImT = \{0_Y\}$ dont la codimension, qui est la dimension de Y est infinie.

Théorème 3.2.1. [4] ***(Adjoint d'un opérateur de Fredholm)***
Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \Phi(X,Y)$ un opérateur de Fredholm et soit T son adjoint, alors T est un opérateur de Fredholm, et on a :

$$ind(T) = -ind(T^*).$$

Preuve. Nous allons montrer que :

1. ImT^* est fermée.
2. $\dim(\ker T) < \infty$.
3. $\dim(X^*/ImT^*) < \infty$.

(1) Etant donné que T est Fredholm, son image ImT est fermée, ce qui équivaut à dire que ImT^* est fermée, d'après le théorème de l'image fermée.
(2) En appliquant le Théorème 3.1.1 au sous-espace $\ker T$ de X, il vient :

$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ.$$

Or le théorème de l'image fermée fournit $(\ker T)^\circ = ImT^*$. Ainsi :

$$(\ker T)^* \cong X^*/(\ker T)^\circ = X^*/ImT^*.$$

Donc

$$\dim(ImT^*) = \dim(\ker T^*) = \dim(\ker T) < \infty.$$

Par hypothèse
(3) En appliquant le Théorème 3.1.1 au sous-espace ImT de Y, il vient :

$$(Y/ImT)^* \cong (ImT)^\circ.$$

En outre le Lemme 3.1.1 fournit $(ImT)^\circ = \ker T^*$, par conséquent :

$$(Y/ImT)^* \cong (ImT)^\circ = \ker T^*.$$

Ainsi,

$$\dim(\ker T^*) = \dim((Y/ImT)^*) = \dim(Y/ImT) < \infty.$$

L'opérateur adjoint T^* est donc bien Fredholm. Calculons son indice :

$$\begin{aligned} ind(T^*) &= \dim(\ker T) - \dim(X^*/ImT^*) \\ &= \dim(Y/ImT) - \dim(\ker T) \\ &= -\,ind(T). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. [3] *Soit $T \in L(X,Y)$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) T est semi-Fredholm.

2) De toute suite bornée de X dont l'image par T est une suite convergente, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve. Supposons que (2) soit vérifiées, Il résulte du lemme de Reisz (la boule unité d'un espace normé est relativement compact si et seulement si cet espace est de dimension finie) que le noyau $\ker(T)$ est de dimension finie. $\ker(T)$ possède alors des supplémentaires topologiques. Soit X_0 un tel supplémentaire. la propriété (2) implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$(3) \ \ \forall u \in X_0 \leq C\|Tu\|.$$

En effet, si (3) était fausse, on pourrait construire une suite $u_n \in X_0, \|u_n\| = 1, \|Tu_n\| \leq \frac{1}{n}$. De cette suite on pourrait extraire d'après l'hypothèse (2) une sous-suite convergente vers $u \in X_0$ (car X_0 est normé), $\|u\| = 1$ et $Tu = 0$, ce qui contredit $u \in X_0$.
L'image de T et celle de la restriction de T à X_0 étant égales, l'inégalité (3) (prouve que $Im(T)$ est fermée car complète).
Réciproquement, puisque (3) est vérifiée si et seulement si la restrection de T à X_0 est injective et d'image fermée, la propriété (1) implique (3). Soit alors (u_n) une suite borné dans X dont l'image par T est convergente. On décompose u_n sous la forme

$$u_n = v_n + w_n, v_n \in \ker(T), w_n \in X_0.$$

$Tu_n = Tw_n$, et de (3) on déduit que la suite w_n est de cauchy, donc converge. La suite (v_n) est bornée dans l'espace de dimension finie $\ker(T)$, et possède donc une sous-suite convergente, ce qui prouve (2).

3.3 Alternative de Fredholm

Théorème 3.3.1. [14] *Soit $T : H \to H$ un opérateur compact tel que H un espace de Hilbert de dimension infinie, si $\lambda \neq 0$, alors :*

1. *$Im(T - \lambda I)$ est fermé.*
2. *$\ker(T - \lambda I)$ a une dimension finie.*

Preuve.
1) Soit $\{y_n\}$ une suite dans $Im(T - \lambda I)$, avec $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Ainsi, pour tout n, on a $y_n = (T - \lambda I)x_n$, pour certain x_n, et comme $\ker(T - \lambda I)$ est fermé, x_n a une décomposition orthogonale de la forme $x_n = u_n + v_n$, avec $u_n \in \ker(T - \lambda I)$ et $v_n \in \ker(T - \lambda I)^{\perp}$.

Nous allons montrer que la suite $\{v_n\}$ est bornée.

Supposons que v_n n'est pas bornée, $\|v_n\| \neq 0$, et $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \infty$. En mettant $w_n = v_n/\|v_n\|$,

$n = 1, 2, \ldots$, on a $w_n \in \ker(T - \lambda I)^{\perp}$, $\|w_n\| = 1$ (donc la suite $\{w_n\}$ est bornée) et

$$(T - \lambda I)\, w_n = (y_n/\|v_n\|) \to 0,$$

puisque $\{y_n\}$ est borné (car elle est convergente). En outre, par la compacité de T on peut supposer que $\{Tw_n\}$ converge.

En combinant ces résultats, il s'ensuit que la suite w_n converge (puisque $\lambda \neq 0$). Soit $w = \lim_{n\to 1} w_n$, on voit que $\|w_n\| = 1$ et

$$(T - \lambda I)\, w_n = \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)\, w_n = 0,$$

donc $w \in \ker(T - \lambda I)$. Mais, $w_n \in \ker(T - \lambda I)^{\perp}$ alors

$$\|w - w_n\|^2 = (w - w_n, w - w_n) = 1 + 1 = 2.$$

Ce qui contredit $w_n \to w$. Donc la suite $\{v_n\}$ est bornée.

Maintenant, par la compacité de T, nous pouvons supposer que $\{v_n\}$ converge. Puis $v_n = \lambda^{-1}(Tv_n - (T - \lambda I)v_n) = \lambda^{-1}(Tv_n - y_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $\{v_n\}$ converge. notons v sa limite. Alors

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)v_n = (T - \lambda I)v,$$

et donc $y \in Im(T - \lambda I)$.

Cela prouve que $Im(T - \lambda I)$ est fermé.

(2) Supposons que $M = \ker(T - \lambda I)$ est de dimension infinie. Puisque le noyau d'un opérateur borné est fermé, l'espace M est un espace de Hilbert de dimension infinie, et il y a une suite orthonormale $\{e_n\}$ dans M. Les vecteurs image vérifient pour $m \neq n$:

$$\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda e_n - \lambda e_m\|^2 = 2|\lambda|^2.$$

Comme $\lambda \neq 0$, la suite (Te_n) ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy, donc pas de sous-suite convergente et T n'est pas compact. Donc contradiction. D'ou M est de dimension finie.

Proposition 3.3.1. [13] *Soit $A \in B(H, H_0)$ tel que H et H_0 sont des espaces de Hilbert. Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. Comme A est bijectif, alors $\ker A = \{0\}$, par conséquent $\dim \ker A < +\infty$. De plus $Im(A) = H_0$ est fermé et $co\dim Im(A) = 0$. Donc l'opérateur A est de Fredholm.

$$\begin{aligned} ind(A) =& \dim \ker A - co\dim Im(A) \\ =& 0 - 0 \\ =& 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2. *Soit $A \in B(H, H_0)$ tel que H et H_0 sont des espaces de Hilbert. Si $\dim H < +\infty$, et $\dim H_0 < \infty$, alors A est de Fredholm. Dans ce cas*

$$ind(A) = \dim H - \dim H_0.$$

Preuve. Comme $\dim H < +\infty$, et $\dim H_0 < +\infty$ alors $\dim \ker A < +\infty$, $co\dim Im(A) < +\infty$ et $Im(A)$ est fermé donc A est de Fredholm.

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim \ker A - co\dim Im(A) \\ &= \dim \ker A - \dim H_0 + \dim Im(A) \\ &= \dim H - \dim H_0. \end{aligned}$$

3.4 Produits d'opérateurs de Fredholm

Lemme 3.4.1. [2] *Soit N un sous-espace vectoriel de X de dimension finie (X espace vectoriel normé) alors il existe X_0 sous-espace vectoriel fermée de X tel que :*

a) $X_0 \cap N = \{0\}$.

b) $\forall x \in X, \exists!\, x_0 \in X, \exists!\, x_1 \in N$ *tel que* $x = x_0 + x_1$, *c'est-à-dire : celà veut dire seulement que* $X = X_0 \oplus N$.

Preuve. Soit $x \in X = X_1 \oplus M$
si $x \in M \Rightarrow \|px\| = \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|$.
si $x \in X_1 \Rightarrow \|px\| = 0 \leq 1 \cdot \|x\|$.

Lemme 3.4.2. [2] *Soit X_1 un sous-espace vectoriel fermé de X et M un sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $X_1 \cap M = \{0\}$. Alors $X_2 = X_1 \oplus M$ est un sous-espace vectoriel fermé de X.*
De plus l'opérateur

$$P : X_2 \to X_2$$
$$X \to Px.$$

Ou

$$\begin{cases} X & si \quad x \in M \\ \\ 0 & si \quad x \in X_1 \end{cases}$$

est bornée c'est-à-dire $P \in (X_2)$.

Théorème 3.4.1. [7] *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach, et soit* $A \in \Phi(X, Y)$. *Alors, il existe un sous-espace fermé* X_0 *de* X*, tel que* $X = X_0 \oplus \ker(A)$ *et un sous-espace* Y_0 *de* Y *de dimension* A *tel que* $Y = Im(A) \oplus Y_0$.
De plus, il existe un opérateur $A_0 \in L(Y, X)$*, tel que*

a) $\ker(A_0) = Y_0$.

b) $Im(A_0) = X_0$.

c) $A_0 A = I$ *sur* X_0.

d) $AA_0 = I$ *sur* $Im(A)$.

e) $A_0 A = I - F_1$ *sur* X.

f) $AA_0 = I - F_2$ *sur* Y.

Où $F_1 \in L(X)$ *avec* $Im(F_1) = \ker(A)$ *et* $F_2 \in L(Y)$ *avec* $Im(F_2) = Y_0$.

Preuve. Les propriétés a), b), c) et d) se déduisent directement des lemmes précédents pour $N = \ker(A)$ et X_0.
Montrons maintenant la propriété (e) :
on a $F_1 = I$ sur $\ker(A)$ et égal à 0 sur X_0 d'après la propriété (c). Donc $F_1 \in L(X)$, un raisonnement similaire donne (f).

Théorème 3.4.2. [7] *Soit* $A \in L(X, Y)$ *et* $B \in L(Y, Z)$ *où* X, Y *et* Z *sont des espaces de Banach. Si* A *et* B *sont des opérateurs de Fredholm (des opérateurs semi-Fredholm supérieurs, respectivement, des opérateurs semi-Fredholm inférieurs), alors* BA *est un opérateur de Fredholm, (un opérateur semi-Fredholm supérieur, respectivement, un opérateur semi-Fredholm inférieur), et*

$$ind(BA) = ind(B) + ind(A).$$

Preuve. [3] Soit l'opérateur $A : \ker(BA) \to \ker(B)$ avec pour noyau $\ker(A)$. D'où

$$\dim \ker(BA) \leq \dim \ker(B) + \dim \ker(A).$$

Il existe W_1 et W_2 de dimension finie tels que

$$Y = Im(A) \oplus W_1,\ Z = Im(B) + W_2.$$

Donc $Im(BA)$ est de codimension finie dans $Im(B)$, qui est de codimension finie dans Z. Donc $Im(BA)$ de dimension finie dans Z.
Il en résulte que BA est un opérateur de Fredholm.

Théorème 3.4.3. [2] *Soit X, Y et Z trois espaces de Banach. Supposons que $A \in L(X, Y)$ et $B \in L(Y, Z)$ sont tels que $BA \in \Phi(X, Z)$. Alors $A \in \Phi(X, Y)$ si et seulement si, $B \in \Phi(Y, Z)$.*

Preuve. Supposons d'abord que $A \in \Phi(X, Y)$, et soit A_0 un opérateur satisfaisant le Théorème 3.4.1, Ainsi,

$$BAA_0 = B - BF_2 \text{ sur } Y,$$

où $F_2 \in K(Y)$.
Maintenant $A_0 \in \Phi(Y, X)$ et $BA \in \Phi(X, Z)$ par l'hypothèse. Ainsi, $BAA_0 \in \Phi(Y, Z)$ (Théorème 3.4.2). Puisque $BF_2 \in K(Y, Z)$ est la suite de $B \in \Phi(Y, Z)$.
Supposons ensuite que $B \in \Phi(Y, Z)$, et soit $B_0 \in L(Z, Y)$ tel que $B_0B = I - F_3$ sur Y, $BB_0 = I - F_4$ sur Z où $F_3 \in K(Y)$ et $F_4 \in K(Z)$. Alors,

$$B_0BA = A - F_3A \text{ sur } X.$$

Maintenant $BA \in \Phi(X, Z)$ par hypothèse, tandis que $B_0 \in \Phi(Y, Z)$. D'où $B_0BA \in \Phi(X, Y)$, et le même doit être vrai de A.

Théorème 3.4.4. *Supposons que $A \in L(X, Y)$ et B soit dans $L(Y, Z)$ sont tels que $BA \in \Phi(X, Z)$. Si $\dim(\ker B) < \infty$, alors $A \in \Phi(X, Y)$ et $B \in \Phi(Y, Z)$.*

Preuve. Puisque $Im(B) \supset Im(BA)$, on voit que $Im(B)$ est fermé. De plus, $\dim Im(B) \leq \dim Im(BA)$, et donc $B \in \Phi(Y, Z)$, nous appliquons maintenant le Théorème 3.4.3. Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.

Proposition 3.4.1. [4] *Soient* $A \in L(H, H_0)$ *et* M *un sous-espace de* H *tel que* $co\dim M = n < +\infty$. *On pose* $A_0 = A/M$. *Alors :*
A est de Fredholm si et seulement si $A_0 : M \to H_0$ *est de Fredholm.*
De plus

$$ind(A) = ind(A_0) + n.$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur la codimension de M. Pour $n = 1$ on pose :

$$H = M \oplus \prec x_1 \succ,$$

où $\prec x_1 \succ$ est le sous-espace engendré par un vecteur $x_1 \neq 0$ de H.
$\forall\, x \in H, x = x_0 + \lambda x_1$ alors $Ax = Ax_0 + \lambda A x_1,\ x_0 \in M$.
Envisageons deux cas :

1) Si $y_1 = Ax_1 \notin Im(A_0)$ alors :

$$Im(A) = Im(A_0) \oplus \prec y_1 \succ.$$

D'autre part :

$$\ker A_0 = \ker A,$$

en effet,

$$\ker A_0 = \{x_0 \in M, A_0 x_0 = 0\},$$

et

$$\ker A = \{x_0 \in H, Ax_0 = 0\}.$$

On a $\ker A_0 \subset \ker A$. Il reste à montrer que, $\ker A \subset \ker A_0$.
Si $x \in \ker A$, alors $Ax = 0$,
d'autre part

$$x = x_0 + \lambda x_1,$$

alors :

$$Ax = Ax_0 + \lambda x_1 = 0,$$

donc :

$$Ax_0 = A_0 x_0 = -\lambda . Ax_1,$$

ce qui implique que :

$$y_1 = 0 \text{ et } A_0x_0 = 0,$$

cela veut dire que

$$x_0 \in \ker A_0,$$

alors

$$\dim\ker A = \dim\ker A_0,$$

et

$$co\dim Im(A) = co\dim Im(A_0) + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim\ker A_0 - co\dim Im(A_0) + 1 \\ &= ind(A_0 + 1). \end{aligned}$$

2) Si $y_1 = Ax_1 \in Im(A_0)$ alors

$$Im(A) = Im(A_0),$$

et il existe un $u \in M$ tell que :

$$y_1 = A_0(u),$$

de plus

$$\ker A = \ker A_0 + \oplus \prec x_1 - u \succ,$$

en effet,

$$x = x_0 + \lambda x_1, \text{ où } x_0 \in M \text{ et } x_1 \in H.$$

$$\begin{aligned} Ax &= Ax_0 + y_1 = A_0x_0 + \lambda A_0u = A_0(x_0 + \lambda u) \\ Ax &= 0 \Longleftrightarrow A_0(x_0 + \lambda u) = 0 \\ x_0 + \lambda u &\in \ker A_0 \Longleftrightarrow x_0 \in \ker A_0 - \lambda u, \end{aligned}$$

et

$$\dim\ker A = \dim\ker A_0 + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim\ker A_0 + 1 - co\dim Im(A_0) \\ &= ind(A_0) + 1. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $Im(A_0)$ est fermé.
Comme $Im(A)$ est fermé alors il existe $c > 0$ tel que :

$$\|Ax\|_{H_0} \;\geq\; c\|x\|, \forall x \in H.$$

A_0 vérifie aussi la même estimation, par conséquent $Im(A_0)$ est fermé dans H_0.
Le cas $n = 2$ s'obtient de la même façon en décomposant H de la manière suivante :

$$H = (M \oplus \prec x_1 \succ) \oplus \prec x_2 \succ = M_0 + \prec x_2 \succ.$$

Où

$$\begin{aligned} M_0 &= (M \oplus \prec x_1 \succ) \text{ et } A_0 = A_0/M_0 \\ indA &= indA_0 + 2. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle resre vraie à l'ordre $(n+1)$, c'est-à-dire :

$$H = M \oplus X_0,$$

avec $\dim X_0 = n + 1$.
Quitte à enlever un vecteur a de la basse de X_0, On peut écrire :

$$X_0 = X \oplus \prec a \succ.$$

Où

$$\dim X = n, H = M \oplus X \oplus \prec a \succ = M_0 \oplus \prec a \succ = N \oplus X.$$

Où

$$M = M \oplus X \text{ et } N = M \oplus \prec a \succ.$$

D'aprés les deux cas précédents, on obtient le resultat :

$$ind(A) = ind(A_0) + n.$$

3.5 Perturbation

Dans ce chapitre, on montre que les perturbations compacts n'ináuent pas sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm, ce qui veut dire que si on somme un opérateur de Fredholm et un opérateur compact on obtient un opérateur de Fredholm.

Définition 3.5.1. [7] *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $F \in L(X,Y)$. F est appelé perturbation de Fredholm, si $U + F \in \Phi(X,Y)$ chaque fois que $U \in \Phi(X,Y)$.*
F est appelée perturbation de Fredholm supérieure (respectivement inférieure), si $U + F \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement $U + F \in \Phi_-(X,Y)$) chaque fois que $U \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement $U \in \Phi_-(X,Y)$). Les ensembles des perturbations de Fredholm, semi-Fredholm à droite et semi-Fredholm à guche sont, respectivement, notés $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$. En général, nous avons

$$K(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y).$$
$$K(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y).$$

Proposition 3.5.1. *Soit A un opérateur compact sur H, alors $I_d - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. D'aprés le Théoréme 3.3.1, on a $Im(I_d - A)$ est fermé et

$$\dim(H = Im(I_d - A)) = co\dim Im(I_d - A) = \dim\ker(I_d - A) < \infty.$$

Alors, $(I_d - A)$ est de Fredholm.

$$ind(I_d - A) = \dim\ker(I_d - A) - co\dim Im(I_d - A) = 0.$$

Théorème 3.5.1. *Soit $A \in B(H, H_0)$ un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite). Si K est un opérateur compact de H dans H_0, alors $A+K$ est un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite), l'indice de $A + K$ est l'indice de A.*

Preuve. Comme A est semi-Fredholm à gauche, alors il existe un opérateur B dans $B(H_0, H)$ et un opérateur F compact sur H de sorte que : $BA = I + F$.
Comme K est compact alors BK reste compact, par conséquent : $BA + BK = I + F$ alors $B(A + K) = I + (F + BK)$.
Or l'opérateur F est compact alors, $F + BK$ est compact, d'où $A + K$ est semi-Fredholm

à gauche.
Soit L un opérateur compact tel que : $AB = I + L$.
Or d'aprés le théorème BA est de Fredholm de plus

$$ind(BA) = ind(B) + ind(A).$$

Et comme L est compact alors $I + L$ est de Fredholm et $ind(I + L) = 0$.
Donc $ind(A) + ind(B) = 0$ ou bien : $ind(B) = -ind(A)$.
D'autre part, On a :

$$BA + BK = B(A + K) = 1 + (L + Bk),$$

et $(L + BK)$ est compact alors $1 + (L + BK)$ est de Fredholm, alors :
$ind(B(A + k)) = ind(B) + ind(A + k) = 0$ et : $ind(B) = -ind(A + K)$ par copréquent, on a : $ind(A + K) = ind(A)$.

Proposition 3.5.2. [3] *Soit $T \in L(X, Y)$ tel qu'il existe K_1 et K_2 compacts de X dans X, et S_1 et S_2 dans $L(X, Y)$ avec :*

$$TS_2 = I + K_2, S_1T = I + K_1.$$

Alors T, S_1 et S_2 sont de Fredholm, et $ind\, T = -ind\, S_1 = ind\, S_2$.

Preuve. $I + K_i$, $i = 1, 2$ sont de Fredholm d'indice nul, d'après la Proposition 3.5.1, il résulte des hypothèses que $\dim(\ker(T)) \leq \dim(\ker(I + K_1))$ et que
$\dim(co\ker(T)) \leq \dim(co\ker(I + K_2))$.
Donc l'opérateur T est de Fredholm.
Mais $S_1TS_2 = S_1 + S_1K_2 = S_2 + K_1S_2$. D'ou il résulte que $S_1 - S_2$ est compact (l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal de l'ensemble des opérateurs bornés).

$$S_2T - I = (S_2 - S_1)T + S_1T - I = (S_2 - S_1)T + K_1,$$

donc compact, et de même $TS_1 - I$.
Donc S_2 et S_1 sont de Fredholm.

$$ind\ S_2T = ind\ S_2 + ind\ T = ind(I + K_2) = 0 \Leftrightarrow ind\ T = -ind\ S_2 = -ind\ S_1.$$

Application

3.6 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 3.6.1. *On appelle opérateur de Hilbert-Schmidt tout opérateur* $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *qui vérifie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(e_n)\|^2 < \infty,$$

où $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *est une base ortho normée de* H_1.
La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt est notée $HS(H_1, H_2)$.

3.7 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Définition 3.7.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est* σ*-fini s'il existe une suite de parties* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\mu(A_n) < +\infty$ *pour tout* n*, et* $X = \bigcup_n A_n$. *Cette hypothèse est vérifiée lorsque* $\mu(X) < +\infty$ *(par exemple lorsque* μ *est une mesure de probabilité), lorsque* $X = \mathbb{N}$ *avec la mesure de comptage, ou lorsque* $X = \mathbb{R}^n$ *avec la mesure de Lebesgue.*

Définition 3.7.2. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ *et* $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis. On note* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *la tribu engendrée par les ensembles de la forme* $A \times B$*, où* $A \in \mathcal{A}$ *et* $B \in \mathcal{B}$*. Il existe une unique mesure* ν *sur* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *telle que* $\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *et* $B \in \mathcal{B}$*. Cette mesure est notée* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *et est* σ*-finie.*

Théorème 3.7.1 (Fubini–Tonelli)**.** *Soient* $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ *et* $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ *deux espaces mesurés* σ*-finis. Soit* $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$ *une fonction* $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$*-mesurable. Alors :*

1. *Pour chaque $x \in X_1$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(X_2, \mathcal{T}_2)$ dans $[0,+\infty]$, et l'intégrale $\int_{X_2} f(x,y)\,d\mu_2(y)$ est mesurable sur $(X_1, \mathcal{T}_1)$.*
2. *Pour chaque $y \in X_2$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dans $[0,+\infty]$, et l'intégrale $\int_{X_1} f(x,y)\,d\mu_1(x)$ est mesurable sur $(X_2, \mathcal{T}_2)$.*
3. *On a l'égalité*

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} f(x,y)\,d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x,y)\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\\ &= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x,y)\,d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y).\end{aligned}$$

3.8 Formule de Parseval

Théorème 3.8.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $2l$, intégrable sur $[-l,l]$ et soit*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right),$$

la série de Fourier de f. Alors la formule de Parseval est donnée par :

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

3.9 Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de E. Alors pour tout x de E, la série $\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

De plus, la famille est totale (c'est-à-dire que l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense) si et seulement si l'inégalité précédente est une égalité, alors nommée égalité de Parseval-Bessel :

$$\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Le cas particulier le plus fréquent est celui où E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

On prend pour famille (e_n) les fonctions $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ceci est une famille orthonormée de E qui de plus est totale d'après le théorème de Fejér. Ainsi, si on note $c_n(f)$ le n-ième coefficient de Fourier de f,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt.$$

Opérateurs de Hilbert-Schmidt à noyau :

Soit $k : [a, b] \times [a; b] \to C\,(]a, b[)$ une fonction continue. Pour toute $f \in L^2([a, b])$, on considère la fonction K_f définie pour $t \in [a, b]$ par

$$(Kf)(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds.$$

Alors,

1. K est un opérateur de Hilbert-Schmidt de l'espace de Hilbert $L^2([a, b])$ sur lui même. Pour tout $t \in [a, b]$ fixé, notons k_t la fonction $s \to k(t, s)$. En termes du produit scalaire de $L^2([a, b])$, on peut écrire

$$(Kf)(t) = \langle k_t, \overline{f}\rangle. \tag{3.1}$$

Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2([a, b])$. D'après (3.1), on a

$$\|Ke_n\|^2 = \int_a^b |\langle k_t, e_n\rangle|\,dt.$$

D'où en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b |\langle k_t, \overline{e_n}\rangle|^2 dt \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle k_t, \overline{e_n}\rangle|^2 dt.\end{aligned}$$

Mais $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle k_t, \overline{e_n}\rangle|^2 = \|k_t\|^2$ (formule de Bessel-Parseval).
Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_a^b \|k_t\|^2 dt = \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dt ds < +\infty.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. L'équation $Tf - f = g$ vérifie l'une ou l'autre des deux assertions suivantes (Alternative de Fredholm) : ou bien, pour tout $g \in L^2([a,b])$, il existe une unique solution f, ou bien il existe un sous-espace strict N de $L \in L^2([a,b])$ tel que si $g \in N$, l'équation admet une infinité de solutions, et si $g \notin N$, l'équation n'admet pas de solution.

Références

[1] A. Arnold, C. Lassueur, Opérateurs de Fredholm, Projet de semestre, 2005.

[2] A. Jeribi, Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices, © Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[3] A. Khelfaoui, Les opérateurs de Fredholm, Mémoire de master, Université de Saïda, Promotion 2012/2013.

[4] B. P. Rynne, M. A. Youngson, Linear Functional Analysis.

[5] C. Stuart, Opérateurs de Fredholm, Anthony Arnold & Caroline Lassueur, Projet de Semestre, été 2005.

[6] D. Dos Santos Ferreira, Cours (Espaces Vectoriels Quotient | M1), Université de Lorraine.

[7] E. Fricain, Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs : Cours et Exercices.

[8] F. Bourgeois, Introduction à l'analyse fonctionnelle et applications, Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences Appliquées.

[9] J. P. Macro, Mathématiques Analyse L3 : Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés, Pearson Éducation France, 2009.

[10] J. Charles, M. Mbe-Khta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Université de Montpellier 2 et Université de Lille 1.

[11] M. Gradinaru, Espaces vectoriels normés, Licence de Mathématiques 3ème année, 2007-2008.

[12] M. Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, Université de M'sila, Algérie, 2004.

[13] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, AMS, 2002 (Graduate Studies in Mathematics).

[14] P. Lévy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, © Dunod, Paris, 2003.