

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique.

Filière : Mathématique.

Option : Analyse Mathématique .

Présenté par :

Ben ghouini Amel

THEME

ÉCOULEMENT STATIONNAIRE DU FLUIDE DE HERSCHEL-BULKLEY DANS UNE COUCHE MINCE

Devant le jury composé de :

Dr. Abdelaziz Rahmoune	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
Dr. Salim Saf	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur
Dr. Fares Yazid	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examineur

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant , qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tien à remercier mon encadreur **Dr.Salim Saf** pour son soutien et son aide considérable , ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui mont guidé durant la réalisation de ce mémoire .

Je remercie vivement monsieur **Dr.Abdelaziz Rahmoune** , ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de master .

Je tiens également à remercier **Dr.Fares Yazid** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Ben ghouini

Amel

Dédicace

*J*e dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

*A*mes très chers parents , qui sont la lumière de ma vie , qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse , pour leurs conseils et leurs encouragements.

Mon père Abdekader Ben ghouini

je me trouve ici grâce aux longues années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie, merci pour les valeurs nobles et le soutien permanent venu de toi.

Mon cher futur mari : G.Younes

Je vous remercie pour votre confiance et votre soutien formidables et continus. J'espère que nous connaîtrons de nombreux succès ensemble jusqu'à ce que nous vieillissions .

Et je le dédie :

*A*tous les membres de ma famille , mes chers frères Soufian et Djamel , mes soeurs Meriem et Aya et mon cher tante B.Aicha .

*A*tous mes amies et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années surtout

Ben ghouini

Amel

ملخص

الهدف من هاته المذكرة هو دراسة نظرية لمشكلة التدفق لسائل *Herschel – Bulkley* غير قابل للضغط و صلب و لزج في طبقة رقيقة ثنائية الأبعاد في نظام ثابت، و من خلال فرض الشروط الحدية ل *Dirichlet* . النتائج المتحصل عليها لأجل هاته المسائل متعلقة بالوجود و الوحدانية و السلوك المقارب، تتكون هاته المذكرة من ثلاثة فصول . الفصل الأول نقدم فيه النتائج الأساسية لميكانيك الوسائط المستمرة، بالاضافة الى المعادلات المختلفة و الأدوات الرياضية. في الفصل الثاني برهنا وجود و وحدانية الحل الضعيف لمشكلة التدفق. دراسة السلوك المقارب لمشكلة التدفق هو محور الفصل الثالث.

كلمات مفتاحية : سائل هيرشيل - بلكي *Herschel – Bulkley* ، طبقة رقيقة ، سلوك مقارب .

Résumé

Ce mémoire vise à proposer une contribution à l'étude d'un problème de l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley incompressible, rigide et visco-plastique dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des conditions de Dirichlet sur les bords. Le mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions générales de la mécanique des milieux continus, ainsi que diverses équations et outils mathématiques. Dans le deuxième chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible à ce problème de l'écoulement. Dans le troisième chapitre, nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique d'un problème mécanique de l'écoulement.

Mots - clés : fluide de Herschel-Bulkley ; couche mince ; comportement asymptotique.

Abstract

This dissertation aims at proposing a contribution to the study of a problem of an incompressible, rigid and viscoplastic Herschel-Bulkley fluid flow, in a two-dimensional thin layer in steady state with Dirichlet boundary conditions. The dissertation includes three chapters. In the first chapter, we introduce the general notions of continuum mechanics, as well as various equations and mathematical tools. In the second chapter, we show the existence and uniqueness of a reliable solution to this flow problem. In the third chapter, we are interested in the study of the asymptotic behavior of a mechanical problem of the flow.

Key words : Herschel-Bulkley fluid ; thin layer ; asymptotic behavior.

Table des matières

Introduction	3
1 Modélisation et outils mathématiques	6
1.1 Modélisation	7
1.1.1 Les équations de conservation	7
1.1.2 Loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley	9
1.1.3 Condition aux limites de contact	12
1.2 Outils mathématiques	13
1.2.1 Élément d'analyse non linéaire	13
1.2.2 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation	16
2 Problème de l'écoulement stationnaire gouverné par le fluide de Herschel-Bulkley	21
2.1 Position du problème	22
2.2 Formulation variationnelle du problème	23
2.3 Résultats d'existence et d'unicité	25
3 Comportement asymptotique d'un problème de l'écoulement stationnaire du fluide de Herschel-Bulkley dans une couche mince	28
3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème	29
3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle	30
3.3 Comportement asymptotique	31
Conclusion et perspectives	39
Bibliographie	40

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n (n = 2,3)$ et $1 \leq p < +\infty$ on note par :

- $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω .
- Γ la frontière de Ω , supposée régulière.
- $\Gamma_i (i = 1, 2)$ une partie de la frontière de Γ .
- $mes(\Gamma_i)$ la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_i .
- ν la normale unitaire sortante à Γ .
- ν_ν, ν_τ les composantes normale et tangentielle du champ vectorielle ν sur $\bar{\Omega}$.
- $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles continue sur m .
- H_1 $\{\sigma \in L^2(\Omega)_s^{n \times n} / Div(\sigma) \in L^2(\Omega)^n\}$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev de paramètres m et p .
- $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev de paramètres m et $p = 2$; $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
- $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ l'espace de traces d'ordre p .
- W'_Γ le dual topologique de l'espace W_Γ ; $W'_\Gamma = W^{-1+\frac{1}{p},p'}(\Gamma)^n$.
- γ l'application trace.

Si H est un espace de Banach réel, on utilise les notations :

- H' le dual topologique de l'espace H .
- $H^n =$ $\{x = (x_i) / x_i \in H, i, j = \overline{1, \dots, n}\}$.
- $H_s^{n \times n} =$ $\{x = (x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, \dots, n}\}$.
- $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ le produit de dualité entre l'espace H' et l'espace H .
- $\|\cdot\|_H$ la norme de l'espace H .
- 2^H l'ensemble de toutes les parties de H .
- $x_n \longrightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
- $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .

Pour une fonction f , on note :

- $dom(f)$ le domaine de f .
- $e\pi i(f)$ l'epigraphe de f .
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de f par rapport à la i -ème composante x_i .
- f' la dérivée de f par rapport au temps.
- $\frac{Df}{Dt}$ la dérivée particulière de f .
- ∇f le gradient de f .
- $D(f)$ la partie symétrique du gradient de f , $D(f) = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
- $div(f)$ la divergence de f .
- ∂f le sous-différentiel de f .

Autres notations :

\liminf	la limite inférieure.
S_n	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur \mathbb{R}^n .
$Div(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\tilde{\sigma}$	le déviateur du tenseur $\sigma \in S_n$.
$tr(\sigma)$	la trace du tenseur $\sigma \in S_n$.
δ	le tenseur identique.
$p.p$	presque partout.
$ \cdot $	la norme Euclidienne de \mathbb{R}^n et S_n .
\cdot	le produit scalaire Euclidienne de \mathbb{R}^n et S_n .

Introduction

Un fluide de type Herschel-Bulkley, qui est un milieu visco-plastique, vérifie les lois générales de la mécanique des milieux continus et a une loi de comportement non linéaire particulière. Il est utilisé pour modéliser plusieurs types de fluides, comme par exemple des peintures et la lave volcanique, d'où le grand intérêt de son étude.

L'étude du comportement asymptotique a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [4] justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir des équations de Stokes considérées dans un domaine mince. L'écoulement du type Nazarov-Stokes est traité par Assemien, Bayada et Chambat [3], ainsi que par Nazarov [30] pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problèmes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham. Ainsi, l'écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traité par Mikelic et Tapiéro [28] et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro [7]. Par ailleurs, Taous [35] a étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modèle de viscosité étant celui de Litvinov [23]. En fin Bunoiu et Saint Jean Paulin [11] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi les quels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson. Les auteurs de [10] ont étudié le même problème, dans lequel seules les conditions de Dirichlet sur la frontière ont été considérées.

Ce mémoire a pour objet l'étude d'un problème de l'écoulement du fluide incompressible, rigide et visco-plastique de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec les conditions aux limites de Dirichlet-homogène, le domaine est représenté par l'ouvert $]0, 1[\times]0, \varepsilon h(x_1)[$, où ε est un petit paramètre strictement positif et $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est une fonction de classe C^1 .

Le travail est composé comme suit :

Le premier chapitre, aborde brièvement des notions générales pour faciliter la lecture de ce mémoire. Aussi bien que pour la bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par un rappel des notions générales de la mécanique de milieux continus : on introduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de \mathbb{R}^2 . Ce système comprend la loi de comportement du fluide, l'équation du mouvement et du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites aux quelles il est soumis. La loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans ce mémoire donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \mu\varepsilon^p |D(u)|^{p-2} D(u) + g\varepsilon \frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } |D(u)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma} &\leq g\varepsilon & \text{si } |D(u)| = 0 \end{aligned} \right\} \text{sur } \Omega,$$

où $\tilde{\sigma}$ désigne le déviateur du tenseur des contraintes σ , u représente le champ des vitesses, $D(u)$ désigne le tenseur taux de déformation, $\mu\varepsilon^p$, $g\varepsilon > 0$ sont les coefficients qui caractérisent le modèle de Herschel-Bulkley et qui représentent respectivement : la consistance (la viscosité) et le seuil de plasticité, le paramètre p , $1 < p \leq 2$, est l'exposant de loi de puissance du matériaux (représentant l'indice de rhéofluidification, indice d'écoulement, de viscosité).

Ce modèle est une mixture du modèle de Bingham et du modèle en loi de puissance (proposé par Herschel et Bulkley en 1923). Lorsque $p = 2$, on retrouve les fluides de Bingham, lorsque $g = 0$, on retrouve une loi de puissance (rhéofluidifiant), et lorsque $p = 2$ et $g = 0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes (Newtonien).

Nous présentons ensuite quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire : on introduit les fonctions convexes, les opérateurs fortement monotone, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de l'écoulement stationnaire du fluide incompressible, rigide et visco-plastique de Herschel-Bulkley dans une couche mince qui occupe un domaine borné Ω^ε en dimension deux. Dans ce cadre, on décrit la position du problème et les conditions aux limites, concernant le champ de vitesse, et le champ des contraintes qui nous permettent de faire la formulation variationnelle du problème mécanique de départ, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solution faible du problème.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'un problème de l'écoulement lié par le fluide incompressible, rigide et visco-plastique de

Herschel-Bulkley en régime stationnaire, dans un domaine Ω^ε supposé mince. Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et la formulation variationnelle du problème concernant le champ de vitesse et le champ de la pression. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Korn, Cauchy-Schwartz, Young et Hôldre pour obtenir des estimations à priori. Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite

Dans ce cas nous avons obtenu [26, 31] :

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \left| \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} g \text{sign} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right) \right) = \hat{f}_1 - \frac{d\hat{p}}{dx} \quad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

Où μ la consistance de milieu Ω , g le seuil de plasticité de milieu Ω , \hat{f}_1 et la première composante de la fonction \hat{f} qui représente une densité massique des forces extérieures de milieux Ω , \hat{u}_1 est la première composante de la fonction \hat{u} et (\hat{u}_1, \hat{p}) le champ de vitesse et la pression des problèmes limites dans Ω .

Chapitre 1

Modélisation et outils mathématiques

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Il comporte deux parties.

Dans la première partie, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie des milieux continus et la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley, puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent quelques problèmes aux limites modélisant le comportement fluide dans le cas stationnaire et ce dans un domaine borné en dimension deux, ensuite nous décrivons les différentes conditions de contact qui interviennent dans tout le document.

La deuxième partie comprend des rappels sur les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire, on y présente ici quelques résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir, nous rappelons les notions de bases ainsi que quelques résultats sur les espaces de Sobolev.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans ce mémoire en suivant [5], [12], [15], [18], [34] et [33]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$). Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 pendant un intervalle de temps $]0, T[$. Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 pendant un intervalle de temps $]0, T[$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans Ω , on a :

1. L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

Soit $u(x, t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in]0, T[$ des points $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox) , $\sigma(x, t)$ de composantes σ_{lm} ($l, m = 1, 2$), est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = Div \sigma + f. \quad (1.1)$$

où le vecteur f , de composantes f_l ($l = 1, 2$), représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div \sigma = \frac{\partial \sigma_m}{\partial x_l}, (l, m = 1, 2). \quad (1.2)$$

2. L'équation de conservation de la masse :

La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ de l'élément de volume $\partial\Omega$ du milieu. L'expression générale de

l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0. \quad (1.3)$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre

$$\operatorname{Div} \sigma + f = 0 \quad (1.4)$$

Elles sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{lm} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u \cdot \nabla u$ sont négligeables (processus quasi-statique).

3. L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides :

Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompressibilité très réaliste physiquement, se traduit par

$$\operatorname{Tr} D(u) = 0$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$D_{lm}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right), 1 \leq l, m \leq 2. \quad (1.5)$$

Le milieu est dit homogène, si sa densité est indépendante de x . Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

ρ constante indépendante de x et t . Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

Dans le cas du milieu non-isotherme, l'équation de conservation de l'énergie du premier principe de la thermodynamique. Cependant, nous considérerons toujours que la température milieu sera constante dans tous les problèmes posés dans ce mémoire.

D'un point de vue mathématique, nous disposons trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre

de cinq, représentées par les composantes σ_{lm} ($l, m = 1, 2$) du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_l ($l = 1, 2$) de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle lois de comportement, qui sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement visco-plastique du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans ce mémoire.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais physiques qu'il faut réaliser pour obtenir une loi de comportement. On présente ici une description de la loi de comportement visco-plastique du fluide de Herschel-Bulkley traité dans ce mémoire en suivant [15], [20] et [32]. Le modèle de Herschel-Bulkley est caractérisé par la propriété suivante : le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dit seuil de plasticité. Pour décrire ce modèle, on a besoin de certaines notations.

Soient u le champ des vitesses et D le tenseur taux de déformation défini par :

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u). \quad (1.6)$$

On considère aussi son déviateur

$$\tilde{D} = D - \frac{1}{n}tr(D)\delta, \quad (1.7)$$

où $tr(D)$ représente la trace de D et δ le tenseur identique. On note par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\tilde{\sigma} = \sigma + p\delta. \quad (1.8)$$

Dans l'équation (1.8), le scalaire $-p = \frac{1}{n}tr(\sigma)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes. On peut identifier p avec la pression. En plus des déviateurs \tilde{D} et $\tilde{\sigma}$, un autre tenseur S est introduit comme étant la partie des contraintes qui correspond aux propriétés plastiques du matériau. Pour décrire un tel processus, on utilise une collection de fonctions

régulières $t \mapsto (\tilde{D}(t), \tilde{\sigma}(t), S(t))$ pour $t \in [0, T]$ où $T > 0$ est la durée du processus. Le modèle rigide viscoplastique de Herschel-Bulkley supposé que

$$\tilde{\sigma} = S + \mu |D(u)|^{p-2} \tilde{D}, \quad (1.9)$$

$$f(S) = |S|^2 - g^2 \leq 0, \quad (1.10)$$

$$\tilde{D} = \lambda 2S, \quad (1.11)$$

où μ est le coefficient de viscosité, $\frac{g}{\sqrt{2}}$ est le seuil de plasticité pour le cisaillement pur et λ est une fonction telle que

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 & \text{si } f(S) < 0 \text{ ou } f(S) = 0 \text{ et } f'(S) < 0, \\ \lambda(t) > 0 & \text{si } f(S) = 0 \text{ et } f'(S) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Dans (1.12), $f(S)$ désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \mapsto f(S(t))$ et (1.10) est la condition de Von Mises. En tenant compte de (1.10), l'invariant $S_{II} = \frac{1}{2}|S|^2$ ne doit pas dépasser la carré du seuil de plasticité pour le cisaillement pur $\frac{g}{\sqrt{2}}$.

D'après (1.11) et (1.12), il vient que le déviateur du tenseur taux de déformation peut varier seulement si S reste sur la surface $f(S) = 0$, en se déplaçant le long de cette dernière. Pour tout autre processus, \tilde{D} est nul. C'est la raison pour laquelle $|S| = g$ est appelé condition d'écoulement.

Dans le modèle de Herschel-Bulkley, on suppose toujours l'incompressibilité du volume, c'est-à-dire

$$\text{tr}(D) = 0,$$

pour n'importe quel processus de n'importe quelle durée $T > 0$.

Le modèle de Herschel-Bulkley peut être considéré en utilisant seulement les tenseurs D et \tilde{D} , En effet, de (1.9) et (1.11), on a

$$\tilde{\sigma} = (1 + 2\mu |D(u)|^{p-2} \lambda) S. \quad (1.13)$$

$$|\tilde{\sigma}| = (1 + 2\mu |D(u)|^{p-2} \lambda) |S|. \quad (1.14)$$

Si $|\tilde{\sigma}| > g$, alors de (1.10) et (1.14) on déduit que $\lambda > 0$ et de (1.12) on a $|S| = g > 0$.

L'équation (1.14) entraîne que

$$\lambda = \frac{1}{2\mu |D(u)|^{p-2}} \left(\frac{|\tilde{\sigma}|}{g} - 1 \right)$$

De (1.11) et (1.13), on a

$$\tilde{D} = \frac{2\lambda}{1 + 2\mu |D(u)|^{p-2} \lambda} \tilde{\sigma} = \frac{1}{\mu |D(u)|^{p-2}} \left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|} \right) \tilde{\sigma}.$$

Comme $tr(D) = 0$, on aura d'après (1.7) que $\tilde{D} = D$. Par conséquent

$$D = \frac{1}{\mu|D(u)|^{p-2}} \left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right) \tilde{\sigma}.$$

Supposons maintenant que $|\tilde{\sigma}| \leq g$. Alors si $|S| = g$, de (1.14) on obtient $\lambda = 0$, et si $|S| < g$, de (1.12) on aura aussi $\lambda = 0$. D'où finalement $D = 0$. Ainsi, on obtient la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{g}{|\tilde{\sigma}|}\right) \tilde{\sigma} & si \quad |\tilde{\sigma}| > g. \\ 0 & si \quad |\tilde{\sigma}| \leq g. \end{cases} \quad (1.15)$$

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.15). Si $D = 0$, d'après (1.15), on a $|\tilde{\sigma}| \leq g$ et si $|D| \neq 0$, on a $|\tilde{\sigma}| > g$.

Par ailleurs, on sait que $|\tilde{\sigma}| = 2\mu|D(u)|^{p-2}|D| + g$, donc si on combine cette formule avec (3) l'équation constitutive (1.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \mu|D(u)|^{p-2}|D| + g \frac{D}{|D|} & Si \quad |D| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}| \leq g & Si \quad |D| = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Il est facile de voir que les deux lois constitutives (1.15) et (1.16) sont équivalentes. Par conséquent, on considère (1.16) comme étant la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley. Par ailleurs, les expériences physiques ont montré que les coefficients qui caractérisent le modèle mécanique de Herschel-Bulkley, autrement dit la viscosité μ et le seuil de plasticité g , dépendent de la température, ce qui explique le comportement thermique de fluide de Herschel-Bulkley.

Remarque 1.1.1. *Si dans la loi de comportement (1.16), on prend $g = 0$ et $p = 2$, on obtient la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour g suffisamment petit, le fluide de Herschel-Bulkley peut être considéré comme un modèle voisin des fluides visqueux Newtoniens. Si g est strictement positif, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand g croît, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Herschel-Bulkley possède la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (1.16) : tant que le seuil g n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler. On explique physiquement ce phénomène par le fait que ces fluides sont pour la plupart des suspensions de particules quasi-sphériques dans un solvant. Quand les particules sont faiblement concentrées,*

le seul effet de leur présence est d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules. Si on augmente toujours la concentration, les particules finissent par se toucher. Le solvants n'occupe plus que les interstices. Le liquide devient pâteux à cause des forces entre les particules en contact. Pour provoquer son écoulement, il faut vaincre toutes ces forces, ce qui permet d'expliquer l'existence du seuil g .

Un tel comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétroliers ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides, par exemple le processus de moulage de métaux. Pour plus d'exemples, on revoit aux ouvrages [2], [17] et [19].

1.1.3 Condition aux limites de contact

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du problème que nous utilisons par la suite dans ce mémoire. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de \mathbb{R}^2 donné par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < h(x)\},$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 est la frontière inférieure d'équation $y = 0$, Γ_2 est la frontière supérieure d'équation $y = h(x)$. On suppose que

$h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est une fonction de classe C^1 .

Γ , la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition de Dirichlet) :

$$u = 0.$$

1.2 Outils mathématiques

1.2.1 Élément d'analyse non linéaire

Dans la première partie de cette section, \mathbf{H} désigne un espace de Banach réflexif muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$. On note aussi par \mathbf{H}' l'espace dual de \mathbf{H} et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ le produit de dualité entre \mathbf{H}' et \mathbf{H} .

1.2.1.1 Propriétés générales

On dit que la suite $(x_n)_n \in \mathbf{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathbf{H}$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\langle l, x_n \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \rightarrow \langle l, x \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall l \in \mathbf{H}'.$$

Dans ce cas, x s'appelle limite faible de la suite $(x_n)_n$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$. La réciproque n'est pas toujours vraie. De plus puisque l'espace de Banach est réflexif on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. (de Bolzano-Weierstrass)

Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de \mathbf{H} , il existe alors un élément $x \in \mathbf{H}$ et une sous-suite de $(x_n)_n$ notée $(x_\mu)_\mu$ telle que $x_\mu \rightharpoonup x$.

1.2.1.2 Fonctions convexes et sous-différentiabilité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes, voir pour plus détails [8, 16].

Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel \mathbf{E} et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$.

La fonction φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞ , c'est-à-dire s'il existe $x \in \mathbf{E}$ tel que $\varphi(x) < \infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{E}, t \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $x, y \in \mathbf{E}$ et tels que $x \neq y$.

On définit le domaine et l'épigraphe de φ , respectivement par :

$$\text{dom}(\varphi) = \{x \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(x) < \infty\},$$

$$\text{epi}(\varphi) = \{(x, \alpha) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

- (i) φ est propre si et seulement si $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$.
- (ii) Le domaine de φ est un convexe de \mathbf{E} si φ est convexe.
- (iii) φ est convexe si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est un ensemble convexe dans $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique \mathbf{E} et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ l'ensemble } \{x \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\} \text{ est ferme.}$$

Nous donnons ici quelques propriétés des fonctions semi-continues inférieurement.

Lemme 1.2.1. *soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors*

- (i) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbb{R}$.
- (ii) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{H}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_x de x dans \mathbf{H} tel que $\varphi(u) \geq \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $u \in V_x$.

Il en résulte en particulier que si φ est semi-continue inférieurement et si $x_n \rightarrow x$, alors

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant :

Théorème 1.2.2. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de \mathbf{H} .*

Une fonction $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $u \in \mathbf{H}$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in \mathbf{H}'$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H} \quad (1.17)$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de φ au point u .

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de \mathbf{H} , dans ce cas l'opérateur $u \rightarrow \nabla\varphi(u) : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ s'appelle le gradient de la fonction φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 1.2.2. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow] -\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla\varphi(u), v - u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{H}. \quad (1.18)$$

L'inégalité (1.18) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes.

On dit que la fonction $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in \mathbf{H}$ s'il existe $f \in \mathbf{H}'$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H}. \quad (1.19)$$

L'élément f est appelé sous-gradient de φ au point u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in \mathbf{H}' : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H}\} \quad (1.20)$$

On note par $dom(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$dom(\partial\varphi) = \{u \in \mathbf{H} : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\} \quad (1.21)$$

En utilisant (1.20), (1.21) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte :

$$dom(\partial\varphi) \subset dom(\varphi). \quad (1.22)$$

La fonction φ est dite sous-différentiable si elle sous-différentiable en tout point de \mathbf{H} , c'est-à-dire

$$dom(\partial\varphi) = \mathbf{H}.$$

Lemme 1.2.3. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par :

Lemme 1.2.4. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et on a*

$$\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\} \quad \forall u \in \mathbf{H}.$$

1.2.1.3 Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles

Soient \mathbf{H} un espace de Banach réflexif et séparable, $\mathbf{A} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ un opérateur non linéaire, $\varphi : \mathbf{H} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $\mathbf{f} \in \mathbf{H}'$. Un nombre considérable et

problèmes aux limites en mécanique des milieux continus ont un lieu avec les problèmes suivants.

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \quad (1.23)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est le produit de dualité entré \mathbf{H}' et \mathbf{H} . Le problème (1.23) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur \mathbf{H} .

L'opérateur \mathbf{A} est dit :

(i) Strictement monotone si

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} > 0. & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \langle \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u} \end{cases} \quad (1.24)$$

(ii) coercif si

$$\lim \frac{\langle \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}} = +\infty \quad \text{si} \quad \lim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} = +\infty. \quad (1.25)$$

(iii) Héli-continu si la fonction réelle $t \rightarrow \langle \mathbf{A}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En ce qui concerne le problème (1.23), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.2.3. [8, 22] Soit $\mathbf{A} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}'$ un opérateur Strictement monotone, borné, héli-continu et coercif et soit φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de \mathbf{H} . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce (1.23) admet une solution unique.

1.2.2 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation

On introduit ici des notions générales sur les espaces de Sobolev. On présente en plus leurs principales, notamment les injections de Sobolev, le théorème de trace et les différents résultats de compacité. On rappelle ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et liés aux opérateurs divergence et déformation. Pour plus de détails sur cette partie, on revoit aux ouvrages [1], [13],[14],[20],[21] et [32].

1.2.2.1 Espaces de Sobolev

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est l'espace

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) : D^\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où $D^\alpha \mathbf{u}$ désigne la dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de \mathbf{u} au sens des distributions.

Si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réel pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega).$$

On note aussi par $(\mathbf{W}^{m,p}(\Omega))'$ l'espace dual de $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Pour $m = 1$, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) : \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^p(\Omega) \right\},$$

muni de la norme induite,

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{Si } 1 \leq p < \infty.$$

En particulier, l'espace $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega),$$

$$\|u\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega).$$

Pour s réel positif quelconque, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^s(\Omega)$ comme étant l'espace intermédiaire d'ordre θ entre $\mathbf{H}^m(\Omega)$ et $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = \{\mathbf{H}^m(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\}_\theta, (1 - \theta)m = s \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

D'autre part, $\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\text{sup ess } |D^\alpha \mathbf{u}|) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,\infty}(\Omega).$$

Nous utiliserons très souvent dans les raisonnements, les théorèmes de compacité et en particulier celui de Rellich, les injections de Sobolev et le théorème de trace de Sobolev.

Théorème 1.2.4. (*Injections de Sobolev*).

Soit Ω un ouvert Lipschitzien de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < \infty$.

- (i) Si $p \in [1, n[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in [1, \frac{np}{n-p}]$.
- (ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [n, +\infty[$.
- (iii) Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $C(\bar{\Omega})$.

Théorème 1.2.5. (Théorème de compacité de Rellich).

Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de \mathbb{R}^n et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$.

Théorème 1.2.6. (Compacité $\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^q$).

Soit Ω un ensemble de mesure finie de \mathbb{R}^n et $1 \leq q < p < \infty$. Si $(\mathbf{u}_\mu)_{\mu \geq 1}$ est une suite qui converge presque partout vers u et qui est bornée dans \mathbf{L}^p , alors $\mathbf{u}_\mu \rightarrow \mathbf{u}$ dans \mathbf{L}^q .

Lemme 1.2.5. Soit θ un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ et $\mathbf{g}_\mu, \mathbf{g}$ des fonctions de $\mathbf{L}^q(\theta)$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|\mathbf{g}_\mu\|_{\mathbf{L}^q(\theta)} \leq c \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_\mu \rightarrow \mathbf{g} \quad p.p. \quad \text{dans} \quad \theta.$$

Alors

$$\mathbf{g}_\mu \rightarrow \mathbf{g} \quad \text{dans} \quad \theta \quad \text{faible.}$$

Théorème 1.2.7. (Théorème de trace de Sobolev).

Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de \mathbb{R}^n . Alors l'application

$$D(\bar{\Omega}) \rightarrow D(\Gamma) : \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}/\Gamma,$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Gamma) : \mathbf{u} \rightarrow \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}/\Gamma,$$

γ est appelée application trace sur $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de traces, l'espace vectoriel

$$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) = \gamma(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)) = \{\gamma(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\}$$

qui l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} = \inf\{\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} / \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\}.$$

L'espace $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ est un sous-espace de $\mathbf{L}^p(\Gamma)$, de plus c'est un Banach, qui est réflexif lorsque $1 < p < \infty$. On constate aisément que l'application

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$$

est continue de norme inférieure à 1.

Théorème 1.2.8. (Injections de Sobolev pour les espaces de traces).

Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < \infty$.

- (i) Si $p \in [1, n[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in [1, \frac{(n-1)p}{n-p}]$ et compactement dans $\mathbf{L}^p(\Gamma)$.
- (ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [1, +\infty[$.
- (iii) Si $p \in]n, +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ s'injecte continuellement dans $C(\Gamma)$.

1.2.2.2 Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons S_n l'espace des tenseurs d'ordre deux sur \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), et par "·" et $|\cdot|$ représentent respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^n et S_n .

Ainsi,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{l=1}^n u_l v_l, \quad |\mathbf{u}| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sum_{l,m=1}^n \sigma_{lm} \tau_{lm}, \quad |\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S_n.$$

On utilise les notations suivantes :

$$\mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n} = \{ \sigma = (\sigma_{lm}) / \sigma_{lm} = \sigma_{ml} \in \mathbf{L}^p(\Omega) / l, m = \overline{1, n} \},$$

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n = \{ \mathbf{u} = (u_l) / u_l \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) / l = \overline{1, n} \},$$

$$= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)^n / D(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n} \},$$

$$H_1 = \{ \sigma \in \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n} / Div(\sigma) \in \mathbf{L}^p(\Omega)^n \},$$

où $D : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n}$ et $Div : H_1 \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$D(\mathbf{u}) = (D_{lm}(\mathbf{u})) : D_{lm}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{l,m} + u_{m,l}) \quad \text{et} \quad Div(\sigma) = (\sigma_{lm,m}). \quad (1.26)$$

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normale sortant ν à la frontière est défini p.p.

Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n$, nous conservons la notation \mathbf{v} pour désigner la trace de \mathbf{v} sur Γ et on note par \mathbf{v}_ν et \mathbf{v}_τ les composantes normale et tangentielle de \mathbf{v} sur la frontière, données par les formules :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \nu, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \nu \quad (1.27)$$

Désignons par γ l'application trace

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Gamma)^n,$$

et faisons introduire les notations

$$\mathbf{W}_\Gamma = \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)^n = \gamma(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}'_\Gamma = \mathbf{W}^{-1+\frac{1}{p},p'}(\Gamma)^n,$$

et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}'_{\Gamma} \times \mathbf{W}_{\Gamma}}$ le produit de dualité entre \mathbf{W}'_{Γ} et \mathbf{W}_{Γ} . Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in \mathbf{W}'_{\Gamma}$ tel que la formule de Green suivante soit satisfaite

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{W}'_{\Gamma} \times \mathbf{W}_{\Gamma}} = \langle \sigma, \mathbf{D}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n}} + \langle \mathbf{Div}(\sigma), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{L}^p(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons

$$\langle \sigma\nu, \gamma\nu \rangle_{\mathbf{W}'_{\Gamma} \times \mathbf{W}_{\Gamma}} = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot \mathbf{v} \mathbf{d}\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n,$$

où $\mathbf{d}\gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de σ sur la frontière Γ par les formule :

$$\sigma_{\nu} = \sigma\nu \cdot \nu, \sigma_{\tau} = \sigma\nu - \sigma_{\nu}\nu.$$

Tout au long de ce mémoire, dans les problèmes mécaniques, Γ est partitionnée en deux parties mesurables Γ_1 et Γ_2 , telles que $mes(\Gamma_1), mes(\Gamma_2) > 0$.

Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles

$$\mathbf{W}_{\Gamma} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

L'inégalité de Korn généralisée s'applique sur \mathbf{W}_{Γ} : il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω et Γ , telle que

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)_s^{n \times n}} \geq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)^n} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_{\Gamma}.$$

Chapitre 2

Problème de l'écoulement stationnaire gouverné par le fluide de Herschel-Bulkley

Dans ce chapitre, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de l'écoulement. Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Dans la section 1, nous présentons le problème mécanique de l'écoulement stationnaire du fluide de Herschel-Bulkley. En outre, nous introduisons quelques notations et préliminaires. Dans la section 2, nous obtenons la formulation variationnelle du problème. Nous montrons dans la section 3 l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de l'écoulement.

2.1 Position du problème

On considère un problème mécanique qui décrit l'écoulement stationnaire du fluide incompressible et visco-plastique de Herschel-Bulkley dans un domaine borné $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, de frontière régulière $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon$ constituée de deux parties mesurables et disjointes Γ_1^ε et Γ_2^ε , telles que $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$

$$\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon,$$

où

- Γ_1^ε est la surface inférieure définie par $x_2 = 0$.
- Γ_2^ε est la surface supérieure définie par $x_2 = \varepsilon h(x_1)$.

Telle que $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction de classe $C^1(]0, 1[)$.

On suppose que :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < 1 \text{ et } 0 < x_2 < \varepsilon h(x_1)\}.$$

Les forces volumiques de densité f agissent dans Ω^ε .

On note par S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^2 , et par "·" et $|\cdot|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 et S_2 . Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u \cdot v = u_l v_l$, $|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2$, $\sigma \cdot \tau = \sigma_{lm} \tau_{lm}$, $|\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici et ci-dessous, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On désigne par $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ le déviateur du tenseur des contraintes $\sigma^\varepsilon = ((\sigma^\varepsilon)_{lm})$, donné par

$$\tilde{\sigma}^\varepsilon = ((\tilde{\sigma}^\varepsilon)_{lm}), (\tilde{\sigma}^\varepsilon)_{lm} = (\sigma^\varepsilon)_{lm} - \frac{tr(\sigma^\varepsilon)}{2} \delta_{lm},$$

où $\delta = (\delta_{lm})$ est le tenseur identique.

Soit $1 < p \leq 2$. Nous considérons les tenseurs de taux déformations défini pour chaque $u^\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2$ par

$$D(u^\varepsilon) = (D_{lm}(u^\varepsilon)), D_{lm}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}((u^\varepsilon)_{l,m} + (u^\varepsilon)_{m,l}),$$

Le problème mécanique peut se formuler de la manière suivante :

Problème (P.2.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_1, u_2) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma^\varepsilon = (\sigma_1^\varepsilon, \sigma_2^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow S_2$, tels que

$$Div \sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^\varepsilon = \mu \varepsilon^p |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) + g \varepsilon \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} \text{ si } |D(u^\varepsilon)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma}^\varepsilon \leq g \varepsilon \quad \text{si } |D(u^\varepsilon)| = 0 \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (2.3)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon. \quad (2.4)$$

Rappelons ici (2.1) représente l'équation de l'équilibre stationnaire du fluide, telle que $\mathbf{Div}(\sigma) = (\sigma_{\mathbf{lm},\mathbf{m}})$ et \mathbf{f} est la densité des forces volumiques agissant sur le fluide. La relation (2.2) représente la loi de comportement du fluide incompressible de Hershel-Bulkley dont le coefficient de consistance μ et le seuil de plasticité \mathbf{g} . Le paramètre p tel que $1 < p \leq 2$, est l'exposant de la loi de puissance du fluide. L'équation (2.3), où $\mathbf{div}(\mathbf{u}) = u_{i,l}$, décrit la condition d'incompressibilité du fluide.(2.4) est une condition sur la vitesse sur la partie $\partial\Omega$ de la frontière.

Nous définissons l'ensemble

$$V^\varepsilon = \{v \in W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2 : \mathbf{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \quad \text{et } v = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon\}.$$

qui est un espace de Banach pour la norme induite

$$\|\mathbf{v}\|_{V^\varepsilon} = \|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2}.$$

où

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega^\varepsilon)} = \left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega^\varepsilon)}^p + \sum_{1 \leq l, m \leq 2} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega^\varepsilon)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $V^{\varepsilon'}$ et V^ε

Dans toute la suite on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le cojugué p , c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique (2.1)-(2.4)

Lemme 2.2.1. *Supposons que $f^\varepsilon \in V^{\varepsilon'}$.*

Soit u^ε solution de (2.1)-(2.4), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \text{ dans } V^\varepsilon, \text{ telle que} \\ \langle \Phi(u^\varepsilon), (v - u^\varepsilon) \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon} + J(v) - J(u^\varepsilon) \\ \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall v \in V^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où

$$\begin{aligned}\Phi : V^\varepsilon &\longrightarrow V^{\varepsilon'}, \\ u^\varepsilon &\longmapsto \varphi(u^\varepsilon), \forall v \in V^\varepsilon \\ \langle \Phi(u^\varepsilon), v \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon} &= \mu \varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) \cdot D(v) dx_1 dx_2 \\ j : V^\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ j(v) &= g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)| dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Démonstration :

Supposons que u^ε solution de (2.1)-(2.4) soit suffisamment régulière. En multipliant l'équation (2.1) par $(v - u^\varepsilon)$, où $v \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur le domaine Ω^ε on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n \cdot (v - u^\varepsilon) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall v \in V^\varepsilon. \quad (2.6)$$

En utilisant maintenant la condition aux limites (2.4), on trouve

$$\int_{\partial\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n \cdot (v - u^\varepsilon) ds = \int_{\Gamma_2^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n \cdot (v - u^\varepsilon) ds + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n \cdot (v - u^\varepsilon) ds = 0.$$

Donc (2.6) devient comme suit

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall v \in V^\varepsilon.$$

Par ailleurs, on aura, en utilisant la définition de $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ et la condition d'incompressibilité (2.3)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon} \tilde{\sigma}^\varepsilon \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\sigma^\varepsilon - \frac{\text{tr}(\sigma^\varepsilon)}{2} \delta \right) \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 &\leq \mu \varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) \cdot D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\ &\quad + g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)| dx_1 dx_2 - g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)| dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\langle \Phi(u^\varepsilon), (v - u^\varepsilon) \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon} + J(v) - J(u^\varepsilon) \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 \quad \forall v \in V^\varepsilon.$$

La preuve est terminée .

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1. *Supposons que $f^\varepsilon \in V^{\varepsilon'}$. Alors il existe un unique $u^\varepsilon \in V^\varepsilon$ solution du problème variationnel (2.5).*

Démonstration :

On peut facilement prouver que l'opérateur Φ peut s'écrire

$$\langle \Phi(u^\varepsilon), v \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon} = \langle dJ(D(u^\varepsilon)), D(v) \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4},$$

où la fonctionnelle J est défini par

$$\begin{aligned} J : L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4 \subset S_2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \sigma &\longmapsto J(\sigma) = \frac{\mu\varepsilon^p}{p} \int_{\Omega} |\sigma|^p dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

et d représente le dérivée au sens de Gâteaux.

Cette fonctionnelle est convexe et semi-continue inférieurement sur $L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4$ et Gâteaux différentiable et sa dérivée au sens de Gâteaux au point $\sigma \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4$ est

$$\langle dJ(\sigma), \tau \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} = \int_{\Omega^\varepsilon} \mu\varepsilon^p |\sigma|^{p-2} \sigma \cdot \tau dx_1 dx_2, \quad \forall \tau \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4,$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \langle dJ(\sigma), \tau \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} &= \int_{\Omega^\varepsilon} \mu\varepsilon^p |\sigma|^{p-2} \sigma \cdot \tau dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} |\mu\varepsilon^p| |\sigma|^{p-1} |\tau| dx_1 dx_2 \\ &\leq c \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\sigma|^{p'(p-1)} dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\tau|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Or on sait que $1 < p < 2 \implies 0 < p - 1 < 1$, de plus il existe une constante strictement positive δ de sorte que

$$\delta |\sigma| > 1, \quad \forall \sigma \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4 \setminus \{0\}.$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $C(p, \delta)$ vérifiant l'inégalité

$$\|dJ(\sigma)\|_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4} \leq C(p, \delta) \|\sigma\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4}, \quad \forall \sigma \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4.$$

D'après le lemme (1.2.2) et la propriétés (1.18), $J(\sigma)$ est convexe si et seulement si

$$\langle dJ(\sigma_1), \sigma_2 - \sigma_1 \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} \leq J(\sigma_2) - J(\sigma_1), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}
\langle dJ(\sigma_1), \sigma_2 - \sigma_1 \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_1|^{p-1} |\sigma_2| dx_1 dx_2 - \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_1|^p dx_1 dx_2 \\
&\leq \frac{p-1}{p} \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_1|^p dx_1 dx_2 + \frac{1}{p} \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_2|^p dx_1 dx_2 \\
&\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_1|^p dx_1 dx_2 \\
&\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_2|^p dx_1 dx_2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega^\varepsilon} \mu \varepsilon^p |\sigma_1|^p dx_1 dx_2 \\
&\leq J(\sigma_2) - J(\sigma_1), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4.
\end{aligned}$$

Par conséquent, dJ , est semi-continue et monotone, de plus dJ est strictement monotone et bornée,

A cette fin, on a

$$\begin{aligned}
\langle dJ(\sigma_1) - dJ(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2 \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} &\geq \mu \varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} (|\sigma_1| - |\sigma_2|)(|\sigma_1|^{p-1} - |\sigma_2|^{p-1}) dx_1 dx_2, \\
\forall \sigma_1, \sigma_2 &\in L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4.
\end{aligned}$$

Donc si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, nous avons $\langle dJ(\sigma_1) - dJ(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2 \rangle_{L^{p'}(\Omega^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega^\varepsilon)_s^4} > 0$, ce qui signifie que dJ , est strictement monotone.

D'autre part, pour tout $u^\varepsilon, v \in V^\varepsilon$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi(u^\varepsilon), v \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon}| &\leq \mu \varepsilon^p \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p'(p-1)} dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu \varepsilon^p \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu \varepsilon^p \|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}^{\frac{p}{p'}} \|v\|_{V^\varepsilon} \\
&\leq \mu \varepsilon^p u^\varepsilon \|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}^{\frac{p}{p'}} \|v\|_{V^\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|\Phi(u^\varepsilon)\|_{V^{\varepsilon'}} \leq \mu \varepsilon^p \|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}^{\frac{p}{p'}}.$$

Ce qui prouve que l'opérateur Φ est bornée sur V^ε .

Maintenant, d'après l'inégalité généralisée de Korn, qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\langle \Phi(u^\varepsilon), u^\varepsilon \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon} \geq c (\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}^p), \quad \forall u^\varepsilon \in V^\varepsilon.$$

Alors

$$\frac{\langle \Phi(u^\varepsilon), u^\varepsilon \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon}}{\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}} \geq c \frac{\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}^p}{\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}}, \quad \forall u^\varepsilon \in V^\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon} \rightarrow +\infty$ nous trouvons

$$\frac{\langle \Phi(u^\varepsilon), u^\varepsilon \rangle_{V^{\varepsilon'} \times V^\varepsilon}}{\|u^\varepsilon\|_{V^\varepsilon}} \mapsto +\infty$$

il s'en suit que l'opérateur Φ est coercif sur V^ε .

Par ailleurs, la fonctionnelle

$$\begin{aligned} j : V^\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto j(v) = g\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)| dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

est continue et convexe sur V^ε , elle est donc semi-continue inférieurement sur V^ε .

En effet, pour montrer la continuité de j il suffit de considérer une suite $v_n \in V^\varepsilon$ qui converge vers v dans V^ε , et utiliser l'inégalité de Hölder et la continuité de g sur V^ε pour obtenir

$$\begin{aligned} |j(v_n) - j(v)| &\leq \left| \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} g |D(v_n)| dx_1 dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} g |D(v)| dx_1 dx_2 \right| \\ &\leq g\varepsilon \text{mes}(\Omega^\varepsilon)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v_n - v)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \|v_n - v\|_{V^\varepsilon} \\ &\leq c \|(v_n - v)\|_{V^\varepsilon}. \end{aligned}$$

De plus, pour la convexité, on a pour toute $u^\varepsilon, v \in V^\varepsilon, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} j(tu^\varepsilon + (1-t)v) &= \int_{\Omega^\varepsilon} g\varepsilon |D(tu^\varepsilon + (1-t)v)| dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} g\varepsilon |D(tu^\varepsilon)| dx_1 dx_2 + \int_{\Omega^\varepsilon} g\varepsilon |D((1-t)v)| dx_1 dx_2 \\ &\leq t \left(\int_{\Omega^\varepsilon} g\varepsilon |D(u^\varepsilon)| dx_1 dx_2 \right) + (1-t) \left(\int_{\Omega^\varepsilon} g\varepsilon |D(v)| dx_1 dx_2 \right) \\ &\leq tj(u^\varepsilon) + (1-t)j(v). \end{aligned}$$

Par conséquent le résultat d'existence et d'unicité de la solution résulte des théorèmes classiques, sur les inéquations variationnelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes, voir [8].

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'un problème de l'écoulement stationnaire du fluide de Herschel-Bulkley dans une couche mince

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un problème de l'écoulement lié par le fluide incompressible, rigide et visco-plastique de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des conditions de Dirichlet sur la frontière. Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans la section 1, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la section 2, nous présentons le problème mécanique et sa formulation variationnelle. Dans la section 3, nous nous intéressons au comportement asymptotique, pour cela nous prouvons quelques résultats de convergence concernant la vitesse et la pression lorsque l'épaisseur tend vers zéro. En outre, l'unicité d'une solution limite a également été établie.

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème

On note I l'intervalle ouvert $I =]0, 1[$. On introduit la fonction $h : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $h \in C^1(I)$.

Nous considérons les domaines suivants :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } 0 < y < h(x)\}, \\ \Omega^\varepsilon &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in I \text{ et } 0 < x_2 < \varepsilon h(x_1)\},\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Remarquez que si $(x_1, x_2) \in \Omega^\varepsilon$, alors on a $(x, y) = (x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \in \Omega$.

Cela nous permet de définir, pour chaque fonction $\varphi^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{\varphi}^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $\widehat{\varphi}^\varepsilon(x, y) = \varphi^\varepsilon(x_1, x_2)$.

Pour $1 < p \leq 2$, notons par p' le conjugué p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $f = (f_1, f_2) \in L^{p'}(\Omega)^2$ une fonction donnée. Nous définissons la fonction $f^\varepsilon \in L^{p'}(\Omega^\varepsilon)^2$ tel que $\widehat{f}^\varepsilon = f$.

Pour le domaine Ω^ε , nous supposons que sa frontière $\partial\Omega^\varepsilon$ est de classe C^1 , et est divisée en deux parties $\Gamma_1^\varepsilon, \Gamma_2^\varepsilon$ mesurables, telles que $mes(\Gamma_1^\varepsilon), mes(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$, données par $\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$, où la surface inférieure Γ_1^ε est définie par $x_2 = 0$, la surface supérieure Γ_2^ε est définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$.

On note S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^2 et par "·" et $|\cdot|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 et S_2 . Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u \cdot v = u_l v_l$, $|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2$, $\sigma \cdot \tau = \sigma_{lm} \tau_{lm}$, $|\sigma| = (\sigma \cdot \sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned}W_{div}^{p, \varepsilon} &= \{\mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2 : \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon\}, \\ W_{div}^p &= \{\mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)^2 : \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega\}, \\ W_p &= \left\{ \varphi \in L^p(\Omega) : \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in L^p(\Omega) \right\}. \\ L_0^p(\Omega^\varepsilon) &= \left\{ \varphi^\varepsilon \in L^p(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} \varphi^\varepsilon(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}, \\ L_0^p(\Omega) &= \left\{ \varphi \in L^p(\Omega) : \int_{\Omega} \varphi(x, y) dx dy = 0 \right\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tout ces espaces sont des espaces de Banach.

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega^\varepsilon) \times W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)}$ le produit de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega^\varepsilon)$ et $W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)$ et par $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)}$ la norme de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)$.

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle

On considère le fluide de Herschel-Bulkley rigide, visco-plastique et incompressible qui occupe le domaine Ω^ε .

On note par $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ le champ de vitesse, par $\sigma^\varepsilon = (\sigma_1^\varepsilon, \sigma_2^\varepsilon)$ les tenseurs des contraintes et par $D(u^\varepsilon)$ les tenseurs de déformations linéarisées.

Nous modélisons les matériaux avec le tenseur de contrainte total de Cauchy

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) = -p^\varepsilon I_2 + \tilde{\sigma}^\varepsilon(u^\varepsilon),$$

où $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ désigne la partie déviateur, et p^ε la pression. Le fluide est supposé être incompressible, rigide et visco-plastique, et la relation entre $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ et $D(u^\varepsilon)$ est donnée par le modèle de Herschel-Bulkley :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}^\varepsilon = \mu\varepsilon^p |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) + g\varepsilon \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} & \text{si } |D(u^\varepsilon)| \neq 0, \\ |\tilde{\sigma}^\varepsilon| \leq g\varepsilon & \text{si } |D(u^\varepsilon)| = 0. \end{cases}$$

où $g\varepsilon$ est le seuil de plasticité, $\mu\varepsilon^p$ est la viscosité ($g_i > 0$ et $\mu_i > 0$ sont des constantes indépendantes de ε), p représente l'indice de loi de puissance, u^ε est le champ de vitesse et $D(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T)$.

— L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\text{Div} \sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon,$$

où le vecteur f^ε , de composantes f_j^ε ($j = 1, 2$), représente une densité massique des forces extérieures.

— L'équation d'incompressibilité

$$\text{div} u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon.$$

Nous décrivons les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega^\varepsilon$. Nous supposons que

— Sur la surface inférieure et supérieure, on a

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon.$$

Le problème de l'écoulement en régime stationnaire pour le fluide de Herschel-Bulkley en couche mince est donné par le problème mécanique suivant :

Problème (P.3.1). Trouver le champ des vitesses $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma^\varepsilon = (\sigma_1^\varepsilon, \sigma_2^\varepsilon) : \Omega^\varepsilon \rightarrow S_2$ et la pression $p^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$$\left. \begin{aligned} \text{Div} \sigma^\varepsilon + f^\varepsilon &= 0 \\ \text{div} u^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}^\varepsilon(u^\varepsilon) &= \sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) + p^\varepsilon I_2 \\ \tilde{\sigma}^\varepsilon &= \mu\varepsilon^p |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) + g\varepsilon \frac{D(u^\varepsilon)}{|D(u^\varepsilon)|} \quad \text{si } |D(u^\varepsilon)| \neq 0 \\ \tilde{\sigma} &\leq g\varepsilon \quad \text{si } |D(u^\varepsilon)| = 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad (3.3)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \quad (3.4)$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2^\varepsilon. \quad (3.5)$$

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le conjugué p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.2) par $v - u^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur Ω^ε , on trouve

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon . D(v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon n . (v - u^\varepsilon) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon . (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2.$$

En tenant compte des conditions (3.2)-(3.5), on trouve la formulation faible.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W_{div}^{p,\varepsilon} \times L_0^{p'}(\Omega^\varepsilon) \text{ tel que} \\ \Phi(u^\varepsilon, v - u^\varepsilon) - \langle p^\varepsilon, \text{div}(v - u^\varepsilon) \rangle + J(v) - J(u^\varepsilon) \\ \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon (v - u^\varepsilon) dx_1 dx_2, \end{array} \right. \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2, \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi(u^\varepsilon, v) &= \mu\varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) . D(v) dx_1 dx_2, \\ \langle p^\varepsilon, \text{div}(v) \rangle &= \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon . \text{div}(v) dx_1 dx_2, \\ J(v) &= g\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v)| dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

On sait que ce problème variationnel a une solution unique $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W_{div}^{p,\varepsilon} \times L_0^{p'}(\Omega^\varepsilon)$, voir pour plus détails [32, 4, 35, 24, 25].

3.3 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous établissons quelques résultats concernant le comportement asymptotique de la solution lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons par rappeler les lemmes suivants, voir [29, 6, 8, 16, 9].

Lemme 3.3.1. 1. *L'inégalité de Poincaré. Pour chaque $v \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2$ nous avons*

$$\|v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^2} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^2}. \quad (3.7)$$

2. *L'inégalité de Korn. Pour chaque $v \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2$ il existe une constante positive C_0 indépendante de ε , tel que*

$$\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^4} \leq C_0 \|D(v^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^4}. \quad (3.8)$$

Lemme 3.3.2. (Minty).. *Soit E un espace de Banach, $A : E \rightarrow E'$ un opérateur monotone et semi-continu, $J : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle propre et convexe. Soit $u \in E$ et $f \in E'$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\langle Au; v - u \rangle_{E \times E'} + J(v) - J(u) \geq \langle f; v - u \rangle_{E \times E'} \quad \forall v \in E.$
2. $\langle Av; v - u \rangle_{E \times E'} + J(v) - J(u) \geq \langle f; v - u \rangle_{E \times E'} \quad \forall v \in E.$

Les principaux résultats de cette section sont énoncés par la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in W_{div}^{p,\varepsilon} \times L_0^{p'}(\Omega^\varepsilon)$ la solution du problème variationnel (3.6). Alors, il existe $(\hat{u}, \hat{p}) \in W_p^2 \times L_0^{p'}(\Omega)$ tels que*

$$\hat{u}^\varepsilon \rightarrow \hat{u} \text{ faiblement dans } W_p^2, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (3.10)$$

$$\hat{p}^\varepsilon \rightarrow \hat{p} \text{ faiblement dans } L_0^{p'}(\Omega). \quad (3.11)$$

Démonstration :

En Choissant $v = 0$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.6), on en déduit que

$$\mu \varepsilon^p \|D(u^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^4}^p \leq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot u^\varepsilon dx_1 dx_2.$$

En utilisant les inégalités de Poincaré, Korn et par passage aux variables x et y , on obtient

$$\|\hat{u}^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)^2} \leq c, \quad (3.12)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)^2} \leq c, \quad (3.13)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)^2} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \quad (3.14)$$

De plus, nous utilisons la condition d'incompressibilité (3.2) et la formule de Green, pour tout fonction $\varphi^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y} \widehat{\varphi}^\varepsilon dx dy = \varepsilon \int_{\Omega} \widehat{u}_1^\varepsilon \frac{\partial \widehat{\varphi}^\varepsilon}{\partial x} dx dy.$$

Ce qui donne, en faisant usage de (3.1)

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq c\varepsilon. \quad (3.15)$$

On peut alors extraire une sous-suite encore notée par \widehat{u}^ε telle que

$$\widehat{u}^\varepsilon \longrightarrow \widehat{u} \text{ faiblement dans } L^p(\Omega)^2, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} \text{ faiblement dans } L^p(\Omega)^2, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y} \longrightarrow 0 \text{ faiblement dans } L^p(\Omega), \quad (3.18)$$

Soit maintenant $v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2$, en employant $u^\varepsilon - v^\varepsilon$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.6), en utilisant la condition d'incompressibilité (3.2) ainsi que la formule de Green et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon dx_1 dx_2 &\leq \mu \varepsilon^p \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \varepsilon^{\frac{1}{p'}+1} g(\text{meas}(\Omega))^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \|\widehat{f}^\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)^2} \|\widehat{v}^\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que, après quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\left(\int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}-1} \|\widehat{v}^\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^2}. \quad (3.20)$$

Par conséquent, de (3.13), (3.14), (3.19) et (3.20) il s'ensuit que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla p^\varepsilon \cdot v^\varepsilon dx_1 dx_2 \leq c\varepsilon \|\widehat{v}^\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^2}. \quad (3.21)$$

En passant aux variables x et y dans le côté gauche de (3.21), on retrouve les estimations suivantes :

$$\|\widehat{p}^\varepsilon\|_{L_0^{p'}(\Omega)} \leq c, \quad (3.22)$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial x} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq c, \quad (3.23)$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq c\varepsilon. \quad (3.24)$$

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée par \widehat{p}^ε telle que

$$\widehat{p}^\varepsilon \longrightarrow \widehat{p} \text{ faiblement dans } L_0^{p'}(\Omega). \quad (3.25)$$

La preuve est terminée. Cette preuve permet également de déduire que la pression limite vérifie $\widehat{p}(x, y) = \widehat{p}(x)$. \square

Proposition 3.3.2. *La vitesse limite donnée par (3.9) vérifie*

$$\int_0^{h(x)} \widehat{u}_1(x, y) dy = 0 \quad \forall x \in I. \quad (3.26)$$

Démonstration :

Nous savons la condition d'incompressibilité (3.2) que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div} u^\varepsilon(x_1, x_2) \varphi(x_1) dx_1 dx_2 = 0, \quad \forall \varphi \in D(I).$$

Cela implique, en utilisant la formule de Green

$$\int_{\Omega^\varepsilon} u_1^\varepsilon(x_1, x_2) \frac{d\varphi}{dx_1}(x_1) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, x_2) \varphi(x_1) dx_1 dx_2.$$

Par conséquent, par passage aux variables x et y , en utilisant le théorème de Fubini et la formule de Green, nous pouvons déduire

$$\int_0^1 \varphi(x) \left(\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} \widehat{u}_1^\varepsilon(x, y) dy \right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in D(I).$$

Alors,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} \widehat{u}_1^\varepsilon(x, y) dy = 0.$$

De plus, le fait que $\widehat{u}_1^\varepsilon \in L^p(\Omega)$ et $h \in C^1(I)$ donne, en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$

$$\int_0^{h(x)} \widehat{u}_1^\varepsilon(x, y) dy \in C^0(\bar{I}).$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque ε tend vers zéro, en tenant compte des conditions aux limites (3.4) et (3.5), la propriété (3.26) peut être déduite. \square

Nous extrayons dans la proposition ci-dessous l'équation vérifiée par la solution limite $(\widehat{u}, \widehat{p}) \in W_p^2 \times L_0^{p'}(\Omega)$.

Proposition 3.3.3. Si $\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \neq 0$, alors le point $(\widehat{u}_1, \widehat{p})$ donné par (3.9) et (3.11) vérifie le problème limite

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2} g \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \right) = \widehat{f}_1 - \frac{d\widehat{p}}{dx} \quad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega). \quad (3.27)$$

Démonstration :

Introduisons l'opérateur Φ défini comme suit

$$\begin{aligned} \Phi : W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2 &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega^\varepsilon)^2 \\ \langle \Phi u^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega^\varepsilon)^2 \times W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2} &= \mu \varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)|^{p-2} D(u^\varepsilon) D(v^\varepsilon) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que Φ est monotone et semi-continu (pour plus de détails, voir les références [27, 9, 7]). De plus, nous savons que la fonctionnelle

$$v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2 \longrightarrow g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)| dx_1 dx_2$$

est propre et convexe. Alors, l'utilisation du lemme de Minty permet d'affirmer que (3.6) équivalent à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\mu \varepsilon^p \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)|^{p-2} \cdot D(v^\varepsilon) D(v^\varepsilon - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \\ &g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)| dx_1 dx_2 - g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(u^\varepsilon)| dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \cdot (v^\varepsilon - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega^\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div}(v^\varepsilon - u^\varepsilon) dx_1 dx_2 \quad \forall v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Notre but est maintenant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Pour cela, nous utilisons la proposition (3.3.1) et la faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle convexe et continue

$$v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon) \longrightarrow g \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |D(v^\varepsilon)| dx_1 dx_2.$$

On trouve l'inégalité limite suivante

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1)}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v}_2 - \widehat{u}_2)}{\partial y} \right] dx dy \\ &+ g \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy - g \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &\geq \int_{\Omega} \widehat{f} \cdot (\widehat{v} - \widehat{u}) dx dy + \int_{\Omega} \widehat{p} \operatorname{div}(\widehat{v} - \widehat{u}) dx dy \quad \forall v^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega^\varepsilon)^2. \quad (3.28) \end{aligned}$$

En outre, de (3.9) et (3.10) nous trouvons

$$\frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Il suit, en gardant à l'esprit (3.26), que $\widehat{u}(x, y) = (\widehat{u}_1(x, y), 0)$. Cela permet également de choisir $\widehat{v}_2 = 0$ dans (3.28). Considérons maintenant l'opérateur Φ tel que

$$\begin{aligned} \Phi : W_p &\longrightarrow W'_p, \\ \langle \Phi(\widehat{u}_1), \widehat{v}_1 \rangle_{W'_p \times W_p} &= \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega^\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur Φ est monotone et semi-continu et la fonctionnelle

$$\widehat{v}_1 \in W_p \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \right| dx dy$$

est propre et convexe.

Par conséquent, nous en déduisons en utilisant encore le lemme de Minty (3.3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1)}{\partial y} dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right| dx dy \\ \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1) dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1) dx dy \quad \forall \widehat{v}_1 \in W_p. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Cela donne, via la formule de Green

$$\begin{aligned} - \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1) dx dy \\ + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right| dx dy \\ \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1) dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} (\widehat{v}_1 - \widehat{u}_1) dx dy \quad \forall \widehat{v}_1 \in W_p. \end{aligned} \quad (3.30)$$

à cause du fait que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est dense dans $W_p(\Omega)$, voir [6, 11], on peut prendre $\widehat{v}_1 = \widehat{u}_1 \pm \varphi$ dans (3.30), où $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} - \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \varphi dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial (\widehat{u}_1 + \varphi)}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right| dx dy \\ \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 \varphi dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} \varphi dx dy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \varphi dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial (\widehat{u}_1 - \varphi)}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right| dx dy \\ \geq - \int_{\Omega} \widehat{f}_1 \varphi dx dy + \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} \varphi dx dy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Remplacer dans ces deux inégalités la fonction de test φ par $\lambda\varphi$, $\lambda > 0$, en divisant les inégalités obtenues par λ . Le passage à la limite quand λ tend vers 0 implique, sous l'hypothèse

$\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \neq 0$, que

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \varphi dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \text{sign} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \\ & \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 \varphi dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} \varphi dx dy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \varphi dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \text{sign} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \\ & \geq - \int_{\Omega} \widehat{f}_1 \varphi dx dy + \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}}{dx} \varphi dx dy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en combinant ces deux inégalités et en utilisant une intégration simple par parties

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \left(\left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} g \text{sign} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right) \right] \varphi dx dy \\ & = \int_{\Omega} \left(\widehat{f}_1 - \frac{d\widehat{p}}{dx} \right) \varphi dx dy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement (3.27).

Désormais, nous désignerons $(\widehat{u}_1, \widehat{p}) \in W_p \times L_0^{p'}(\Omega)$ par la solution du problème limite (3.27).

La proposition suivante montre l'unicité de la solution limite $(\widehat{u}_1, \widehat{p})$.

Proposition 3.3.4. *Le problème limite (3.27) a une solution unique $(\widehat{u}, \widehat{p}) \in W_p \times L_0^{p'}(\Omega)$ avec la condition (3.26).*

Démonstration :

Supposons que le problème limite (3.27) a au moins deux solutions $(\widehat{u}_1, \widehat{p}_1), (\widehat{u}_2, \widehat{p}_2) \in W_p \times L_0^{p'}(\Omega)$. En particulier, $(\widehat{u}_1, \widehat{p}_1), (\widehat{u}_2, \widehat{p}_2)$ sont solutions de la formulation faible (3.29).

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v} - \widehat{u}_1)}{\partial y} dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y} \right| dx dy \\ & \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 (\widehat{v} - \widehat{u}_1) dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}_1}{dx} (\widehat{v} - \widehat{u}_1) dx dy \quad \forall \widehat{v} \in W_p, \quad (3.31) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v} - \widehat{u}_2)}{\partial y} dx dy + \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} \right| dx dy - \frac{\sqrt{2}}{2} g \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y} \right| dx dy \\ & \geq \int_{\Omega} \widehat{f}_1 (\widehat{v} - \widehat{u}_2) dx dy - \int_{\Omega} \frac{d\widehat{p}_2}{dx} (\widehat{v} - \widehat{u}_2) dx dy \quad \forall \widehat{v} \in W_p, \quad (3.32) \end{aligned}$$

En employant $\hat{v} = \hat{u}_2, \hat{v} = \hat{u}_1$ comme fonctions de test dans (3.30) et (3.31), respectivement. En soustrayant les deux inégalités obtenues, on peut déduire

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \left[\left| \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} - \left| \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right] \frac{\partial(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{\partial y} dx dy \\ \leq \int_{\Omega} \frac{d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{dx} (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) dx dy \quad \forall \hat{v} \in W_p, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Observez que pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x - y) \geq (p-1) \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, \quad 1 < p \leq 2.$$

Cela conduit, en utilisant (3.32), à

$$\begin{aligned} \frac{\mu(p-1)}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega} \frac{\left| \frac{\partial(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{\partial y} \right|^2}{\left(\left| \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \right| \right)^{2-p}} dx dy &\leq \int_{\Omega} \frac{d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{dx} (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{dx} \int_0^{h(x)} (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) dy \right) dx. \end{aligned}$$

L'utilisation de (3.26) donne

$$\int_{\Omega} \frac{\left| \frac{\partial(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{\partial y} \right|^2}{\left(\left| \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \right| \right)^{2-p}} dx dy = 0. \quad (3.34)$$

Ce qui donne, en gardant à l'esprit (3.33)

$$\frac{\partial(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)}{\partial y} = 0.$$

Depuis $\hat{u}_2(x, h(x)) = \hat{u}_1(x, h(x)) = 0$, on en déduit que $\hat{u}_2 = \hat{u}_1$ dans Ω . Enfin, pour prouver l'unicité de la pression, nous utilisons l'équation (3.27), avec les deux pressions \hat{p}_1 et \hat{p}_2 .

Nous trouvons

$$\frac{d(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{dx} = 0.$$

Ensuite, en raison du fait que $\hat{p}_1, \hat{p}_2 \in L_0'(\Omega)$, le résultat peut être facilement déduit. \square

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley incompressible, rigide et visco-plastique dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec les conditions aux limites de Dirichlet.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle (où l'inéquation de la formulation variationnelle), et on utilise les techniques sur les inéquations variationnelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes introduit dans [8] pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution faible.

L'étude de comportement asymptotique d'un problème mécanique de l'écoulement du fluide incompressible, rigide et visco-plastique de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec les conditions aux limites de Dirichlet fait une partie très importante dans ce mémoire.

Travaux perspectives

1. En considérant le cas où le coefficient caractéristique du fluide de Herschel-Bulkley est variante.
2. Donne une méthode dans laquelle nous pouvons trouver les paramètres de Herschel-Bulkley expérimentalement.
3. L'étude d'un problème mécanique de l'écoulement du fluide de Herschel-Bulkley incompressible, rigide et visco-plastique dans une couche mince tridimensionnel.

Bibliographie

- [1] R. S. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.
- [2] P. Apanastasiou. Flow of materials with yield. J. of Rheology, 31(5) :385–404, 1987.
- [3] A. Assemien, Bayada G, and M. Chambat. Inertial effects in the asymptotic behaviour of a thin film flow. Asymptotic Analysis, (9) :117–208, 1994.
- [4] G. Bayada and M. Chambat. The transition between the stokes equations and the reynolds equation : a mathematical proof. Appl. Math. and Opt., 14 :73–93, 1986.
- [5] N. Benhaboucha. Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur. PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, 2003.
- [6] F. Boughanim, M Boukrouche, and H. Smaoui. Asymptotic behavior of a non-newtonian flow with stick-slip condition. Electronic Journal of Differential Equations, conference 11 :17–80, 2004. 2004-Fez Conference on Differential Equations and Mechanics.
- [7] A. Bourgeat and A. Mikelic. Tapiéro, r., dérivation des equations moyennées décrivant un ecoulement non newtonien dans un domaine de faible epaisseur. C. R. Acad., 316(I) :965–970, 1993.
- [8] H. Brezis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité. Annale de l’Institut Fourier, 30 :115–175, 1969.
- [9] R. Bunoiu and S. Kesavan. Fluide de bingham dans une couche mince. Annals of university of Craiova, Maths. Comp. Sci. Ser, 30 :71–77, 2003.
- [10] R. Bunoiu and S. Kesavan. Asymptotic behavior of a bingham fluid in thin layers. J.Math. Anal. Appl., 293(2) :405–418, 2004.
- [11] R. Bunoiu and J. Saint Jean Paulin. Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrication case. Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées, 45(4) :577–591, 2000.
- [12] L. Chupin. Modélisation et Analyse mathématique en films minces. Institut Camille Jordan-INSA de Lyon, 2009.

- [13] P. G. Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle*. Paris, 1986.
- [14] N. Cristescu. On the optimum die angle in fast wire drawing. *J. Mech. Work. Tech.*, 3(3-4) :275–287, 1980.
- [15] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en physique*. Paris, 1976.
- [16] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Paris, 1974.
- [17] M. Fortin. *Calcul Numérique des Ecoulement des Fluides de Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressibles par la Méthode des Eléments Finis*. PhD thesis, University of paris VI, 1976.
- [18] N. Hemicu and A. Matei. A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 30 :90–99, 2003.
- [19] R. Ionescu and M. Sofonea. The blocking property in the study of the bingham fluid. *Int. J. Engn, Sci.*, 24(3) :289–297, 1986.
- [20] R. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford University Press, 1993.
- [21] Y. Kato. Variational inequalities of bingham type in three dimensions. *Nagoya Math*, 129 :53–95, 1993.
- [22] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*. Paris, 1966.
- [23] W. G. Litvinov. Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids, volume 291. *Recent developments in theoretical fluid mechanic*, Longman Scientific and Technical, Galdi, J.P. et Necas, J. (éd.), 1992.
- [24] J. Málek, M. Růžička, and V.V. Shelukhin. Herschel-bulkley fluids, existence and regularity of steady flows, *maths. Models Methods Appl. Sci.*, 15(12) :1845–1861, 2005.
- [25] F. Messelmi. Effects of the yield limit on the behaviour of herschel-bulkley fluid. *Non-linear Sci. Lett. A.*, 2(3) :137–142, 2011.
- [26] F. Messelmi and B. Merouani. Flow of herschel-bulkley fluid through a two dimensional thin layer. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, 58(1) :119–130, 2013.
- [27] F. Messelmi, B. Merouani, and F. Bouzeghaya. Steady-state thermal herschel-bulkley flow with tresca’s friction law. *Electronic Journal of Differential Equations.*, 2010(46) :1–14, 2010.
- [28] A. Mikelic and R. Tapiero. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. *M2 A.N.*, 29 :3–22, 1995.

BIBLIOGRAPHIE

- [29] A. Mikelic and R. Tapiéro. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin layer. *A*, 29 :3–22, 1995.
- [30] S.A. Nazarov. Asymptotic solution of the navier-stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. *Siberian Math. J.*, 31 :296–307, 1990.
- [31] S.Saf, F. Messelmi, and K. Mosbah. Transmission problme between two herschel-bulkley fluids in thin layer. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, Accepted paper, 2022.
- [32] F. Saidi. Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Etienne, 2004.
- [33] M. Selmani. Etude Mathématiques de Quelques Problèmes aux limites en Mécanique de Contact. PhD thesis, Université de Sétif, 2012.
- [34] M. Sofonea. Problèmes non linéaires dans la théorie de l'élasticité. Cours de magister de mathématiques appliquées, University de Sétif, 1993
- [35] K. Taous. Equations de reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(I) :1213–1218, 1995