



Université Amar Telidji – Laghouat

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de génie civil

Mémoire

Présenté par :

Mohamed Bachir TAOUTI

En vue de l'obtention du diplôme de **Magister en Hydraulique**

Option : **Ressources en Eau**

THÈME :

Analyses fractales et multifractales des précipitations et des débits en Algérie septentrionale

Soutenue publiquement, le 30 juin 2012, devant le jury composé de :

Mr. GAFSI M.
Mr. CHETTIH M.
Mme. BENKOUIDER F.
Mr. STAMBOUL M.

U. A. T. Laghouat
U. A. T. Laghouat
U. A. T. Laghouat
U. A. T. Laghouat

Président
Encadreur
Examinatrice
Examineur

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Amar Telidji de Laghouat

Faculté des sciences de l'ingénieur

Département de génie civil

Mémoire

Présenté par

Mohamed Bachir TAOUTI

Pour obtenir le diplôme de

Magister en Hydraulique

Option : **Ressources en eau**

Titre de Mémoire :

**Analyses fractales et multifractales des
précipitations et des débits en Algérie septentrionale**

Directeur de mémoire : **Mohamed CHETTIH**

*L'est plus facile d'étudier le mouvement d'astres
infiniment éloignés que celui des rivières qui coulent
à mes pieds.*

Galilée (1564 – 1614)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mon promoteur, Monsieur Mohamed CHETTIH Docteur à l'université d'Amar Telidji de Laghouat, pour avoir accepté la direction de ce mémoire, pour son aide, suggestion et conseil qui m'ont été précieux pour que je puisse mener à bien ce travail de recherche.

J'adresse ma profonde gratitude à Monsieur Mustapha GAFSI, à Monsieur Madani STAMBOUL, à Madame BENKOUIDER, pour avoir accepté d'évaluer ce travail et d'être membre du jury.

Je voudrais remercier sincèrement Monsieur Azzedine GAIDOU, et Monsieur Arezki TAZDAIT pour leurs efforts considérables lors de la phase de collection de données.

Je remercie également tout le personnel de l'Agence Nationale des Ressources hydrauliques (A.N.R.H.) de Blida et Alger, pour m'avoir grandement facilité l'accès aux données nécessaires à l'élaboration de ce travail, en particulier Madame ABDA, et Monsieur EMESSOUDANE, qui m'ont chaleureusement accueilli dans leurs bureaux pour consulter l'archive de données.

J'en profite pour remercier, Monsieur Daniel SCHERTZER ingénieur en chef au Laboratoire Eau Environnement et Systèmes Urbains (LEESU) de l'École des Ponts ParisTech, Madame Nassima MOUHOUS maître de conférences et responsable pédagogique des stages à l'université de technologie de Compiègne, qui m'ont apporté un soutien très précieux dans le cadre de ce travail, particulièrement pour leurs suggestions et conseils dans les analyses fractales et multifractale.

Je tiens à remercier mes camarades du Magister, pour m'avoir montré beaucoup de sollicitations et de chaleur humaine dont nous j'avais tant besoin, à savoir : Moussaab ZEKHROUF, Omar BOUZIDI, Mourad MEKOUDI, Hamida GOTTECHA, Rekia BENAMEIR.

Enfin, du fond du cœur, je remercie ma famille et mes amis de leur soutien indéfectible et, pour certains, de leur amour.

Je remercie enfin tous ceux qui n'ont pas été cités dans ces quelques lignes et qui ont contribué de près ou de loin par leurs aides au bon déroulement de ce travail.

Juste un simple mot...Un grand merci à tous !

M. B. TAOUTI 2012 ✍

Résumé

Analyses fractales et multifractales des précipitations et des débits en Algérie septentrionale

Les processus hydrologiques tels les précipitations et les débits sont extrêmement variables sur de grandes gammes d'échelles de temps et/ou d'espace. Cette variabilité est reconnue comme une caractéristique fondamentale des champs hydrologiques, et comme la difficulté principale à surmonter pour leur analyse et leur modélisation. Nous mettons donc en valeur tout au long de ce mémoire l'intérêt méthodologique des approches fractale et multifractale comme étant les plus appropriées pour analyser cette variabilité.

Le mémoire porte sur l'analyse de données journalières de précipitations et de débits en Algérie septentrionale.

La dimension fractale est le paramètre principal décrivant le comportement fractal du processus. Elle a été déterminée pour les pluies et les débits par la méthode du comptage de boîtes.

La présence de propriété d'invariance d'échelle est étudiée par l'analyse spectrale, et par l'analyse des lois d'échelle des moments statistiques, et par l'étude de la distribution de probabilité. Cette étude montre que la structure temporelle des précipitations et des débits présente une propriété d'invariance d'échelle à travers une large gamme d'échelles.

Aussi, les pluies et les débits montrent un comportement multifractal, bien décrit par un modèle multifractal universel. Les paramètres α et C_1 sont estimés pour chaque série étudiée par la méthode DTM. Les résultats de calcul des paramètres multifractals universels indiquent un faible degré de multifractalité des précipitations face à ceux des débits et une hétérogénéité des régimes pluviométriques et hydrométriques dans la région d'étude.

Mots clés : Séries chronologiques, Précipitation, Débits, Algérie, Fractal, Multifractal, Invariance d'échelle.

ملخص

التحليل الكسورية والمتعددة الكسوريات للتساقطات والجريان في الجزائر الشمالية

الظواهر الهيدرولوجية مثل التساقطات والجريان تتميز بتباين كبير على نطاقات واسعة من المقاييس الزمنية و/أو المكانية. هذا التباين يعرف بأنه سمة أساسية للحقول الهيدرولوجية، وبأنه الصعوبة الرئيسية التي يتعين التغلب عليها في تحليلها ونمذجتها. لهذا، نقدم طوال هذه المذكرة قيمة النهج الكسورية والمتعددة الكسوريات بأنها الأكثر تناسبا لتحليل هذا التباين.

الأطروحة تركز على تحليل المعطيات اليومية للتساقطات و الجريان في الجزائر الشمالية.

البعد الكسوري هو المؤشر الرئيسي الذي يصف السلوك الكسوري. تم حسابه بالنسبة للتساقطات والجريان بواسطة طريقة تعداد العلب.

تمت دراسة وجود خاصية ثبات المقياس بواسطة التحليل الطيفي، وتحليل قوانين مقاييس العزوم الإحصائية، و دراسة توزيع الاحتمالات. هذه الدراسة تثبت بأن البنية الزمانية للتساقطات و الجريان تمتلك خاصية ثبات المقياس عبر مجموعة واسعة من المقاييس.

أيضا، التساقطات و الجريان تظهر سلوك متعدد كسوري، الذي وصف بشكل جيد بواسطة نموذج عالمي متعدد الكسور. المؤشرات α و C_1 تم تقديرها لكل السلاسل المدروسة بواسطة طريقة DTM. نتائج حساب المؤشرات العالمية المتعددة الكسوريات تشير إلى ضعف درجة تعدد كسوريات الأمطار مقارنة بالجريان، وتغاير أنظمة التساقطات والجريان في منطقة الدراسة.

الكلمات الدلالية : سلاسل زمنية، تساقطات، جريان، الجزائر، كسوري، متعدد الكسوريات، ثبات المقياس.

Abstract

Fractals and multifractals analyzes of rainfall and runoff in northern Algeria

Hydrological processes such as rainfall and runoff are highly variable over a broad range of time and/or space scales. This variability is recognized as a fundamental characteristic of hydrological fields, and as the main difficulty to overcome in their analysis and modeling. For this, we therefore value throughout this thesis the methodological interest of a multifractal approaches as being most appropriate to analyze and to simulate such the variability.

The thesis focuses on the analysis of daily rainfall and runoff in northern Algeria.

The fractal dimension is the main parameter, describing the fractal behavior. It was determined for the rainfall and the runoff by the box counting method.

The presence of scaling property is studied by spectral analysis, and by analysis of scaling laws of statistical moments, and by studying the probability distribution. This study shows that the time structure of rainfall and runoff presents scaling property across a wide range of scales.

Also, rainfall and runoff show a multifractal behaviour, which was well described by a universal multifractal model. The parameters α and C_1 are estimated for each series studied by the DTM method. The results of calculation of universal multifractal parameters indicate a low degree of multifractality of rainfall against the runoff, and heterogeneity of rainfall and runoff regimes in the study area.

Keywords : Time series, rainfall, runoff, Algeria, Fractal, Multifractal, scaling.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	x

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre 1: Présentation de la région d'étude et analyse préliminaire des données	2
--	---

1.1 Présentation de la région d'étude	2
1.1.1 Situation géographique.....	2
1.1.2 Climatologie générale	4
1.1.3 Hydrographie.....	4
1.2 Présentation des données	6
1.2.1 Stations pluviométriques.....	7
1.2.2 Stations hydrométriques	11
1.3 Analyse préliminaire des données	11
1.3.1 Etude de la non-stationnarité.....	16
1.3.2 Etude de la dépendance à long terme	18
1.3.2.1 Principe de la méthode d'analyse R/S	18
1.3.2.2 Application aux séries de pluies et de débits	19
1.3.3 Analyses corrélatoire et spectrale.....	21
1.3.3.1 Principe de la méthode	21
1.3.3.2 Résultats et discussions.....	22
a) Analyse à court terme	22
b) Analyse à long terme	24
1.4 Conclusion	25

Chapitre 2 : Fractals et dimension fractale..... 26

2.1 Notion de fractale	26
2.1.1 La géométrie classique.....	26
2.1.2 La géométrie fractale	27
2.1.3 Définition d'un objet fractal	27
2.2 Notion de la dimension fractale	28
2.2.1 Considérations générales.....	28
2.2.2 Calcul de la dimension fractale	29
2.2.2.1 Méthode de comptage de boîtes (Box Counting)	29
2.2.2.2 Méthodes basées sur le mouvement Brownien fractionnaire (fBm)	30
2.3 Notion de codimension.....	30
2.4 Applications du concept des fractals à l'hydrologie	31
2.5 Application de la méthode de comptage de boîtes aux séries chronologiques de pluie et de débit.....	32
2.5.1 Principe de la méthode.....	33
2.5.2 Le code de calcul.....	34
2.5.3 Application aux séries journalières	35
2.5.3.1 Séries pluviométriques	35
2.5.3.2 Séries hydrométriques	39
2.6 Effet de la taille de série	44
2.7 Variation spatiale de la dimension fractale	45
2.7.1 Carte de dimension fractale des pluies.....	46
2.7.2 Carte de dimension fractale des débits	48
2.8 Vers les multifractals	49
2.9 Conclusion.....	52

Chapitre 3 : Analyse multifractale 53

3.1 Notions fondamentales sur les multifractals	53
3.1.1 Rapport d'échelle	53
3.1.2 Agrégation d'un signal à différentes échelles	54
3.1.3 Les singularités	56

3.2 Description statistique des processus multifractals.....	57
3.2.1 La fonction codimension $c(\gamma)$	57
3.2.2 La fonction d'échelle des moments $K(q)$	58
3.2.3 Transformation de Legendre	59
3.3 Multifractals universels	60
3.4 Etat de l'art sur l'application des multifractals en hydrologie .	61
3.5 Analyse multifractale des données	62
3.5.1 Analyse spectrale.....	62
3.5.2 Détermination de la fonction d'échelle des moments	68
3.5.2.1 Analyse des lois d'échelle des moments	68
a) Algorithme de calcul des moments traces	68
b) Résultats et discussions.....	69
3.5.2.2 Détermination de $K(q)$	71
3.5.3 Détermination de la fonction codimension	74
3.5.3.1 Distribution de probabilité.....	74
a) Algorithme de calcul.....	75
b) Résultats et discussions.....	76
3.5.3.2 Détermination de $c(\gamma)$	78
3.5.4 Détermination des paramètres multifractals universels.....	80
3.5.4.1 Estimation de H	80
3.5.4.2 Détermination de α et C_1	81
a) Principe de la méthode DTM.....	81
b) Code de calcul.....	83
c) Application de la méthode DTM sur les données.....	85
3.6 Conclusion	92
 Conclusion générale	 94

Liste des tableaux

Tableau 1.1	Caractéristiques des stations pluviométriques sélectionnées.	9
Tableau 1.2	Périodes d'observations des stations pluviométriques sélectionnées.	10
Tableau 1.3	Caractéristiques des stations hydrométriques sélectionnées.	13
Tableau 1.4	Périodes d'observations des stations hydrométriques sélectionnées.	14
Tableau 2.1	Gammes de variation des dimensions fractales (D'après Chaouche, 2001)..	28
Tableau 2.2	Algorithme de calcul de la dimension fractale par la méthode de comptage de boîtes.	35
Tableau 2.3	Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie pour la série journalière de la station de barrage K'sob (051005).	36
Tableau 2.4	Résultats de l'analyse fractale pour les séries pluviométriques.	39
Tableau 2.5	Calcul de la dimension fractale des débits pour la série journalière de la station de Sidi Ali Ben Youb (110201).	40
Tableau 2.6	Résultats de l'analyse fractale pour les séries hydrométriques.	43
Tableau 3.1	Résultats de l'analyse spectrale pour les séries pluviométriques journalières.	65
Tableau 3.2	Résultats de l'analyse spectrale pour les séries hydrométriques journalières.	67
Tableau 3.3	Algorithme de calcul des moments traces par la méthode TM.	69
Tableau 3.4	Algorithme de calcul des probabilités au dépassement par la méthode PDMS.	75
Tableau 3.5	Algorithme de détermination des paramètres multifractals universels (α , C_1) par la méthode DTM.	84
Tableau 3.6	Résultats de l'analyse par la méthode DTM pour les séries journalières des stations pluviométriques.	88
Tableau 3.7	Résultats de l'analyse par la méthode DTM pour les séries journalières des stations hydrométriques.	91

Liste des figures

Fig. 1.1	Situation géographique de la région d'étude.....	3
Fig. 1.2	Topographie de l'Algérie du Nord.....	3
Fig. 1.3	Les bassins hydrographiques de l'Algérie septentrionale, (les chiffres représentent les bassins et leurs noms géographiques).....	5
Fig. 1.4	Réseaux hydrographiques de l'Algérie du Nord.....	6
Fig. 1.5	Localisation des stations pluviométriques sélectionnées.....	8
Fig. 1.6	Localisation des stations hydrométriques sélectionnées.....	12
Fig. 1.7	Précipitations journalières mesurées à la station 013304 pour les années 1990 à 2005.....	15
Fig. 1.8	Précipitations journalières mesurées à la station 020303 pour les années 1979 à 2007.....	15
Fig. 1.9	Précipitations journalières mesurées à la station 150101 pour les années 1973 à 2010.....	15
Fig. 1.10	Précipitations journalières mesurées à la station 160608 pour les années 1990 à 2005.....	15
Fig. 1.11	Débits moyens journaliers mesurées à la station 070501 pour les années 1969 à 1999.....	15
Fig. 1.12	Débits moyens journaliers mesurées à la station 090501 pour les années 1982 à 2001.....	15
Fig. 1.13	Débits moyens journaliers mesurées à la station 110201 pour les années 1966 à 2005.....	15
Fig. 1.14	Débits moyens journaliers mesurées à la station 140601 pour les années 1968 à 1995.....	15
Fig. 1.15	Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 013304.....	16
Fig. 1.16	Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 020303.....	16
Fig. 1.17	Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 150101.....	16
Fig. 1.18	Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 160608.....	16

Fig. 1.19 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 070501.	17
Fig. 1.20 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 090501.	17
Fig. 1.21 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 110201.	17
Fig. 1.22 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 140601.	17
Fig. 1.23 Analyse R/S de la série de pluies de la station 013304.	19
Fig. 1.24 Analyse R/S de la série de pluies de la station 020303.	19
Fig. 1.25 Analyse R/S de la série de pluies de la station 150101.	20
Fig. 1.26 Analyse R/S de la série de pluies de la station 160608.	20
Fig. 1.27 Analyse R/S de la série de débits de la station 070501.	20
Fig. 1.28 Analyse R/S de la série de débits de la station 090501.	20
Fig. 1.29 Analyse R/S de la série de débits de la station 110201.	20
Fig. 1.30 Analyse R/S de la série de débits de la station 140601.	20
Fig. 1.31 Analyses corrélatoire et spectrale à court terme pour les pluies des stations sélectionnées.	23
Fig. 1.32 Analyses corrélatoire et spectrale à court terme pour les débits des stations sélectionnées.	23
Fig. 1.33 Analyses corrélatoire et spectrale à long terme pour les pluies des stations sélectionnées.	24
Fig. 1.34 Analyses corrélatoire et spectrale à long terme des débits des stations sélectionnées.	24
 Fig. 2.1 Exemples d'objets fractals.	 27
Fig. 2.2 Mesures de la dimension fractale d'une courbe par la méthode du comptage de boîtes (D'après Tricot, 1999).	29
Fig. 2.3 Construction des cinq premières itérations d'un ensemble de Cantor.	33
Fig. 2.4 Principe d'application de la méthode de comptage de boîtes à l'estimation de la dimension fractale d'une série temporelle de précipitation (D'après Olsson <i>et al.</i> , 1992).	34
Fig. 2.5 Estimation de la dimension fractale des occurrences de pluie (définie au seuil journalier de 0.1 mm) à la station de barrage K'sob (051005), par la méthode du comptage de boîtes à partir d'une série de 11 ans de mesures journalières (1982-1993).	37
Fig. 2.6 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 081801.	38
Fig. 2.7 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 013304.	38

Fig. 2.8 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 150208.....	38
Fig. 2.9 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 020611.....	38
Fig. 2.10 Estimation de la dimension fractale des débits (définie au seuil journalier de 0 m ³ /s) à la station de Sidi Ali Ben Youb (110201), par la méthode du comptage de boîtes à partir d'une série de 39 ans de mesures moyennes journalières (1966-2005).	41
Fig. 2.11 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 011715 pour un seuil de 0m ³ /s.....	42
Fig. 2.12 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 011715 pour un seuil de 2m ³ /s.....	42
Fig. 2.13 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 070501 pour un seuil de 0m ³ /s.....	42
Fig. 2.14 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 070501 pour un seuil de 2m ³ /s.....	42
Fig. 2.15 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 090501 pour un seuil de 0m ³ /s.....	42
Fig. 2.16 Calcul de la dimension fractale des débits à la station 090501 pour un seuil de 2m ³ /s.....	42
Fig. 2.17 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 081801.	44
Fig. 2.18 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 013304.	44
Fig. 2.19 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 150208.	44
Fig. 2.20 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 020611.	44
Fig. 2.21 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 011715.....	45
Fig. 2.22 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 070501.....	45
Fig. 2.23 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 090501.....	45
Fig. 2.24 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 110201.....	45
Fig. 2.25 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de précipitation moyenne annuelle.	46
Fig. 2.26 Carte des précipitations en moyenne annuelle de l'Algérie du Nord sur la période de 1922 à 1960 et 1969 à 1989 (A.N.R.H., 1993).	47
Fig. 2.27 Carte de dimension fractale des occurrences de pluie en Algérie septentrionale (seuil=0.1mm).....	47

Fig. 2.28	Variation de dimension fractale des débits en fonction de Latitude.	48
Fig. 2.29	Carte des écoulements moyens annuels de l'Algérie du Nord sur la période de 1965 à 2001 (A.N.R.H., 2006).	49
Fig. 2.30	Carte de dimension fractale des débits en Algérie septentrionale (seuil= $0\text{m}^3/\text{s}$).	49
Fig. 2.31	Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction du seuil à la station 081801.	50
Fig. 2.32	Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 013304.	50
Fig. 2.33	Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 150208.	50
Fig. 2.34	Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 020611.	50
Fig. 2.35	Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 011715.	51
Fig. 2.36	Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 070501.	51
Fig. 2.37	Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 090501.	51
Fig. 2.38	Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 110201.	51
Fig. 3.1	Variabilité des mesures des précipitations selon différentes échelles de temps, sur la poste pluviométrique de Gouraya (020315) : de 1 jour en haut de la figure à 8192 jours en bas.	55
Fig. 3.2	Principe de transformation de toutes les observations disponibles à toutes les échelles ε_k en singularités γ (D'après Bernardara <i>et al.</i> , 2007).	56
Fig. 3.3	Allure de la fonction codimension $c(\gamma)$	57
Fig. 3.4	Forme de la fonction $K(q)$ théorique.	58
Fig. 3.5	Transformation de Legendre entre les fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$ (D'après Tessier <i>et al.</i> , 1993).	59
Fig. 3.6	Caractérisation des multifractals.	61
Fig. 3.7	Spectre moyen annuel calculé sur la série des pluies de la station 081801.	63
Fig. 3.8	Spectre moyen annuel calculé sur la série des pluies de la station 013304.	63
Fig. 3.9	Spectre moyen annuel calculé sur la série des pluies de la station 110501.	64
Fig. 3.10	Spectre moyen annuel calculé sur la série des pluies de la station 020303.	64
Fig. 3.11	Spectre moyen annuel calculé sur la série des débits de la station 090501.	66
Fig. 3.12	Spectre moyen annuel calculé sur la série des débits de la station 140601.	66

Fig. 3.13	Spectre moyen annuel calculé sur la série des débits de la station 011715.....	66
Fig. 3.14	Spectre moyen annuel calculé sur la série des débits de la station 070501.....	66
Fig. 3.15	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 081801 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	70
Fig. 3.16	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 013304 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	70
Fig. 3.17	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 110501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	70
Fig. 3.18	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 020303 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	70
Fig. 3.19	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 090501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.....	71
Fig. 3.20	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 140601 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.....	71
Fig. 3.21	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 011715 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	71
Fig. 3.22	Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 070501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	71
Fig. 3.23	Illustration de la détermination de la fonction $K(q)$	72
Fig. 3.24	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 081801, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.....	72
Fig. 3.25	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 013304, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.....	72
Fig. 3.26	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 110501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.....	73
Fig. 3.27	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 020303, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.....	73
Fig. 3.28	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 090501, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.....	73
Fig. 3.29	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 140601, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.....	73

Fig. 3.30	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 011715, valable pour la plage d'échelle 1-32 jours.....	74
Fig. 3.31	Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 070501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.....	74
Fig. 3.32	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 081801 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	76
Fig. 3.33	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 013304 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	76
Fig. 3.34	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 110501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	76
Fig. 3.35	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 020303 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	76
Fig. 3.36	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 090501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.....	77
Fig. 3.37	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 140601 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.....	77
Fig. 3.38	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 011715 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.....	77
Fig. 3.39	Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 070501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.....	77
Fig. 3.40	Illustration de la détermination de la fonction $c(\gamma)$	78
Fig. 3.41	Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 081801, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.....	79
Fig. 3.42	Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 013304, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.....	79
Fig. 3.43	Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 110501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.....	79
Fig. 3.44	Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 020303, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.....	79
Fig. 3.45	Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 090501, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.....	80

Fig. 3.46 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 140601, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.....	80
Fig. 3.47 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 011715, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.....	80
Fig. 3.48 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 070501, valable pour la plage d'échelle 1-16 jours.	80
Fig. 3.49 Illustration schématique de la méthode du DTM présentant ses étapes principales (D'après Hoang, 2011).	82
Fig. 3.50 Illustration de la détermination des paramètres multifractals universels par DTM.	83
Fig. 3.51 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 081801 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.	86
Fig. 3.52 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 081801.	86
Fig. 3.53 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 013304 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.	86
Fig. 3.54 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 013304.	86
Fig. 3.55 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 110501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.	87
Fig. 3.56 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 110501.	87
Fig. 3.57 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 020303 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.	87
Fig. 3.58 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 020303.	87
Fig. 3.59 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 090501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.	89
Fig. 3.60 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 090501.....	89

Fig. 3.61 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 140601 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.	90
Fig. 3.62 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 140601.	90
Fig. 3.63 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 011715 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.	90
Fig. 3.64 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 011715.	90
Fig. 3.65 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 070501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.	90
Fig. 3.66 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 070501.	90

Introduction Générale

Introduction générale

La science hydrologique a pour objectif d'étudier le cycle de l'eau dans tous ses aspects. L'étude de l'hydrologie a été un domaine actif de recherche durant les trois dernières décennies. Ces études sont principalement orientées vers des réponses concrètes aux nombreuses demandes des aménageurs et des responsables locaux. Ces derniers sont en particulier préoccupés par la prédétermination et la prévision des inondations et des sécheresses, le dimensionnement des ouvrages, l'exploitation et la gestion des ressources en eau, l'assainissement urbain et le drainage des terres agricoles.

Suite aux impacts hydrologiques du changement climatique, qui pourraient provoquer des catastrophes graves, en particulier dans le milieu urbain, plusieurs actions et réflexions ont été proposées dans les milieux scientifiques.

Les processus hydrologiques, tels que les précipitations et les débits de rivières, présentent une très forte hétérogénéité sur une large gamme d'échelles spatio-temporelles.

L'utilité des modèles hydrologiques est considérablement augmentée quand ils peuvent être extrapolés à travers les échelles temporelles. Ce problème de transfert d'échelle, présente l'incapacité des modèles traditionnelles de traiter directement une large gamme d'échelles. Ces dernières sont donc obligées d'introduire des troncatures d'échelle.

Cependant, face à ce problème, l'approche multifractale offre une approche alternative pour étudier les phénomènes naturels sur une large gamme d'échelle d'espace ou de temps. Durant les deux dernières décennies, cette approche a reçu une attention considérable par les chercheurs, et ont deviennent le sujet de beaucoup de recherches récentes en hydrologie.

Dans ce contexte, et suite aux récentes catastrophes survenues en Algérie (Bab El Oued, Béchar, M'Sila, Gardāïa, ...), nous proposons d'appliquer l'approche multifractale pour caractériser les lois d'échelle de précipitations et de débits en Algérie septentrionale, qui sont la source d'hétérogénéité présente dans la structure temporelle de ces derniers, pour une meilleure gestion des ressources en eau et évaluation des risques dans le contexte du changement climatique.

1

Chapitre

*Présentation de la région d'étude et analyse
préliminaire des données*

Chapitre 1

Présentation de la région d'étude et analyse préliminaire des données

Notre étude s'étend sur la partie septentrionale du pays, plus boisée et économiquement plus développée que le reste du territoire de l'Algérie, c'est aussi la région la plus arrosée du pays et détient, de ce fait, la part la plus importante des ressources en eau de surface.

Ce chapitre consiste en première partie à la présentation générale de la région d'étude. La deuxième partie a pour objectif de présenter et d'analyser préliminairement le jeu de données hydrologiques sur lequel l'étude sera basée.

1.1 Présentation de la région d'étude

1.1.1 Situation géographique

L'Algérie septentrionale d'une superficie de 150 000 km² environ, limitée au Nord par la mer Méditerranée et au Sud par l'Atlas Saharien (fig. 1.1). Elle occupe la partie centrale des Atlas. C'est un pays de montagnes basses et moyennes, de hautes plaines et de plateaux. L'altitude moyenne ne dépasse pas 900 m.

La partie côtière est occupée par des plaines basses petites et d'anciens massifs cristallins très démembrés. En limite Sud se trouve le système montagneux de l'Atlas Tellien, dont certains sommets atteignent ou dépassent 2000 m d'altitude. Ces montagnes sont coupées de gorges profondes où s'intercalent d'importantes cuvettes.

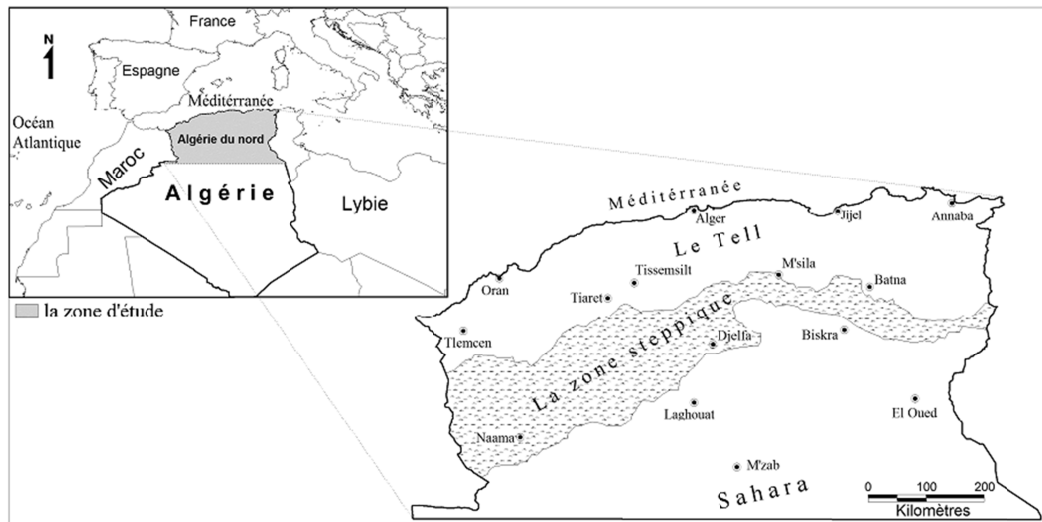


Fig. 1.1 Situation géographique de la région d'étude.

Plus au Sud, s'étend la région des hauts-plateaux atteignant 800 à 1200 m d'altitude. Dans les parties les plus basses de ces derniers, s'encastrent les Chotts. Au sud les hauts-plateaux sont encadrés par les chaînes de l'Atlas Saharien et par le massif des Aurès, dont certains sommets dépassent 2300 m d'altitude (fig. 1.2).

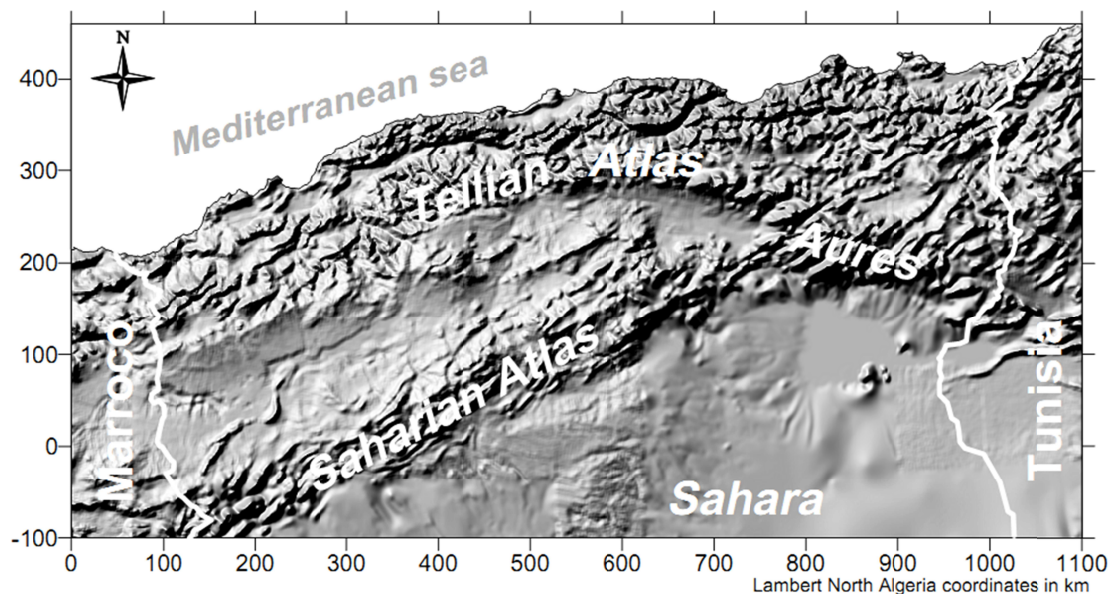


Fig. 1.2 Topographie de l'Algérie du Nord.

1.1.2 Climatologie générale

Le climat de l'Algérie septentrionale est subtropical méditerranéen, se caractérise par un été très chaud et sec et un hiver relativement chaud et pluvieux. Dans les hauts-plateaux le climat est plus sec et plus continental. Le facteur prédominant dans la formation de l'écoulement des cours d'eau est évidemment la précipitation, qui est très irrégulière durant l'année.

L'altitude et l'orientation des chaînes montagneuses vis-à-vis des vents dominants, l'éloignement de la mer et la nature de la couverture végétale ont une grande influence sur les précipitations et leur répartition spatiale.

C'est pour cela que les précipitations moyennes annuelles en Algérie septentrionale varient très fortement d'une région à l'autre. Elles s'échelonnent de 1600 voir 1900 mm sur les cimes des montagnes de grande et petite Kabylie jusqu'à 200 mm dans les régions intérieures du pays.

En hiver, une partie de ces précipitations tombe sous forme de neige. Son épaisseur n'est jamais importante mais peut atteindre 30 cm et plus en montagne.

Les températures moyennes annuelles de l'air sont de l'ordre de 18°C dans les régions côtières et de 14°C plus au Sud.

Le couvert végétal naturel est méditerranéen ou semi-désertique et obéit à la loi de l'étagement en montagne.

1.1.3 Hydrographie

La région d'étude se divise en deux régions hydrographiquement bien distinctes : ce sont les bassins versants dont les cours d'eau qui se jettent en mer Méditerranée de superficie de 130 000 km², et les bassins endoréiques¹ de superficie de 20 000 km² (fig. 1.3 et 1.4).

Selon la classification des régimes des rivières, les cours d'eau algériens entrent dans le type méditerranéen. Leur régime d'écoulement est conditionné par le caractère des précipitations météoriques caractérisées par une forte irrégularité saisonnière et interannuelle (Kabouya, 1990).

¹ Les bassins endoréiques sont des formes spéciales des bassins versants dans lesquelles le réseau n'est relié à aucun autre réseau, l'eau étant concentrée en un point du bassin lui-même, soit sous forme de lac ou de mare, soit par accumulation souterraine (Roche, 1963).

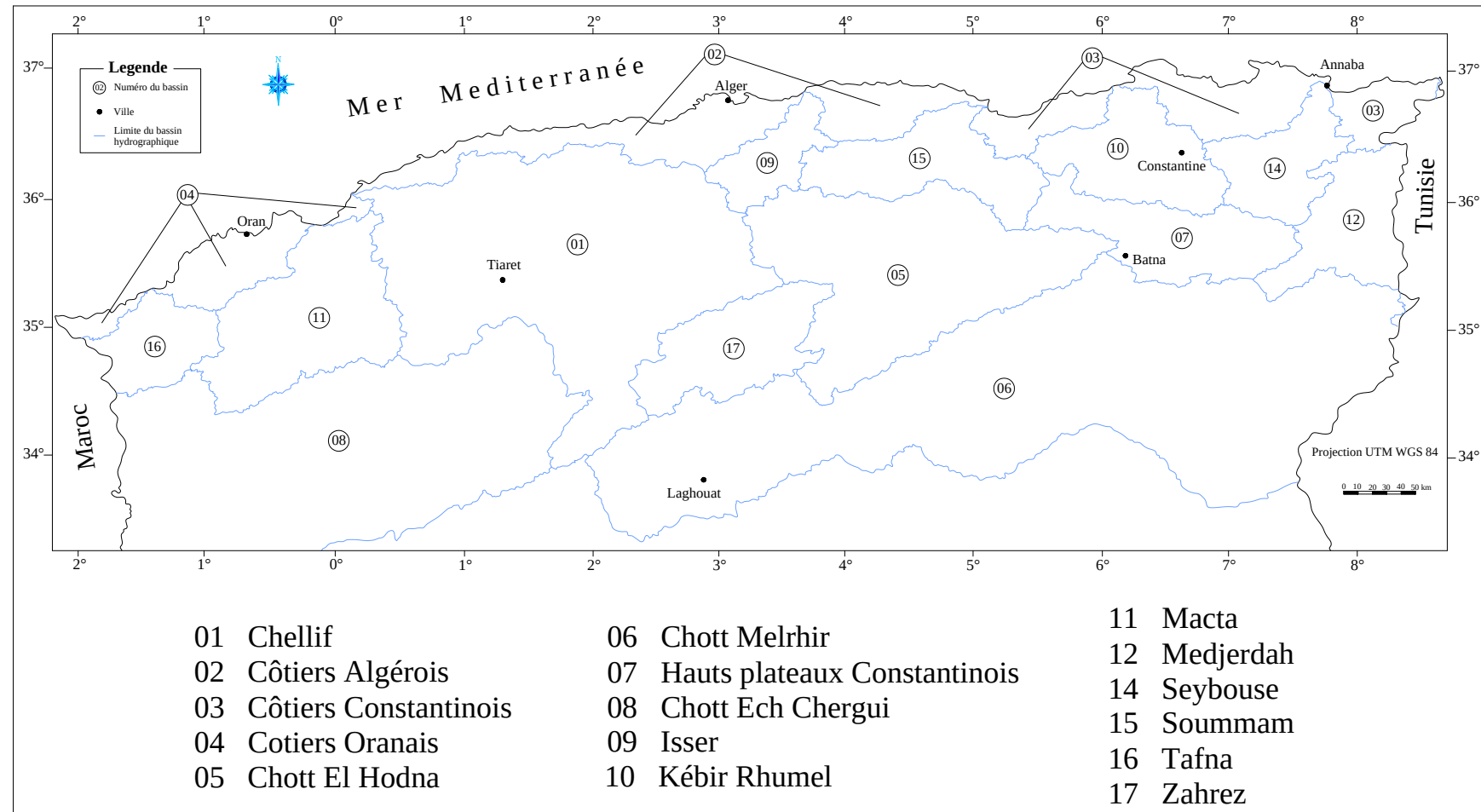


Fig. 1.3 Les bassins hydrographiques de l'Algérie septentrionale, (les chiffres représentent les bassins et leurs noms géographiques).

En été, la plupart des cours d'eau sont à sec. Cependant les cours d'eau drainant des régions karstiques, ou les bassins versants possédant des particularités géologiques et hydrogéologiques favorisant leur alimentation continue en eaux souterraines, ne tarissent pas, même en été.

Pour les oueds, l'écoulement ne s'observe qu'après d'abondantes chutes de pluie. Les crues s'écoulent très rapidement, très souvent en l'espace de quelques heures, et se caractérisent par une grande vitesse de montée de l'hydrogramme. Pendant la majeure partie de l'année les lits des oueds sont à sec ou sont démembrés en de multiples bras.

Les cours d'eau algériens se caractérisent aussi par une grande quantité de transport solide. La turbidité moyenne annuelle de certains d'entre eux dépasse 30 kg/1 (Demmak, 1982).

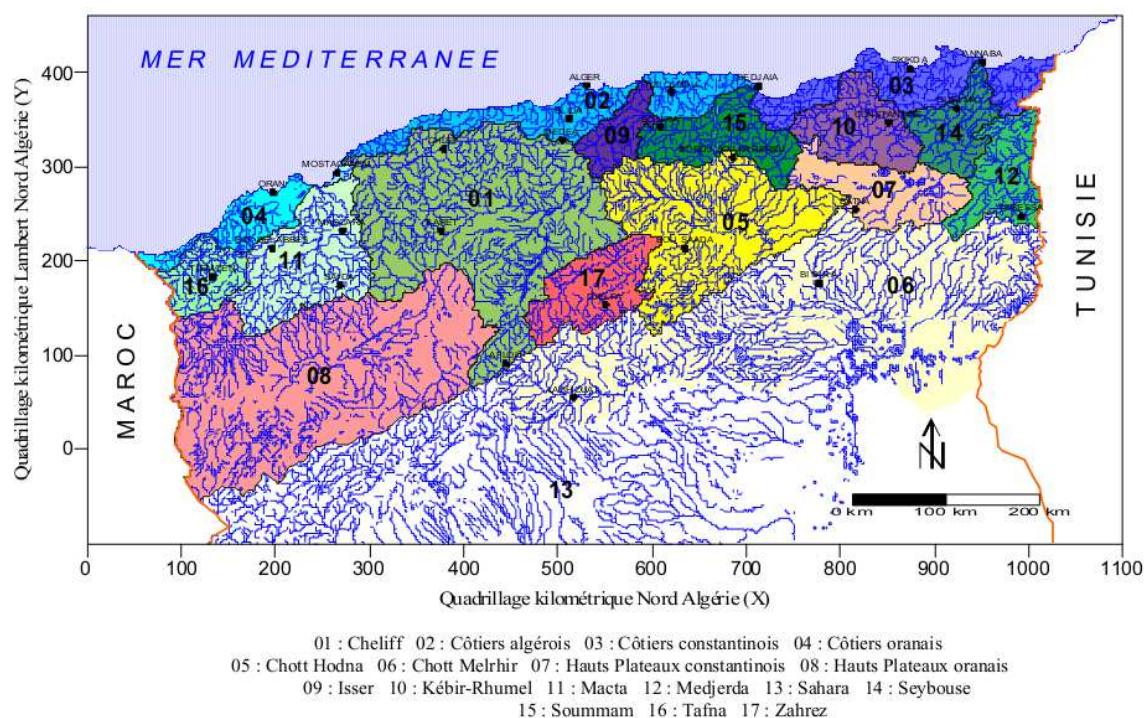


Fig. 1.4 Réseaux hydrographiques de l'Algérie du Nord.

1.2 Présentation des données

Nous nous intéressons par cette étude aux données hydrologiques de l'Algérie septentrionale à savoir les données hydrométriques et pluviométriques. Ces dernières sont celles issues de la banque de données de l'Agence Nationale des Ressources Hydrauliques (A.N.R.H.), organisme responsable du réseau hydropluviométrique en Algérie.

Les données de base exploitées sont le débit moyen journalier et le total journalier de pluie. Ce choix tient au fait que, si l'on veut étudier le caractère fractal et multifractal, on est obligé de faire appel aux données dont la résolution est la plus fine possible, pour qu'on puisse avoir un nombre conséquent de données validant notre analyse.

Dans la plupart du temps, ces données sont les seules disponibles, en Algérie.

La sélection des stations utilisées dans le cadre de cette étude est faite de façon à respecter un compromis entre trois conditions nécessaires :

- La première concerne la taille de la série. En effet, l'utilisation des différents outils pour l'analyse fractale et multifractale d'un processus nécessite l'utilisation d'un nombre important de données, cependant nous avons décidé de retenir toutes les stations dont la période d'observation au minimum dépasse 8 ans de mesure ;
- La deuxième concerne la qualité de l'information et sa continuité. En effet, le comblement des lacunes dans une série de données peut s'affranchir des difficultés dues à la présence de nombre élevé de lacunes dans la série, donc toutes stations qui contiennent pas de lacunes dans une année complète, et dont le taux de lacunes n'atteint pas en moyenne 5%, sont retenues dans cette étude (Mebarki, 2005) ;
- La troisième concerne la représentativité spatiale ou géographique. En effet, pour faire une étude fractale et multifractale caractérisant l'Algérie du Nord, il faut que les postes retenues soient bien réparties dans la région d'étude.

1.2.1 Stations pluviométriques

Une précipitation se caractérise en tout premier lieu par sa nature selon qu'elle se fait sous forme solide ou liquide. Dans le cas de l'Algérie septentrionale, les précipitations se font essentiellement sous forme liquide.

Dans le cadre de cette étude, 30 postes pluviométriques ont été retenus, en respectant les contraintes citées supra, afin de constituer une base de données journalière la plus complète et la plus représentative possible de la région d'étude, dont les principales caractéristiques figurent dans le tableau 1.1. Et le tableau 1.2 présente les périodes d'observation pour chaque poste pluviométrique retenue.

On peut remarquer sur le tableau 1.2 que la période d'observation des séries pluviométriques est très inégale, elle va de 8 ans à 40 ans.

La figure 1.5 ci-dessus présente les positions géographiques de toutes les stations pluviométriques utilisées dans cette étude.

A partir de l'analyse de la carte de figure 1.5, nous pouvons faire la remarque que, la répartition des stations est assez irrégulière. Il apparaît que dans certains bassins versants, tel que le côtiers Constantinois, Chott Melrhir, hauts plateaux Oranais, Khebir Rhumel, Medjerdah et le Seybouse, il existe plus de stations dans ces bassins.

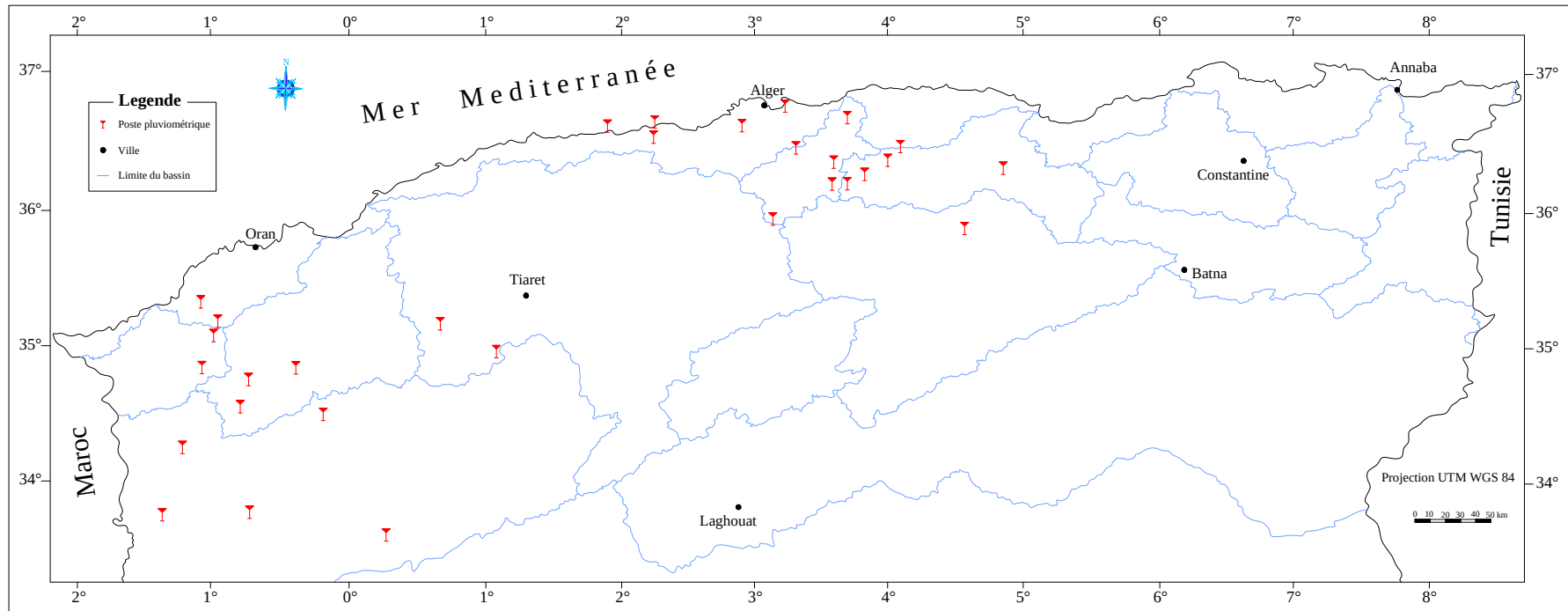


Fig. 1.5 Localisation des stations pluviométriques sélectionnées.

Tableau 1.1 Caractéristiques des stations pluviométriques sélectionnées.

Nom du bassin hydrographique	Nom de station	Code A.N.R.H.	Coordonnées Lambert (km)		Altitude (m)
			Longitude	Latitude	
Cheliff	Ain Boucif	011104	540,75	287,80	1250
	Ain Kermes	013201	354,55	179,85	1162
	Takhemaret	013304	312,73	202,85	640
Côtiers Algérois	Bordj Ghobrini	020301	460,50	367,05	15
	Menaceur	020303	458,25	354,45	250
	Gouraya	020315	429,30	363,80	34
	Dar El Beida	020611	547,35	379,60	22
	Boufarik Pépinière	021209	518,55	363,40	60
Côtiers Oranais	Aoubellil	040201	163,95	210,55	610
	Ain Temouchent Era	040205	153,50	227,00	350
Chott El Hodna	Barrage K'sob	051005	668,70	282,65	600
Chott Ech Chergui	El Aricha	080102	135,80	409,15	1240
	Mekmene Ben Amar	080401	181,90	351,85	1050
	Marhoum	080501	234,00	132,00	1115
	Mecheria	081401	224,00	331,70	1158
	Kasdir	081801	121,90	353,10	980
Isser	Tablat	090203	554,75	345,80	450
	Dechmya	090314	578,50	316,35	850
	Khabouzia	090401	579,15	334,35	720
	Chabet El Aneur	090512	589,30	371,30	235
Macta	Ras El Ma	110102	177,75	138,85	1097
	El Hacaiba	110203	183,50	161,65	950
	Merine	110501	211,60	169,50	970
Soummam	Sour El Ghoulane	150101	590,60	316,45	882
	El Hachimia	150103	600,65	325,10	730
	Ain Allouane	150110	624,10	340,35	950
	Bouira	150208	616,00	337,25	520
	Zemmorah	150802	692,80	331,80	950
Tafna	Sidi Gourari	160608	152,25	172,95	976
	Sidi Herriz	160609	161,10	199,15	524

Tableau 1.2 Périodes d'observations des stations pluviométriques sélectionnées.

Nom de station	Code A.N.R.H.	Période d'observation		Nombre de données (jours)
		Début	Fin	
Ain Boucif	011104	01 Septembre 1985	31 Janvier 2004	6727
Ain Kermes	013201	01 Septembre 1990	31 Aout 2005	5479
Takhemaret	013304	01 Septembre 1990	31 Aout 2005	5479
Bordj Ghobrini	020301	01 Septembre 1968	31 Décembre 1994	9618
Menaceur	020303	01 Septembre 1979	31 Aout 2007	10227
Gouraya	020315	01 Septembre 1968	30 Juin 2008	14548
Dar El Beida	020611	01 Janvier 1985	31 Juillet 2005	7517
Boufarik Pépinière	021209	01 Septembre 1975	31 Aout 2007	11688
Aoubellil	040201	01 Septembre 1990	31 Janvier 2002	4171
Ain Temouchent Era	040205	01 Septembre 1990	31 Aout 2005	5479
Barrage K'sob	051005	01 Septembre 1982	31 Aout 1993	4018
El Aricha	080102	01 Septembre 1977	31 Aout 1996	6940
Mekmene Ben Amar	080401	01 Septembre 1981	31 Mai 1998	6117
Marhoum	080501	01 Avril 1973	31 Aout 1994	7823
Mecheria	081401	01 Septembre 1970	31 Mars 1996	9344
Kasdir	081801	01 Juin 1987	31 Mai 1995	2922
Tablat	090203	01 Septembre 1975	31 Aout 1999	8766
Dechmya	090314	01 Septembre 1975	31 Décembre 1995	7427
Khabouzia	090401	01 Octobre 1984	30 Juin 2007	8308
Chabet El Ameur	090512	01 Septembre 1975	31 Mai 2007	11596
Ras El Ma	110102	01 Septembre 1990	31 Aout 2005	5479
El Hacaiba	110203	01 Septembre 1970	31 Aout 1986	5844
Merine	110501	01 Septembre 1978	30 Novembre 2003	9222
Sour El Ghozlane	150101	01 Septembre 1973	31 Aout 2010	13514
El Hachimia	150103	01 Septembre 1971	31 Mai 2008	13423
Ain Allouane	150110	01 Septembre 1976	31 Mars 1992	5691
Bouira	150208	01 Septembre 1980	31 Aout 2008	10227
Zemmorah	150802	01 Septembre 1980	31 Aout 2004	8766
Sidi Gourari	160608	01 Septembre 1990	31 Aout 2005	5479
Sidi Herriz	160609	01 Septembre 1990	31 Aout 2004	5114

1.2.2 Stations hydrométriques

Les critères de sélection des stations, ont conduit à retenir 29 stations hydrométriques, dont leurs localisations figurent sur la carte schématique (fig. 1.6), préparée dans le cadre de cette étude.

Les principales caractéristiques des stations hydrométriques sont résumées dans le tableau 1.3 ci-après.

A partir de l'analyse de la carte de figure 1.6, nous pouvons faire la remarque que, la répartition des stations est assez irrégulière. Il apparaît que dans certains bassins versants, tel que les bassins côtiers Constantinois, Chott Ech Chergui, Khebir Rhumel et le Zahrez, nous ne disposons pas de stations de mesure.

Les périodes d'observation des stations hydrométriques sont mentionnées dans le tableau 1.4. On remarque que les durées d'observation sont très variables, de quelques années à plus de 35 ans pour certaines stations.

Dans ce qui suit, nous prenons l'exemple de quatre stations pluviométriques telles que la station de Takhemaret (013304), Menaceur (020303), Sour El Ghozlane (150101) et de Sidi Gourari (160608), et quatre stations hydrométriques telles que la station de Chemorah (070501), Lakhdaria (090501), Sidi Ali Ben Youb (110201) et de Mirebeck (140601), sur lesquelles nous avons appliqués toutes les analyses préliminaires présentées dans ce chapitre. Ces stations sont sélectionnées de telle façon qu'ils soient représentatifs à la région d'étude.

Pour ces stations, on détaillera les différentes analyses et on commentera les interprétations pour les autres stations en se contentera des résultats et d'interprétation globale.

1.3 Analyse préliminaire des données

L'analyse préliminaire des données est basée sur l'utilisation des différents outils statistiques d'analyse des séries temporelle.

Cette analyse se décompose en trois parties. La première partie concerne l'étude de la non-stationnarité des séries en terme de moments, ensuite la deuxième partie consiste à étudier la dépendance à long terme des phénomènes étudiées, et la troisième partie consacrée aux analyses corrélatoire et spectrale.

Avant de procéder à cette analyse, il est indispensable de voir la répartition temporelle des séries à étudier. Pour ce faire, nous présentons les chroniques de pluies (fig. 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10) et de débits (fig. 1.11, 1.12, 1.13 et 1.14) mesurées aux stations sélectionnées.

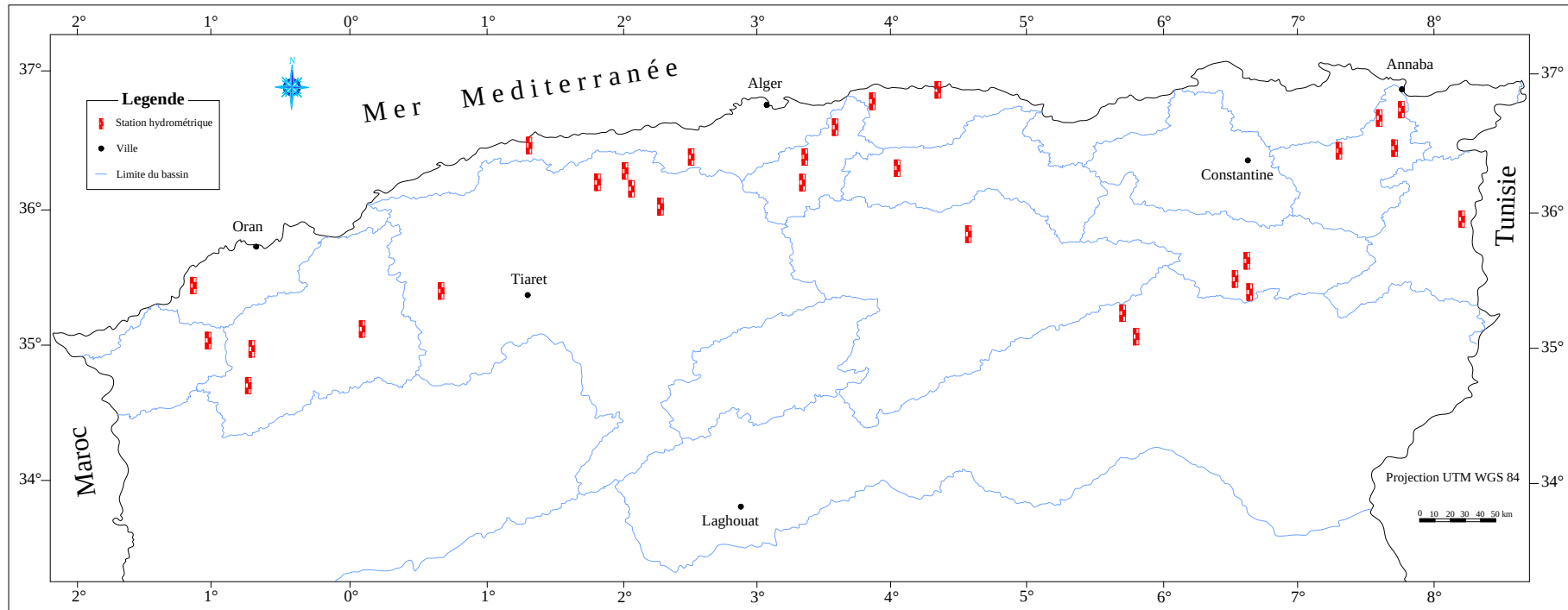


Fig. 1.6 Localisation des stations hydrométriques sélectionnées.

Tableau 1.3 Caractéristiques des stations hydrométriques sélectionnées.

Nom du bassin hydrographique	Nom de station	Code A.N.R.H.	Coordonnées Lambert (km)		Altitude (m)
			Longitude	Latitude	
Chelliff	Sidi Mokrefi	011602	462,92	302,30	425
	Arib Cheliff	011702	439,50	332,55	230
	El Ababsa	011715	443,90	318,50	320
	Rouina Mines	011906	421,50	324,50	245
	Ain Amara	013302	316,20	233,70	288
Côtiers Algérois	Sidi Akacha	020207	375,75	354,30	5
	RN 24 Azeffoun	020808	647,00	400,00	60
	Boumedfaa	021006	484,00	343,00	342
	Baghlia	022001	604,00	390,00	30
Côtiers Oranais	Turgo Nord	040220	148,50	243,15	25
Chott El Hodna	Barrage K'sob	051005	668,70	282,65	600
Chott Melrhir	El Kantra	061201	774,70	217,40	513
	Djemorah	061301	744,85	236,60	471
Hauts plateaux Constantinois	Reboa	070403	848,20	250,20	296
	Chemmora	070501	855,10	264,45	890
	Yabous	070601	858,65	238,40	1230
Isser	Beni Slimane	090305	557,55	322,25	660
	La Traille	090408	559,15	343,00	370
	Lakhdaria	090501	579,30	370,00	50
Macta	El Hacaiba	110101	183,70	161,35	950
	Sidi Ali Ben Youb	110201	186,55	192,20	635
	Oued Taria	111201	262,25	305,10	501
Medjerdah	El Azreg	120522	995,20	307,1	512
Seybouse	Medjez Amar II	140301	912,30	358,75	1105
	Bouhegouf	140501	949,60	362,10	550
	Mirebeck	140601	952,80	394,20	10
	Ain Berda	140602	938,20	387,00	103
Soummam	El Asnam	150204	620,40	335,50	435
Tafna	Sidi Aissa	160614	156,75	199,80	473

Tableau 1.4 Périodes d'observations des stations hydrométriques sélectionnées.

Nom de station	Code A.N.R.H.	Période d'observation		Nombre de données (jours)
		Début	Fin	
Sidi Mokrefi	011602	01 Décembre 1990	31 Décembre 1999	3318
Arib Cheliff	011702	01 Septembre 1968	31 Août 1998	10957
El Ababsa	011715	01 Septembre 1973	31 Août 1995	8035
Rouina Mines	011906	01 Septembre 1990	31 Décembre 1999	3409
Ain Amara	013302	01 Septembre 1990	31 Août 2005	5479
Sidi Akacha	020207	01 Septembre 1983	31 Août 1994	4018
RN 24 Azeffoun	020808	01 Décembre 1986	31 Août 1999	4657
Boumedfaa	021006	01 Septembre 1985	31 Août 1996	4018
Baghlia	022001	01 Septembre 1968	31 Août 1997	10592
Turgo Nord	040220	01 Septembre 1990	31 Août 2005	5479
Barrage K'sob	051005	01 Septembre 1982	31 Août 1994	4383
El Kantra	061201	01 Septembre 1972	31 Août 1995	8400
Djemorah	061301	01 Septembre 1979	31 Août 1995	5844
Reboa	070403	01 Septembre 1972	31 Août 1994	8035
Chemmora	070501	01 Novembre 1969	31 Août 1999	10896
Yabous	070601	01 Septembre 1969	31 Août 1995	9466
Beni Slimane	090305	01 Septembre 1986	31 Août 1997	4018
La Traille	090408	01 Septembre 1969	31 Août 1985	5844
Lakhdaria	090501	01 Mai 1982	31 Août 2001	7063
El Hacaiba	110101	01 Septembre 1978	31 Août 2004	9497
Sidi Ali Ben Youb	110201	01 Septembre 1966	31 Août 2005	14245
Oued Taria	111201	01 Septembre 1990	31 Août 2005	5479
El Azreg	120522	01 Septembre 1984	31 Mars 2004	7152
Medjez Amar II	140301	01 Septembre 1968	31 Août 1999	11322
Bouhegouf	140501	01 Septembre 1968	31 Août 1995	9861
Mirebeck	140601	01 Septembre 1968	31 Août 1995	9861
Ain Berda	140602	01 Septembre 1964	31 Août 1997	12053
El Asnam	150204	01 Septembre 1967	31 Août 1994	9862
Sidi Aissa	160614	01 Septembre 1990	31 Août 2005	5479

Précipitations

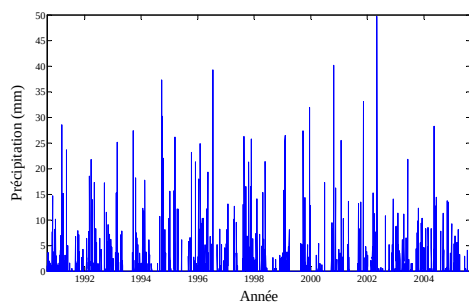


Fig. 1.7 Précipitations journalières mesurées à la station 013304 pour les années 1990 à 2005.

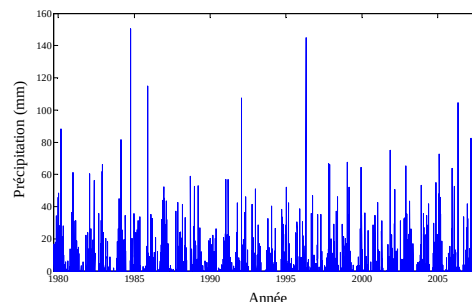


Fig. 1.8 Précipitations journalières mesurées à la station 020303 pour les années 1979 à 2007.

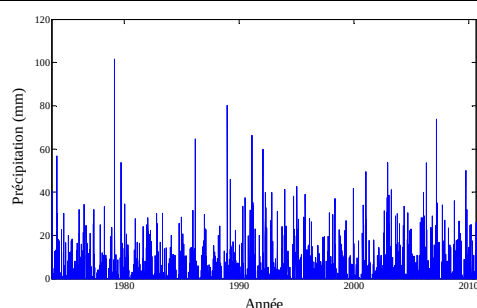


Fig. 1.9 Précipitations journalières mesurées à la station 150101 pour les années 1973 à 2010.

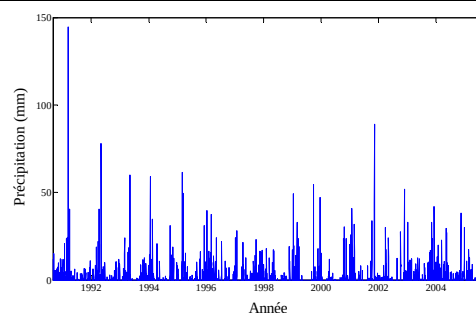


Fig. 1.10 Précipitations journalières mesurées à la station 160608 pour les années 1990 à 2005.

Débites

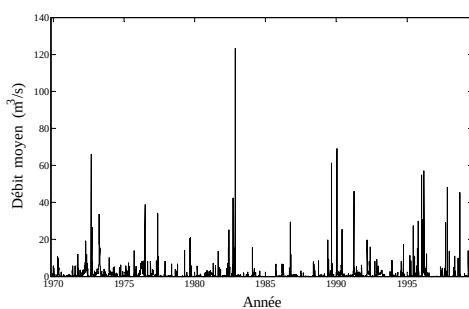


Fig. 1.11 Débits moyens journaliers mesurées à la station 070501 pour les années 1969 à 1999.

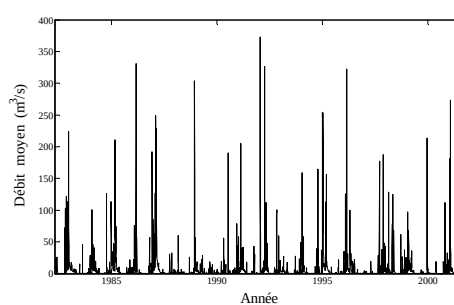


Fig. 1.12 Débits moyens journaliers mesurées à la station 090501 pour les années 1982 à 2001.

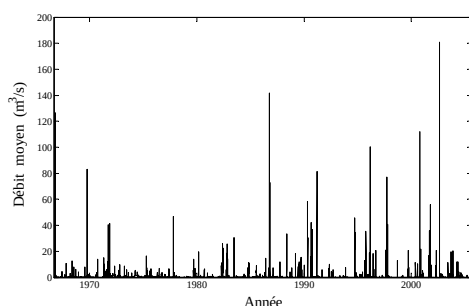


Fig. 1.13 Débits moyens journaliers mesurées à la station 110201 pour les années 1966 à 2005.

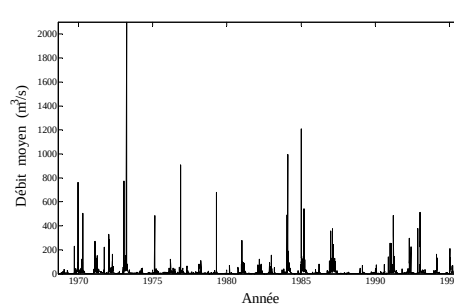


Fig. 1.14 Débits moyens journaliers mesurées à la station 140601 pour les années 1968 à 1995.

On remarque sur ces figures une répartition temporelle assez irrégulière, ce qui montre le caractère aléatoire des pluies et des débits dans la région d'étude.

1.3.1 Etude de la non-stationnarité

L'étude de la non-stationnarité, est basée sur le calcul de la variance (moment d'ordre 2) des données journalières sur des intervalles de plus en plus grands avec un pas d'incrément de 25 jours (Labat, 2000).

Les figures suivantes représentent la variation du moment d'ordre 2 dans les séries de précipitations journalières sélectionnées.

On remarque sur ces figures que la variance des précipitations journalières est caractérisée par l'existence de sauts dûs à la présence de fortes précipitations, mais tend progressivement vers une limite. La non-stationnarité de la variance des pluies à cette échelle est donc peu évidente.

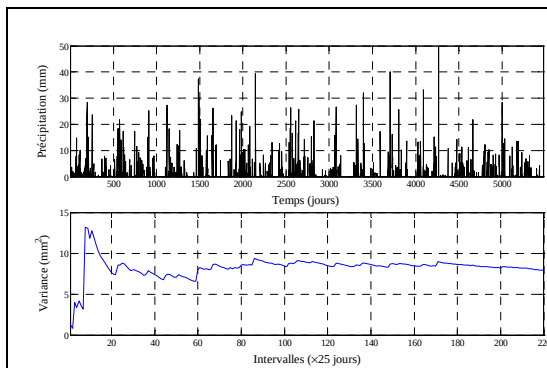


Fig. 1.15 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 013304.

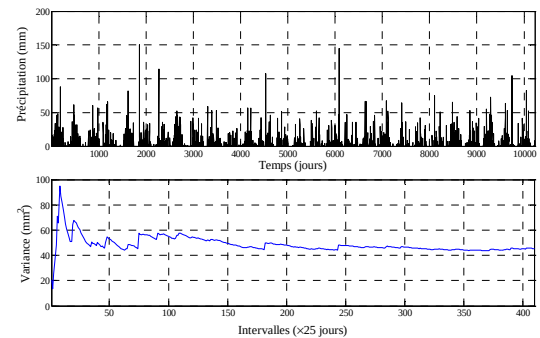


Fig. 1.16 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 020303.

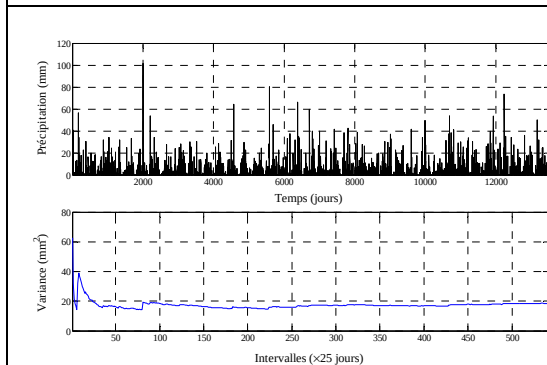


Fig. 1.17 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 150101.

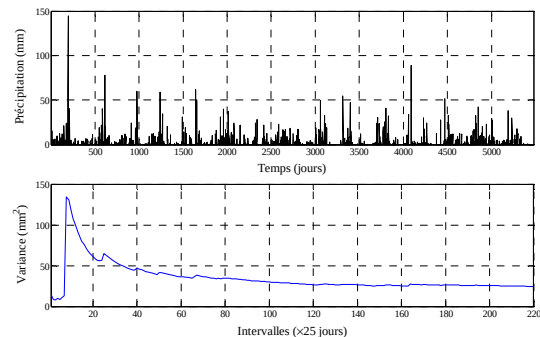


Fig. 1.18 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de pluies de la station 160608.

Les figures suivantes représentent la variation du moment d'ordre 2 dans les séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées.

On remarque sur ces figures que la variance des débits journaliers est caractérisée par des sauts importants dûs à des crues qui concentrent une part d'énergie importante. Par conséquent, les débits sont caractérisés par une forte variabilité des moments dès l'ordre 2.

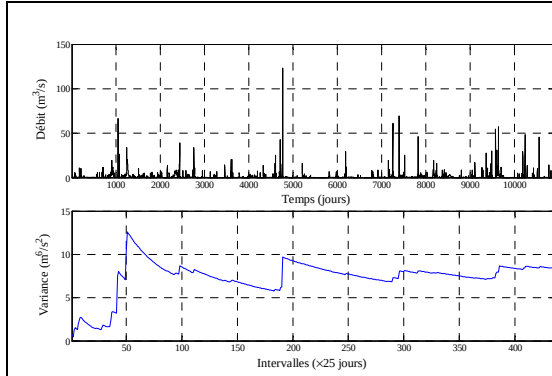


Fig. 1.19 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 070501.

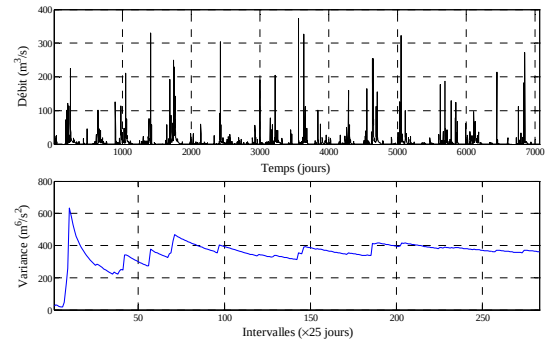


Fig. 1.20 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 090501.

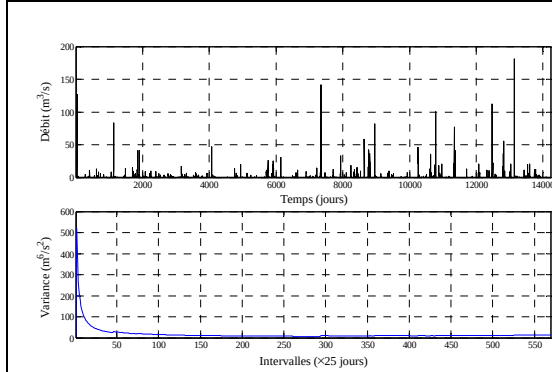


Fig. 1.21 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 110201.

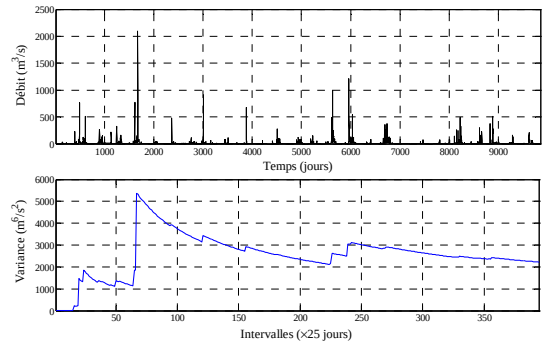


Fig. 1.22 Mise en évidence d'un phénomène de non-stationnarité de second ordre, pour la série de débits de la station 140601.

On peut tirer la conclusion, que les signaux étudiés sont caractérisés par une forte variabilité (phénomène d'intermittence) des moments d'ordre 2 (variance), dont la non-stationnarité des pluies est peut évidente, et les débits sont en général non-stationnaires au second ordre.

1.3.2 Etude de la dépendance à long terme

Hurst (1951) a proposé une méthode appelée analyse des étendues normalisées, ou Rescaled Range Analysis (R/S Analysis) pour étudier la persistance d'un phénomène donné. Notons que l'objectif initial de l'auteur était de modéliser la série temporelle de la hauteur des crues du Nil, de l'antiquité à nos jours. Selon cette méthode, une série chaotique peut être caractérisée par un exposant appelé exposant de Hurst (noté H), qui représente la probabilité pour qu'un événement soit suivi par un événement similaire. C'est donc les aspects de persistance qui sont principalement visés par cette analyse.

L'exposant de Hurst peut s'étendre entre 0 et 1. Une valeur de H égale à 0,50 signifie un processus complètement aléatoire (c'est à dire, mouvement Brownien pur) n'ayant aucune mémoire à long terme. Pour des processus non-aléatoires, la valeur de H varie entre 0,5 et 1,0 et indique des degrés de persistance à long terme de la série chronologique. Une série avec $H < 0,5$ signifie l'anti-persistance (Hurst, 1951).

Les valeurs de H indiquant la persistance à long terme sont les plus reconnues pour les séries hydrologiques (Zhou, 2004).

1.3.2.1 Principe de la méthode d'analyse R/S

Le mode de calcul de l'exposant de Hurst n'est pas encore fixé, et certaines différences peuvent apparaître en fonction des détails des algorithmes utilisés. Nous exposons ici la méthode originale de l'auteur.

La méthode consiste à estimer, pour un intervalle d'effectif donné, le rapport entre l'étendue R de la série centrée et intégrée, et l'écart-type S de la série originale. En d'autres termes, la série est considérée comme la « cause » générant le déplacement d'une particule (dont rend compte la série centrée et intégrée). On s'intéresse à la différence entre les limites minimale et maximale du déplacement, dans un certain intervalle temporel, normalisé par l'écart-type de la cause ayant généré le déplacement. L'exposant de Hurst rend compte de la relation liant R/S à la taille de l'échantillon (Hipel et McLeod, 1994).

Soit une série temporelle de N nombres, notés $x(t)$. La méthode préconisée par Hurst consiste à prendre en considération une série de subdivisions indépendantes, d'effectif τ . Pratiquement, on part de séries d'effectif 10, puis 11, 12, 13, jusqu'à l'effectif le plus élevé. Pour chaque effective τ la moyenne est donnée par :

$$\langle x \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t) \quad (1.1)$$

Pour chaque effectif, on centralise les données, en leur soustrayant la moyenne locale. Puis on établit une série de valeurs cumulées à l'intérieur de chaque période : on ajoute à chaque donnée la somme des valeurs centrées qui les précèdent :

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{x(u) - \langle x \rangle_{\tau}\} \quad (1.2)$$

Donc pour chaque valeur de t ($1 \leq t \leq \tau$), on a une valeur de $X(t, \tau)$. $X(t, \tau)$ est une distribution intégrée. On peut noter que si le signal original est un bruit blanc, $X(t, \tau)$ est un mouvement Brownien. L'étendue R (Range) est la différence entre le minimum et le maximum de $X(t, \tau)$.

$$R = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (1.3)$$

Cette étendue est ensuite normalisée au moyen d'une division par l'écart-type local $S(t, \tau)$. Enfin on procède au moyennage, par niveau d'effectif, des étendues normalisées R/S . Hurst montre que l'étendue normalisée R/S , où S représente l'écart type de la série des $x(t)$ est liée à la grandeur de l'intervalle considéré par la relation suivante :

$$R/S = (a \tau)^H \quad (1.4)$$

où a est une constante et H est l'exposant de Hurst. H peut être estimé par la méthode des moindres carrés, ou par l'estimation de la pente de la régression log-log de R/S sur τ .

1.3.2.2 Application aux séries de pluies et de débits

L'analyse R/S est souvent utilisée pour déterminer l'exposant de Hurst, qui est un paramètre utile pour décrire la persistance à long terme des observations dans les séries hydrologiques (Zhou, 2004). Cette analyse permet de dégager une première remarque sur le comportement fractale du phénomène à étudier (Mangin, 2008).

A partir des séries de pluies et de débits on construit une statistique R/S dont on observe la distribution par rapport à l'échelle de temps. Si cette distribution est fractale, les points s'alignent suivant une droite en coordonnées logarithmiques.

Le coefficient de Hurst est estimé comme étant la pente de la droite obtenue par régression linéaire entre $\text{Log}(R/S)$ et $\text{Log}(\tau)$.

Les figures suivantes représentent les graphes obtenues par l'application de l'analyse R/S sur les séries de précipitations journalières des stations sélectionnées.

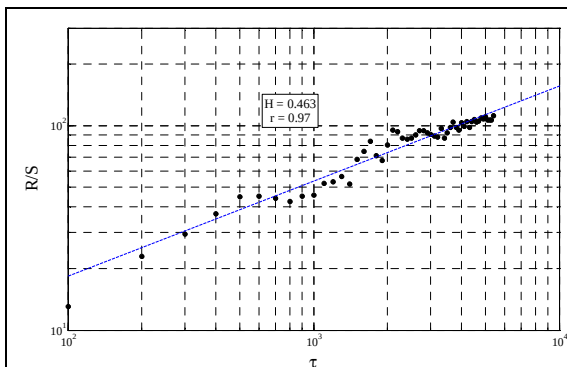


Fig. 1.23 Analyse R/S de la série de pluies de la station 013304.

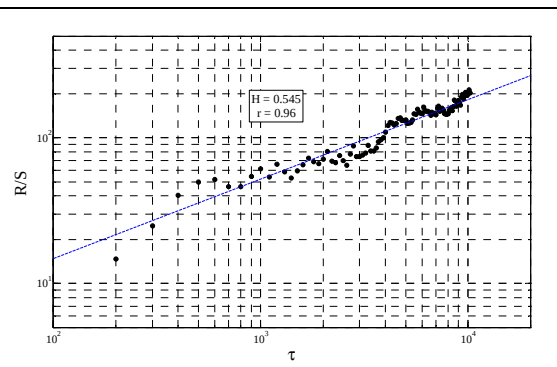


Fig. 1.24 Analyse R/S de la série de pluies de la station 020303.

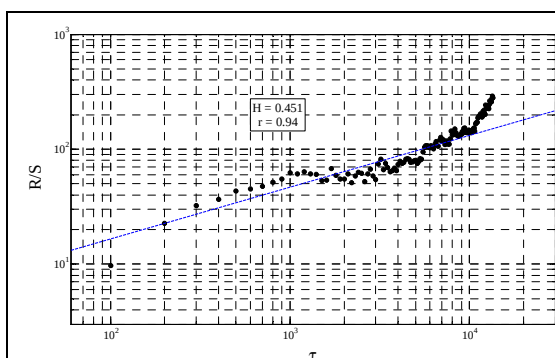


Fig. 1.25 Analyse R/S de la série de pluies de la station 150101.

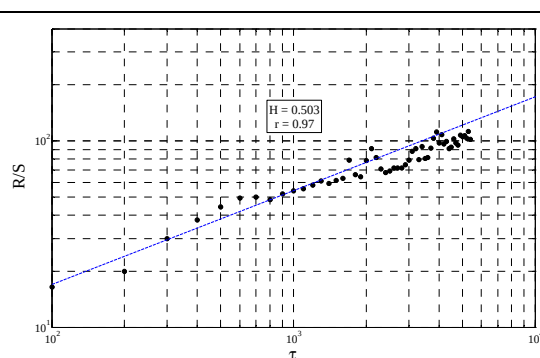


Fig. 1.26 Analyse R/S de la série de pluies de la station 160608.

On remarque sur ces figures que la régression linéaire entre $\text{Log}(R/S)$ et $\text{Log}(\tau)$ est assez satisfaisante (coefficient de corrélation élevé, toujours supérieur à 0,9), et le coefficient de Hurst trouvé est proche de 0,5, ce qui indique que la répartition des pluies dans le temps n'est pas homogène, les pluies forment donc un bruit Gaussien pur, indiquant un très léger phénomène d'anti-persistance. Donc on peut en déduire qu'une pluie n'a pratiquement aucune incidence sur la pluie suivante et elle n'est pas affectée par celle qui la précède.

Les figures suivantes représentent les graphes obtenus par l'application de l'analyse R/S sur les séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées.

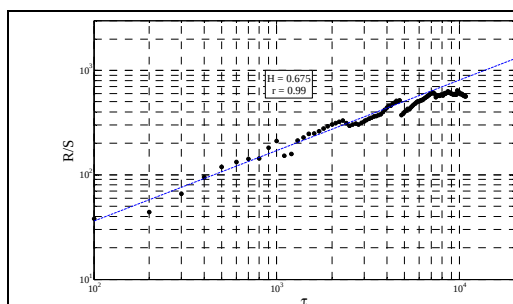


Fig. 1.27 Analyse R/S de la série de débits de la station 070501.

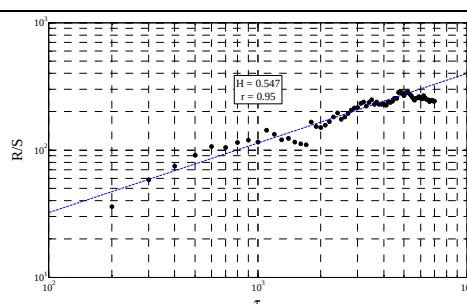


Fig. 1.28 Analyse R/S de la série de débits de la station 090501.

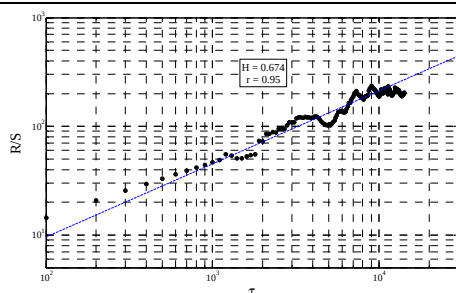


Fig. 1.29 Analyse R/S de la série de débits de la station 110201.

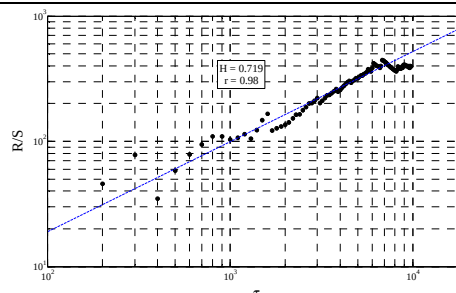


Fig. 1.30 Analyse R/S de la série de débits de la station 140601.

On remarque sur ces figures que la régression linéaire entre $\text{Log}(R/S)$ et $\text{Log}(\tau)$ est assez satisfaisante (coefficient de corrélation élevé, toujours supérieur à 0,9), et le coefficient de Hurst trouvé est supérieur à 0,5, ce qui signifie que les débits représentent un phénomène de persistance. Donc on peut tirer la conclusion que pour les débits, la probabilité qu'une crue soit suivie par une crue similaire est élevée, c'est à dire que le bruit dans les séries hydrométriques n'est pas aléatoire, et que le débit est sensible à son histoire.

1.3.3 Analyses corrélatoire et spectrale

L'étude des phénomènes hydrologiques se traduit souvent par l'obtention de chroniques de données relatives à la pluie et au débit. Dans le cas des analyses corrélatoire et spectrale, le phénomène étudié est considéré comme une boîte noire regroupant tous les facteurs influant sur le comportement de ce dernier.

On traite les chroniques séparément pour une analyse simple, d'abord dans le domaine temporel puis dans le domaine fréquentiel. L'analyse est fondée sur l'emploi du corrélogramme, déterminé par les différents coefficients d'autocorrélation et sur celui du spectre de densité de variance (Mangin, 1984).

1.3.3.1 Principe de la méthode

Une série chronologique est constituée d'une suite d'observations réparties dans le temps qui peut être continue ou discrète, selon un pas de temps constant ou non.

L'analyse corrélatoire repose sur la fonction d'autocorrélation. Au départ, on dispose d'une série temporelle de N observations x_t ($x_1, x_2, \dots, x_N$). On calcule les coefficients d'autocorrélation r_k ($k = 0, \dots, m$). Le choix de la variable m n'est pas fondé sur des concepts théoriques, il est souvent conseillé (Box et Jenkins, 1976) de prendre $m = N/3$ ou $m = N/2$ ou d'utiliser d'autres valeurs de m , par exemple $m = 2N/3$.

Le calcul de r_k utilise la formulation :

$$r_k = \frac{C_x(k)}{C_x(0)} \quad (1.5)$$

avec :

$$C_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \quad (1.6)$$

où $\bar{x}$ est la moyenne des observations, et $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

On dresse le corrélogramme en établissant le graphe de la fonction r_k .

Le théorème de Wiener-Kinchine montre que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire stationnaire correspond à la densité spectrale énergétique de cette fonction (Max, 1980). Une approche non biaisée de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est fournie par (Mangin, 1984) :

$$S(f) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^m D_k r_k \cos(2\pi f k) \right] \quad (1.7)$$

où f est la fréquence considérée (si le pas choisi est j , $f = j/2.m$), r_k est le coefficient d'autocorrélation, D_k est une fonction de pondération choisie de manière à ce que la valeur estimée du spectre $S(f)$ ne soit pas biaisée. Le filtre de Tukey est utilisé, et dans ce cas (Mangin, 1984) :

$$D_k = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}{2} \quad (1.8)$$

L'analyse spectrale exprime dans le domaine fréquentiel ce dont le corrélogramme rend compte dans le domaine temporel.

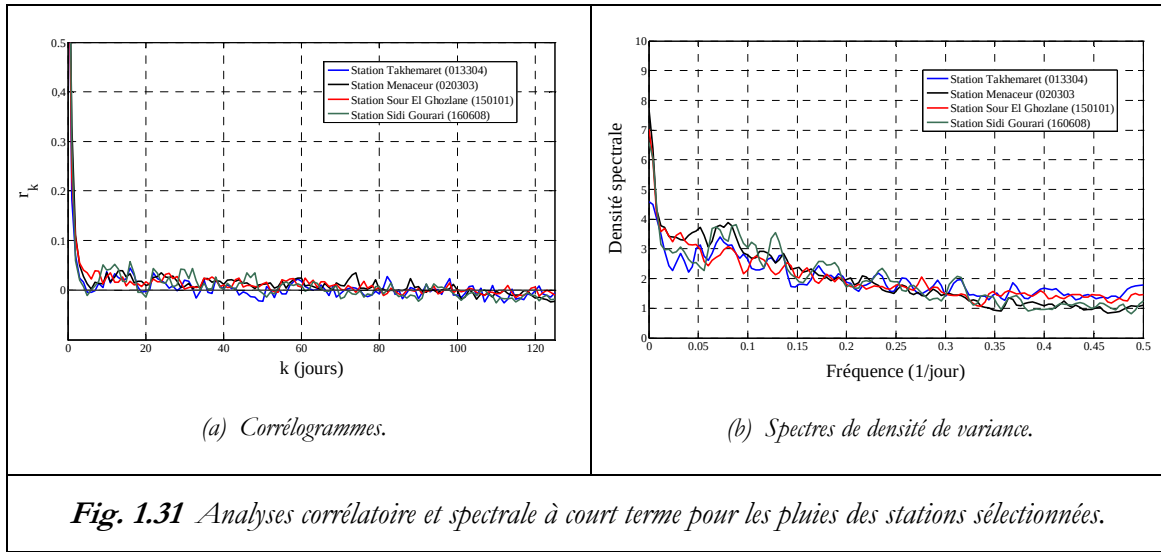
1.3.3.2 Résultats et discussions

Les analyses corrélatrice et spectrale ont été appliquées aux chroniques hydrologiques de la région Nord d'Algérie.

L'analyse est basée sur les données journalières des précipitations et des débits moyens journaliers enregistrées aux niveaux des stations sélectionnées. L'analyse a été faite d'abord à court terme dont le pas d'échantillonnage est de 1 jour et la trancature fixée à 125 jours, ce qui permet de mieux tenir compte du détail. Puis, à long terme dont il est proposé de prendre une trancature de 1250 jours avec un pas d'échantillonnage limité à 10 jours, pour la mise en évidence des cycles annuels (Mangin, 1984 ; Chettih et Mesbah, 2006).

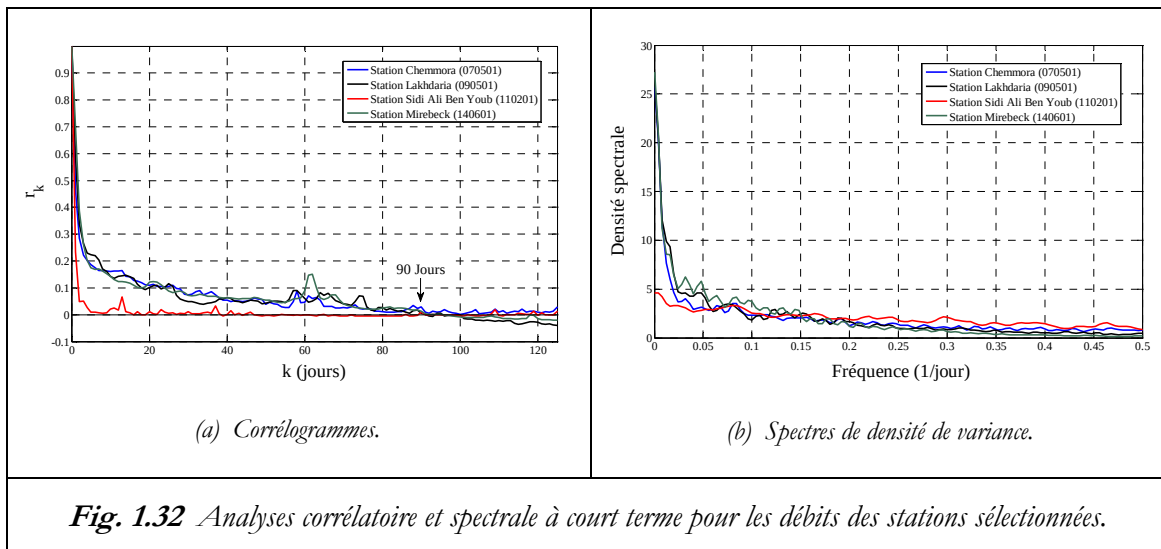
a) Analyse à court terme

L'analyse à court terme des chroniques de pluies se traduit par des corrélogrammes (fig. 31-a) qui décroissent très rapidement, et oscillent autour de la valeur $r_k = 0$ d'une façon aléatoire. Cette analyse ne montre aucune périodicité, on peut donc considérer que la succession des pluies journalières dans ces régions présente un caractère aléatoire à court terme. Le spectre de densité de variance met également en évidence l'absence de structure à court terme (fig. 31-b).



En ce qui concerne les débits, l'analyse à court terme se traduit par des corrélogrammes (fig. 32-a), qui décroissent moins rapidement que dans le cas des pluies, puis progressivement tendent vers zéro après trois mois (90 jours). La décroissance rapide les premiers jours caractérise une succession d'événements indépendants les uns par les autres. Par contre la décroissance progressive des corrélogrammes montre l'effet mémoire des systèmes.

Les débits pourraient être considérés comme un processus aléatoire à court terme. Ces résultats sont également soulignés sur le spectre de densité de variance (fig. 32-b) par l'absence de pics caractéristiques. Ceci vient certainement de la non-stationnarité de ces chroniques.



b) Analyse à long terme

L'analyse à long terme des chroniques de pluies se traduit par des corrélogrammes (fig. 33-a) qui mettent clairement en évidence la périodicité annuelle des pluies dans ces régions, correspondant au cycle hydrologique (365 jours). Par contre les spectres de densité de variance ne présentent aucun pic notable (fig. 33-b).

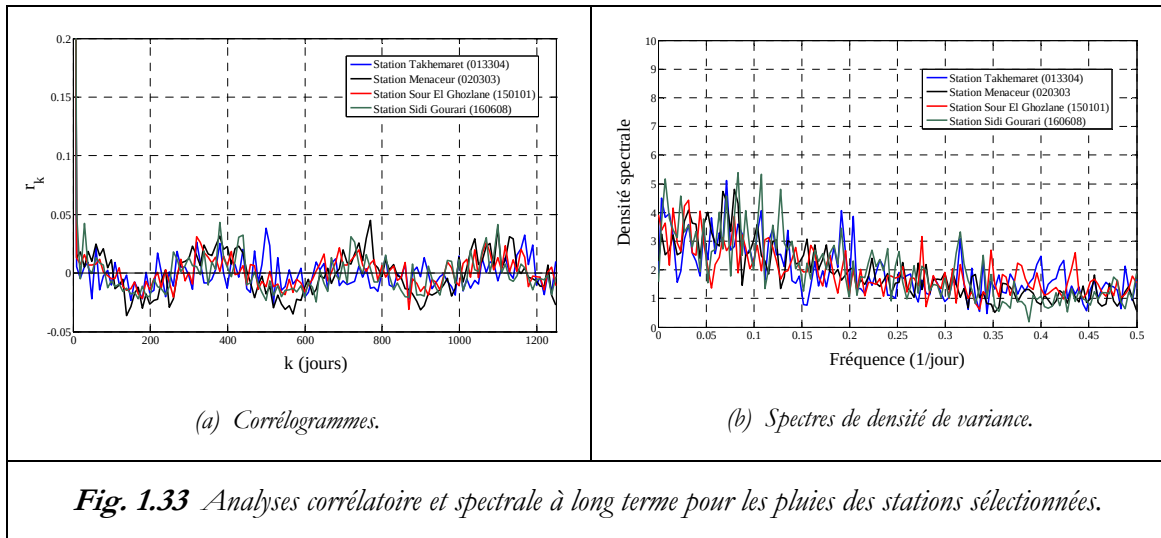


Fig. 1.33 Analyses corrélatrice et spectrale à long terme pour les pluies des stations sélectionnées.

En ce qui concerne les débits, l'analyse corrélatrice à long terme met en évidence le cycle annuel, clairement dans le cas des stations de Lakhdaria (090501) et de Mirebeck (140601), et particulièrement marqué dans les stations de Chemmora (070501) et de Sidi Ali Ben Youb (110201) (fig. 34-a). Les débits pourraient être considérés comme un processus structuré à long terme. Par contre les spectres de densité de variance ne présentent aucun pic spectaculaire et notable (fig. 34-b).

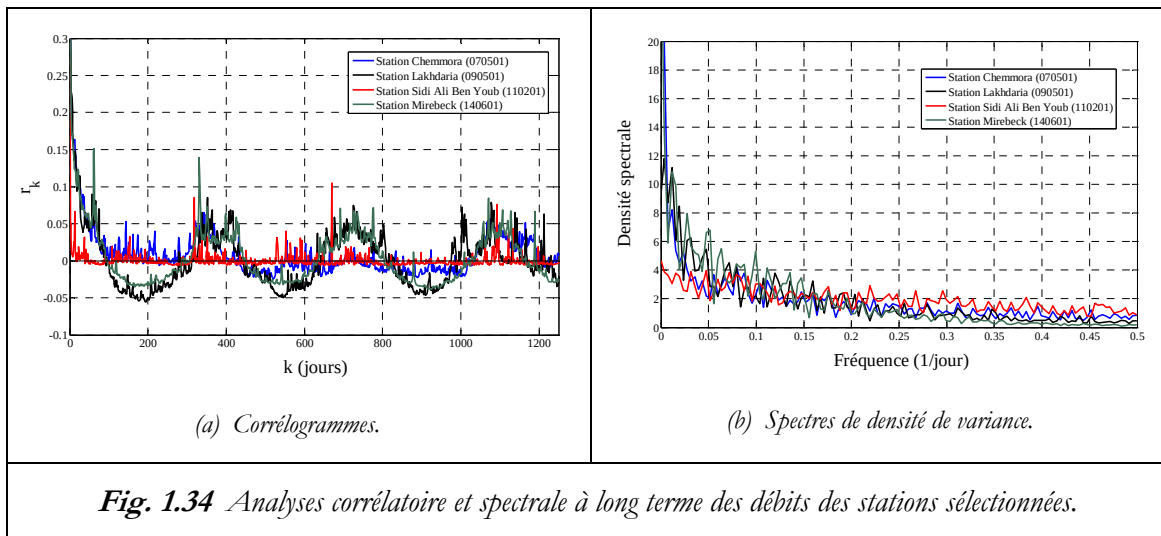


Fig. 1.34 Analyses corrélatrice et spectrale à long terme des débits des stations sélectionnées.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons donné les éléments fondamentaux du contexte climatique et hydrométrique de la région d'étude. Ensuite nous avons décrit d'une façon sommaire la base de données utilisées dans cette étude.

A cause du caractère aléatoire souligné sur les chroniques de pluies et de débits, une analyse préliminaire de ces données par différents outils statistiques s'est avérée nécessaire pour analyser l'évolution temporelle des phénomènes étudiés.

L'étude de la non-stationnarité permet de remarquer que les débits sont caractérisés par une forte variabilité des moments d'ordre 2, d'où le caractère non stationnaire des débits dans la région d'étude.

L'étude de la dépendance à long terme, a conduit à des valeurs élevées de l'exposant de Hurst ($H > 0.5$) pour les débits, ce qui signifie un phénomène de persistance, pour les pluies les valeurs de H sont proches d'une valeur caractérisant le bruit Gaussien pur ($H = 0.5$), indiquant un léger phénomène d'anti-persistance.

Les méthodes d'analyses corrélatoire et spectrale ont été appliquées aux séries chronologiques des pluies et des débits. Elles ont permis d'extraire l'information contenue dans ces derniers que ce soit à court terme ou à long terme, pour une meilleure connaissance de ces phénomènes.

2

Chapitre

Fractals et dimension fractale

Chapitre 2

Fractals et dimension fractale

Nous nous intéressons, par ce travail, à l'analyse fractale et multifractale des séries de précipitations et de débits. Il nous paraît donc important de jeter les notions de base essentielles de ce concept. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'introduire la notion de fractal, avec des exemples simples, ainsi que celles de dimension et de codimension qui seront des notions essentielles pour la suite.

2.1 Notion de fractale

La géométrie fractale (du latin *fractus* qui signifie, irrégulier) a été introduite et soutenue par le mathématicien Benoît Mandelbrot pour caractériser les objets aux propriétés inhabituelles en géométrie classique. En germe dans ses travaux de recherche pendant plusieurs années, cette géométrie a pris corps dans une série de volumes Mandelbrot (1975) et Mandelbrot (1983). Elle consiste à étudier des objets irréguliers du plan ou de l'espace, qui sont en réalité les mieux adaptés pour appréhender le réel physique.

La géométrie fractale peut être vue comme une généralisation de la géométrie classique, on le verra d'ailleurs à travers la définition de la dimension fractale qui est une généralisation de la dimension au sens d'Euclide.

2.1.1 La géométrie classique

La géométrie a été de tout temps et reste une discipline fondamentale, car c'est sur elle que se bâtissent et s'élaborent beaucoup d'autres disciplines. Il ne serait cependant pas inutile de rappeler que c'est du ressort de la géodésie (géométrie des formes de la terre) de dire que la terre est ronde. Bien des disciplines s'appuient sur la géométrie pour décrire les phénomènes découverts en leur sein.

Il convient de remarquer que la géométrie classique, sous des formes traditionnelles ne permet que la description des formes régulières. Elle est pratiquement incapable de décrire les formes courantes qui nous entourent. Or les objets qui nous entourent ont

précisément ces formes (la forme réelle de la terre, qui est un bel exemple d'irrégularité, les montagnes, la structure des plages, ...).

2.1.2 La géométrie fractale

Nous sommes tous habitués aux objets de la géométrie Euclidienne : aux droites, aux rectangles, aux cubes, ... etc. Ils nous permettent de décrire simplement ce que l'on trouve dans la nature. Ainsi, les troncs d'arbres sont approximativement des cylindres et les oranges des sphères. Mais, face à des objets plus complexes tels que les nuages, les côtes rocheuses, les feuilles, les reliefs, les flocons de neige, les choux-fleurs, la géométrie Euclidienne est inadéquate, on fait donc appel à la géométrie fractale.

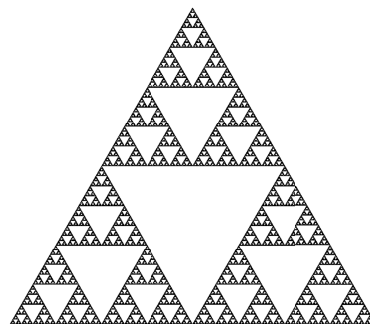
La géométrie fractale est donc un langage utile pour décrire les formes complexes, et permet la description de processus non linéaires. La complexité des formes des objets naturels résulte généralement de processus simples, souvent récurrents. Ainsi c'est grâce à l'informatique que l'étude des fractales s'est développée.

2.1.3 Définition d'un objet fractal

Un objet fractal est un objet mathématique qui est issu d'un processus itératif et qui présente un caractère d'auto-similarité. Un objet auto-similaire est un objet dont les parties, jusqu'à la plus petite, ressemblent au tout, et inversement (Mandelbrot, 1975). Les branches de Barnsley ci-dessous sont des objets auto-similaires, en comparant la branche complète et une de ses branches (fig. 2.1-a), on voit une ressemblance marquée entre les deux, dans la façon dont les branches se scindent en branches plus petites, qui à leur tour forment d'autres branches, ainsi de suite. L'un des exemples le plus connus est le triangle de Sierpinski ci-dessous (fig. 2.1-b), il est obtenu avec au départ, un triangle équilatéral noir, dans ce triangle on évide un triangle équilatéral dont les sommets sont les milieux des arêtes du premier triangle. Ceci nous donne trois triangles noirs équilatéraux plus petits avec lesquels on recommence le même processus.



(a) - La branche de Barnsley.



(b) - Triangle de Sierpinski.

Fig. 2.1 Exemples d'objets fractals.

L'une des caractéristiques fondamentales des objets fractals est que leurs propriétés métriques mesurées, telles que la longueur ou l'aire, sont des fonctions de l'échelle de mesure (Mandelbrot, 1967).

2.2 Notion de la dimension fractale

Les paragraphes suivants introduisent plus formellement l'adjectif « fractal » et la notion de dimension fractale, indice de référence de cette analyse.

2.2.1 Considérations générales

La notion de dimension fait penser à celle développée par Euclide depuis l'an 300 sur les dimensions entières. Cependant, il existe une autre notion de dimension développée dès 1919 par le mathématicien Hausdorff, il s'agit de la notion de dimension non entière.

Quand on entend parler de dimension en géométrie, on pense à ces nombres entiers qui caractérisent les espaces réguliers ou encore « ensembles lisses » qui nous sont familiers. Ainsi, on sait qu'une ligne droite a pour support un espace de dimension 1, un plan est un espace de dimension deux, un volume est inscrit dans un espace de dimension trois. Nous sommes donc habitués à des objets dont la dimension (D) est un nombre entier 1, 2 ou 3. Mais il n'est pas précisé quelle serait la dimension d'une série de points sur une ligne, une courbe irrégulière et plane, une surface pleine de convolutions. Dans ce but le terme de dimension fractale a été introduit par B. Mandelbrot en 1970. La dimension fractale est donc un nombre qui mesure le degré d'irrégularité ou de fragmentation d'un objet ou qui mesure la rugosité d'une surface. Donc en géométrie fractale, la dimension d'une série de points sur une ligne sera comprise entre 0 et 1, celle d'une courbe irrégulière et plane sera comprise entre 1 et 2, et celle d'une surface pleine de convolutions sera comprise entre 2 et 3 (tableau 2.1).

Tableau 2.1 *Gammes de variation des dimensions fractales (D'après Chaouche, 2001).*

Objet	Poussière sur une droite	Courbe plane très irrégulière	Surface très feuilletée
Valeurs de dimension fractale	$0 \leq D \leq 1$	$1 \leq D \leq 2$	$2 \leq D \leq 3$

2.2.2 Calcul de la dimension fractale

De nombreuses méthodes existent pour calculer la dimension fractale d'un objet, chacune ayant ses propres bases théoriques. Ces diversités mènent souvent à l'obtention de dimensions différentes par des méthodes distinctes pour un même objet.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter et classer les algorithmes les plus souvent utilisés dans la littérature. Ces méthodes peuvent être groupées en 2 classes : celles dites de comptage de boîtes, celles basées sur le mouvement Brownien fractionnaire (Lopes, 2009).

2.2.2.1 Méthode de comptage de boîtes (Box Counting)

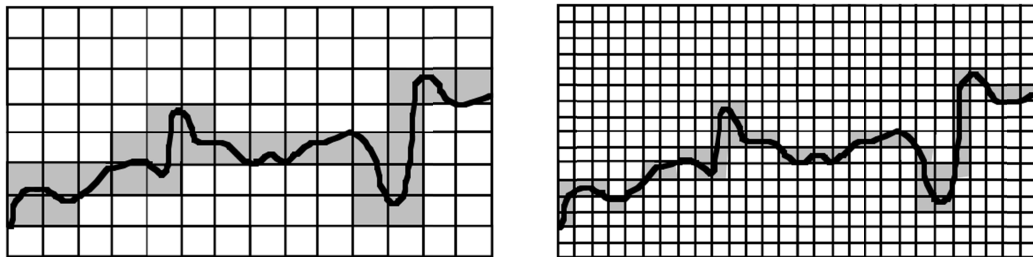
C'est la première méthode développée pour estimer la dimension fractale d'un objet. Cette méthode a été définie dans (Russel *et al.*, 1980), c'est la plus fréquemment utilisée et la plus populaire. Les avantages de la technique du comptage de boîtes sont la simplicité de son application et l'estimation directe de la dimension fractale. Son principe général est de recouvrir un signal par des boîtes de taille ε . La dimension fractale D est ainsi donnée par :

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \quad (2.1)$$

où $N(\varepsilon)$: est le nombre de boîtes de taille ε nécessaire pour recouvrir complètement l'objet ;

ε : est la taille de boîtes.

La figure 2.2 représente le principe de cette méthode, appliquée à une courbe de dimension Euclidienne $E = 2$.



(a) - Recouvrement de l'objet par des carreaux de côté 1.

(b) - Recouvrement de l'objet par des carreaux de côtés $1/2$.

Fig. 2.2 Mesures de la dimension fractale d'une courbe par la méthode du comptage de boîtes (D'après Tricot, 1999).

2.2.2.2 Méthodes basées sur le mouvement Brownien fractionnaire (fBm)

Ces méthodes sont basées sur une modélisation statistique Gaussienne du signal étudié. À partir d'une dimension fractale donnée, il est possible d'utiliser une modélisation d'un mouvement Brownien fractionnaire (de l'anglais : fractional Brownian motion – fBm) pour créer un signal correspondant à une telle dimension fractale. Ces méthodes recherchent à résoudre le problème inverse, à savoir que, donnant un signal, la dimension fractale est estimée en supposant que le signal peut être modélisé par un fBm (Lausberg, 1987).

Un fBm est une généralisation d'un mouvement Brownien où l'espérance de la différence d'intensité entre deux-points est égale à 0, mais où le carré de la différence est proportionnel à la distance entre les points à la puissance $2H$ (Mandelbrot, 1975) :

$$\begin{aligned} E[f(x) - f(x')] &= 0 \\ [f(x) - f(x')]^2 &\approx \|x - x'\|^{2H} \end{aligned} \quad (2.2)$$

La dimension fractale d'un fBm de dimension topologique¹ d est définie par :

$$D = d + 1 - H \quad (2.3)$$

En supposant que le signal étudié est un fBm, trois algorithmes sont communément utilisés pour estimer la dimension fractale. Ils sont basés sur trois théories : la variance, le spectre de puissance de la transformée de Fourier du signal et le maximum de vraisemblances. Ces algorithmes fournissent des estimations robustes de la dimension fractale (Lopes, 2009).

2.3 Notion de codimension

Soit E la dimension euclidienne de $\mathbb{R}^E$, support de l'ensemble fractal A que nous étudions. Pour fixer les idées, rappelons que $E = 1$, pour une droite ($\mathbb{R}^1$ domaine des segments et des points), $E = 2$ pour un plan ($\mathbb{R}^2$ domaine des surfaces planes, des segments et des points) et $E = 3$ pour l'espace (domaine des volumes, des surfaces, planes ou non, des segments et des points). Si D est la dimension fractale de l'ensemble fractal A , on définit la codimension de l'ensemble fractal A (Mandelbrot, 1975 ; Mandelbrot, 1983) par :

$$c = E - D \quad (2.4)$$

¹ La dimension topologique d'un objet est égale au nombre de paramètres nécessaires pour le décrire. C'est un nombre entier qui sert à caractériser les figures géométriques. Par ailleurs, une structure fractale possède une dimension fractale strictement supérieure à sa dimension topologique.

Cette codimension est une notion capitale dans l'étude du caractère fractal des objets. En exemple, soient N_λ le nombre de boîtes nécessaires pour paver l'espace R^E tout entier, à l'échelle λ et $N_\lambda(A)$ celui nécessaire pour paver un ensemble fractal A contenu dans R^E , à la même échelle λ et de dimension fractale D .

En utilisant les résultats de la méthode du comptage de boîtes, on arrive à :

$$\begin{aligned} N_\lambda &\approx \lambda^E \\ N_\lambda(A) &\approx \lambda^D \end{aligned} \quad (2.5)$$

où le symbole $\approx$ traduit la proportionnalité. On en déduit :

$$\frac{N_\lambda(A)}{N_\lambda} = \lambda^{D-E} = \lambda^{-c} \quad (2.6)$$

c étant la codimension ci-dessus définie.

La formule (2.6) est celle d'une probabilité définie sur l'ensemble fractal A (Biaou, 2004). Elle traduit la probabilité qu'un cube de l'ensemble R^E , à l'échelle λ soit contenu dans l'ensemble fractal A . Dans toute la suite, on fera plus recours à cette notion de codimension qu'à celle de la dimension fractale.

2.4 Applications du concept des fractals à l'hydrologie

Apparue au début des années 1970, la géométrie fractale s'est rapidement imposée comme étant un puissant outil descriptif des systèmes naturels complexes. Cette nouvelle géométrie a vu son champ d'application croître de façon fulgurante durant ces vingt dernières années et notamment en hydrologie (Musy et Higy, 2011).

Dans les études hydrologiques, l'application du concept des fractals portera sur les précipitations et les débits. Le caractère intermittent intrinsèque à la notion des phénomènes hydrologiques sera l'élément fondamental de ce propos. Ainsi, ce problème d'intermittence lié au temps, mais aussi à l'espace conduit à développer et à renouveler les notions d'invariance d'échelle².

² L'étude de la propriété d'invariance d'échelle dans les phénomènes hydrologiques est une façon de répondre aux problèmes concernant la compréhension, la mesure et la prédiction de ces processus sur une large gamme d'échelles. De manière abrégée, cela veut dire que le degré d'irrégularité observé dans une série chronologique sera statistiquement semblable à toutes les échelles. Autrement dit, c'est comme si la structure générale de la série se répétait statistiquement à l'intérieur de celle-ci, ce qui implique qu'une composante de la variabilité de la série peut être caractérisée indépendamment de l'échelle d'observation (Gingras, 2000).

En météorologie en particulier, Lovejoy *et al.* (1986) ont montré par exemple que la distribution des stations météorologiques sur la terre est fractale. Lovejoy et Shertzer (1989) ont également montré que la distribution des gouttes de pluie tombées sur une surface de papier pendant un temps donné est fractale.

Dans le domaine de l'hydrologie, on peut citer Hubert et Carbonnel (1989) qui ont calculé la dimension fractale des occurrences de pluie en région Soudano-sahélienne avec la méthode de comptage de boîtes et ont obtenu une dimension fractale de l'ordre de 0,79, pour des séries journalières. Tarboton *et al.* (1988) ont montré que le réseau hydrographique possède un caractère fractal, et sa dimension (mathématiquement comprise entre 1 et 2), est utilisée pour caractériser l'irrégularité et de la complexité du réseau. Olsson *et al.* (1992) ont utilisé la méthode de comptage de boîtes pour l'analyse de précipitations à divers pas d'échantillonnage et à diverses échelles de temps. Ils disposaient de 2 années d'observation à la minute, de 90 ans de données journalières et de 170 ans de données mensuelles, ils montrent l'existence d'une dimension fractale quel que soit le pas d'échantillonnage, ceci constitue un résultat positif pour transférer les propriétés des précipitations d'une échelle à une autre. Une analyse fractale des débits de la rivière de Warta sur une longue période a aussi été menée par Radziejewski et Kundzewicz (1997) en utilisant la méthode de comptage de boîtes. Récemment Zhou (2004) a fait l'analyse fractale des séries journalières de débits de 32 bassins versants dans les États-Unis par la méthode de comptage de boîtes, et il a trouvé une dimension fractale proche de 1 ($0,9 < D < 1$). Bendjoudi et Hubert (2002) ont par ailleurs appliqué cette notion de dimension fractale pour montrer que le calcul du coefficient de compacité de Gravelius d'un bassin versant est relatif à la jauge utilisée pour la mesure du périmètre.

2.5 Application de la méthode de comptage de boîtes aux séries chronologiques de pluie et de débit

L'application de la méthode de comptage de boîtes aux séries hydrologiques est basée sur la notion de l'ensemble de Cantor aléatoire. Cet objet fractal est obtenu si on enlève à chaque itération le tiers de la bande noire au hasard, la figure obtenue au bout de la cinquième itération est un ensemble invariant d'échelle, régulier dans le cas où l'on enlève toujours le tiers du milieu (fig. 2.3-a), ou aléatoire si l'on enlève le tiers au hasard (fig. 2.3-b).

Dans ce travail, la méthode de comptage de boîtes est employée pour déterminer la dimension fractale de deux séries de données, à savoir les séries pluviométriques et hydrométriques.



(a) - L'ensemble de Cantor régulier.

(b) - L'ensemble de Cantor aléatoire.

Fig. 2.3 Construction des cinq premières itérations d'un ensemble de Cantor.

2.5.1 Principe de la méthode

Nous avons abordé le problème de l'estimation d'une dimension fractale grâce à la méthode du comptage de boîtes (Lovejoy *et al.*, 1987). Étant donné un objet de dimension fractale D , inclus dans un espace de dimension euclidienne E , si on réalise un maillage de cet espace en boîtes de côté ε (selon la valeur $E = 1, 2$ ou 3 , les boîtes seront des segments, des carrés ou des cubes), le nombre N de boîtes nécessaires pour recouvrir l'objet fractal considéré est une fonction de ε telle que :

$$\text{Log} [N(\varepsilon)] = - D \text{Log} [\varepsilon] + K \quad (K = \text{constante}) \quad (2.7)$$

Dans le cas de l'ensemble que nous nous proposons d'étudier, qui est inclus dans un ensemble de dimension 1, les boîtes sont réduites à des segments et la dimension fractale sera donc nécessairement comprise entre 0 et 1 (Hubert et Carbonnel, 1989 ; Olsson *et al.*, 1992 ; De Lima, 1998 ; Chaouche, 2001).

Le nombre N étant déterminé pour différentes valeurs de ε , la dimension fractale D pourra être estimée comme l'opposé de la pente de la régression de $N(\varepsilon)$ en ε , tracée sur un diagramme Log-Log. Nous avons dans ce travail échantillonné $N(\varepsilon)$ pour des valeurs de ε égales à des puissances successives de 2.

La figure ci-dessous représente le principe d'application de cette méthode en une dimension, pour une série temporelle de précipitation journalière.

Tableau 2.2 Algorithme de calcul de la dimension fractale par la méthode de comptage de boîtes.

Algorithme : Box Counting (BC).

Entrées : Série de données.

```

1  Début
2  |   Calcul de la taille de série (n) ;
3  |   Calcul de la taille des boîtes  $\epsilon$  comme puissance
   |   successive de 2 ;
4  |   Pour  $i=1:n$  faire
5  |   |   Calcul du nombre de boîtes non vide  $N(\epsilon)$ 
   |   |   pour chaque valeur de  $\epsilon$ .
6  |   Fin
7  |   Trace dans un diagramme bi-logarithmique les
   |   nombres  $N(\epsilon)$  en fonction des valeurs
   |   correspondantes de  $\epsilon$  ;
8  |   Régression linéaire entre  $N(\epsilon)$  et  $\epsilon$  ;
9  |   La dimension fractale est l'opposée de la pente
   |   de droite obtenue par régression linéaire ;
10 |   Détermination des bornes du domaine fractal.
11 Fin

```

2.5.3 Application aux séries journalières

2.5.3.1 Séries pluviométriques

Pour un phénomène comme les précipitations, l'intermittence exprime le fait que l'on peut observer au cours du temps une succession d'états secs et pluvieux. États secs et pluvieux doivent être définis, ils ne peuvent l'être rigoureusement que relativement à une aire (qui sera ici la surface de captation du pluviomètre), à un intervalle de temps (qui sera ici la journée) et à un seuil de précipitations (que nous avons dans un premier temps fixé à 0,1 mm) (Hubert et Carbonnel, 1989). Une journée sera donc dite pluvieuse si une quantité de pluie supérieure à 0,1 mm a été recueillie dans le pluviomètre, et sèche dans le cas contraire. Sur l'axe du temps, l'occurrence de pluie peut alors être représentée par l'ensemble des segments associés aux journées pluvieuses.

Nous présentons dans le paragraphe suivant une application directe de la géométrie fractale à l'analyse de la répartition temporelle des séries pluviométriques (occurrence de pluie). On représente l'occurrence pluie comme un nuage de segments disjoints supportés par l'axe représentatif du temps. La méthode du comptage de boîtes est appliquée à cet ensemble évoquant une poussière de Cantor aléatoire, afin d'analyser la répartition temporelle d'occurrence de pluie et calculer leur dimension fractale.

L'application de la méthode de comptage de boîtes a permis l'étude de 30 séries de données pluviométriques journalières, dont les stations sont réparties dans la partie nord du pays (fig. 1.3).

Nous donnons l'exemple, de la série de précipitations journalières de la station de barrage K'sob (code A.N.R.H. : 051005), pour laquelle nous disposons d'une chronique continue d'observations journalières sans lacunes, sur laquelle nous appliquons la méthode de comptage de boîtes comme décrite ci-dessus. Nous avons considéré dans cette série une séquence de 4018 jours consécutifs, à partir du 1 septembre 1982. Les boîtes sont ici des segments de droite qui représentent des intervalles de temps (en jours) pendant lesquels on a une occurrence de pluie.

Pour fixer les idées, nous avons pris les tailles de boîtes comme des puissances successives de deux. Pour la première taille de boîte, c'est à dire $2^0 = 1$, soit un jour, on compte le nombre de jours pluvieux contenus dans la série. La deuxième taille est $2^1 = 2$; dans ce cas, on compte le nombre de segments de deux jours consécutifs ayant au moins un jour pluvieux. La taille suivante est $2^2 = 4$, et pour cette taille, on compte le nombre de segments de 4 jours consécutifs ayant au moins un jour pluvieux. On procède de cette façon pour toutes les tailles de boîte et le tableau 2.3 présente les résultats du comptage.

Tableau 2.3 *Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie pour la série journalière de la station de barrage K'sob (051005).*

n	Taille de boîtes (jours)	Nombre de boîtes pluvieuses
0	$2^0 = 1$	1053
1	$2^1 = 2$	785
2	$2^2 = 4$	559
3	$2^3 = 8$	379
4	$2^4 = 16$	232
5	$2^5 = 32$	124
6	$2^6 = 64$	63
7	$2^7 = 128$	32
8	$2^8 = 256$	16
9	$2^9 = 512$	8
10	$2^{10} = 1024$	4
11	$2^{11} = 2048$	2
12	$2^{12} = 4096$	1

La représentation des résultats obtenus dans un diagramme bi-logarithmique permet de déduire la dimension fractale des occurrences de pluie pour la station de barrage K'sob. En effet, on trouvera sur la figure 2.5 les résultats de cette procédure pour cette série. On peut y observer deux alignements de points. L'alignement observé pour les longues durées selon une droite de pente -1 (trait interrompu) est trivial. En effet, pour une échelle de temps assez longue (ici au-delà de 12 jours), tout intervalle de temps est considéré comme pluvieux puisqu'on y a observé au moins une journée pluvieuse. L'occurrence de pluie se confond alors avec l'axe du temps et sa dimension fractale est égale à 1. L'autre alignement (trait plein), observé pour des échelles de temps allant de 1 à 12 jours, selon une droite de pente $-0,491$, c'est la partie sur laquelle on a déterminé la dimension fractale.

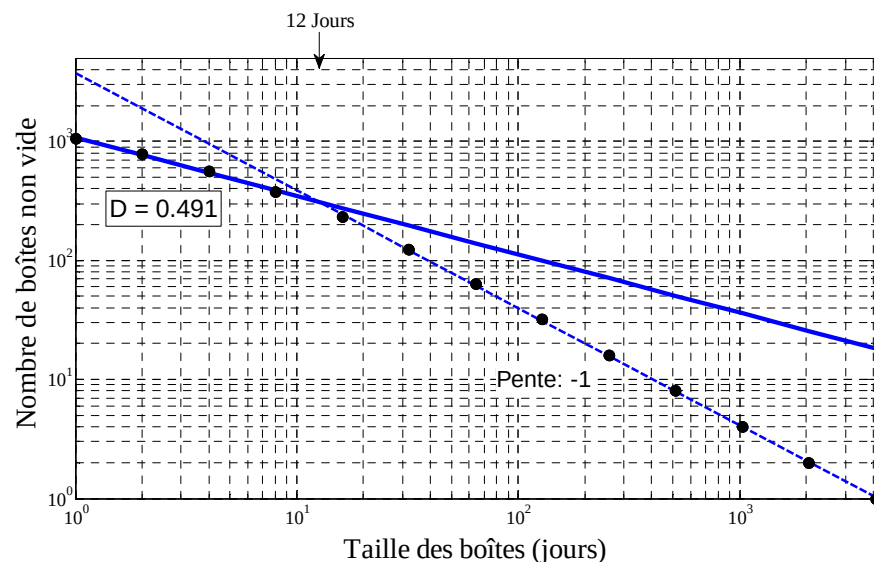


Fig. 2.5 Estimation de la dimension fractale des occurrences de pluie (définie au seuil journalier de 0.1 mm) à la station de barrage K'sob (051005), par la méthode du comptage de boîtes à partir d'une série de 11 ans de mesures journalières (1982-1993).

Les figures suivantes représentent les graphes obtenus par l'application de la méthode de comptage de boîtes aux séries de pluies journalières des stations de Kasdir (081801), Takhemaret (013304), Bouira (150208) et de Dar El Beida (020611).

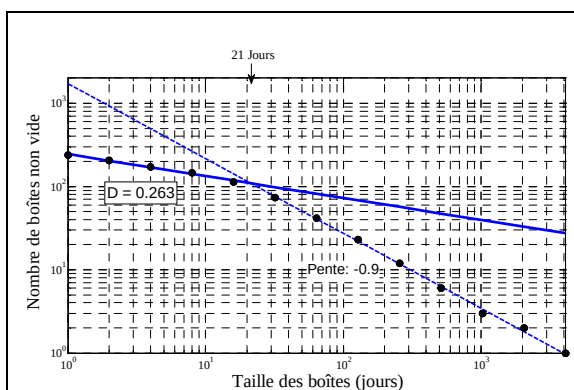


Fig. 2.6 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 081801.

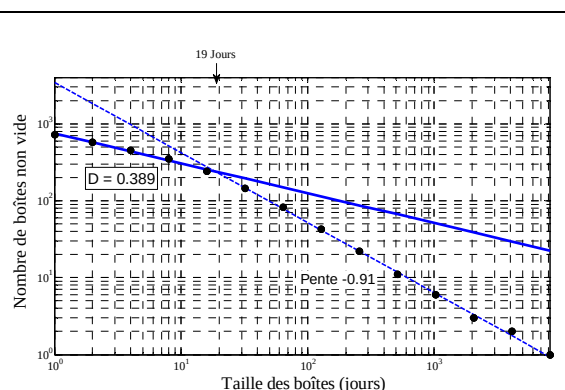


Fig. 2.7 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 013304.

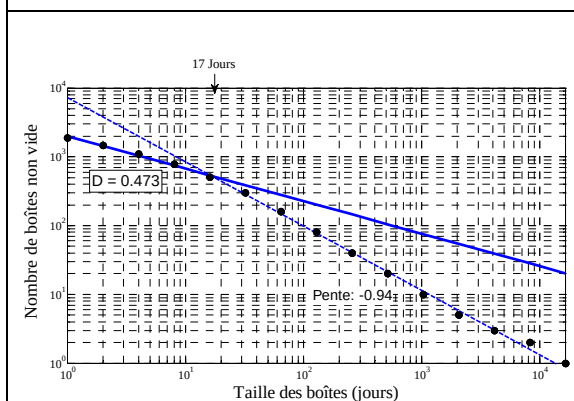


Fig. 2.8 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 150208.

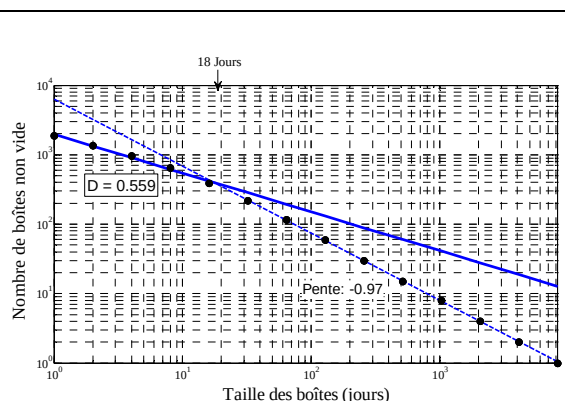


Fig. 2.9 Calcul de la dimension fractale des occurrences de pluie à la station 020611.

L'étude des séries de données pluviométriques pour les 30 stations de mesure montre une certaine similarité. Cette étude permet d'observer deux dimensions dépendantes du temps, pour une échelle de temps allant d'une journée à 12–23 jours, la dimension fractale obtenue est comprise entre 0,250 et 0,600, avec une moyenne sur toutes les séries de l'ordre de $0,431 \pm 0,076$. Pour les échelles de temps supérieur, la dimension fractale est comprise entre 0,800 et 1,000.

Les valeurs élevées de dimension fractale du deuxième domaine sont dues à la saturation de la méthode utilisée. Le changement de pente peut indiquer des régimes différents d'invariance d'échelle.

Le tableau suivant récapitule les résultats ainsi obtenus pour les séries pluviométriques que nous disposons, toujours avec le même seuil, soit 0,1 mm.

Tableau 2.4 Résultats de l'analyse fractale pour les séries pluviométriques.

Nom de station	Code A.N.R.H.	Bornes du domaine fractal	Dimension fractale
Ain Boucif	011104	1 – 21 jours	0,454
Ain Kermes	013201	1 – 12 jours	0,462
Takhemaret	013304	1 – 19 jours	0,389
Bordj Ghobrini	020301	1 – 17 jours	0,498
Menaceur	020303	1 – 17 jours	0,463
Gouraya	020315	1 – 20 jours	0,460
Dar El Beida	020611	1 – 18 jours	0,559
Boufarik Pépinière	021209	1 – 18 jours	0,518
Aoubellil	040201	1 – 13 jours	0,362
Ain Temouchent Era	040205	1 – 19 jours	0,446
Barrage K'sob	051005	1 – 12 jours	0,491
El Aricha	080102	1 – 20 jours	0,372
Mekmene Ben Amar	080401	1 – 20 jours	0,300
Marhoum	080501	1 – 23 jours	0,356
Mecheria	081401	1 – 19 jours	0,329
Kasdir	081801	1 – 21 jours	0,263
Tablat	090203	1 – 15 jours	0,477
Dechmya	090314	1 – 23 jours	0,467
Khabouzia	090401	1 – 17 jours	0,420
Chabet El Aneur	090512	1 – 13 jours	0,488
Ras El Ma	110102	1 – 14 jours	0,273
El Hacaïba	110203	1 – 14 jours	0,421
Merine	110501	1 – 15 jours	0,420
Sour El Ghozlane	150101	1 – 17 jours	0,474
El Hachimia	150103	1 – 19 jours	0,446
Ain Allouane	150110	1 – 22 jours	0,585
Bouira	150208	1 – 17 jours	0,473
Zemmorah	150802	1 – 17 jours	0,400
Sidi Gourari	160608	1 – 15 jours	0,432
Sidi Herriz	160609	1 – 17 jours	0,417

2.5.3.2 Séries hydrométriques

Dans le cas des débits, le phénomène est généralement continu dans le temps, mais il présente une forte variabilité. Le débit, issu d'une transformation complexe des pluies par le bassin versant, constitue aussi une variable potentielle de notre étude.

Les chroniques de débit peuvent être considérées comme un ensemble binaire de points, qui est défini sur une certaine valeur de seuil. La valeur du zéro est généralement employée comme valeur par défaut du seuil, bien que d'autres valeurs supérieures à zéro puissent être également employées. Dans ce cas, seulement les observations avec la valeur plus grande que le seuil sont considérées comme points de l'ensemble à compter.

À l'aide des concepts de fractale, l'invariance d'échelle temporelle des débits pourrait être caractérisée par un paramètre simple, qui est la dimension de fractale. La propriété d'invariance d'échelle des séries de débits était vérifiée par les résultats de la méthode de comptage de boîte (Zhou *et al.*, 2006a).

Nous avons appliqué la méthode de comptage de boîtes pour déterminer la dimension fractale de 29 séries hydrométriques de données moyennes journalières, dont les stations sont bien réparties dans la partie nord du pays (fig. 1.4).

Nous donnons l'exemple, de la série de débits moyens journaliers de la station de Sidi Ali Ben Youb (code A.N.R.H. : 110201), pour laquelle nous disposons d'une longue chronique continue d'observations. Nous avons considéré dans cette série une séquence de 14245 jours consécutifs, à partir du 1^{er} septembre 1966. Le graphe obtenu par l'application de cette méthode est montré dans figure 2.10. Les tailles de boîte (échelles de temps) varient entre un jour et 2^{14} jours. Si la chronique de débit possède une propriété d'invariance d'échelle, une ligne droite pourrait être adaptée au graphique, selon l'équation (2.7). Le tableau 2.5 présente les résultats du comptage, pour la série de la station de Sidi Ali Ben Youb, et la valeur du seuil fixé égal à $0 \text{ m}^3/\text{s}$.

Tableau 2.5 Calcul de la dimension fractale des débits pour la série journalière de la station de Sidi Ali Ben Youb (110201).

n	Taille de boîtes (jours)	Nombre de boîtes non vides
0	$2^0 = 1$	14111
1	$2^1 = 2$	7070
2	$2^2 = 4$	3543
3	$2^3 = 8$	1774
4	$2^4 = 16$	888
5	$2^5 = 32$	446
6	$2^6 = 64$	223
7	$2^7 = 128$	112
8	$2^8 = 256$	56
9	$2^9 = 512$	28
10	$2^{10} = 1024$	14
11	$2^{11} = 2048$	7
12	$2^{12} = 4096$	4
13	$2^{13} = 8192$	2
14	$2^{14} = 16384$	1

En ce qui concerne cette station, la figure 2.10 met en valeur un comportement linéaire de $\text{Log}[N(\varepsilon)]$ par rapport à $\text{Log}(\varepsilon)$ pour toute la gamme d'échelles étudiée, ce qui correspond à l'équation (2.7). L'opposé de pente de cette partie linéaire du graphe est égal à 0,986, qui représente une estimation de la dimension fractale.

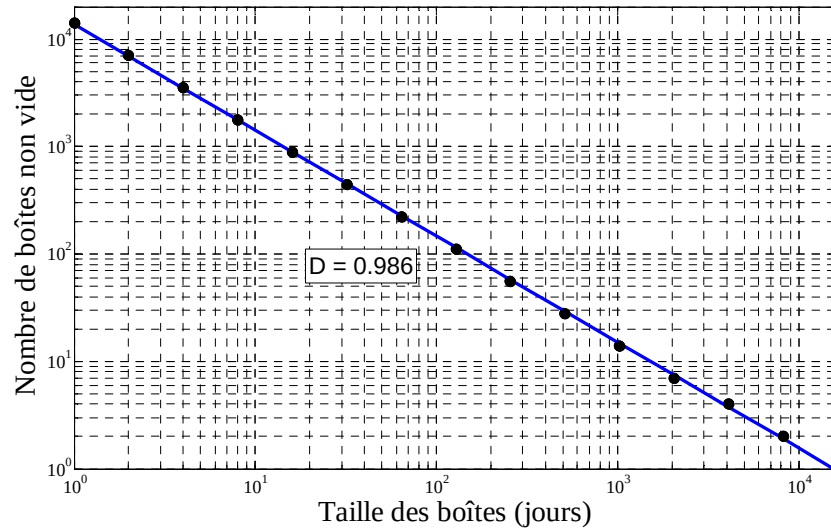


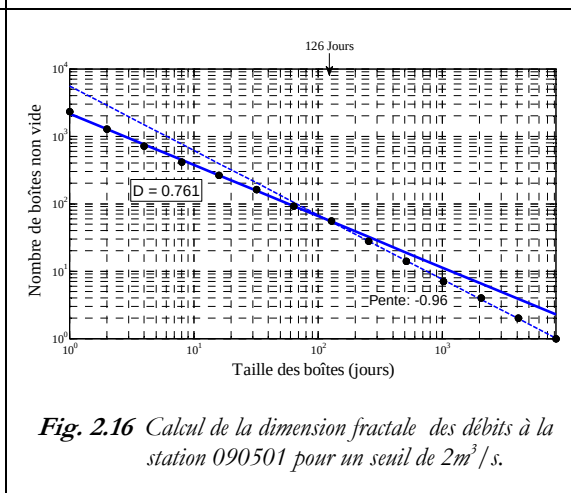
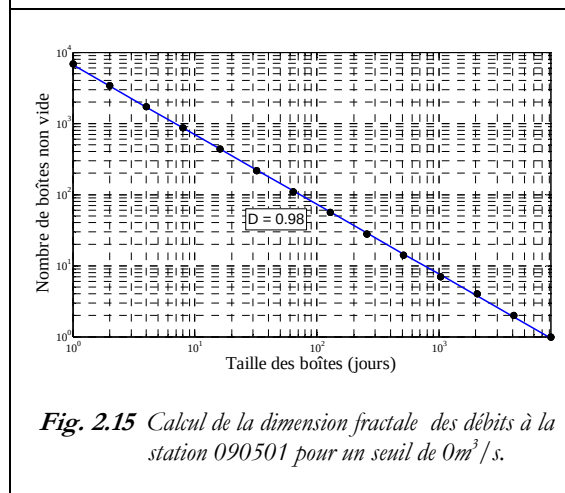
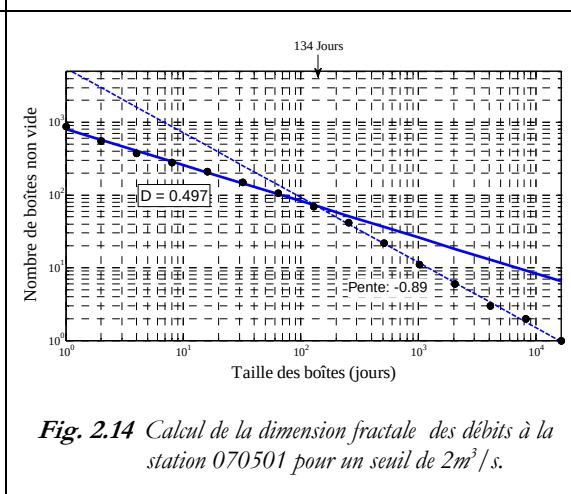
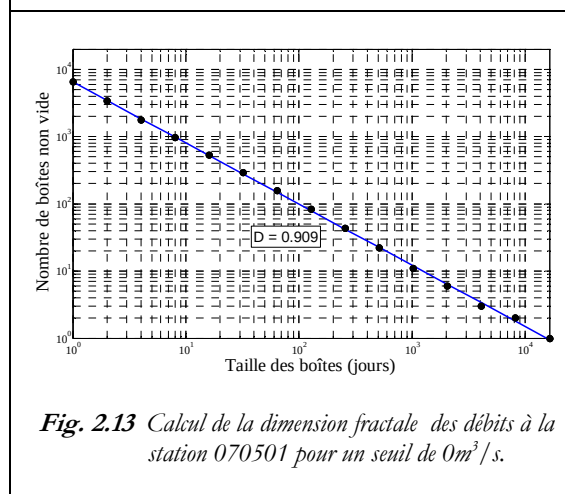
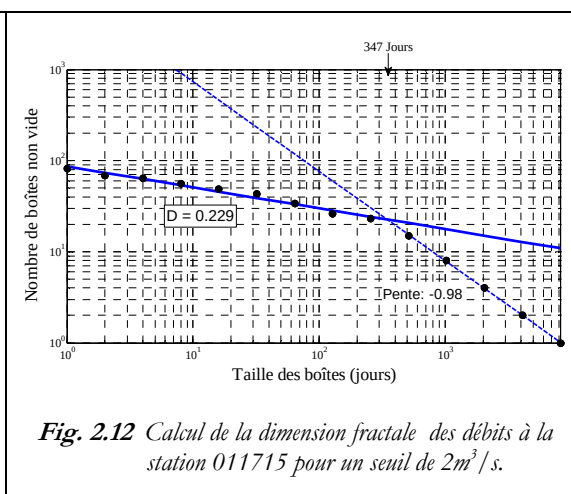
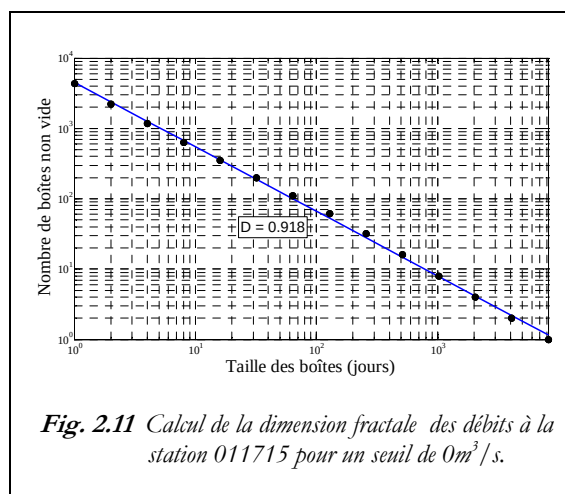
Fig. 2.10 Estimation de la dimension fractale des débits (définie au seuil journalier de $0 \text{ m}^3/\text{s}$) à la station de Sidi Ali Ben Youb (110201), par la méthode du comptage de boîtes à partir d'une série de 39 ans de mesures moyennes journalières (1966-2005).

On remarque que la valeur de la dimension fractale est proche de 1, avec une valeur moyenne sur toutes les séries de l'ordre de $0,933 \pm 0,039$, qui est tout à fait logique dans le cas d'un phénomène comme l'écoulement des rivières, parce que le débit est généralement continu dans le temps.

L'étude des séries de données hydrométriques pour les 29 stations de mesure montre des alignements semblables pour des échelles de temps comparables. Elle montre également que les chroniques de débits possèdent deux types de comportement fractal, le premier est caractérisé par une seule dimension fractale proche de 1, pour toutes les échelles étudiées, le deuxième comportement est caractérisé par deux dimensions fractales dépendantes du temps, la première est comprise entre 0,200 et 0,850, et la deuxième dimension est comprise entre 0,750 et 1,000. Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés par Zhou (2004).

Le comportement fractal des séries hydrométriques est lié à la valeur du seuil imposé, le premier comportement est dû à la valeur nulle du seuil (seuil = $0 \text{ m}^3/\text{s}$), et le deuxième comportement est observé pour des valeurs de seuil supérieur.

Les figures suivantes illustrent les deux types de comportement fractal observés pour deux valeurs de seuil imposé 0 et $2 \text{ m}^3/\text{s}$, aux séries de débits moyens journaliers des stations d'El Ababsa (011715), Chemorah (070501) et de Lakhdaria (090501).



Le tableau suivant résume les résultats ainsi obtenus pour les séries hydrométriques que nous disposons, toujours avec les mêmes valeurs de seuil, soient $0\text{ m}^3/\text{s}$ et $2\text{ m}^3/\text{s}$.

Tableau 2.6 Résultats de l'analyse fractale pour les séries hydrométriques.

Nom de station	Code A.N.R.H.	Dimension fractale	
		1 ^{er} Comportement (Seuil = 0 m ³ /s)	2 ^{ème} Comportement (Seuil = 2 m ³ /s)
Sidi Mokrefi	011602	0,910	0,619
Arib Cheliff	011702	0,964	0,856
El Ababsa	011715	0,918	0,229
Rouina Mines	011906	0,903	0,394
Ain Amara	013302	0,947	0,418
Sidi Akacha	020207	0,956	0,338
RN 24 Azeffoun	020808	0,852	0,477
Boumedfaa	021006	0,936	0,461
Baghlia	022001	0,939	0,890
Turgo Nord	040220	0,963	0,367
Barrage K'sob	051005	0,938	0,465
El Kantra	061201	0,936	0,363
Djemorah	061301	0,951	0,245
Reboa	070403	0,982	0,410
Chemmora	070501	0,909	0,497
Yabous	070601	0,949	0,285
Beni Slimane	090305	0,924	0,308
La Traille	090408	0,969	0,795
Lakhdaria	090501	0,980	0,761
El Hacaiba	110101	0,821	0,222
Sidi Ali Ben Youb	110201	0,986	0,262
Oued Taria	111201	0,853	0,287
El Azreg	120522	0,931	0,256
Medjez Amar II	140301	0,966	0,704
Bouchegouf	140501	0,956	0,776
Mirebeck	140601	0,952	0,905
Ain Berda	140602	0,915	0,464
El Asnam	150204	0,954	0,456
Sidi Aissa	160614	0,899	0,399

2.6 Effet de la taille de série

Vu l'importance de l'estimation de la dimension fractale et l'impact de son utilisation en pratique, la précision de son estimation est nécessaire. La dimension fractale dépend de la longueur de la série (Breslin et Belward, 1999).

Pour étudier l'effet de la taille de nos séries sur l'estimation de la dimension fractale, on a calculé la dimension fractale sur des intervalles de plus en plus grands. Les figures suivantes représentent la variation de la dimension fractale en fonction de la taille de quatre séries de données pluviométriques.

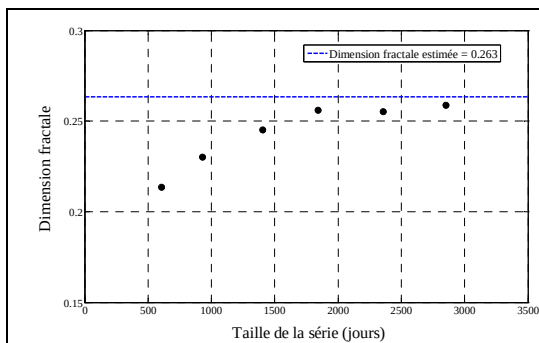


Fig. 2.17 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 081801.

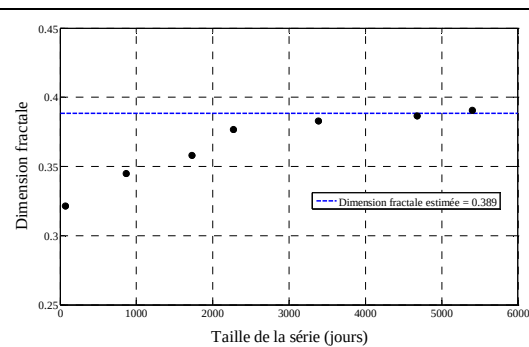


Fig. 2.18 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 013304.

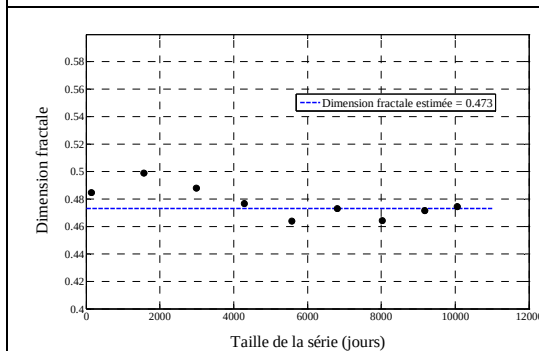


Fig. 2.19 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 150208.

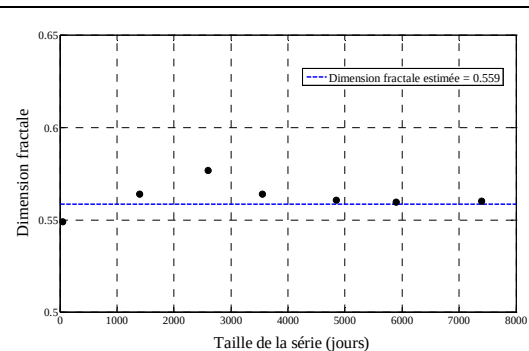


Fig. 2.20 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de la taille de série à la station 020611.

On constate pour les quatre séries pluviométriques, une convergence de la valeur de la dimension fractale vers la valeur estimée par la série entière. La longueur des séries étudiées est suffisamment grande pour obtenir une bonne estimation de la dimension fractale par la méthode utilisée.

Le même principe a été appliqué pour les séries hydrométriques. Les figures suivantes montrent l'effet de l'augmentation du nombre de données sur l'estimation de la dimension fractale des débits pour quatre stations hydrométriques.

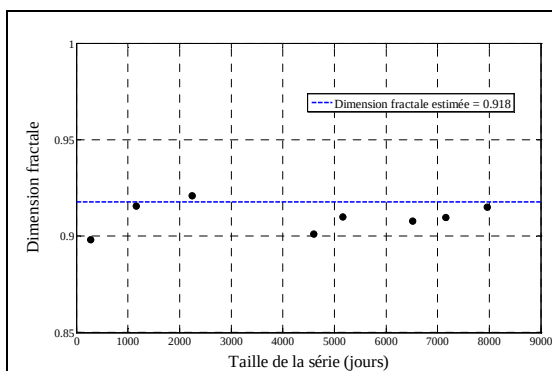


Fig. 2.21 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 011715.

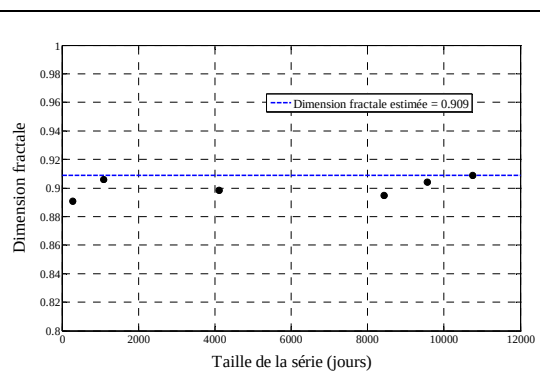


Fig. 2.22 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 070501.

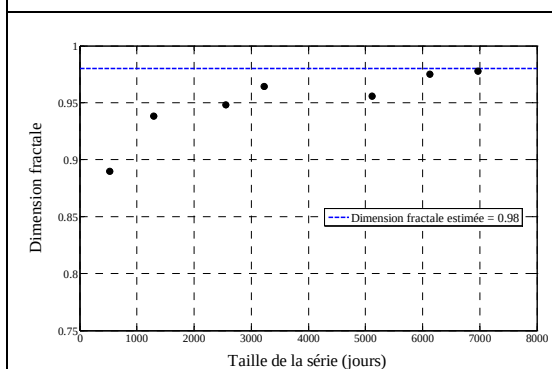


Fig. 2.23 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 090501.

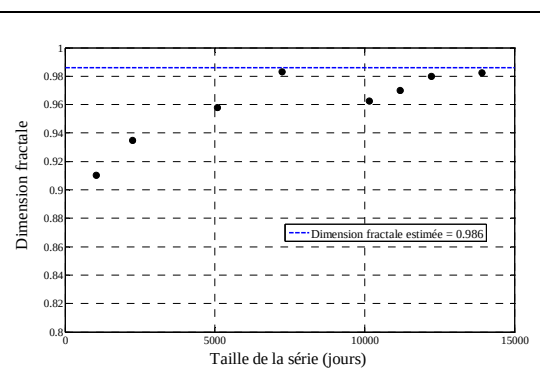


Fig. 2.24 Variation de dimension fractale des débits en fonction de la taille de série à la station 110201.

On remarque là également une convergence de la dimension fractale vers la valeur estimée par la série entière, même si la variation est peu significative.

2.7 Variation spatiale de la dimension fractale

Notre étude portera particulièrement sur le premier domaine, que nous appellerons domaine fractal par commodité (Friggit, 1989). L'observation brute de l'existence du domaine fractal nous conduit immédiatement à nous poser la question suivante :

Comment varie la dimension fractale d'une station à l'autre ?

Pour répondre à cette question, on peut tracer une carte de dimension fractale dans la zone d'étude, qui nous permet de voir la variation spatiale de ce paramètre.

2.7.1 Carte de dimension fractale des pluies

Beaucoup de facteurs peuvent donc intervenir dans l'explication de la variabilité observée sur la valeur de la dimension fractale d'occurrence de pluie. Une explication possible est l'effet de la quantité de pluie tombée (fig. 2.25).

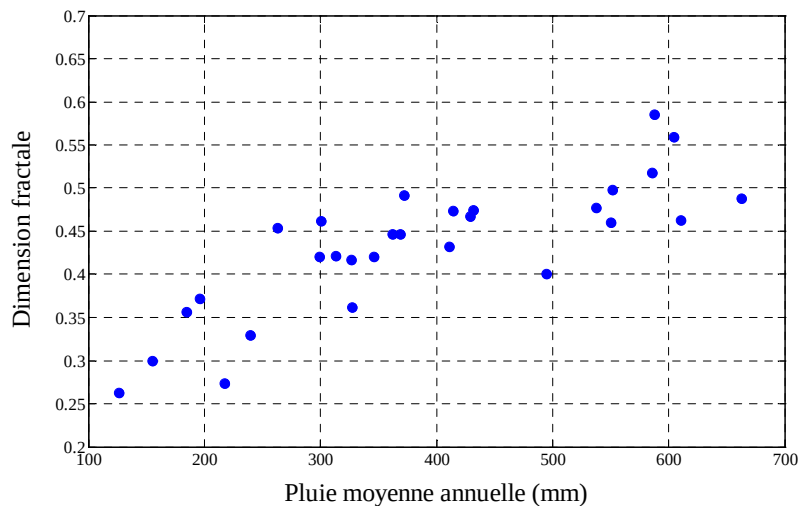


Fig. 2.25 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction de précipitation moyenne annuelle.

En effet, on a construit la carte de la dimension fractale des occurrences de pluie en Algérie septentrionale (fig. 2.27) que nous avons essayé de comparer avec la carte pluviométrique de l'Algérie du Nord (fig. 2.26). On peut constater en regardant les deux cartes qu'il existe en effet quelques similitudes qui attirent assez l'attention pour qu'on puisse y faire référence dans l'explication des fluctuations de ce paramètre.

En effet, les deux cartes montrent que les régions de fortes précipitations sont celles qui ont des valeurs élevées de dimension fractale et inversement, les zones de faibles précipitations sont celles qui présentent des valeurs relativement faibles de dimension fractale.

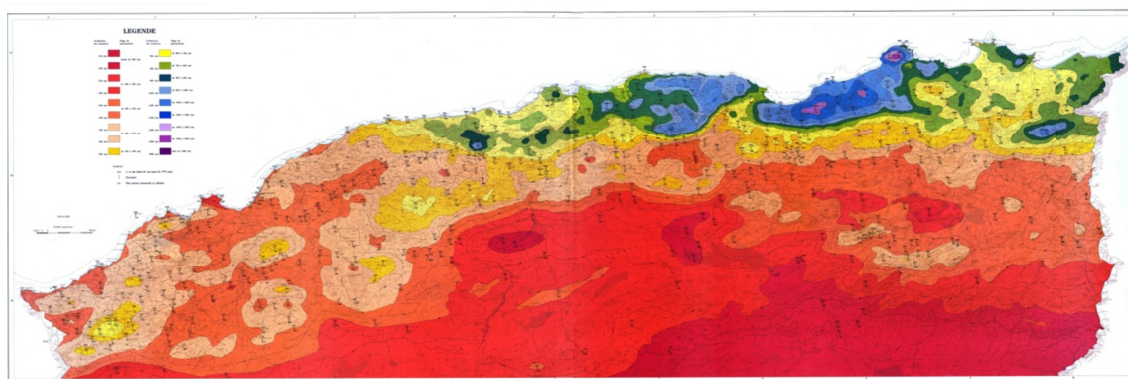


Fig. 2.26 Carte des précipitations en moyenne annuelle de l'Algérie du Nord sur la période de 1922 à 1960 et 1969 à 1989 (A.N.R.H., 1993).

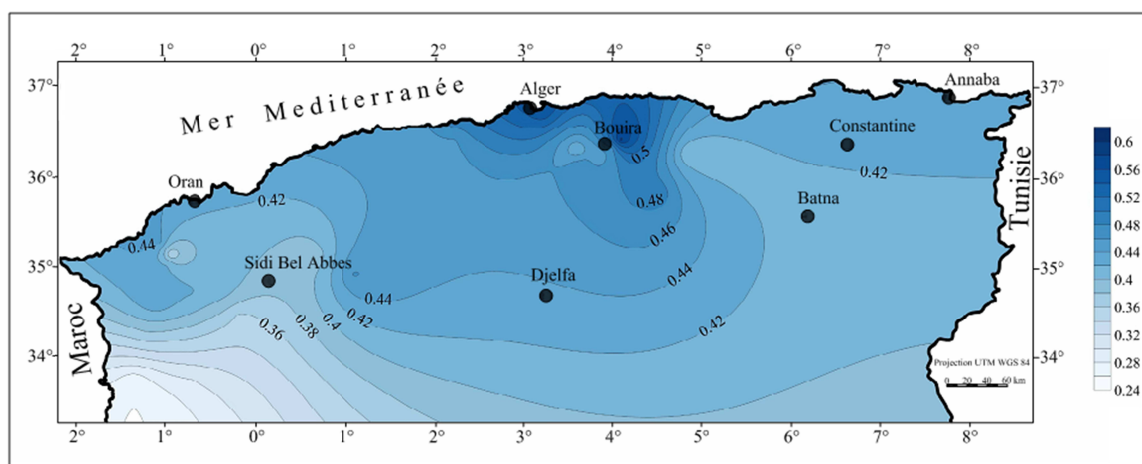


Fig. 2.27 Carte de dimension fractale des occurrences de pluie en Algérie septentrionale (seuil=0.1mm).

2.7.2 Carte de dimension fractale des débits

La valeur de la dimension fractale des débits dépend de l'emplacement géographique de la section de mesure. Une forte dépendance de la dimension fractale des débits sur la latitude a été observée (fig. 2.28).

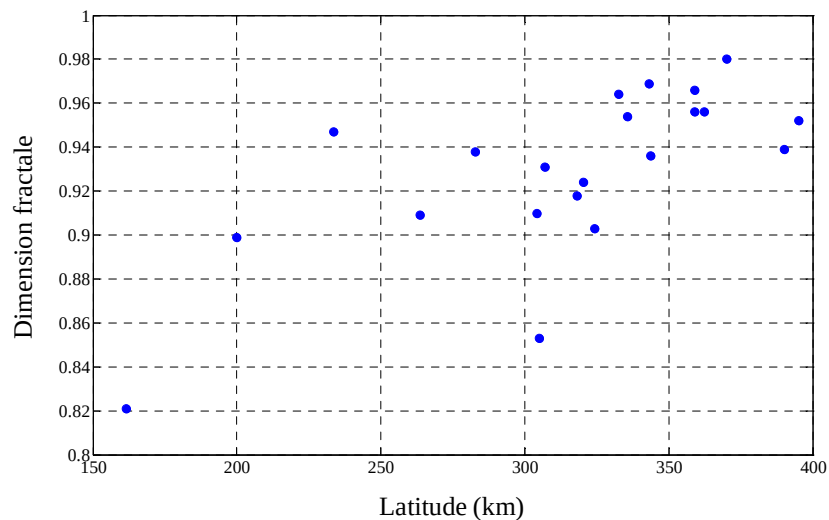


Fig. 2.28 Variation de dimension fractale des débits en fonction de Latitude.

Nous avons établi la carte de dimension fractale des débits pour une valeur de seuil fixé à $0 \text{ m}^3/\text{s}$ (fig. 2.30). On remarque que la carte dressée présente certaines analogies avec la carte des écoulements moyens annuels sur le Nord de l'Algérie (fig. 2.29).

Cependant, nous tenons à garder une petite réserve, quant à cette conclusion, car le nombre de stations que nous avons utilisé pour dessiner cette carte est insuffisant par rapport à la grande superficie couvrant la région d'étude.

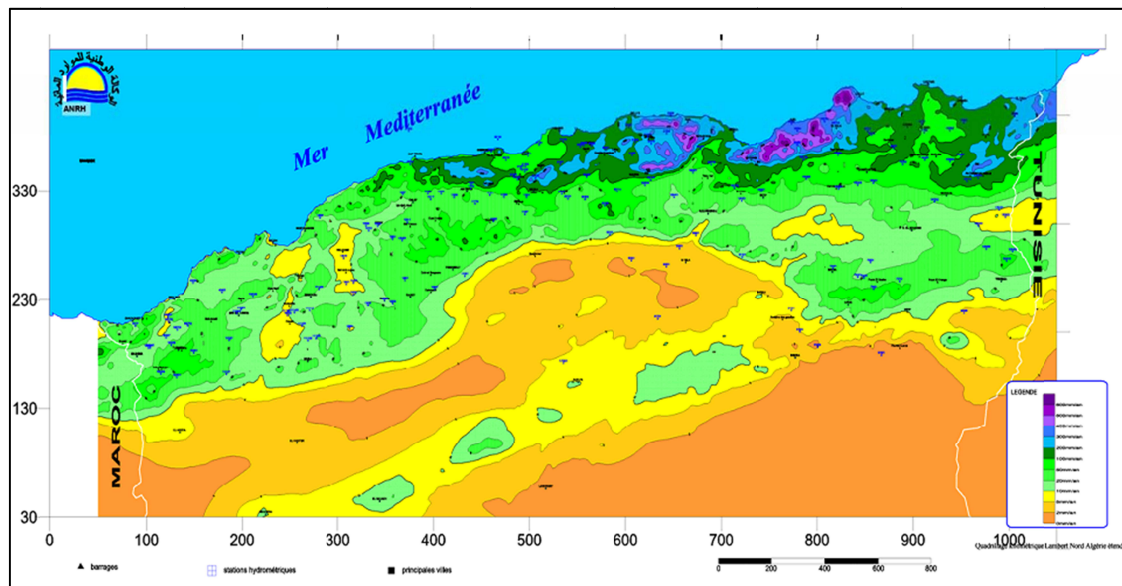


Fig. 2.29 Carte des écoulements moyens annuels de l'Algérie du Nord sur la période de 1965 à 2001 (A.N.R.H., 2006).

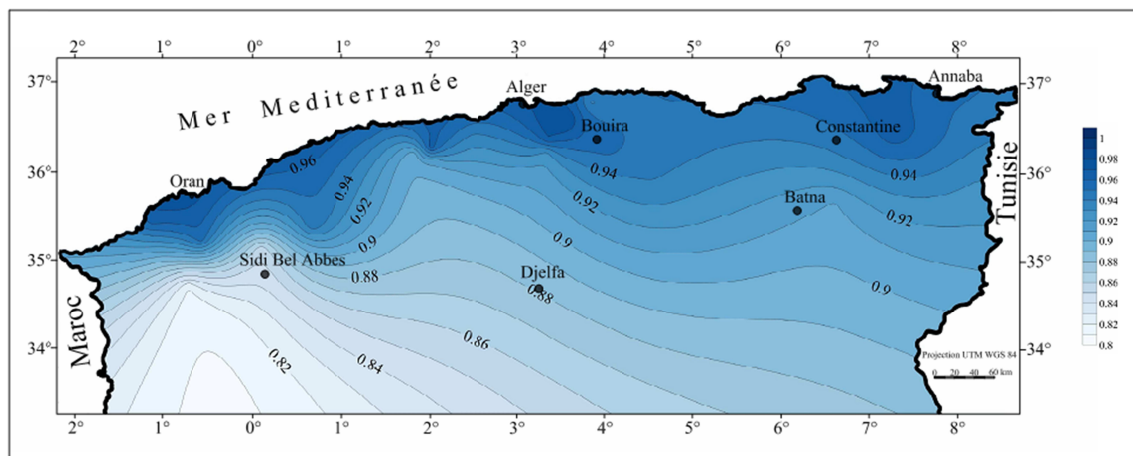


Fig. 2.30 Carte de dimension fractale des débits en Algérie septentrionale (seuil= $0\text{m}^3/\text{s}$).

2.8 Vers les multifractals

Dans les cas de détermination de la dimension fractale, on n'a tenu compte que de deux cas possibles, la présence ou l'absence du phénomène à étudier. Il est important d'attirer l'attention sur le fait que ce que l'on qualifie d'état sec (non-pluie, ou non-débit) est relatif à un seuil qu'on s'est fixé. Ainsi, il est important de voir l'effet du seuil sur les dimensions fractales calculées.

Ceci a été étudié par plusieurs auteurs (Hubert et Carbonnel, 1989 ; Friggitt *et al.*, 1991 ; Hubert, 1995 ; Hubert *et al.*, 1995 ; Biaou, 2004 ; Zhou, 2004 ; Macor, 2007), la conclusion montre que la dimension fractale dépend du seuil fixé. Cette dépendance de la dimension fractale sur la valeur de son seuil de référence, qui a été signalée auparavant par Schertzer et Lovejoy (1984), devrait amener à considérer dans ce type d'étude, mieux que la notion d'objet fractal, l'approche de champ multifractal. Les phénomènes étudiés (pluie, débit) sont caractérisés par une hiérarchie de fractal correspondant aux régions sur lesquelles le champ dépasse des seuils (ou singularités qui seront définies après) de plus en plus élevés. La dimension fractale devient donc une fonction dimension à laquelle on associe la fonction codimension des singularités qui sera étudiée en détail dans le chapitre suivant.

Une analyse a été faite pour différents niveaux d'intensité de la pluie journalière. Les seuils de pluie considérés dans cette analyse sont : 0,1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 20 et 30 mm/jour (Hubert *et al.*, 1995). Les graphes suivants représentent la variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur du seuil imposé, aux séries de pluies des stations de Kasdir (081801), Takhemaret (013304), Bouira (150208) et de Dar El Beida (020611).

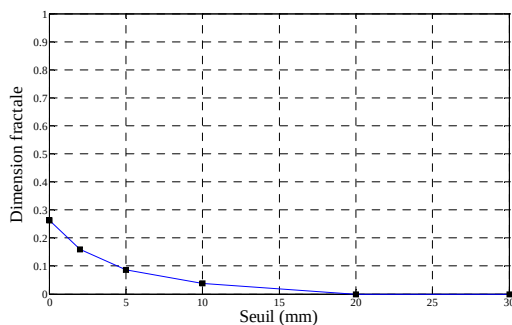


Fig. 2.31 Variation de dimension fractale des occurrences de pluie en fonction du seuil à la station 081801.

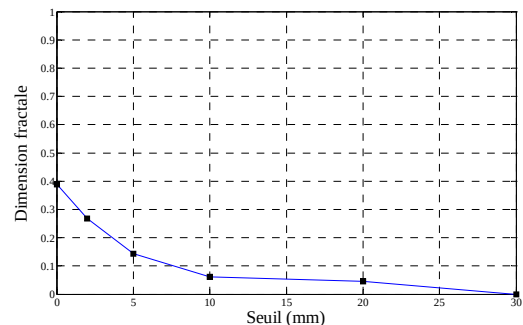


Fig. 2.32 Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 013304.

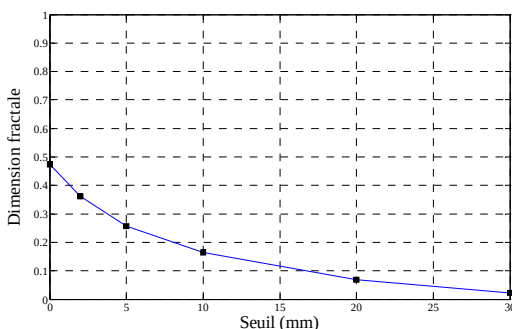


Fig. 2.33 Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 150208.

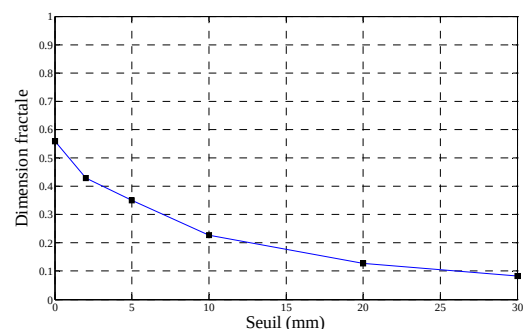


Fig. 2.34 Variation de la dimension fractale des occurrences de pluie à la valeur de seuil imposé à la station 020611.

Pour l'analyse des chroniques de débits, on peut fixer les valeurs de seuil suivantes : 0 ; 0,3 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 5, et 10 m^3/s . Et les figures suivantes illustrent la variation de la dimension fractale de débits à la valeur du seuil imposé, aux séries de débits des stations d'El Ababsa (011715), Chemorah (070501), Lakhdaria (090501) et Sidi Ali Ben Youb (110201).

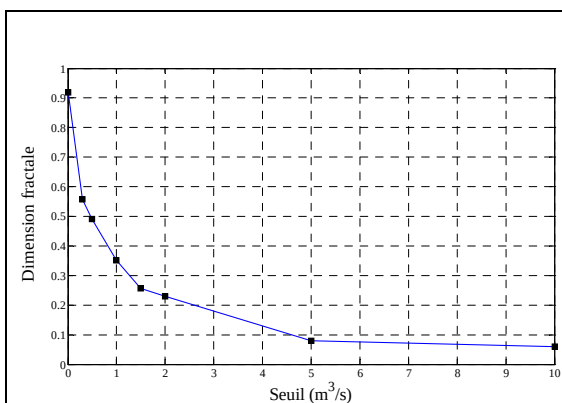


Fig. 2.35 Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 011715.

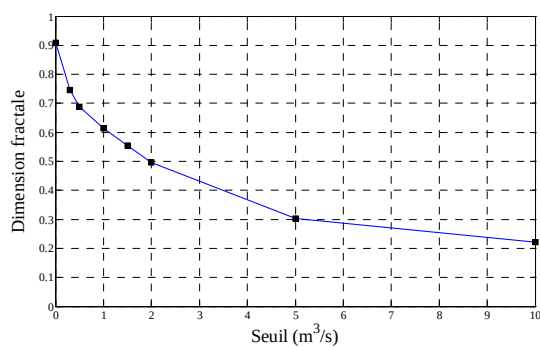


Fig. 2.36 Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 070501.

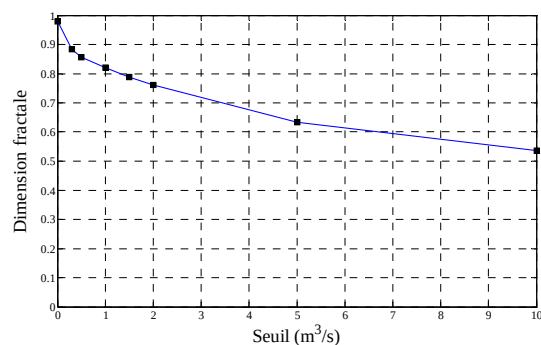


Fig. 2.37 Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 090501.

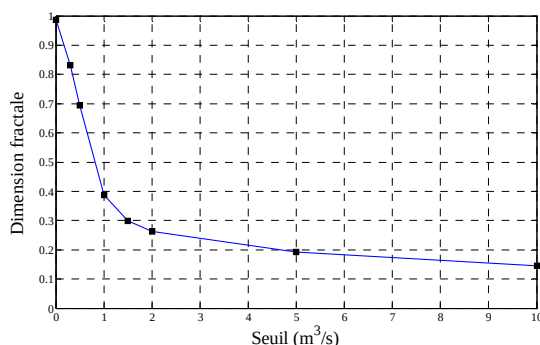


Fig. 2.38 Variation de la dimension fractale des débits à la valeur de seuil imposé à la station 110201.

On peut observer toujours pour les pluies et les débits, que pour les valeurs croissantes des seuils la dimension fractale correspondante diminue, ce qui provoque une structure multifractal (Schertzer et Lovejoy, 1988). Donc on peut conclure que la dimension fractale est une fonction décroissante du seuil imposé.

2.9 Conclusion

Conformément aux résultats cités dans la littérature concernant l'analyse fractale des données hydrologiques, on a bien mis en évidence le caractère fractal des précipitations et des débits en Algérie septentrionale.

La méthode du comptage de boîtes a été appliquée sur les données hydrologiques pour calculer leurs dimensions fractales. Cette méthode permet de dégager un premier comportement sur l'invariance d'échelle des séries étudiées. Pour les séries pluviométriques, on a constaté qu'elles sont le résultat de la combinaison de deux processus d'invariance d'échelle, dans la mesure où la monofractalité est vérifiée, on aurait donc pour les petites échelles (d'une journée à quelques semaines) un processus de dimension fractale comprise entre 0,25 et 0,6 puis, pour les grandes échelles, un processus de dimension fractale comprise entre 0,8 et 1. Pour les séries hydrométriques, la plage d'invariance d'échelle s'étend sur toute la gamme d'échelles étudiées, suivant une dimension fractale proche de 1.

La variation spatiale de la dimension fractale des occurrences de pluie montre une bonne analogie avec celle des précipitations moyennes annuelles. La dimension fractale des débits est fortement liée à l'effet de continentalité. Cette conclusion doit être prise avec réserve, car nous n'avons pas fait une étude poussée dans ce sens. Nous aurions pu étendre cette comparaison d'apparence aux cartes d'autres paramètres tels que la température, l'évapotranspiration, le relief.

Dans cette partie, on a montré le caractère multifractal des séries en faisant varier le seuil de définition. En conclusion, le caractère multifractal est remarquable, car plusieurs dimensions apparaissent en fonction de la valeur du seuil.

Enfin, ces résultats peuvent aussi être appliqués à des fins statistiques et de modélisation.

3

Chapitre

Analyse multifractale

Chapitre 3

Analyse multifractale

Nous nous intéressons, dans ce chapitre à l'analyse multifractale des séries journalières des précipitations et des débits. Il nous paraît donc important de décrire de façon simple les procédures à mettre en œuvre pour effectuer une analyse multifractale. Pour illustration, nous renvoyons le lecteur au livre des éditions Quæ sur l'analyse multifractale en hydrologie (de Pietro Bernardara, Michel Lang, Éric Sauquet, Daniel Schertzer et Ioulia Tchiguirinskaia).

Dans ce chapitre, nous utiliserons les définitions décrites dans ce livre (Bernardara *et al.*, 2007) pour rappeler brièvement les notions fondamentales sur les multifractales. D'autres articles et travaux de thèses seront également exploités pour compléter les rappels théoriques (Schertzer et Lovejoy, 1987 ; Lavallée, 1991 ; De Lima, 1998 ; Biauou, 2004).

Plusieurs autres ouvrages présentant de façon plus ou moins détaillée la théorie multifractale sont également disponible, on peut citer à titre d'exemple les plus récents (Harte, 2001 ; Calvet et Fisher, 2008 ; Lovejoy et Schertzer, 2012).

3.1 Notions fondamentales sur les multifractals

Nous nous arrêterons en premier lieu sur les définitions générales concernant les échelles ou résolutions auxquelles les phénomènes sont mesurés ou observés.

3.1.1 Rapport d'échelle

Nous supposons, que le processus ε qui nous intéresse peut être observé à différentes échelles d'observation, ces échelles étant liées par le rapport d'échelle λ défini comme suit :

$$\lambda = \frac{T_1}{T_2} \tag{3.1}$$

où T_2 représente l'échelle d'étude la plus grande, et T_1 une échelle plus fine à laquelle le phénomène est observé. Cette définition étant tout à fait générale, la valeur du rapport λ quantifie le rapport entre deux échelles de mesure (De Lima, 1999).

3.1.2 Agrégation d'un signal à différentes échelles

Le problème des échelles est particulièrement important dans le domaine de l'hydrologie, où normalement on dispose de séries ou de champs de mesures (de pluie, d'humidité du sol, de débit, ... etc.) très variables dans l'espace et le temps. Ces séries sont représentatives de différents phénomènes qui se superposent et se neutralisent de façon non-linéaire, et qui agissent à des échelles de temps et d'espace différentes.

Dans notre étude, nous nous limiterons à un processus $\varepsilon(t)$ monodimensionnel, ici un processus qui se déploie selon l'axe des temps t . Les chroniques ciblées seront les chroniques de précipitation et de débit, réputées pour leur forte variabilité temporelle. La transposition des concepts s'opère a priori sans difficulté supplémentaire dans un espace à plusieurs dimensions.

D'un point de vue pratique, nous définirons l'échelle intégrale T comme l'échelle la plus grande à laquelle le phénomène est observé. Dans ce cas, le rapport d'échelle s'écrit :

$$\lambda = \frac{T}{T_1} \quad (3.2)$$

et les échelles explorées seront caractérisées par une valeur de rapport $\lambda \geq 1$. Cette variable sera la métrique de l'espace utilisée dans la suite du chapitre.

Dans l'analyse des données hydrologiques, nous sommes souvent confrontés au cas où la mesure est disponible à une seule échelle, conditionnée par les modes d'échantillonnage des dispositifs de mesure (pluviographe, par exemple). L'information aux autres échelles doit alors forcément être déduite de l'échelle de base. Plusieurs méthodes existent pour dégrader (ou agréger) un signal à différentes échelles. La procédure la plus répandue fait usage de la moyenne sans recouvrement. C'est cette option de calcul qui s'est imposée dans le formalisme multifractal (Bernardara *et al.*, 2007).

Posons le signal obtenu par agrégation à l'échelle λ . Le passage d'une échelle quelconque, caractérisée par un rapport d'échelle λ_1 , à une échelle caractérisée par λ_2 s'obtient par la formule :

$$\varepsilon_{\lambda_2,i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{j=1}^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \varepsilon_{\lambda_1,j} \quad (3.3)$$

où le i -ème pas de temps selon la résolution T_2 est obtenu par agrégation du signal à la résolution T_1 .

Nous prenons l'exemple du poste pluviométrique de Gouraya (020315), pour voir la variabilité des précipitations selon différentes échelles de temps. Les séries de la figure 3.1 sont obtenues par lissage progressif des données de précipitations journalières, selon l'équation (3.3). Cette figure permet de comparer le comportement des précipitations pour les échelles d'observation de 1 jour jusqu'à 8192 jours. Le rapport λ est calculé à partir de l'échelle intégrale $T = 8192$ jours, soit environ 22,44 ans. On peut constater que les valeurs de pluie moyenne augmentent sur les petites échelles. Pour les grandes échelles, la diminution de pluie moyenne est perceptible, et les amplitudes et valeurs extrêmes sont fortement réduites.

Il existe aussi d'autres méthodes pour accéder aux propriétés des champs à une échelle différente de celle de la mesure. Les hydrologues, par exemple, sont généralement habitués à traiter la moyenne glissante pour estimer le cumul de pluie ou de débit sur différentes durées, notamment pour construire les courbes intensité-durée-fréquence (Bendjoudi *et al.*, 1997).

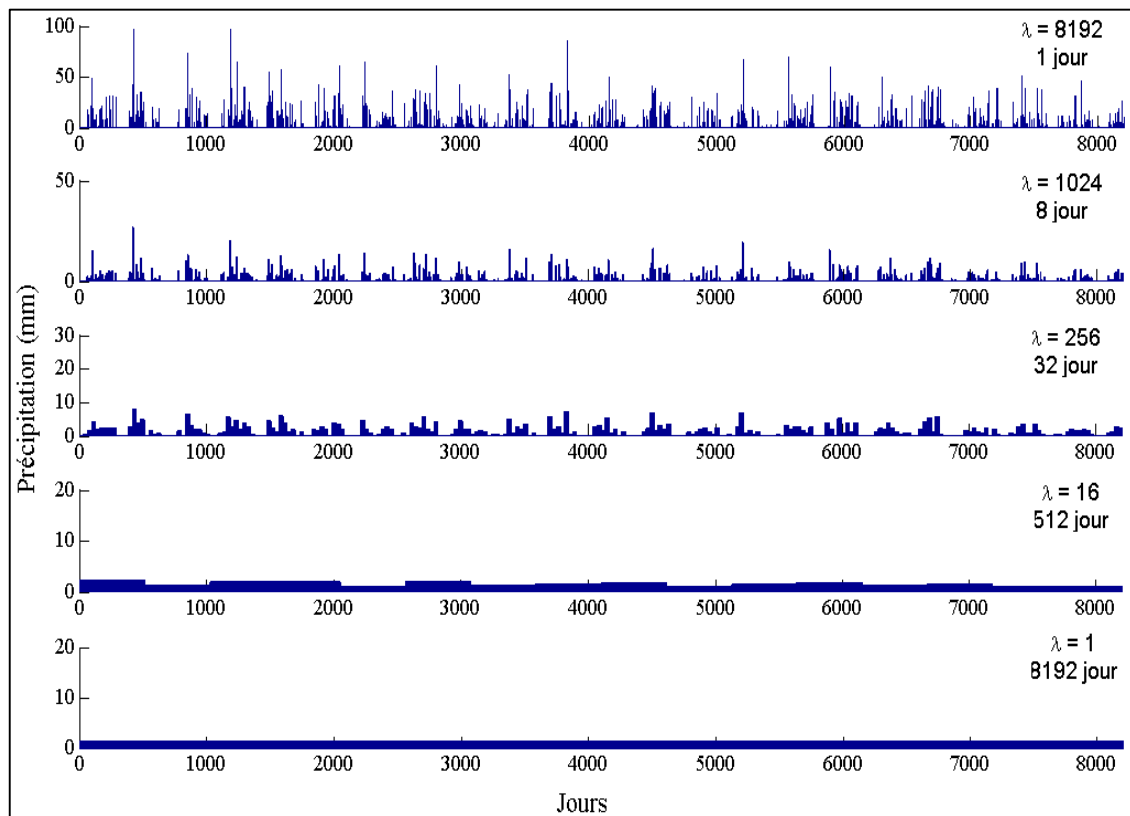


Fig. 3.1 Variabilité des mesures des précipitations selon différentes échelles de temps, sur la poste pluviométrique de Gouraya (020315) : de 1 jour en haut de la figure à 8192 jours en bas.

La mention de la base de calcul de la moyenne est un prérequis indispensable à une comparaison objective des méthodes et des résultats. À des fins d'homogénéité avec les travaux publiés dans le domaine des multifractales, nous considérerons dans ce chapitre un changement d'échelle réalisé par moyenne sans recouvrement. En outre, pour simplifier, uniformiser et comparer les traitements opérés, il est d'usage de normer les observations par la moyenne calculée à l'échelle la plus petite avant d'agréger les données (De Lima, 1998). Il vient ainsi :

$$E(\varepsilon_\lambda) = 1 \quad (3.4)$$

Dans ce qui suit, nous allègerons les notations en supprimant l'indice i de l'équation (3.3) qui rend compte du nombre d'observations de la série à l'échelle λ , et nous considérons l'opération de normalisation réalisée à l'échelle la plus petite, à savoir $\lambda = \Lambda$.

3.1.3 Les singularités

Pour décrire les observations, le formalisme multifractal introduit la notion de singularité, notée γ , définie comme suit :

$$\gamma = \log_\lambda(\varepsilon_\lambda) \quad (3.5)$$

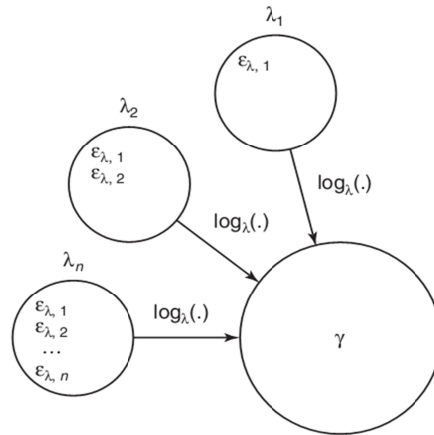


Fig. 3.2 Principe de transformation de toutes les observations disponibles à toutes les échelles ε_λ en singularités γ (D'après Bernardara et al., 2007).

La singularité γ est une transformation logarithmique en base λ des observations mesurées à l'échelle λ . Toutes les chroniques sans distinction de rapport d'échelle participent à la description de γ . La transformation permet de manipuler une seule variable γ intégrant des informations en provenance de toutes les échelles (Bernardara et al., 2007). Il est possible d'inverser la relation définie plus haut afin de reconstruire les observations à toutes les échelles :

$$\varepsilon_\lambda = \lambda^\gamma \quad (3.6)$$

La figure 3.2 illustre la procédure qui transforme les observations relevées aux échelles λ en singularités γ . Les singularités observées représentent les réalisations de la variable aléatoire γ , principal objet d'étude de l'analyse multifractale.

3.2 Description statistique des processus multifractals

Les propriétés d'une variable aléatoire X peuvent être décrites simultanément par la fonction de répartition $F(x) = \Pr(X < x)$ et par l'ensemble complet de ses moments statistiques. Dans les prochaines sections, nous présentons les processus multifractals, en décrivant leurs caractéristiques statistiques.

3.2.1 La fonction codimension $c(\gamma)$

Les singularités γ étant définies, nous nous intéressons à la loi de probabilité théorique qui les concerne, à travers le concept de fonction codimension, notée $c(\gamma)$. Dans le cas général, la fonction de distribution de probabilité et la fonction de répartition dépendent de l'échelle λ . Dans le cas multifractal, elles prennent une forme particulière.

Un processus est dit « multifractal » si la fonction $c(\gamma)$ suit la loi décrite par :

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.7)$$

La fonction représente le logarithme de la probabilité de dépassement des singularités et intègre une information collectée à toutes les échelles (Schertzer et Lovejoy, 1987).

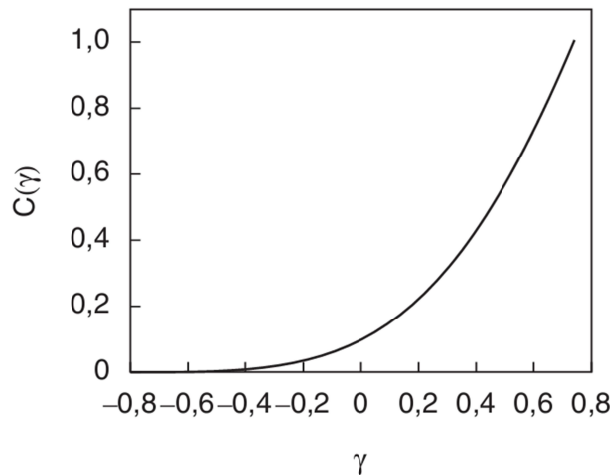


Fig. 3.3 Allure de la fonction codimension $c(\gamma)$.

La fonction $c(\gamma)$ a la propriété d'être monotone croissante, et son allure typique pour un processus multifractal est représentée dans la figure suivante.

La fonction $c(\gamma)$ caractérise l'invariance d'échelle de la distribution de probabilité, et la répartition de singularité. Les événements de grande intensité, moins fréquents que ceux de faible intensité, occupent une plus faible fraction de l'espace de probabilité et ont une plus grande codimension.

3.2.2 La fonction d'échelle des moments $K(q)$

Le caractère multifractal d'un champ géophysique ε_λ à la résolution λ se décrit par une loi d'invariance d'échelle des moments statistiques d'ordre q , qui introduit une fonction d'échelle des moments $K(q)$ par la relation (Schertzer et Lovejoy, 1987) :

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \quad (3.8)$$

où, $\langle . \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble, $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ le moment statistique d'ordre q à la résolution λ . La fonction $K(q)$ est une fonction convexe, qui caractérise l'invariance d'échelle indiquant le comportement asymptotique des moments d'ordre q .

L'allure de fonction $K(q)$ théorique est représentée dans la figure 3.4. Nous mentionnerons des valeurs particulières : $K(0) = 0$, lorsque la mesure est définie sur tout l'axe t , et $K(1) = 0$, car, après normalisation des observations et sous hypothèse de conservation, $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$.

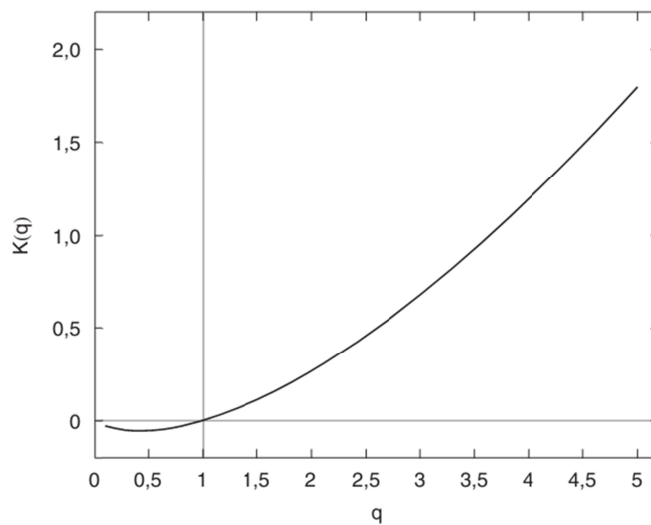


Fig. 3.4 Forme de la fonction $K(q)$ théorique.

3.2.3 Transformation de Legendre

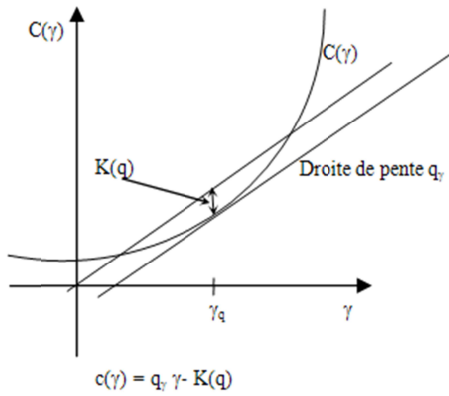
Les équations (3.7) et (3.8), qui sont parfaitement équivalentes, caractérisent un processus multifractal en termes de probabilité ou de moments statistiques. Le processus peut être décrit par l'une des deux fonctions $c(\gamma)$ ou $K(q)$, et il est aisé de passer d'une représentation à l'autre.

Donc, il existe une étroite relation biunivoque entre fonction codimension $c(\gamma)$ et la fonction d'échelle des moments $K(q)$. Cette relation est mise en évidence par la transformation de Legendre (Parisi et Frish, 1985) :

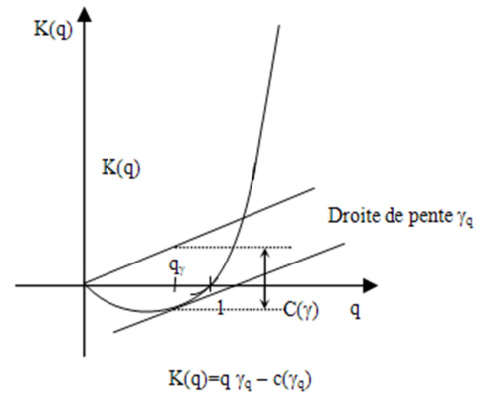
$$\begin{cases} K(q) = \max_{\gamma} [q\gamma - c(\gamma)] \\ c(\gamma) = \max_q [q\gamma - K(q)] \end{cases} \quad (3.9)$$

De plus, en cherchant le maximum dans l'équation (3.9), on trouve :

$$q = \frac{dc(\gamma)}{d\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{dK(q)}{dq} \quad (3.10)$$



(a) - $K(q)$ obtenue de $c(\gamma)$.



(b) - $c(\gamma)$ obtenue de $K(q)$.

Fig. 3.5 Transformation de Legendre entre les fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$ (D'après Tessier *et al.*, 1993).

En conséquence, toute singularité γ peut être associée à un moment d'ordre q , et réciproquement. L'intérêt pratique de la transformation de Legendre est d'établir une correspondance simple entre moments statistiques et probabilité, qui peut être utilisée de multiples façons dans l'analyse des données.

3.3 Multifractals universels

Jusqu'ici nous avons beaucoup parlé des processus multifractals sans les relier à aucun modèle. Comme nous l'avons montré, obtenir empiriquement une représentation des deux fonctions $c(\gamma)$ et $K(q)$ est relativement simple, alors que leurs expressions théoriques exigent la détermination d'une infinité de paramètres ce qui est prohibitif aussi bien aux niveaux empirique que théorique.

Un modèle à deux paramètres est proposé par Schertzer et Lovejoy (1987) pour déterminer la fonction $K(q)$, donc à déterminer la fonction de codimension (transformation de Legendre). Pour une description complète Schertzer et Lovejoy (1993) ont ajouté par la suite un paramètre supplémentaire H à ce modèle pour l'appliquer également aux processus non-conservatifs. C'est la raison pour laquelle le modèle a été appelé universel.

Dans le cadre des multifractals universels, les fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$ peuvent s'exprimer en fonction des paramètres suivants (fig. 3.6 pour illustration) :

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q) + Hq & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) + Hq & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp\left(\frac{\gamma}{C_1} - 1\right) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}, \text{ avec } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad (3.12)$$

où, les paramètres α , C_1 et H sont les paramètres universels. Ils ont une signification géométrique et une signification statistique :

- Le paramètre α est l'index de multifractalité de Lévy. Il mesure le degré de multifractalité du processus et sa valeur est comprise entre 0 et 2. En particulier, si $\alpha = 0$ on observe un processus monofractal et $\alpha = 2$ correspond au maximum de multifractalité pour un modèle improprement dénommé lognormal.
- Le paramètre C_1 est la codimension de la singularité moyenne du champ. Il mesure l'inhomogénéité moyenne où C_1 est nul pour un champ homogène. Plus C_1 augmente, plus la singularité de la moyenne du champ est dispersée. On observe donc un champ dépassant rarement sa moyenne, mais qui peut le faire de façon extrêmement forte.
- H est le paramètre qui quantifie la déviation du phénomène vis-à-vis d'un processus conservatif. Des valeurs de H proches de zéro indiquent que le processus est presque conservatif.

Ces trois paramètres sont nécessaires pour caractériser les fonctions d'invariance d'échelle et les propriétés statistiques des processus multifractals.

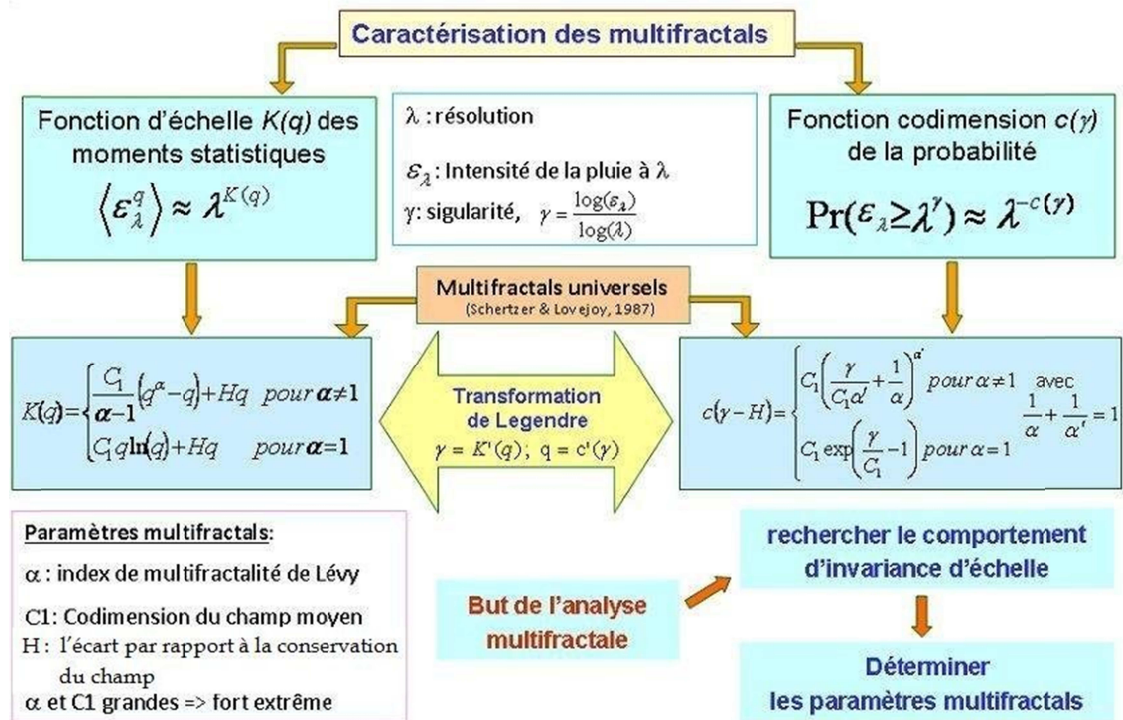


Fig. 3.6 Caractérisation des multifractals.

3.4 Etat de l'art sur l'application des multifractals en hydrologie

Historiquement les premières analyses fractales furent réalisées sur des données de précipitation radar (Lovejoy, 1982), suivies par des analyses multifractales qui soulignèrent l'impossibilité de décrire le phénomène de pluie par une seule dimension fractale (Schertzer et Lovejoy, 1987). Les propriétés d'invariance d'échelle fractales et multifractales des séries temporelles de pluie ont été retrouvées par plusieurs auteurs qui ont analysé des séries provenant de différentes régions climatiques : de la région de la mousson en Chine (Svensson *et al.*, 1996) aux régions tempérées en Europe et aux États-Unis (Ladoy *et al.*, 1993 ; Tessier *et al.*, 1993, 1996 ; De Lima, 1998 ; De Lima et Grasman, 1999 ; Biaou, 2004).

Les plages d'échelles analysés vont de quelques secondes à plusieurs dizaines d'années (Tessier *et al.*, 1993). Plusieurs auteurs ont pu détecter deux plages d'échelles sur lesquelles on observe des propriétés multifractales : la première, de la résolution maximale jusqu'à quelques jours, la seconde pour des résolutions inférieures à quelques jours. La limite précise entre les deux échelles n'est pas claire, elle varie, selon les régions et les données, entre deux jours (Olsson, 1996) et deux à trois semaines (Tessier *et al.*, 1996).

Les séries de pluies ont, en général, montré des propriétés conservatives (Ladoy *et al.*, 1993 ; Tessier *et al.*, 1996 ; De Lima, 1998). Moins souvent, et surtout aux petites échelles, on a rencontré des propriétés non-conservatives (Tessier *et al.*, 1993). Le modèle multifractal universel a souvent été utilisé. Les valeurs des paramètres de ce modèle, pour les séries de pluie, varient pour α entre 0,04 et 1,80, et pour C_1 entre 0,05 et 1, en fonction des différentes plages d'échelles analysées et des différents types de précipitation (Ladoy *et al.*, 1993 ; Tessier *et al.*, 1993 ; 1996 ; De Lima, 1998 ; Royer *et al.*, 2008).

Le débit, issu d'une transformation complexe des pluies par le bassin versant, constitue aussi une variable potentielle d'étude. Pourtant, la littérature portant sur le caractère multifractal des débits reste moins abondante et plus récente. Les propriétés multifractales des débits ont été étudiées par Tessier *et al.* (1996), Pandey *et al.* (1998), Labat *et al.* (2002), Zhou (2004) et Zhou *et al.* (2006b). Le modèle multifractal le plus utilisé est encore aujourd'hui le modèle universel : des valeurs du paramètre α ont été trouvées entre 0,15 et 1,76, et entre 0,10 et 0,26 pour C_1 , en fonction des différentes séries analysées.

3.5 Analyse multifractale des données

Nous allons maintenant présenter l'application de l'analyse multifractale à des chroniques journalières des précipitations et des débits en Algérie du Nord

Pour la partie qui suit, nous prenons l'exemple de quatre stations pluviométriques telles que la station de Kasdir (081801), Takhemaret (013304), Merine (110501) et de Menaceur (020303), et quatre stations hydrométriques telles que la station de Lakhdaria (090501), Mirebeck (140601), El Ababsa (011715) et de Chemmora (070501), sur lesquelles nous avons appliqués toutes les analyses multifractales présentées dans ce chapitre. Ces stations sont sélectionnées de telle façon qu'ils soient représentatifs à la région d'étude.

L'analyse multifractale se déroulera en plusieurs étapes. La première d'entre elles consiste à vérifier si la série montre des propriétés d'invariance d'échelle par une analyse spectrale, pour identifier les plages d'échelles correspondantes (Chettih *et al.*, 2011).

3.5.1 Analyse spectrale

L'analyse spectrale est une technique usuelle de traitement et d'analyse du signal temporel, qui trouve une application dans le cadre multifractal. Nous retenons le spectre d'énergie qui est une représentation des caractéristiques de second ordre de la série dans l'espace des fréquences (Bernardara *et al.*, 2007). Les propriétés d'échelle du moment d'ordre $q = 2$, décrites dans l'équation (3.8), se traduisent dans l'espace des fréquences f dans la forme du spectre décrite par :

$$S(f) \propto f^{-\beta} \quad (3.13)$$

où S représente l'énergie du spectre (ou densité spectrale), f la fréquence du signal et β l'exposant du spectre.

Ceci se traduit par une relation linéaire entre $\text{Log}[S(f)]$ et $\text{Log}(f)$. La pente de la droite obtenue vaut $-\beta$.

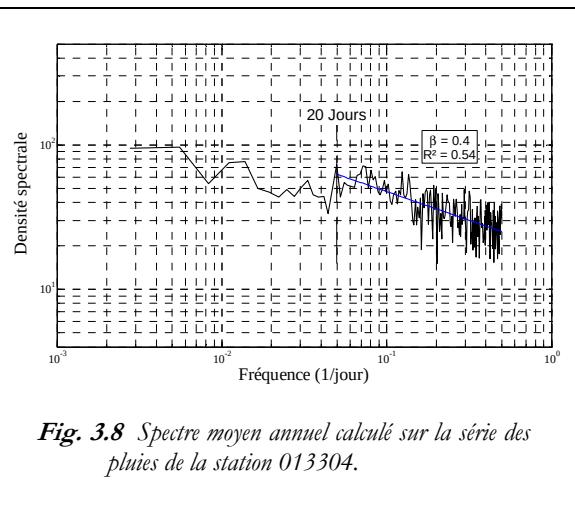
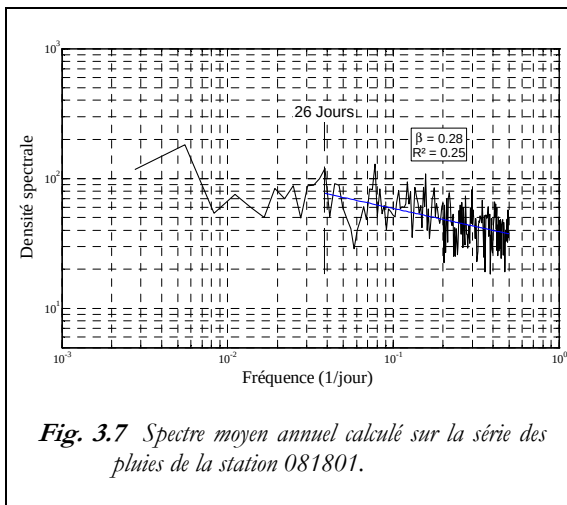
Le spectre d'énergie permet de faire une évaluation préliminaire de l'invariance d'échelle qui correspond à une loi de puissance et le degré de conservation d'un champ (De Lima *et al.*, 2003). Le but de l'analyse spectrale est de vérifier :

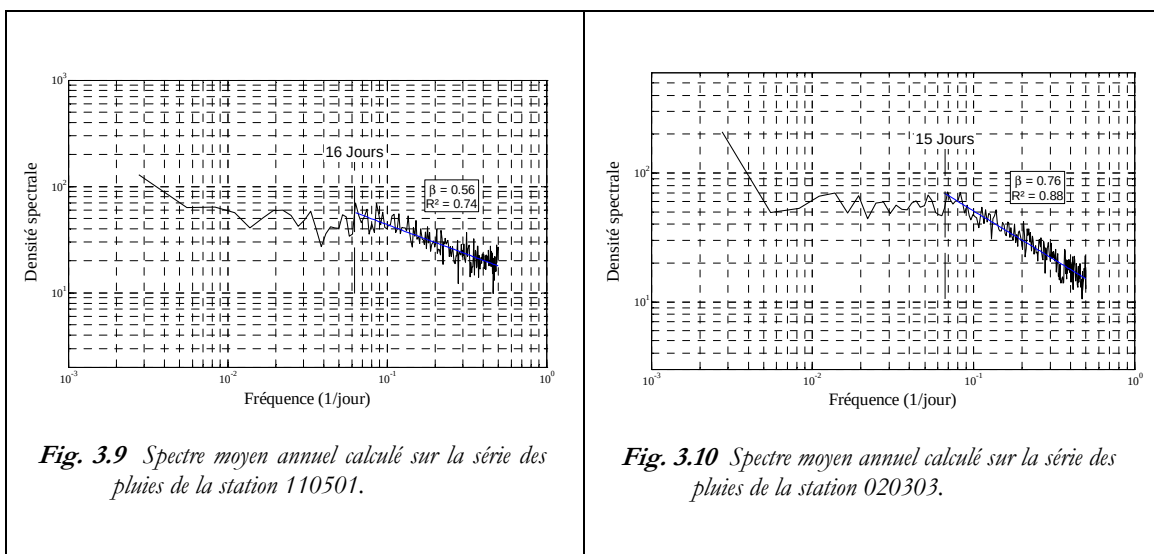
- Si la propriété d'invariance d'échelle existe, au moins en ce qui concerne l'ordre deux, condition nécessaire, mais non suffisante, pour garantir le caractère multifractal de la série ;
- Si l'hypothèse de champ conservatif est valable pour la série en question.

En pratique, il s'agit d'isoler les plages d'échelles sur lesquelles cette propriété est identifiée, et de calculer l'exposant du spectre β .

La détection de loi puissance est bien souvent délicate en raison de la grande variabilité des spectres. Différentes méthodes peuvent être appliquées pour réduire le bruit, nous décidons de découper la série en n morceaux de même longueur $\frac{L}{n}$, où L est la longueur de la série originale, et de calculer le spectre pour chaque morceau. On aura donc n spectres, et on pourra calculer la valeur moyenne relative à chaque fréquence f . Les couples (moyenne, fréquence) formeront le spectre analysé (Bernardara *et al.*, 2007).

Les spectres annuels calculés sur les séries de précipitations journalières des stations sélectionnées sont représentés dans un repère log-log sur les figures suivantes.





L'analyse spectrale des séries de précipitations journalières permet d'observer un comportement linéaire sur la plage d'échelles s'étend entre un jour et 40 jours, souvent rencontrée en littérature (De Lima, 1998). La limite supérieure du domaine n'est pas très nette. Il est toujours possible de mettre en œuvre, au-delà, une procédure de détection automatique de portions linéaires, si on souhaite rendre plus objective la localisation de la rupture. La plage d'invariance d'échelle analysée est caractérisée par un exposant du spectre inférieur à 1 ($0,25 < \beta < 0,80$). La deuxième plage d'échelles n'apparaît pas nettement sur les graphiques (fig. 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10).

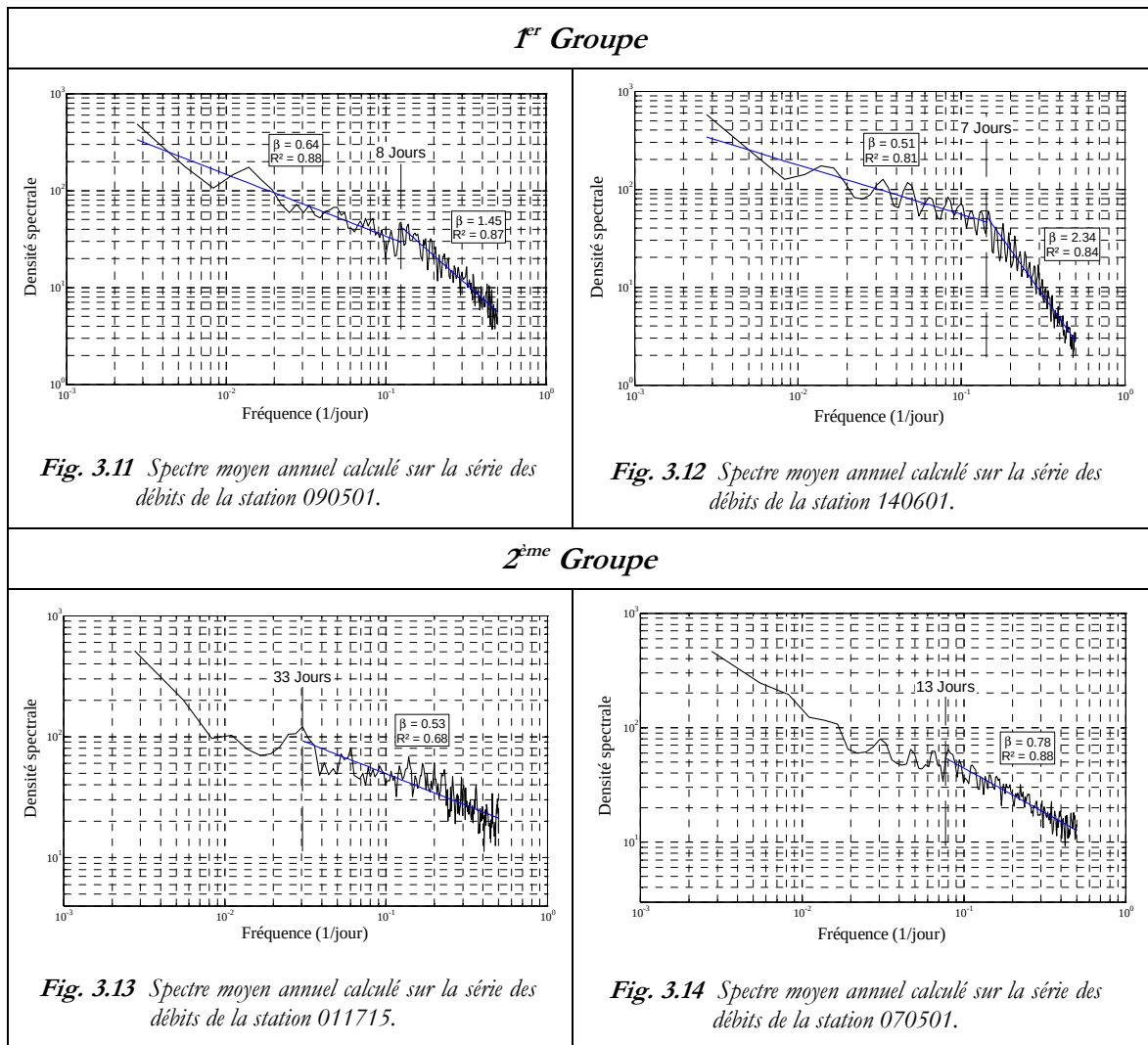
Les résultats de l'analyse spectrale des séries pluviométriques des 30 stations dont nous disposons sont présentés dans le tableau 3.1.

Nous constatons clairement que toutes les valeurs de β sont inférieures à 1, ce qui met en évidence le caractère conservatif des séries de pluies, et d'ailleurs, ce qui est tout à fait en accord avec les résultats rencontrés en littérature (Tessier *et al.*, 1993 ; De Lima et Grasman, 1999).

Tableau 3.1 Résultats de l'analyse spectrale pour les séries pluviométriques journalières.

Nom de station	Code A.N.R.H	Exposant de spectre (β)	Plage d'invariance d'échelle analysée
Ain Boucif	011104	0,61	1 – 21 jours
Ain Kermes	013201	0,38	1 – 21 jours
Takhemaret	013304	0,40	1 – 20 jours
Bordj Ghobrini	020301	0,57	1 – 36 jours
Menaceur	020303	0,76	1 – 15 jours
Gouraya	020315	0,67	1 – 15 jours
Dar El Beida	020611	0,49	1 – 40 jours
Boufarik Pépinière	021209	0,64	1 – 19 jours
Aoubellil	040201	0,72	1 – 15 jours
Ain Temouchent Era	040205	0,69	1 – 15 jours
Barrage K'sob	051005	0,35	1 – 28 jours
El Aricha	080102	0,31	1 – 30 jours
Mekmene Ben Amar	080401	0,25	1 – 40 jours
Marhoum	080501	0,29	1 – 36 jours
Mecheria	081401	0,32	1 – 16 jours
Kasdir	081801	0,28	1 – 26 jours
Tablat	090203	0,49	1 – 30 jours
Dechmya	090314	0,48	1 – 40 jours
Khabouzia	090401	0,45	1 – 24 jours
Chabet El Aneur	090512	0,64	1 – 15 jours
Ras El Ma	110102	0,25	1 – 30 jours
El Hacaiba	110203	0,49	1 – 20 jours
Merine	110501	0,56	1 – 16 jours
Sour El Ghoulane	150101	0,41	1 – 20 jours
El Hachimia	150103	0,48	1 – 18 jours
Ain Allouane	150110	0,65	1 – 13 jours
Bouira	150208	0,48	1 – 20 jours
Zemmorah	150802	0,46	1 – 28 jours
Sidi Gourari	160608	0,73	1 – 16 jours
Sidi Herriz	160609	0,59	1 – 15 jours

Les spectres annuels calculés sur les séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées sont représentés dans un repère log-log sur les figures suivantes.



L'analyse spectrale des séries de débits moyens journaliers, permet la classification des spectres annuels en deux groupes différents selon la valeur de l'exposant β .

Le premier groupe a un caractère composite, une pente β assez forte ($1,00 < \beta < 2,50$) pour les hautes fréquences où la série est non-conservative, par contre les faibles fréquences la pente est inférieure à 1. Pour ce groupe, deux plages d'échelles à comportement linéaire sont mises en évidence, avec une nette rupture du spectre autour de 5 à 15 jours environ, qui n'existe pas sur les spectres des pluies. On retiendra deux plages d'invariances d'échelles, le premier entre un jour et deux semaines, la seconde entre deux semaines et un an.

Le deuxième groupe est caractérisé par un exposant de spectre β inférieur à 1 ($0,30 < \beta < 0,90$), où les séries possèdent un caractère de conservation, et un comportement linéaire observé sur une plage d'invariance d'échelle s'étendant de un jour à un mois environ (tableau 3.2).

Tableau 3.2 Résultats de l'analyse spectrale pour les séries hydrométriques journalières.

Nom de station	Code A.N.R.H.	Exposant de spectre (β)	Plage d'invariance d'échelle analysée
1^{er} Groupe			
Arib Cheliff	011702	$\beta_1 = 2,06$ $\beta_2 = 0,80$	6 jours – 1 an
Boumedfaa	021006	$\beta_1 = 2,29$ $\beta_2 = 0,32$	6 jours – 1 an
Baghlia	022001	$\beta_1 = 1,77$ $\beta_2 = 0,62$	8 jours – 1 an
Turgo Nord	040220	$\beta_1 = 1,15$ $\beta_2 = 0,18$	5 jours – 1 an
Lakhdaria	090501	$\beta_1 = 1,45$ $\beta_2 = 0,64$	8 jours – 1 an
Oued Taria	111201	$\beta_1 = 1,08$ $\beta_2 = 0,23$	6 jours – 1 an
Medjez Amar II	140301	$\beta_1 = 1,64$ $\beta_2 = 0,53$	10 jours – 1 an
Boucheougouf	140501	$\beta_1 = 1,54$ $\beta_2 = 0,53$	8 jours – 1 an
Mirebeck	140601	$\beta_1 = 2,43$ $\beta_2 = 0,51$	7 jours – 1 an
Ain Berda	140602	$\beta_1 = 1,16$ $\beta_2 = 0,57$	12 jours – 1 an
Sidi Aissa	160614	$\beta_1 = 1,43$ $\beta_2 = 0,61$	15 jours – 1 an
2^{ème} Groupe			
Sidi Mokrefi	011602	0,84	1 – 24 jours
El Ababsa	011715	0,53	1 – 33 jours
Rouina Mines	011906	0,63	1 – 21 jours
Ain Amara	013302	0,57	1 – 30 jours
Sidi Akacha	020207	0,68	1 – 14 jours
RN 24 Azeffoun	020808	0,75	1 – 13 jours
Barrage K'sob	051005	0,42	1 – 15 jours
El Kantra	061201	0,50	1 – 22 jours
Djemorah	061301	0,56	1 – 18 jours
Reboa	070403	0,54	1 – 16 jours
Chemmora	070501	0,78	1 – 13 jours
Yabous	070601	0,85	1 – 24 jours
Beni Slimane	090305	0,56	1 – 24 jours
La Traille	090408	0,87	1 – 28 jours
El Hacaiba	110101	0,43	1 – 30 jours
Sidi Ali Ben Youb	110201	0,53	1 – 13 jours
El Azreg	120522	0,49	1 – 17 jours
El Asnam	150204	0,29	1 – 26 jours

3.5.2 Détermination de la fonction d'échelle des moments

3.5.2.1 Analyse des lois d'échelle des moments

Dans ce qui suit, on s'intéressera aux séries conservatives, dont les plages d'invariance d'échelles ayant des valeurs d'exposant du spectre β inférieurs à 1.

En effet le spectre d'énergie est la transformée de Fourier de la fonction d'autocréation de la série (Schertzer et Lovejoy, 1993), or, comme on le verra plus loin, un champ multifractal demande l'analyse de ses moments statistiques à tous ordres et non pas seulement à l'ordre 2.

Une des méthodes les plus simples d'analyse multifractale est basée sur l'estimation des moments traces, appelée TM, de l'anglais : *Trace Moment* (Schertzer et Lovejoy, 1987). Les données à la plus fine résolution sont normalisées (moyenne égale à 1) et leur résolution est ensuite agrégée vers des échelles de temps de plus en plus grandes, avec un rapport d'échelle $\lambda = T/t$ (T étant l'échelle externe et t l'échelle d'observation), ensuite chaque valeur des champs agrégés est élevée à la puissance q . Les moments de chaque champ de rapport d'échelle λ est calculé comme étant la moyenne d'ensemble. On répète ce processus pour différentes valeurs de q .

a) Algorithme de calcul des moments traces

➤ Procédure

Pour la mise en œuvre de la méthode TM, on a construit un programme en Matlab, qui réalise l'ensemble des opérations décrites précédemment.

On peut résumer sa procédure comme suit :

- Lecture des données ;
- Normalisation de la série à la plus fine résolution (moyenne = 1) ;
- Agrégation de la série aux échelles de plus en plus grandes ;
- Calcul des moments traces pour chaque niveau d'agrégation λ .

Après exécution, le programme nous fournit les résultats suivants :

- Les moments traces $\langle \varepsilon_{\lambda}^q \rangle$ en fonction des rapports d'échelles λ , sur un diagramme bi-logarithmique ;
- Les bornes de plage d'invariance d'échelle.

➤ Algorithme

L'algorithme du tableau ci-dessus représente les étapes principales du programme développé pour le calcul des moments traces.

Tableau 3.3 Algorithme de calcul des moments traces par la méthode TM.

Algorithme : Trace Moment (TM).

Entrées : Série de données, Vecteur des ordres de moments.

```

1  Début
2  |   Calcul de nombre des ordres de moments (m) ;
3  |   Normalisation de série (moyenne égale à 1) ;
4  |   Agrégation de la série normalisée aux échelles de plus
   |   en plus grandes ;
5  |   Pour i=1:m faire
6  |       |   Calcul des moments traces d'ordre  $q_i$  pour chaque niveau
   |       |   d'agrégation  $\lambda$  ;
7  |       |   Trace dans un diagramme bi-logarithmique les
   |       |   moments traces  $\langle \varepsilon_{\lambda}^{q_i} \rangle$  en fonction des rapports
   |       |   d'échelles  $\lambda$ .
8  |   Fin
9  |   Détermination des bornes de plage d'invariance
   |   d'échelle ;
10 |   Régression linéaire entre les moments traces et les
   |   rapports d'échelle pour chaque valeur de q.
11 Fin

```

b) Résultats et discussions

Dans les figures 3.15, 3.16, 3.17 et 3.18 on a rapportés les moments d'ordre q , avec $0,5 < q < 4$, calculés pour chaque niveau d'agrégation λ , pour les séries de précipitations journalières des stations sélectionnées.

Pour un processus multifractal, les moments d'ordre q prennent la forme décrite par l'équation (3.8). C'est ce que nous observons sur ces figures, qui suggèrent un comportement puissance. La propriété d'invariance d'échelle déjà détectée sur les spectres de pluies, pour ce qui concerne les propriétés d'ordre 2 des séries, est confirmée par l'examen des moments d'ordres différents. Par conséquent, le comportement multifractal n'est évident que pour les échelles comprises entre 1 et 1 mois environ pour les séries des pluies.

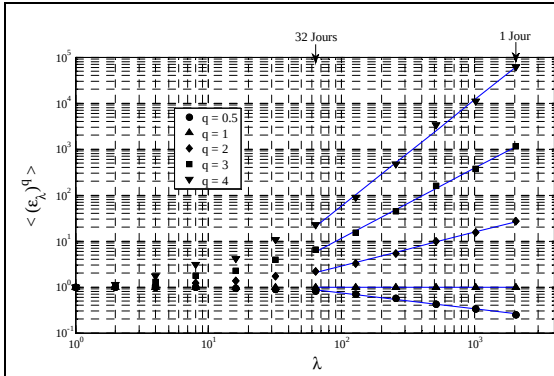


Fig. 3.15 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 081801 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

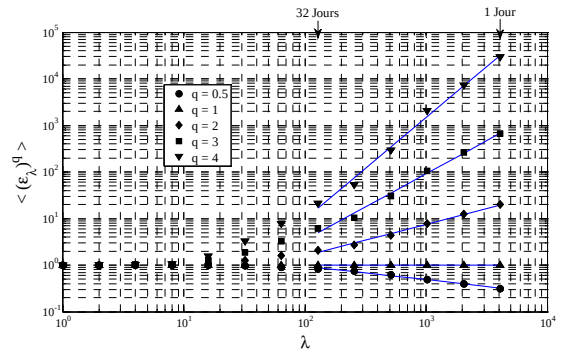


Fig. 3.16 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 013304 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

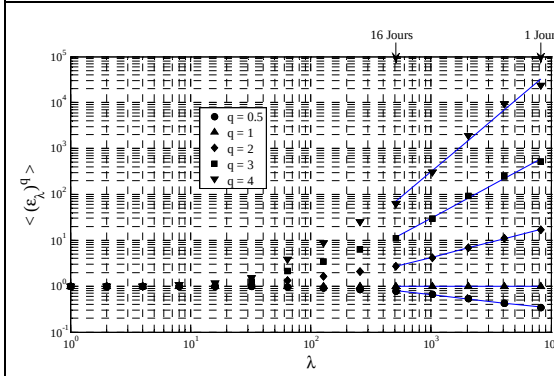


Fig. 3.17 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 110501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

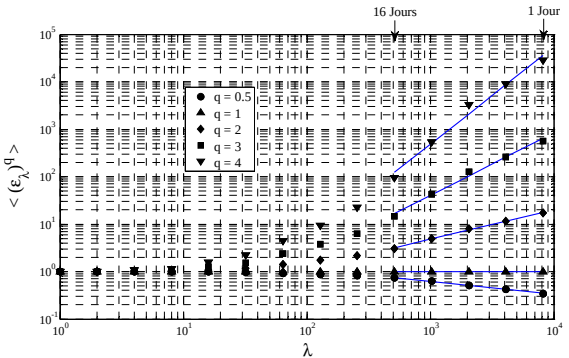


Fig. 3.18 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les pluies de la station 020303 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

Les figures 3.19, 3.20, 3.21 et 3.22 représentent les courbes des moments traces (i.e. $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$ vs λ) en coordonnées logarithmiques, pour les séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées.

Nous remarquons qu'il est impossible de joindre tous les points par une droite. Toutefois nous pouvons distinguer une gamme d'échelles où la relation entre les logarithmes des moments traces d'ordre q et le logarithme des rapports d'échelle peut être approchée par une droite.

Les résultats tirés par l'analyse spectrale des séries de débits concernant la détection préliminaire de propriété d'invariance d'échelle, pour ce qui concerne l'ordre 2 des séries, est confirmée par l'examen des moments d'ordres différents. Là également, le comportement multifractal n'est évident que pour les échelles comprises entre 8 à 512 jours pour le premier groupe, et entre 1 à 32 jours pour le deuxième groupe.

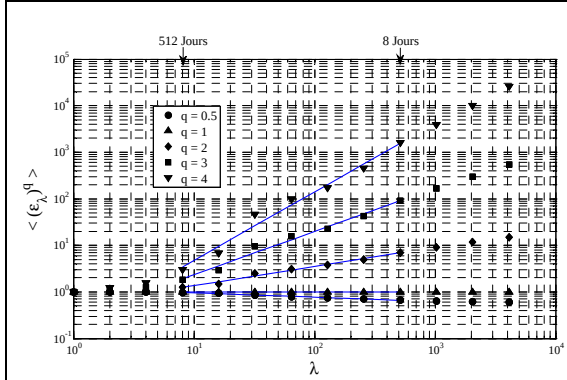


Fig. 3.19 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 090501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

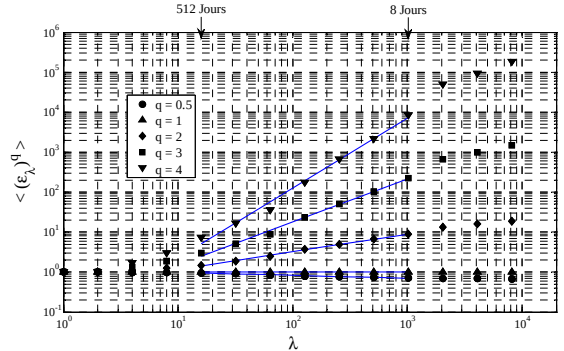


Fig. 3.20 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 140601 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

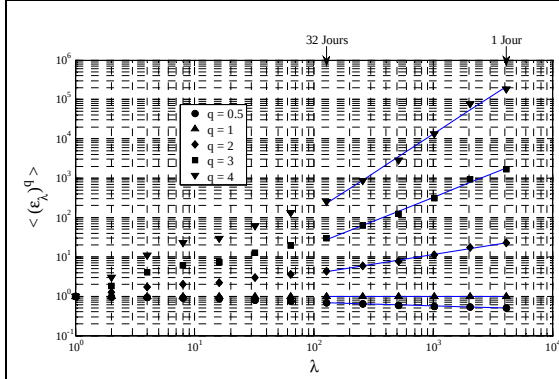


Fig. 3.21 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 011715 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

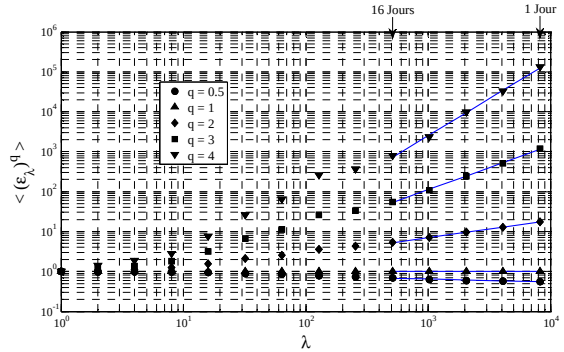


Fig. 3.22 Comportement des moments traces en fonction de rapport d'échelle λ pour différentes valeurs de q pour les débits de la station 070501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

3.5.2.2 Détermination de $K(q)$

L'invariance d'échelle d'un champ se traduit par l'existence d'une relation puissance entre les moments d'ordre q et les rapports d'échelle λ (éq. 3.8).

La méthode TM définie précédemment, est une méthode simple et facile à mettre en œuvre qui permet de déterminer directement la fonction d'échelle $K(q)$. On recherchera sur l'invariance d'échelle des moments d'ordre q d'un champ ε_λ à différentes échelles de résolutions λ . La représentation en diagramme logarithmique des moments d'ordre q en fonction de λ permet de déterminer la valeur de $K(q)$ comme étant la pente de la partie linéaire sur la gamme d'échelles correspondante à la plage d'invariance d'échelle (fig. 3.23). En calculant aussi avec les autres valeurs de q , on obtient la fonction $K(q)$.

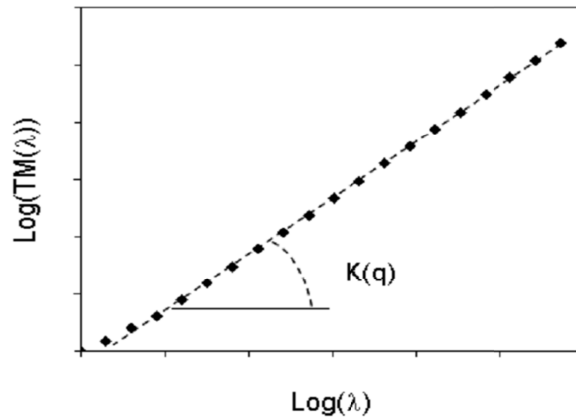


Fig. 3.23 Illustration de la détermination de la fonction $K(q)$.

On a calculé les moments statistiques pour différentes valeurs q , allant de 0,1 à 4 avec un pas de 0,1. Pour chaque valeur de q , on estime la valeur de $K(q)$, puis on trace le graphe $K(q)$ en fonction de q , ce qui donne les courbes des figures ci-après.

Les fonctions $K(q)$ correspondant aux séries de précipitations journalières des stations sélectionnées sont représentées dans les figures 3.24, 3.25, 2.36 et 3.27.

On peut voir que les précipitations apparaissent comme un processus multifractal, qui provoque une légère convexité de la courbe de la fonction d'échelle $K(q)$ pour les faibles ordres de moments.

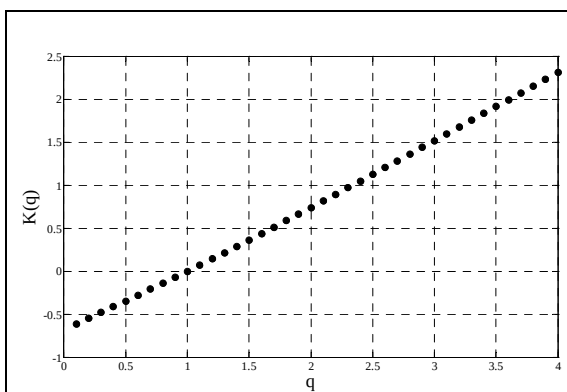


Fig. 3.24 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 081801, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

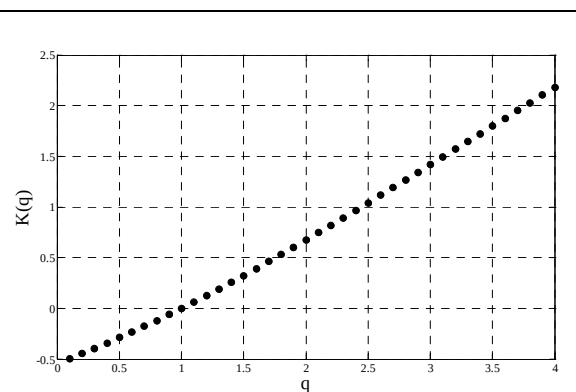


Fig. 3.25 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 013304, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

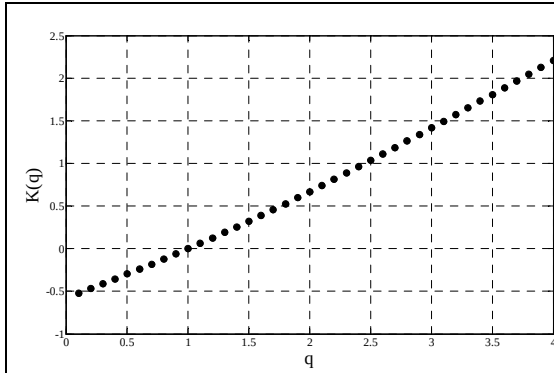


Fig. 3.26 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 110501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

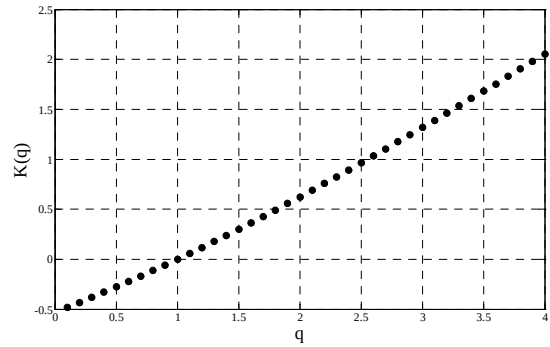


Fig. 3.27 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des pluies de la station 020303, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

Les fonctions $K(q)$ correspondantes aux séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées sont représentées dans les figures 3.28, 3.29, 3.30 et 3.31.

Ces figures donnent la variation du coefficient $K(q)$ en fonction de l'ordre q . Nous relevons une première partie courbée, puis une seconde partie linéaire. Donc les débits constituent un processus plus complexe. Les moments d'ordre élevés sont caractérisés par un comportement linéaire de $K(q)$, il s'agit d'un processus monofractal, et les moments de faible ordre sont eux caractérisés par la convexité de la courbe de $K(q)$ caractérisant un processus multifractal. La transition entre les deux parties de la courbe de la fonction d'échelle $K(q)$ s'effectue autour de $1,5 < q < 2,5$.

Notons que la grande variabilité des fonctions $K(q)$ pour les débits, est probablement due à la non stationnarité des signaux étudiés (Labat, 2000).

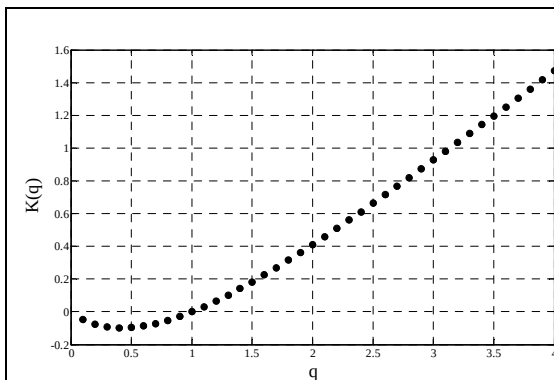


Fig. 3.28 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 090501, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.

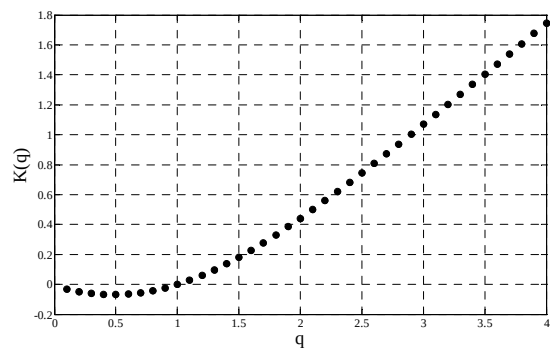


Fig. 3.29 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 140601, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.

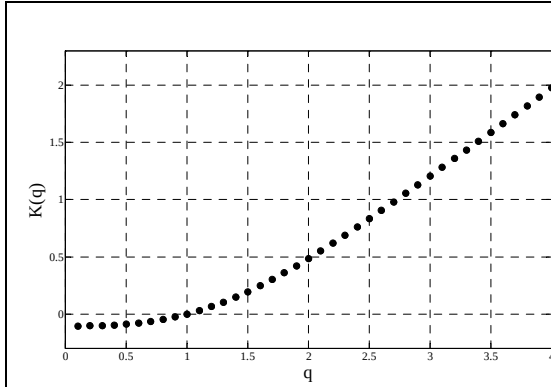


Fig. 3.30 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 011715, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

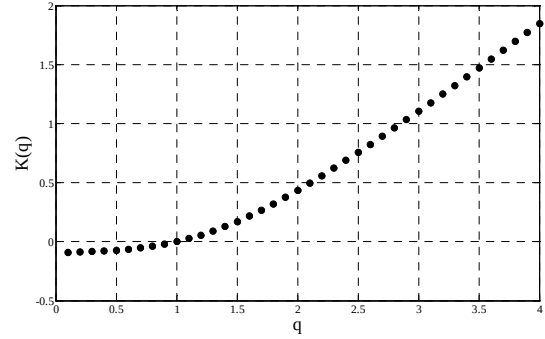


Fig. 3.31 Fonction $K(q)$ empirique pour la série des débits de la station 070501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

3.5.3 Détermination de la fonction codimension

3.5.3.1 Distribution de probabilité

Nous rappelons qu'un processus est multifractal si la probabilité des valeurs supérieures à un seuil s'écrit comme une fonction puissance du rapport d'échelle λ (éq. 3.7).

La méthode la plus simple utilisée pour déterminer la probabilité d'obtenir à la résolution λ une singularité d'ordre supérieur ou égal à γ , est appelée méthode PDMS, de l'anglais : *Probability Distribution Multiple Scaling* (Lavallée, 1991).

Pour le calcul pratique des distributions de probabilité de l'équation (3.7), à chaque résolution, et pour la singularité γ , on pave l'espace de $N_\lambda = \lambda$ boîtes de volume λ^{-1} . Si $N_\lambda(\gamma)$ est le nombre de boîtes ayant une intensité ε_λ qui vérifie l'égalité :

$$\frac{\log(\varepsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} \geq \gamma \quad (3.14)$$

alors :

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda} \quad (3.15)$$

Le processus sera répété pour différentes valeurs de la singularité γ et pour les valeurs décroissantes de résolution λ (obtenues par agrégation du signal). La représentation graphique $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$ en fonction de λ en coordonnées log-log conduit à des droites si le processus étudié est multifractal.

a) Algorithme de calcul

✚ Procédure

Pour la mise en œuvre de la méthode PDMS, on a établi un programme en Matlab, qui réalise l'ensemble des opérations décrites précédemment.

Il effectue les opérations suivantes :

- Lecture des données ;
- Agrégation de la série aux échelles de plus en plus grandes ;
- Calcul des probabilités au dépassement pour chaque valeur de singularité γ .

✚ Algorithme

L'algorithme du tableau suivant représente les étapes principales du programme développé pour le calcul probabilités au dépassement.

Tableau 3.4 *Algorithme de calcul des probabilités au dépassement par la méthode PDMS.*

Algorithme : *Probability Distribution Multiple Scaling (PDMS).*

Entrées : Série de données, Vecteur des singularités.

```

1  Début
2    Calcul du nombre des singularités (m) ;
3    Agrégation de la série aux échelles de plus en plus
    grandes ;
4    Pour i=1:m faire
5      Calcul des probabilités au dépassement d'un seuil de singularité
       $\gamma_i$  pour chaque niveau d'agrégation  $\lambda$  ;
6      Trace sur un diagramme bi-logarithmique les
      probabilités au dépassement  $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^{\gamma_i})$  en
      fonction des rapports d'échelles  $\lambda$ .
7    Fin
8    Détermination des bornes de plage d'invariance
    d'échelle ;
9    Régression linéaire entre les probabilités et les rapports
    d'échelle pour chaque valeur de  $\gamma$ .
10 Fin

```

b) Résultats et discussions

Nous avons représenté dans les figures suivantes les probabilités $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$ en fonction des rapports d'échelle λ en coordonnées logarithmiques pour différentes valeurs de γ , pour les séries des précipitations journalières des stations sélectionnées.

Les courbes des 3.32, 3.33, 3.34 et 3.35 peuvent être approchées par des droites sur des gammes d'échelles allant de 1 à 32 jours. Ces figures montrent bien que dans cette gamme d'échelles, le processus est invariant d'échelle.

La propriété d'invariance d'échelle déjà détectée sur les moments statistiques, est confirmée par l'examen de la distribution des probabilités. Donc le comportement multifractal n'est évident que pour les échelles comprises entre un jour à un mois environ pour les séries de pluies.

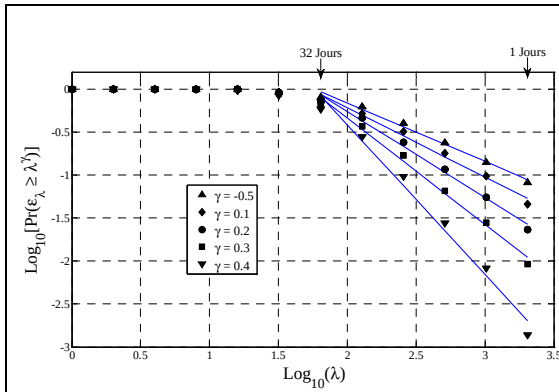


Fig. 3.32 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 081801 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

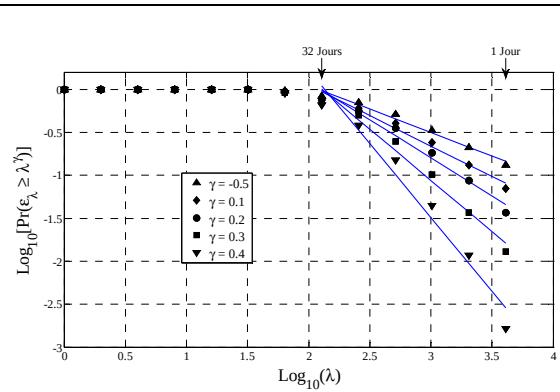


Fig. 3.33 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 013304 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

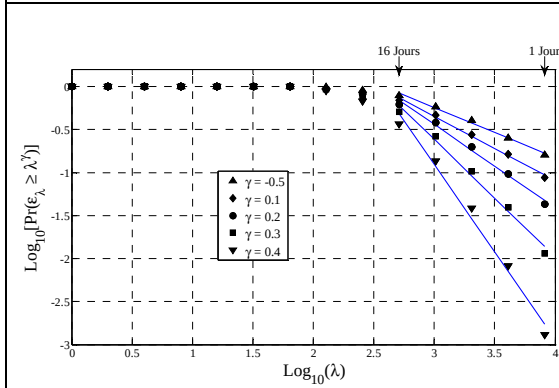


Fig. 3.34 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 110501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

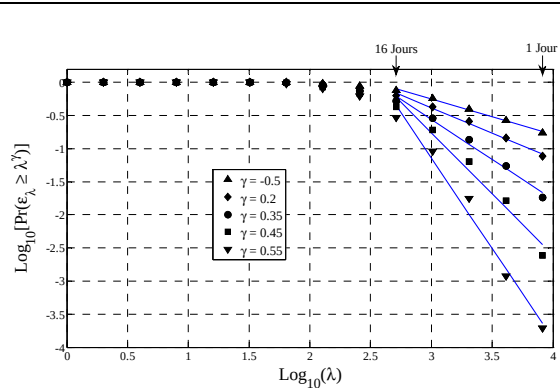


Fig. 3.35 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les pluies de la station 020303 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

Nous avons représenté dans les figures 3.36, 3.37, 3.38 et 3.39 les probabilités $\Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$ en fonction des rapports d'échelle λ en coordonnées logarithmiques pour différentes valeurs de γ , pour les séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées.

Nous remarquons qu'il est impossible de rejoindre tous les points de même singularité par une droite. Toutefois nous pouvons distinguer des gammes d'échelles où la relation entre logarithme de rapport d'échelle λ et le logarithme des probabilités au dépassement peut être approché par une droite.

Le comportement de l'invariance d'échelle des probabilités au dépassement est maintenu de 8 à 512 jours pour les séries de débits du premier groupe, et de 1 à 32 jours pour le deuxième groupe, où l'ajustement linéaire est considéré. Ces résultats confirment la gamme d'échelles trouvée par l'analyse des moments traces. Donc le comportement multifractal pour les débits n'est évident que pour les ces gammes d'échelles.

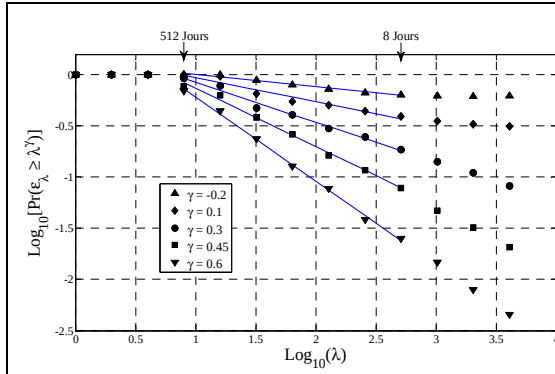


Fig. 3.36 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 090501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

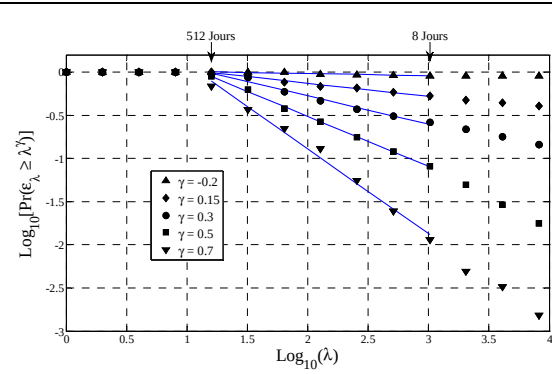


Fig. 3.37 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 140601 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

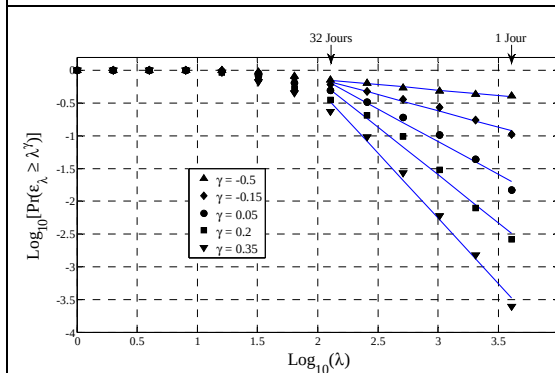


Fig. 3.38 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 011715 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

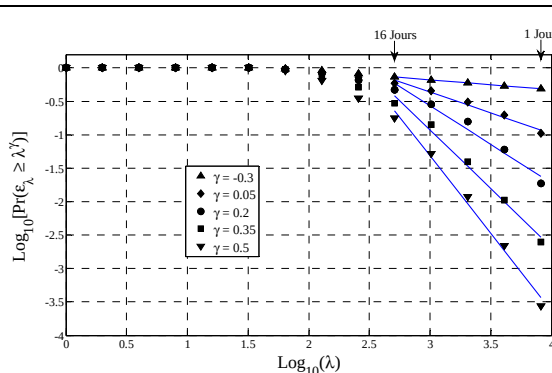


Fig. 3.39 Comportement de la distribution des probabilités au dépassement pour différentes valeurs de γ pour les débits de la station 070501 : le comportement multifractal est mis en évidence pour une gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

3.5.3.2 Détermination de $c(\gamma)$

L'invariance d'échelle d'un champ se traduit par l'existence d'une relation puissance entre les probabilités $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$ et les rapports d'échelle λ (éq. 3.7).

La méthode PDMS définie précédemment, est une technique développée pour estimer directement la fonction codimension $c(\gamma)$, qui décrit l'invariance d'échelle multiple¹ de la distribution des probabilités du processus. Cette méthode évite l'utilisation de la transformation de Legendre et la supposition implicite de convergence de tous les moments statistiques (Lavallée *et al.*, 1991a).

La représentation en diagramme logarithmique des probabilités au dépassement en fonction de λ permet de déterminer la valeur de $c(\gamma)$ comme étant l'opposé de la pente de partie linéaire sur la gamme d'échelles correspondante à la plage d'invariance d'échelle (fig. 3.40). En calculant aussi avec les autres valeurs de singularités γ , on obtient la fonction $c(\gamma)$.

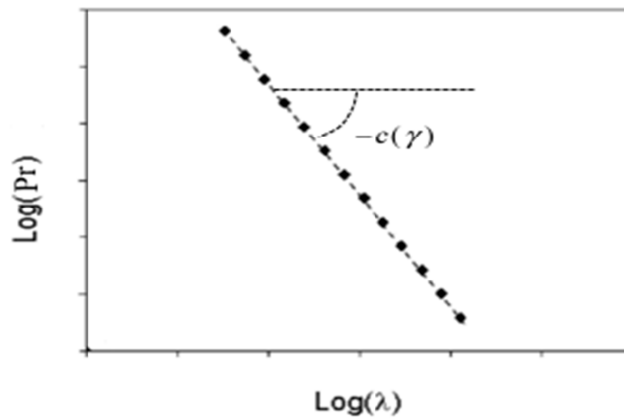


Fig. 3.40 Illustration de la détermination de la fonction $c(\gamma)$.

On a calculé les probabilités au dépassement pour les valeurs γ allant de -1 à 1 avec un pas de 0,025. Pour chaque singularité, on a estimé une valeur de $c(\gamma)$, puis on a tracé le graphe de $c(\gamma)$ en fonction de γ , ce qui a donné les courbes des figures suivantes.

¹ Un système est soumis à une invariance d'échelle multiple si certaines de ses propriétés ne dépendent pas des différentes échelles d'observation mais de leur rapport. Le phénomène étudié n'est plus reproduit de façon identique d'une échelle à l'autre, mais sa structure reste la même. Dans le cas de l'invariance multiple, le système est multifractal et n'est plus caractérisé par une dimension unique mais par une fonction de codimension (Métivier, 1992).

Les fonctions $c(\gamma)$ correspondant aux séries des précipitations journalières des stations sélectionnées sont représentées dans les figures 3.41, 3.42, 3.43 et 3.44.

On peut voir que les fonctions $c(\gamma)$ sont toujours croissantes et convexes, et que pour les singularités d'ordre élevé (à partir de $\gamma = 0,40$) la fonction codimension devient linéaire.

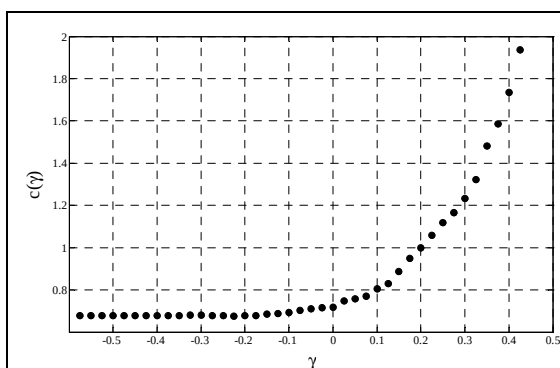


Fig. 3.41 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 081801, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

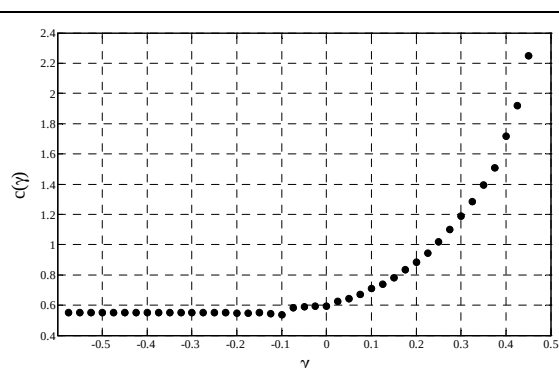


Fig. 3.42 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 013304, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

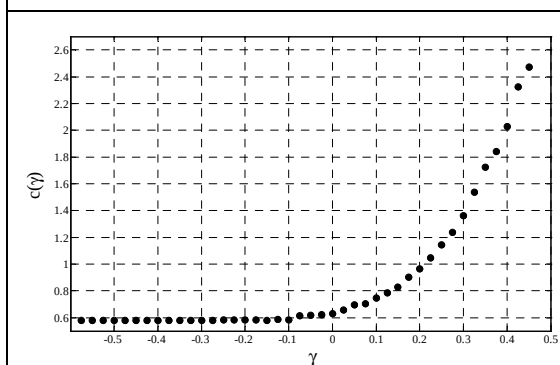


Fig. 3.43 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 110501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

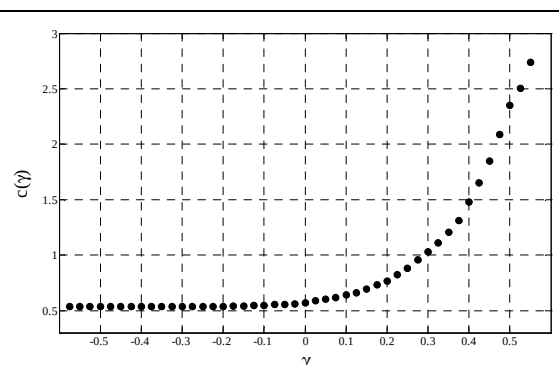


Fig. 3.44 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des pluies de la station 020303, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

Les fonctions $c(\gamma)$ correspondant aux séries de débits moyens journaliers des stations sélectionnées sont représentées dans les figures 3.45, 3.46, 3.47 et 3.48.

On peut voir que les fonctions $c(\gamma)$ pour les séries hydrométriques sont composées de sections linéaires pour les fortes singularités, et non linéaires pour les singularités de faible ordre.

La fonction codimension pour les séries de débits peut atteindre des singularités plus élevées par rapport à celles des pluies (jusqu'à $\gamma = 0,85$).

La section linéaire sur la courbe de la fonction $c(\gamma)$ caractérise l'apparition des événements rares et extrêmes.

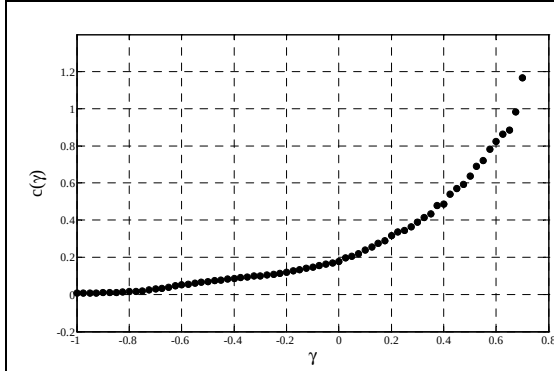


Fig. 3.45 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 090501, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.

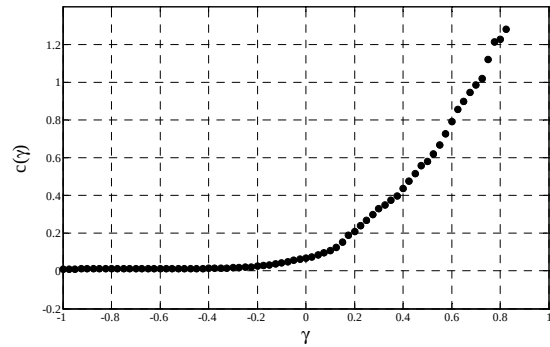


Fig. 3.46 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 140601, valable pour la plage d'échelles 8-512 jours.

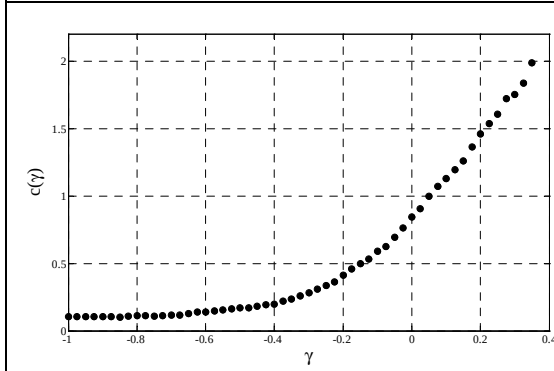


Fig. 3.47 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 011715, valable pour la plage d'échelles 1-32 jours.

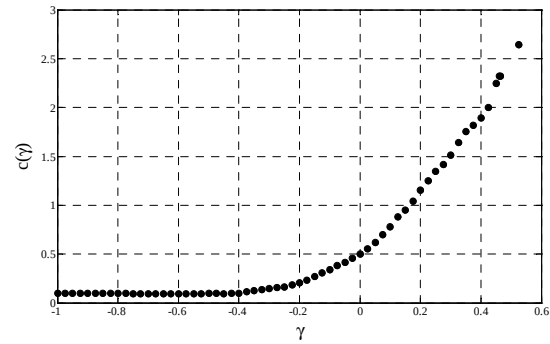


Fig. 3.48 Fonction $c(\gamma)$ empirique pour la série des débits de la station 070501, valable pour la plage d'échelles 1-16 jours.

3.5.4 Détermination des paramètres multifractals universels

3.5.4.1 Estimation de H

La première étape pour une estimation correcte des paramètres multifractals universels est le calcul de H par l'analyse spectrale. Dans le cas où $H \neq 0$, le champ est non-conservatif, et une procédure de différentiation est engagée pour isoler la partie conservative du processus analysée (Bernardara *et al.*, 2007). C'est sur cette dernière que seront calculés les paramètres α et C_1 , ou la valeur de H est nulle.

L'estimation préliminaire de H est nécessaire pour pouvoir établir si le processus analysée est conservatif. Une manière d'approcher H se fonde sur le spectre de Fourier. Sous réserve de propriétés d'invariance d'échelle, H est liée à l'exposant du spectre β introduit dans l'équation (3.13), ainsi qu'à l'exposant du moment d'échelle d'ordre deux $K(2)$, par l'équation suivante (De Lima, 1998) :

$$H = \frac{\beta - 1 + K(2)}{2} \quad (3.16)$$

Les valeurs de $K(q)$ pour les séries de pluies et des débits dans notre cas, sont calculées avec régression linéaire de la plage d'invariance d'échelle ou les exposants du spectre sont inférieurs à 1, ce qui donne toujours des valeurs de H presque nulle ($H \approx 0$), indiquant que les pluies et les débits analysés dans cette plage d'invariance d'échelle, sont des processus conservatifs.

3.5.4.2 Détermination de α et C_1

Plusieurs méthodes existent pour la détermination des paramètres du modèle multifractal universel : méthodes indirectes qui exploitent les propriétés géométriques des deux fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$, des méthodes directes permettent de déterminer directement ces paramètres sans passer par les fonctions qu'ils définissent (Biaou, 2004).

Pour cette étude, nous avons privilégié la méthode du moment double trace DTM, de l'anglais : *Double Trace Moment*, qui est une méthode directe de détermination des paramètres multifractals universels et, de ce fait, nous en présenterons largement la technique dans cette partie avant d'en faire une application dans la section suivante sur les champs de précipitation et de débit dont les séries sont présentées dans le premier chapitre.

a) Principe de la méthode DTM

La méthode du moment double trace DTM (Lavallée *et al.*, 1991b ; Schmitt *et al.*, 1992) est une généralisation de la méthode du moment trace.

Les étapes principales du DTM sont schématisées sur la figure 3.49. A la première étape, le champ ε_Λ à la plus petite échelle (donc pour $\lambda = \Lambda$) est élevé à la puissance η (ε_Λ^η). Ensuite, l'analyse du DTM est procédée comme dans l'analyse du TM sur le champ correspondant ε_Λ^η . Par conséquent, l'analyse de DTM est de rechercher l'invariance d'échelle des moments statistiques d'ordre q du champ $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ à des résolutions de plus en plus petites $1 < \lambda < \Lambda$. Ce champ $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ est obtenu par agrégation sur un rapport $\frac{\lambda}{\Lambda}$:

$$\varepsilon_\lambda^{(\eta)} = A[\varepsilon_\Lambda^\eta, \lambda] \quad (3.17)$$

où $A[\varepsilon_\Lambda^\eta, \lambda]$ désigne l'agrégation du champ ε_Λ^η à résolution Λ en champ $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ à résolution λ . Les moments d'ordre q sont calculés pour ce champ :

$$\langle \varepsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle \propto \lambda^{K(q,\eta)} = \frac{\langle \varepsilon_\Lambda^{\eta q} \rangle}{\langle \varepsilon_\Lambda^\eta \rangle^q} = \frac{\lambda^{K(q\eta)}}{\lambda^{qK(\eta)}} = \lambda^{K(q\eta) - qK(\eta)} \quad (3.18)$$

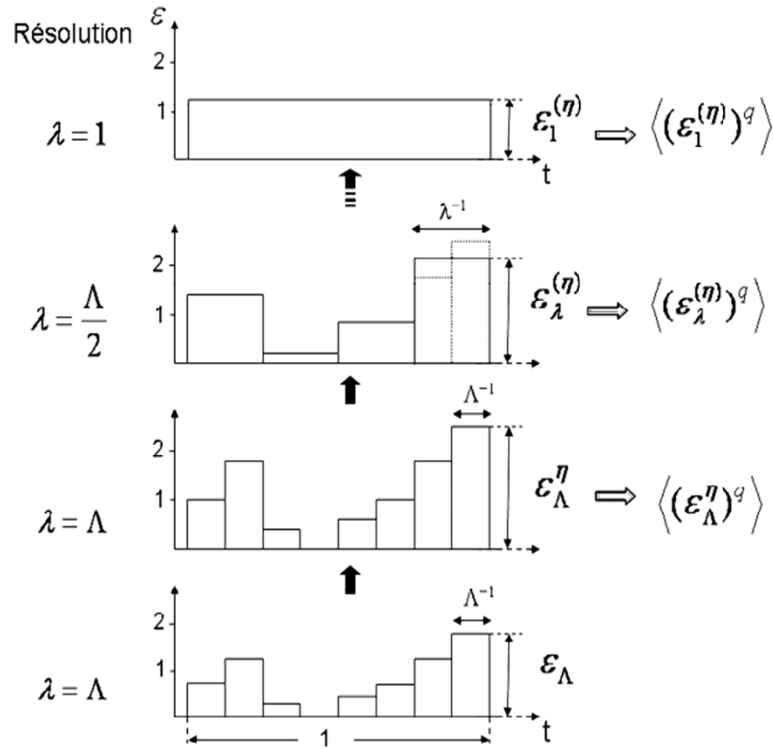


Fig. 3.49 Illustration schématique de la méthode du DTM présentant ses étapes principales (D'après Hoang, 2011).

Pour chaque valeur du moment d'ordre q , l'équation (3.18) permet d'estimer $K(q, \eta)$ comme une fonction de différentes valeurs de η à l'aide d'une régression linéaire en échelle bi-logarithmique de $\varepsilon_\lambda^{(\eta)q}$ en fonction de rapport d'échelle λ sur une gamme de λ (fig. 3.50-a). Pour les processus multifractals, du fait des équations (3.11) et (3.18) l'exposant de la loi d'échelle $K(q, \eta)$ des moments statistiques de $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ satisfait:

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (3.19)$$

La deuxième étape de l'analyse du DTM, consiste à une représentation en diagramme bi-logarithmique de $K(q, \eta)$ en fonction de η (fig. 3.50-b), pour chaque valeur fixé de q , ce qui permet de déterminer la valeur de α , qui est la pente de la partie linéaire. Le paramètre C_1 peut se déduire des formules (3.11) et (3.19) avec $\eta = 1$.

$$C_1 = K(q) \frac{\alpha - 1}{q^\alpha - q} \quad (3.20)$$

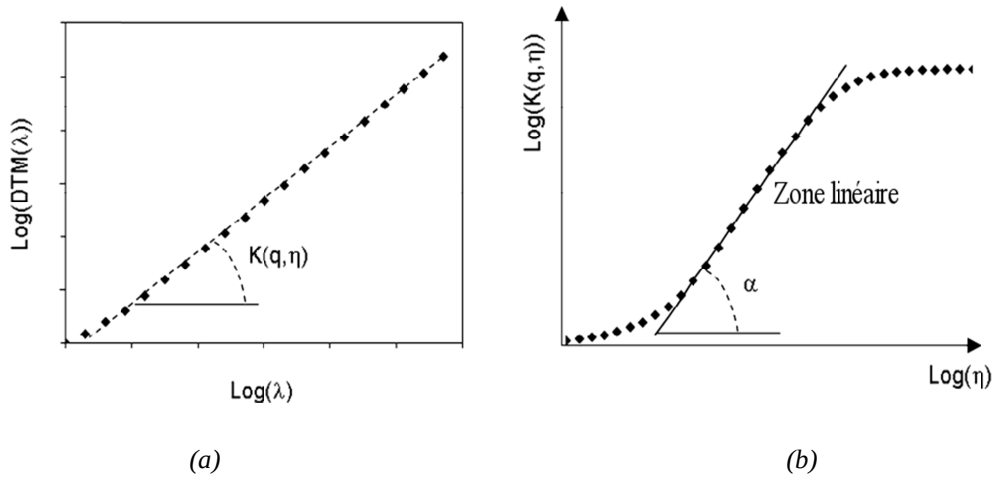


Fig. 3.50 Illustration de la détermination des paramètres multifractals universels par DTM :

- (a) $K(q, \eta)$ c'est la pente de $\text{Log}(\langle \epsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle)$ en fonction de $\text{Log}(\lambda)$;
- (b) L'indice de multifractalité α c'est la pente de $\text{Log}[K(q, \eta)]$ en fonction de $\text{Log}(\eta)$.

Les courbes $K(q, \eta)$ sont généralement formées par 3 parties : deux plateaux correspondant aux grandes et petites valeurs de η et une partie linéaire. On constate que, pour les données réelles, la zone linéaire ne porte que sur une certaine gamme des valeurs de η . Les limites de cette gamme dépendent de la caractéristique des données étudiées (Hoang, 2011).

b) Code de calcul

➤ Procédure

Pour la mise en œuvre pratique de la méthode, un programme d'analyse des champs par la méthode du DTM a été développé en Matlab.

En application de la démarche exposée à la section précédente, la procédure peut être résumée par les opérations suivantes :

- Calcul pour différentes valeurs de η les valeurs de $\langle \epsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle$ correspondantes ;
- Ajustement graphique conduit aux valeurs de $K(q, \eta)$ correspondantes ;
- Ajustement graphique effectué sur la courbe $\text{Log}[K(q, \eta)] = f[\text{Log}(\eta)]$ donnera la valeur de α , puis la valeur de C_1 .

Après exécution, le programme nous fournit les paramètres multifractals universels estimés par la méthode DTM.

➤ Algorithme

L'algorithme du tableau 3.5 représente les étapes principales du programme développé pour le calcul des paramètres multifractals universels.

Tableau 3.5 Algorithme de détermination des paramètres multifractals universels (α , C_1) par la méthode DTM.

Algorithme : Double Trace Moment (DTM).

Entrées : Série de données, Vecteur des valeurs de η , Ordre du moment fixé (q).

```

1  Début
2    Calcul du nombre de valeurs de  $\eta$  ( $m$ ) ;
3    Pour  $i=1:m$  faire
4      Normalisation de la série à la plus fine résolution
        élevée à la puissance  $\eta_i$  par la moyenne
        d'ensemble ;
5      Agrégation de la série normalisée aux échelles de plus
        en plus grandes ;
6      Calcul du moment d'ordre  $q$  pour chaque niveau d'agrégation  $\lambda$  ;
7      Trace dans un diagramme bi-logarithmique les
        moments  $\langle \epsilon_\lambda^{(\eta_i)q} \rangle$  en fonction des rapports d'échelles
         $\lambda$  ;
8      Saisie les bornes de la partie linéaire de courbe ;
9      Calcul  $K(q, \eta_i)$  par régression linéaire de la partie
        linéaire.
10   Fin
11   Trace dans un diagramme bi-logarithmique les quantités
         $K(q, \eta)$  en fonction de  $\eta$  ;
12   Saisie les bornes  $\eta_{\min}$  et  $\eta_{\max}$  de la partie linéaire de
        courbe ;
13   Calcul de  $\alpha$  comme étant la pente de la partie linéaire ;
14   Détermination de  $C_1$ .
15 Fin

```

c) Application de la méthode DTM sur les données

L'objectif de cette partie est de déterminer les paramètres α et C_1 par la technique DTM. Nous déterminons ces paramètres pour une analyse temporelle, en utilisant les séries journalières des précipitations et des débits.

Dans la technique DTM décrite ci-dessus, il a été question de faire varier, pour chaque résolution, les valeurs de η , mais durant toute l'opération, on travaille avec une seule valeur de q fixée une fois pour toute. On est alors en droit de se poser la question de savoir quelle valeur attribuer à q . La question qu'on peut se poser : En fixant une valeur à q plutôt qu'une autre, les valeurs des paramètres ne changent-elles pas ? (Biaou, 2004).

Ces interrogations étant légitimes et justifiées. Pour répondre à cette question, nous effectuons pour plusieurs valeurs de q ($q = 1,5 ; 2 ; 2,5$), une analyse par la méthode DTM sur les série de données, comme décrit dans les sections précédentes et nous reportons sur un même graphique en diagramme log-log, les courbes $K(q, \eta)$ en fonction de η (Zhou, 2004 ; Hoang, 2008).

Les paramètres multifractals universels pour chaque série de données sont calculés comme étant la moyenne des paramètres estimés pour chaque valeur de q . Les barres d'erreurs sont estimées à partir des variations de α et C_1 pour les différentes valeurs de q . On peut écrire :

$$\alpha = \frac{\alpha(q = 1,5) + \alpha(q = 2) + \alpha(q = 2,5)}{3} \pm \Delta(\alpha) \quad (3.21)$$

$$C_1 = \frac{C_1(q = 1,5) + C_1(q = 2) + C_1(q = 2,5)}{3} \pm \Delta(C_1) \quad (3.22)$$

✦ Séries pluviométriques

Nous avons effectué une analyse par DTM des séries de précipitations journalières, afin de déterminer les paramètres α et C_1 , ainsi que l'invariance d'échelle sur ces données.

Les moments doubles traces moyens à chaque résolution λ sont calculés pour les différentes valeurs de q choisis. Les figures 3.51, 3.53, 3.55 et 3.57 présentent respectivement les courbes DTM, pour les valeurs de $\eta = 0,14 ; 1 ; 2$ et 5 et pour ordre de moment fixé à $q = 2$, pour les séries de précipitations journalières des stations sélectionnées.

Nous avons obtenu un comportement d'invariance d'échelle sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours, confirmant la gamme d'échelles trouvée par l'analyse des lois d'échelles des moments (section 3.5.2.1). Les valeurs $K(q, \eta)$ pour différentes valeurs de η sont déterminées par la régression linéaire sur cette gamme d'échelles.

Les courbes des figures 3.52, 3.54, 3.56 et 3.58 illustrent la deuxième partie de la technique du DTM. La pente des parties linéaires de ces courbes donne la valeur du paramètre α , celle du paramètre C_1 s'en déduit immédiatement en prenant l'intercepte de la courbe avec l'axe des abscisses.

Les résultats des calculs de ces paramètres, station par station, sont présentés dans le tableau 3.6. Leur valeur moyenne sur l'ensemble des 30 stations étudiées se présente comme suit :

$$\alpha = 0,452 \pm 0,107 \text{ et } C_1 = 0,541 \pm 0,070$$

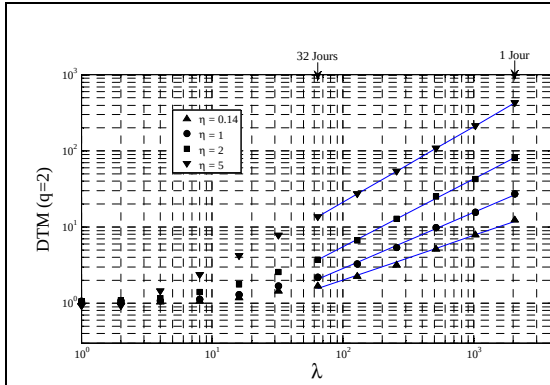


Fig. 3.51 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 081801 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

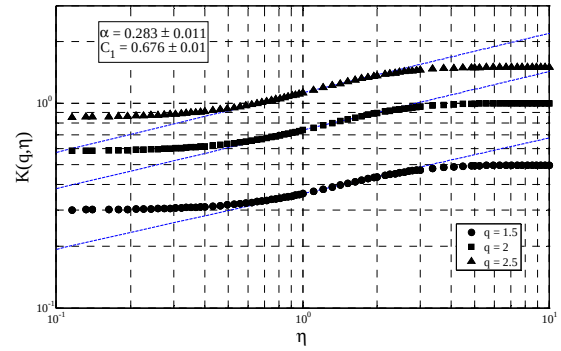


Fig. 3.52 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 081801.

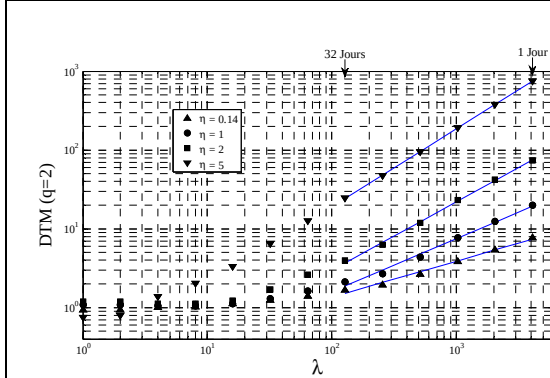


Fig. 3.53 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 013304 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

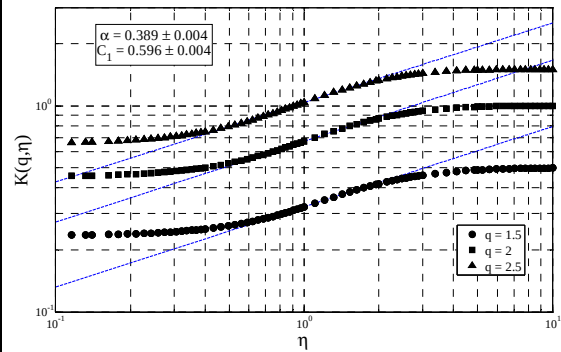


Fig. 3.54 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 013304.

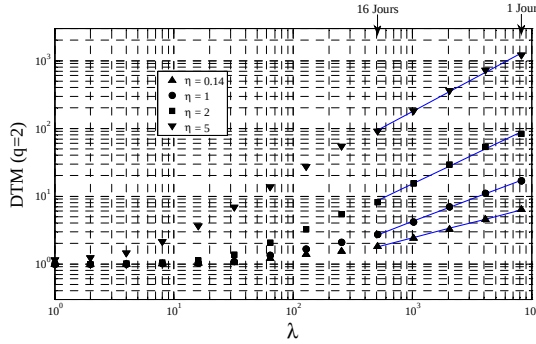


Fig. 3.55 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 110501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

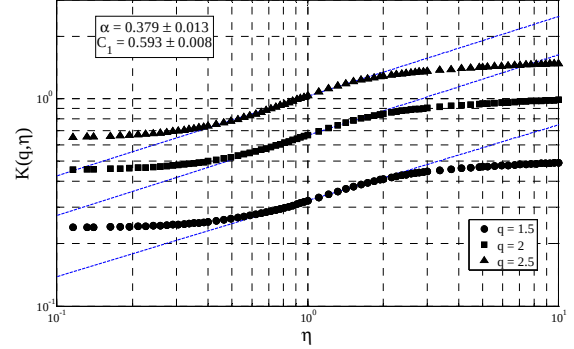


Fig. 3.56 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 110501.

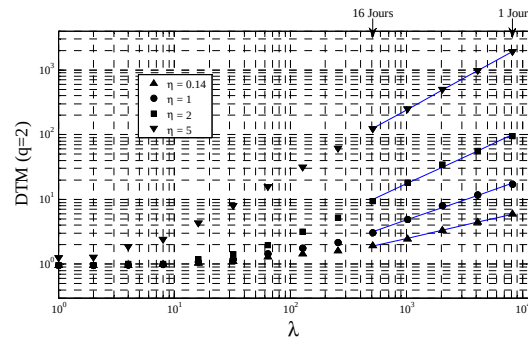


Fig. 3.57 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des pluies de la station 020303 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

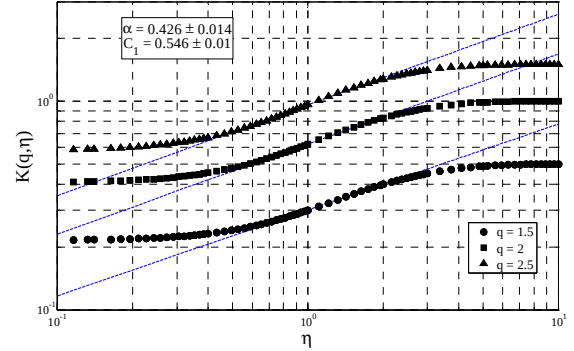


Fig. 3.58 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des pluies de la station 020303.

Les résultats trouvés dans le tableau 3.6 montrent que les valeurs du paramètre α sont inférieures à 1, indiquant le faible degré de multifractalité des précipitations. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenu pour la pluie dans la littérature, De Lima et Grasman (1999) ont trouvé les valeurs de $\alpha = 0,48 \pm 0,08$ et $C_1 = 0,51 \pm 0,03$ pour des séries de précipitations journalières en Portugal, de même, Biaou (2004) a obtenu les valeurs de $\alpha = 0,693 \pm 0,200$ et $C_1 = 0,399 \pm 0,100$ pour 190 séries de précipitations journalières de la base PRECIP en France.

Tableau 3.6 Résultats de l'analyse par la méthode DTM pour les séries journalières des stations pluviométriques.

Nom de station	Code A.N.R.H.	α	C_1
Ain Boucif	011104	0,753	0,343
Ain Kermes	013201	0,562	0,512
Takhemaret	013304	0,389	0,596
Bordj Ghobrini	020301	0,515	0,500
Menaceur	020303	0,426	0,546
Gouraya	020315	0,420	0,544
Dar El Beida	020611	0,567	0,455
Boufarik Pépinière	021209	0,511	0,494
Aoubellil	040201	0,389	0,595
Ain Temouchent Era	040205	0,373	0,565
Barrage K'sob	051005	0,590	0,506
El Aricha	080102	0,333	0,575
Mekmene Ben Amar	080401	0,352	0,621
Marhoum	080501	0,394	0,577
Mecheria	081401	0,351	0,663
Kasdir	081801	0,283	0,676
Tablat	090203	0,536	0,488
Dechmya	090314	0,523	0,483
Khabouzia	090401	0,493	0,512
Chabet El Aneur	090512	0,484	0,481
Ras El Ma	110102	0,307	0,647
El Hacaiba	110203	0,454	0,537
Merine	110501	0,379	0,593
Sour El Ghoulane	150101	0,470	0,529
El Hachimia	150103	0,368	0,551
Ain Allouane	150110	0,640	0,466
Bouira	150208	0,468	0,533
Zemmorah	150802	0,504	0,473
Sidi Gourari	160608	0,39	0,591
Sidi Herriz	160609	0,327	0,591

➤ Séries hydrométriques

Pour les séries hydrométriques, on effectue les analyses multifractales par DTM sur les données de débits moyens journaliers.

Les moments doubles traces moyens à chaque résolution λ sont calculés pour les différentes valeurs de q choisies. Les figures 3.57, 3.59, 3.61 et 3.63 présentent respectivement les courbes DTM, pour les valeurs de $q = 2$ et $\eta = 0,07 ; 0,7 ; 1$ et 2 , pour les séries de débits des stations sélectionnées.

La première observation faite à l'issue de cette analyse est la plage de résolution sur laquelle on observe l'invariance d'échelle, élément caractéristique d'un champ multifractal. Cette zone d'invariance d'échelle est déterminée ici par la première partie du processus de mise en œuvre du DTM. La partie linéaire de ces courbes en diagramme bi-logarithmique du DTM en fonction de la résolution λ est nette entre la résolution de 8 jours et la résolution d'environ 512 jours, pour les séries de débits du premier groupe, et entre la résolution de 1 jour et la résolution d'environ 32 jours, pour les séries du deuxième groupe. Cette partie linéaire symbolise l'invariance d'échelle du champ étudié. Ces résultats confirment la gamme d'échelles trouvée par l'analyse des lois d'échelles des moments (section 3.5.2.2). Les valeurs $K(q,\eta)$ pour différentes valeurs de η sont déterminées par la régression linéaire sur cette gamme d'échelles.

Les courbes des figures 3.58, 3.60, 3.62 et 3.64 illustrent la deuxième partie de la technique du DTM appliquée aux séries hydrométriques. La pente des parties linéaires de ces courbes donne la valeur du paramètre α , celle du paramètre C_1 s'en déduit immédiatement en prenant l'intercepte de la courbe avec l'axe des abscisses.

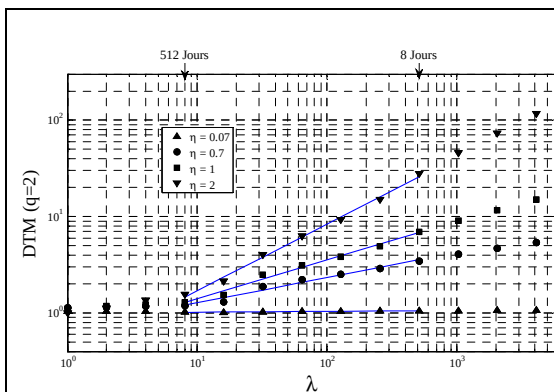


Fig. 3.59 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 090501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

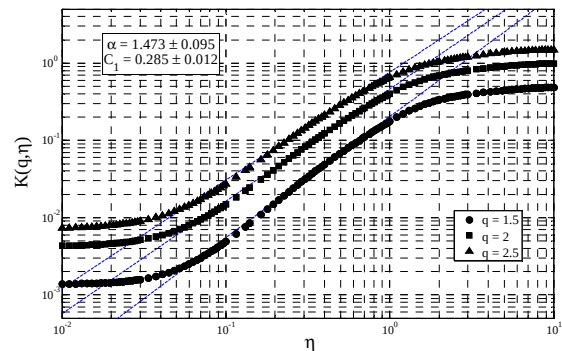


Fig. 3.60 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 090501.

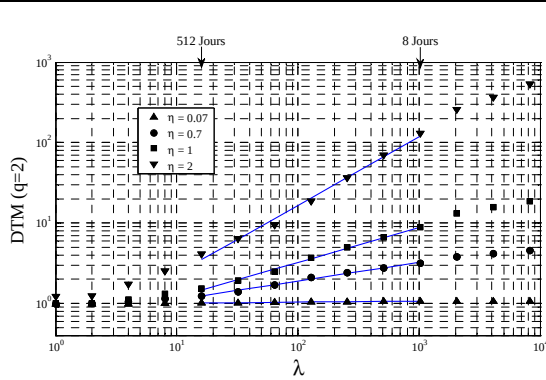


Fig. 3.61 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 140601 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 8 à 512 jours.

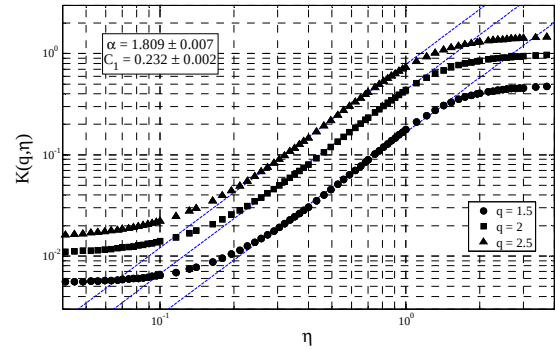


Fig. 3.62 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 140601.

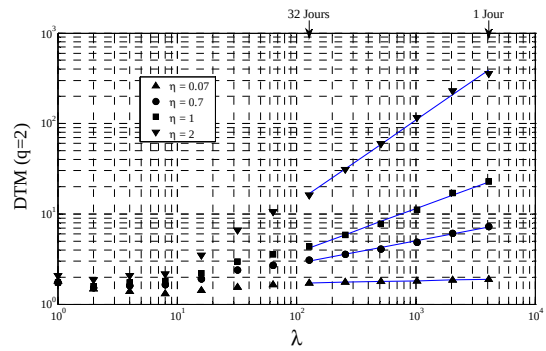


Fig. 3.63 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 011715 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 32 jours.

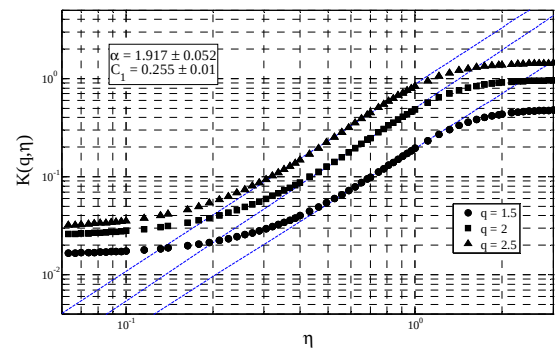


Fig. 3.64 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 011715.

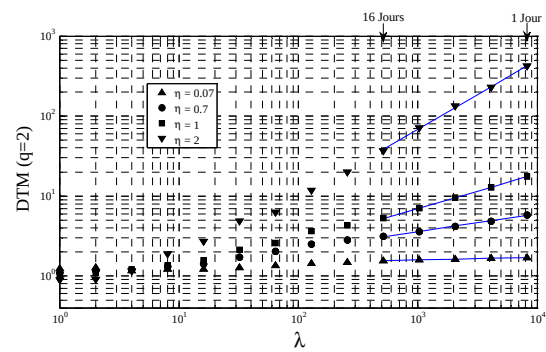


Fig. 3.65 Illustration de l'invariance d'échelle des moments doubles traces pour $q=2$, pour la série des débits de la station 070501 : l'invariance d'échelle est valable sur la gamme d'échelles allant de 1 à 16 jours.

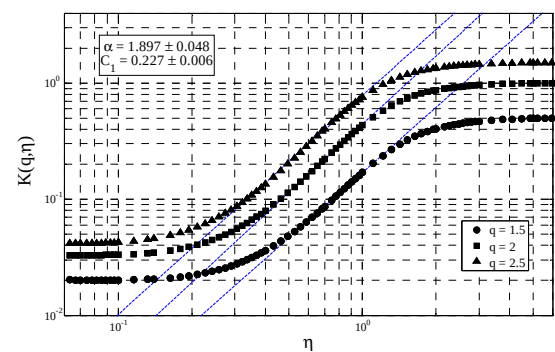


Fig. 3.66 Les courbes de $K(q,\eta)$ en fonction de η en diagramme log-log pour les valeurs de $q=1.5, 2$ et 2.5 permettent de déterminer les paramètres α et C_1 pour la série des débits de la station 070501.

Tableau 3.7 Résultats de l'analyse par la méthode DTM pour les séries journalières des stations hydrométriques.

Nom de station	Code A.N.R.H.	α	C_1
Sidi Mokrefi	011602	1,891	0,185
Arib Cheliff	011702	1,471	0,163
El Ababsa	011715	1,917	0,255
Rouina Mines	011906	1,775	0,273
Ain Amara	013302	1,507	0,426
Sidi Akacha	020207	1,754	0,400
RN 24 Azeffoun	020808	1,927	0,295
Boumedfaa	021006	1,147	0,398
Baghlia	022001	1,571	0,181
Turgo Nord	040220	1,984	0,100
Barrage K'sob	051005	1,741	0,223
El Kantra	061201	1,610	0,241
Djemorah	061301	1,523	0,283
Reboa	070403	1,765	0,187
Chemmora	070501	1,897	0,227
Yabous	070601	1,696	0,070
Beni Slimane	090305	1,253	0,154
La Traille	090408	1,378	0,127
Lakhdaria	090501	1,473	0,285
El Hacaiba	110101	1,693	0,670
Sidi Ali Ben Youb	110201	1,858	0,374
Oued Taria	111201	1,159	0,373
El Azreg	120522	1,925	0,879
Medjez Amar II	140301	1,949	0,377
Boucheougouf	140501	1,762	0,228
Mirebeck	140601	1,809	0,232
Ain Berda	140602	1,104	0,392
El Asnam	150204	1,416	0,195
Sidi Aissa	160614	1,474	0,338

Les résultats des calculs de ces paramètres, station par station, sont présentés dans le tableau 3.7. Leur valeur moyenne sur l'ensemble des 29 stations étudiées se présente comme suit :

$$\alpha = 1,635 \pm 0,260 \text{ et } C_1 = 0,294 \pm 0,166$$

Les résultats trouvés dans le tableau 3.7 montrent que les valeurs du paramètre α sont supérieures à 1, indiquant que l'écoulement des Oueds est loin d'être un processus monofractal, et peuvent mieux être modélisés par l'intermédiaire de l'approche multifractale. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus pour les débits dans la littérature, Tessier *et al.* (1996) ont trouvé les valeurs de $\alpha = 1,45 \pm 0,20$ et $C_1 = 0,20 \pm 0,10$ pour 30 séries de débits journaliers en France, de même, Zhou (2004) a obtenu les valeurs de $\alpha = 1,49 \pm 0,16$ et $C_1 = 0,13 \pm 0,02$ pour 32 séries de débits journaliers en États-Unis.

Les résultats trouvés par l'application de la méthode DTM sur les chroniques de pluie et de débits montrent que les courbes obtenues pour différentes valeurs de q sont parallèles entre elles et elles ont une même pente de la partie linéaire, les valeurs de α et C_1 obtenues sont donc égales ou très proches (écart type presque nul). Ces résultats montrent également que la variation de q influe très peu sur la valeur calculée de α et C_1 .

On remarque d'après l'analyse des tableaux 3.6 et 3.7 que les valeurs du paramètre α calculées sur les séries de débits sont très grandes face aux valeurs des pluies, ce qui viennent de confirmer l'allure observée sur les courbes de la fonction d'échelle $K(q)$, dont les pluies présentent une légère convexité de la partie non-linéaire de ces courbes par rapport aux débits.

Une autre remarque concernant les valeurs du paramètre C_1 , qui sont toujours supérieures à la valeur nulle, indiquant l'hétérogénéité des régimes pluviométrique et hydrométrique dans la région d'étude.

3.6 Conclusion

Des techniques d'analyse multifractal ont été employées dans ce chapitre pour étudier les propriétés d'invariance d'échelle des séries journalières des précipitations et des débits en Algérie septentrionale.

Les champs multifractals sont caractérisés par deux fonctions importantes $K(q)$ et $c(\gamma)$ qui sont des exposants des fonctions algébriques définissant respectivement les moments d'ordre q et les probabilités de dépassement d'un seuil de singularité γ . Les fonctions $K(q)$ sont déterminées par la méthode TM, ainsi que les fonctions de codimension $c(\gamma)$ sont déterminées par la méthode PDMS.

La méthode DTM était utilisée pour déterminer les paramètres du modèle multifractals universel α et C_1 . L'analyse par DTM nous a fixé sur la plage d'invariance d'échelle qui est une grandeur dont la détermination est très importante. On ne peut pas dire que cette plage est déterminée avec la plus grande précision possible, mais elle donne une indication suffisamment claire. Elle s'étale d'une journée à quelques semaines (globalement le mois), pour les séries pluviométriques, et d'une journée à 512 jours pour les séries hydrométriques.

Par ailleurs, cette analyse a conduit aux valeurs moyennes des paramètres multifractals $\alpha = 0,452 \pm 0,107$ et $C_1 = 0,541 \pm 0,070$ pour les pluies, et $\alpha = 1,635 \pm 0,260$ et $C_1 = 0,294 \pm 0,166$ pour les débits.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Ce mémoire a eu pour objectif la caractérisation fractale et multifractale de la très forte hétérogénéité temporelle des pluies et des débits en Algérie septentrionale, qui est considérée comme l'obstacle principal à la gestion de la ressource en eau et l'évaluation des risques.

Aussi, nous avons présenté à la fois théoriquement et pratiquement comment analyser les champs de précipitations et de débits par l'approche fractale et multifractale.

Étant donné le nombre élevé des données à analyser, nous avons mis en place tout le long de ces travaux les outils codes de calcul permettant de traiter rapidement et surtout automatiquement les calculs, ce qui a présenté l'avantage de diminuer considérablement le temps de calcul.

Cette étude prouve que les propriétés fractales et multifractales sont présentes dans la structure temporelle des séries étudiées. Les résultats obtenus pour l'ensemble de données analysées sont en accord avec ceux trouvés dans la littérature.

Le résultat principal de l'analyse fractale est la mise en évidence du caractère fractal des séries de données étudiées. Pour les précipitations, la dimension fractale moyenne est de l'ordre de $0,431 \pm 0,076$ pour les échelles de temps allant d'une journée à quelques semaines (2 à 4 semaines). Pour les débits, la dimension fractale moyenne est de l'ordre de $0,933 \pm 0,039$ pour toutes les échelles analysées. Les résultats obtenus indiquent que les séries étudiées montrent une propriété d'invariance d'échelle, ce qui peut contribuer à améliorer l'estimation des propriétés statistiques des champs étudiés aux échelles plus petites qu'un jour, car beaucoup d'études hydrologiques exigent la connaissance des propriétés statistiques aux petites échelles de temps, bien que généralement seulement les données quotidiennes soient disponibles.

Dans l'analyse multifractale, nous avons étudié les caractéristiques multifractales des séries journalières de précipitations et de débits. Les comportements multifractals (la loi de puissance) ont été mis en évidence pour les échelles allant d'une journée à environ un mois, pour les précipitations, et pour les échelles allant d'une journée à une année, pour les débits, conclusions qui restent dans la même logique que les différentes études antérieures sur ce sujet. Afin de déterminer les paramètres multifractals α et C_1 , nous avons opté pour la méthode DTM. En appliquant cette méthode sur les données que nous disposons, les résultats obtenus permettent de donner une première estimation des paramètres α et C_1 pour les précipitations journalières ($\alpha = 0,452 \pm 0,107$ et $C_1 = 0,541 \pm 0,070$), et les débits moyens journaliers ($\alpha = 1,635 \pm 0,260$ et $C_1 = 0,294 \pm 0,166$) de l'Algérie du Nord. Ces paramètres caractérisent la structure temporelle de ces données et permettent de calibrer ou/et de valider des modèles statistiques ou stochastiques.

L'invariance d'échelle et la multifractalité des précipitations et des débits sur une gamme étendue des échelles mènent à un meilleur arrangement et quantification de ses variabilités qui ne pourraient pas être obtenues à partir d'autres approches.

La théorie multifractale reste encore, à ma connaissance, assez mal connue en Algérie. J'espère que'avec les connaissances dont je suis désormais outillé, je pourrai, en collaborant avec des experts, appliquer la théorie multifractale pour l'hydrologie en particulier pour l'hydrologie urbaine.

En définitive, j'espère qu'après cette étude exploratoire de cette nouvelle voie, la théorie multifractale de la modélisation stochastique en hydrologie (cascade multiplicative) offrira un outil pour reproduire des données synthétiques à haute résolution. Ces derniers pourront être employés dans beaucoup d'applications et d'études hydrologiques (par exemple relation pluie-débit, érosion du sol, diffusion de polluants...).

J'espère également que ces nouveaux outils incitent les chercheurs à s'investir de plus en plus dans cette voie en vue d'une meilleure connaissance et compréhension des phénomènes naturels.

Références Bibliographiques

- A.N.R.H.**, 1993. Cartes pluviométrique de l'Algérie du Nord à l'échelle du 1/500 000, Notice explicative, Projet PNUD/ALG/88/021, *Agence nationale des ressources hydrauliques*, Alger, 49 pp.
- A.N.R.H.**, 2006. Carte des écoulements moyens annuels sur le Nord de l'Algérie, Notice explicative, *Agence nationale des ressources hydrauliques*, Alger, 46 pp.
- Bendjoudi H., Hubert P.**, 1998. A propos de la distribution statistique des cumuls pluviométriques annuels: Faut-il en finir avec la normalité ?. *Revue des sciences de l'eau*, 11, pp. 617–630.
- Bendjoudi H. et Hubert P.**, 2002. Le coefficient de compacité de Gravelius: Analyse critique d'un indice de forme des bassins versants. *Journal des sciences hydrologiques*, 47, pp. 921–930.
- Bendjoudi H., Hubert P., Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1997. Interprétation multifractale des courbes intensité-durée-fréquence des précipitations. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 325, pp. 323–326.
- Bendjoudi H., Ducharne A., Hubert P., Larcheveque M., Schertzer D. et Tchiguirinskaia I.**, 2004. Programme Risque-Inondations 2 : Prédétermination multifractale des précipitations et des crues. *Ministère de l'Ecologie et du Développement Durable*, Paris, 73 pp.
- Bernardara P., Lang M., Sauquet E., Schertzer D. et Tchiguirinskaia I.**, 2007. Analyse multifractale en hydrologie, Application aux séries temporelles. *Quæ*, 54 pp.
- Biaou A. C.**, 2004. De la méso-échelle à la micro-échelle: Désagrégation spatio-temporelle multifractale des précipitations. Thèse de Doctorat, *École des Mines de Paris*, Paris, 197 p.
- Box G. E. P. et Jenkins G. M.**, 1974. Time series analysis: Forecasting and control. *Holden-Day*, San Francisco, 575 pp.
- Breslin M. C. et Belward J. A.**, 1999. Fractal dimensions for rainfall time series. *Mathematics and computers in simulation*, 48, pp. 437–446.
- Calvet L. E. et Fisher A. J.**, 2008. Multifractal volatility: Theory, forecasting, and pricing. *Academic press*, 272 pp.
- Chaouche K.**, 2001. Approche multifractale de la modélisation stochastique en hydrologie. Thèse de Doctorat, *Université Paris VI*, Paris, 121 p.
- Chettih M. et Mesbah M.**, 2006. Utilisation des analyses corrélatoire et spectrale pour inférer sur la structure et le comportement hydrodynamique des aquifères de l'Atlas Saharien. *Bulletin du service géologique national*, 17, pp. 145–159.
- Chettih M., Mouattah K. et Mesbah M.**, 2011. Analyses spectrales, fractales et multifractales des précipitations et des débits en régions arides, dans *Les Ressources en Eau au Sahara*, Ouargla (Algérie), 19–20 Janvier.
- Demmak A.**, 1982. Contribution à l'étude de l'érosion et des transports solides en Algérie septentrionale. Thèse de Docteur-Ingénieur, *Université Pierre-et-Marie-Curie*, Paris, 323 p.

- Friggit F.**, 1989. Caractérisation fractale de l'occurrence de pluie au Burkina Faso. Mémoire de D.E.A., *École des Mines de Paris*, Paris, 87 p.
- Friggit F., Hubert P. et Carbonnel J.P.**, 1991. Caractérisation fractale de la succession des jours pluvieux au Burkina Faso, dans *Utilisation Rationnelle de l'Eau des Petits Bassins Versants en Zone Aride*. AUPELF-UREF (Éditeur), Paris (France), John Libbey Eurotext, pp. 43–49.
- Gingras H.**, 2000. Modélisation stochastique de la pluie à l'aide de modèles invariants d'échelle. Mémoire de D.E.A., *Université du Québec*, Québec, 74 p.
- Harte D.**, 2001. Multifractals: Theory and applications. *Chapman & Hall/CRC*, 264 pp.
- Hipel K. W. et McLeod A. I.**, 1994. Time series modelling of water resources and environmental systems, *Developments in water science* (45), *Elsevier*, New York, 1013 pp.
- Hoang C. T.**, 2008. Analyse fréquentielle classique et multifractale de 10 series pluviométriques à haute résolution. Mémoire de Master 2, *École des Mines de Paris*, Paris, 49 p.
- Hoang C. T.**, 2011. Prise en compte des fluctuations spatio-temporelles pluies-débits pour une meilleure gestion de la ressource en eau et une meilleure évaluation des risques. Thèse de Doctorat, *Université des Ponts ParisTech*, Paris, 201 p.
- Hubert P.**, 1995. Fractals et multifractals appliqués à l'étude de la variabilité temporelle des précipitations, dans *Space and Time Scale Variability and Interdependancies in Hydrological Processes*. Fiddes R. (Éditeur), Cambridge University Press, pp. 175–181.
- Hubert P. et Carbonnel J.P.**, 1989. Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat soudano-sahélien. *Hydrologie continentale*, 4, pp. 3–10.
- Hubert P., Friggit F. et Carbonnel J.-P.**, 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in West Africa, dans *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*. Kundzewicz Z. W. (Éditeur), Madralin (Pologne), pp. 109–113, 24–26 septembre 1990.
- Hubert P., Bendjoudi H., Schertzer D. et Lovejoy S.**, 2002. Multifractal taming of extreme hydrometeorological events, dans *The Extremes of the Extremes*. IAHS (Éditeur), Iceland, 271, pp. 51–56, juillet 2000.
- Hubert P., Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., Schmitt F., Ladoy P., Carbonnel J.-P., Violette S. et Desurosne I.**, 1993. Multifractals and extreme rainfall events. *Geophysical research letters*, 20, pp. 931–934.
- Hurst H. E.**, 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American society of civil engineers*, 116, pp. 770–799.
- Kabouya M.**, 1990. Modélisation pluie-débit aux pas de temps mensuel et annuel en Algérie septentrionale. Thèse de Doctorat, *Université Paris sud*, Paris, 347 p.
- Karambiri H.**, 1999. Etude de la distribution statistique des pluies annuelles. Mémoire de D.E.A., *Université Pierre-et-Marie-Curie*, Paris, 37 p.
- Karambiri H., Hubert P., Bendjoudi H.**, 2000. Apport des multifractals à l'étude des longues séries pluviométriques. *Sud sciences & technologies*, 6, pp. 4–14.
- Labat D.**, 2000. Non-linéarité et non stationnarité en hydrologie karstique. Thèse de Doctorat, *Institut nationale polytechnique de Toulouse*, France, 242 p.
- Labat D., Mangin A. et Ababou R.**, 2002. Rainfall-runoff relations for karstic springs: Multifractal analyses, *Journal of hydrology*, 256, pp. 176–195.

- Lausberg C.**, 1987. Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange. Thèse de Doctorat, *Institut National Polytechnique de Grenoble*, Grenoble, 186 p.
- Ladoy P., Schmitt F., Lovejoy S. et Schertzer D.**, 1993. Variabilité temporelle multifractale des observations pluviométriques à Nîmes. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 317, pp. 775–782.
- Lavallée D.**, 1991. Multifractal techniques: Analysis and simulation of turbulent fields. Thèse de Ph.D., *McGill University*, Montréal, 133 p.
- Lavallée D., Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1991a. On the determination of the codimension function, dans *Non-linear Variability in Geophysics*. Schertzer D. et Lovejoy S. (Éditeurs), Kluwer press, pp. 99–110.
- Lavallée D., Lovejoy S., Schertzer D. et Schmitt F.**, 1991b. On the determination of the multifractal universal parameters in turbulence, dans *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*. Moffatt H. K., Zaslavsky G. M. et Comte P. (Éditeurs), Kluwer press, pp. 464–476, 1–5 novembre 1991.
- De Lima M. I. P.**, 1998. Multifractals and the temporal structure of rainfall. Thèse de Ph.D., *Agricultural University Wageningen*, Wageningen, 229 p.
- De Lima M. I. P.**, 1999. A fractal and multifractal study of hourly precipitation time-series from the Netherlands, dans *Water, Environment, Ecology, Socio-economics and Health Engineering*. Vijay P. S., II Won S. et Jung H. S. (Éditeurs), Seoul (Corée), pp. 15–28, 18–21 octobre 1999.
- De Lima M. I. P. et Grasman J.**, 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of hydrology*, 220, pp. 1–11.
- De Lima M. I. P., De Lima J. L. M. P. et Coelho M. F. E. S.**, 2003. Spectral analysis of scale invariance in the temporal structure of precipitation in Mainland Portugal. *Engenharia civil*, 16, pp. 73–82
- Lopes R.**, 2009. Analyses fractale et multifractale en imagerie médicale: Outils, validations et applications. Thèse de Doctorat, *Université de Lille 1*, Lille, 203 p.
- Lovejoy S.**, 1982. The area-perimeter relations for rain and cloud areas. *Science*, 216, pp. 185–187.
- Lovejoy S. et Schertzer D.**, 1989. Comments on: Are rain rate processes self-similar?. *Water Resources Research*, 25, pp. 577–579.
- Lovejoy S. et Schertzer D.**, 2012. The weather and climate: Emergent laws and multifractal cascades. *Cambridge university press*, 660 pp.
- Lovejoy S., Schertzer D. et Ladoy P.**, 1986. Fractal characterization of inhomogeneous geophysical measuring networks. *Nature*, 319, pp. 43–44.
- Lovejoy S., Schertzer D. et Tsonis A. A.**, 1987. Function box-counting and multiple elliptical dimension in rain. *Science*, 235, pp. 1036–1038.
- Macor J. L.**, 2007. Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites. Thèse de Doctorat, *École Nationale des Ponts et Chaussées*, Paris, 193 p.
- Mandelbrot B.**, 1967. How long is the coastline of Britain ?. Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155, pp. 636–638.

- Mandelbrot B.**, 1975. Les objets fractals, forme, hasard et dimension. *Flammarion*, Paris, 190 pp.
- Mandelbrot B.**, 1983. The fractal geometry of nature. *W.H. Freeman*, San Francisco, 461 pp.
- Mangin A.**, 1984. Pour une meilleure connaissance des systèmes hydrologiques à partir des analyses corrélatoires et spectrales. *Journal of hydrology*, 67, pp. 25–43.
- Mangin A.**, 2008. Caractérisation des propriétés des systèmes karstiques d'après l'étude des écoulements, dans *Hydrogéologie et Karst*, Comité Français de l'Association Internationale des Hydrogéologues, pp. 47–58, 17 mai 2008.
- Max J.**, 1980. Méthodes et techniques du traitement du signal et applications aux mesures physiques. *Masson*, Paris, 379 pp.
- Mebarki A.**, 2005. Hydrologie des bassins de l'Est Algérien: Ressources en eau, aménagement et environnement. Thèse de Doctorat d'état, *Université Mentouri*, Constantine, 360 p.
- Métivier F.**, 1992. Programme d'analyse des champs de précipitations par la méthode de Double-Moment-Trace. Mémoire de D.E.A., *Université de Pierre-et-Marie-Curie*, 69 p.
- Musy A. et Higy C.**, 2011. Hydrology: A science of nature. *CRC press*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne (Suisse), 308 pp.
- Olsson J.**, 1996. Validity and applicability of a scale-independent, Multifractal relationship for rainfall. *Atmospheric research*, 42, pp.53–65.
- Olsson J., Niemczynowicz J., Berndtsson R. et Larson M.**, 1992. An analysis of the rainfall time structure by box counting—some practical implications. *Journal of hydrology*, 137, pp. 261–277.
- Pandey G., Lovejoy S. et Schertzer D.**, 1998. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometres, one day to 75 years. *Journal of hydrology*, 208, pp. 62–81.
- Parisi G. et Frish U.**, 1985. A multifractal model of intermittency. Turbulence and predictability, dans *Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Ghil M., Benzi R. et Parisi G. (Éditeurs.), North-Holland, pp. 84–88.
- Radziejewski M. et Kundzewicz Z. W.**, 1997. Fractal analysis of flow of the river Warta. *Journal of hydrology*, 200, pp. 280–294.
- Roche M.**, 1963. Hydrologie de surface. *Gauthier-Villars*, Paris, 429 pp.
- Royer J. F., Biaou A., Chauvin F., Schertzer D. et Lovejoy S.**, 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *Comptes rendus geosciences*, 340, pp. 431–440.
- Russel D., Hanson J. et Ott E.**, 1980. Dimension of strange attractors. *Physical review*, 45, pp. 1175–1178.
- Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1984. On the dimension of atmospheric motions, dans *Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*. Tatsumi et Elsevier (Éditeurs.), North-Holland, pp. 505–508.
- Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1987. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of geophysical research*, 92, pp. 9693–9714.
- Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1988. Multifractal simulations and analysis of clouds by multiplicative processes. *Atmospheric research*, 21, pp. 337–361.

- Schertzer D. et Lovejoy S.**, 1993. Non-linear variability in geophysics: Scaling and multifractal processes, dans *Lecture notes, AGU/EGS Conferences*. Cargèse (France), 10–17 septembre 1993.
- Schertzer D., Bernardara P., Biaou A., Tchiguirinskaia I., Lang M., Sauquet E., Bendjoudi H., Hubert P., Lovejoy S et Veysseire J. M.**, 2006. Extrêmes et multifractals en hydrologie: Résultats, validations et perspectives. *La houille blanche*, 5, pp. 112–119.
- Schmitt F., Schertzer D., Lovejoy S. et Brunet Y.**, 1994. Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence. *Nonlinear processes in geophysics*, 1, pp. 95–104.
- Schmitt F., Lavallée D., Lovejoy S., Schertzer D. et Hooge C.**, 1992. Estimation directes des indices multifractals universels dans le champ de vent et de température. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 314, pp. 749–754.
- Svensson C., Olsson J. et Berndtsson R.**, 1996. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. *Water resources research*, 32, pp. 2463–2472.
- Tarboton D. G., Bras R. L. et Rodriguez-Iturbe I.**, 1988. The fractal nature of river networks. *Water Resources Research*, 24, pp. 1317–1322.
- Tessier Y., Lovejoy S. et Schertzer D.**, 1993. Universal multifractal: Theory and observations for rain and clouds. *Journal of applied meteorology*, 32, pp. 223–250.
- Tessier Y., Lovejoy S., Hubert P., Schertzer D. et Pecknold S.**, 1996. Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, Causal transfer functions. *Journal of geophysical research atmospheres*, 101, pp. 26427–26440.
- Tricot C.**, 1999. Courbes et dimension fractale. *Springer*, Paris, 371 pp.
- Zhou X.**, 2004. Fractal and multifractal analysis of runoff time series and stream networks in agricultural watersheds. Thèse de Ph.D., *Virginia Polytechnic Institute*, Virginia, 123 p.
- Zhou X., Persaud N. et Wang H.**, 2006a. Scale invariance of daily runoff time series in agricultural watersheds. *Hydrology and earth system sciences*, 10, pp. 79–91.
- Zhou X., Persaud N., Wang H. et Lin H.**, 2006b. Multifractal scaling of daily runoff time series in agricultural watershed. *Journal of the American water resources association*, 42, pp. 1659–1670.

