

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

Domain : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques

Par:

HAMIDAT Asma

THEME

Equations aux dérivées partielles de type Parabolique

Proposé par : prof Y.Belabbaci

Année Universitaire 2014/2015




Remerciement

D'abord, Je remercie ALLAH le tout puissant, qui m'aide, afin d'arriver à ce niveau et qui m'ouvert les portes de la réussite et de bonheur.

Je tien à exprimer mes chaleureux remerciements et ma profonde reconnaissance à mon encadreur d'avoir accepté de m'encadrer, ainsi pour ses efforts et son encouragement.

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs et les responsables qui m'ont cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.



Dédicace

*Je dédie ce simple mémoire à mon père
Abdelkrim et à ma mère Aicha pour leurs
soutiens et encouragements.*

Mes sœurs Khaoula, Keltom et Ikram.

Mes frères Abdelmadjid et Mouhamed.

*Ma famille et mes cousins en El-Menia
et Bachar.*

Je dédie à mes amoureux dans Laghouat.

*Tous mes amis en particulier : Fatima,
Amina et*

*Je dédie à tous les étudiants de 3 ième
Année Mathématique.*

Table des matières

1	Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre	
	deux	3
1.1	Cas de deux variables	3
1.1.1	Forme canonique	4
1.1.2	Exemples	7
1.2	Cas de trois variables	10
1.2.1	Exemples	12
1.3	Cas de n variables	14
2	Méthodes de résolution d'une E.D.P de type parabolique	16
2.1	Méthode de la séparation des variables	16
2.1.1	Exemples	16
2.2	Transformation de Fourier	19
2.2.1	Exemple	20

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles de second ordre de type parabolique.

Notre travail a été effectué selon le plan suivant:

Dans le chapitre 1 on étudie la classification des E.D.P selon ses différents types.

Dans le chapitre 2 on étudie les différentes méthodes de résolution d'une E.D.P de type parabolique:

- 1-La séparation des variables.
- 2-La transformation de Fourier.

CHAPITRE 1

Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux

1.1 Cas de deux variables

L'équation aux dérivées partielles de second ordre à deux variables indépendantes,

s'écrit sous la forme:

$$AU''_{x^2} + BU''_{xy} + CU''_{y^2} + DU'_x + EU'_y + FU = G \quad \rightarrow (1)$$

où A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions de x et y de classe C^2 sur $D \in \mathbb{R}^2$.

Soit $\Delta = B^2 - 4AC$

1–Si $\Delta = B^2 - 4AC > 0$, l'équation (1) est dit de type hyperbolique.

2–Si $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, l'équation (1) est dit de type parabolique.

3–Si $\Delta = B^2 - 4AC < 0$, l'équation (1) est dit de type elliptique.

La classification de l'équation (1) est basée sur la possibilité de réduire cette

équation par une transformation des coordonnées à une forme canonique.

Soit la transformation: $\xi = \xi(x, y)$ $\eta = \eta(x, y)$

où ξ et η sont des fonctions de classe C^2 sur $D \in \mathbb{R}^2$, telles que le Jacobien:

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y \neq 0$$

Alors, nous avons:

$$U'_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$

$$U'_y = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$

$$U''_{x^2} = U_{\xi^2} \xi_x^2 + U_{\eta^2} \eta_x^2 + U_\xi \xi_{x^2} + U_\eta \eta_{x^2} + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x$$

$$U''_{y^2} = U_{\xi^2} \xi_y^2 + U_{\eta^2} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{y^2} + U_\eta \eta_{y^2} + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y$$

$$U''_{xy} = U_{\xi^2} \xi_x \xi_y + U_{\eta^2} \eta_x \eta_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}$$

En remplaçant les dérivées dans l'équation (1), on obtient:

$$\begin{aligned} A^* \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2B^* \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F^*(\xi, \eta, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) &= 0 \\ \Rightarrow A^* U''_{\xi^2} + 2B^* U''_{\xi\eta} + C^* U''_{\eta^2} + F^*(\xi, \eta, U_\xi, U_\eta) &= 0 \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

$$Où: A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2$$

$$B^* = 2A\xi_y \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C\xi_y \eta_x$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2$$

1.1.1 Forme canonique

On peut choisir les fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ de façon à simplifier l'équation aux dérivées partielles. Alors choisissons $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ pour que dans

l'équation:

$$A^* \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2B^* \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + C^* \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F^*(\xi, \eta, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0$$

les coefficients soient nuls pour: U_{ξ^2}, U_{η^2}

$$A^* \equiv A\xi_x^2 + 2B\xi_x \xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$C^* \equiv A\eta_x^2 + 2B\eta_x \eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

C'est-à-dire que les fonctions ξ et η soient des solutions de:

$$A\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow (1)$$

L'équation différentielle ordinaire:

$$A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = 0 \quad \rightarrow (2)$$

Correspondant à (1) est la caractéristique et ses intégrales sont les équations caractéristiques aux dérivées partielles:

$$AU''_{xx} + 2BU''_{xy} + CU''_{yy} + F(x, y, U, U'_x, U'_y) = 0 \quad \rightarrow (*)$$

Supposons que: $A \neq 0$ et résolvons (2), par rapport à y' :

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \rightarrow (3)$$

On distingue:

Type hyperbolique

$\Delta = B^2 - 4AC > 0$, les parties droite de l'équation (3) sont différentes, d'où les intégrales:

$$\varphi(x, y) = C \quad \psi(x, y) = C \quad \rightarrow (4)$$

De ces équations qui sont indépendantes.

Posons les nouvelles variables indépendantes suivantes:

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y)$$

Alors on peut écrire les caractéristiques (4) de l'équation (*) sous la forme:

$$2B^* \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + F^*(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0 \quad \dots * \frac{1}{2B^*}$$

On obtient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + F^{**}(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0 \quad \rightarrow (5)$$

Qui est la première forme canonique de l'équation hyperbolique

$$\text{Si on pose: } \xi_1 = \xi + \eta \quad \eta_1 = \xi - \eta$$

Alors l'équation (5) sous la forme canonique de l'équation hyperbolique s'écrit:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + F^{**}(\xi_1, \eta_1, U, \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \frac{\partial U}{\partial \eta_1}) = 0 \quad \rightarrow (6)$$

Type parabolique

$\Delta = B^2 - 4AC = 0$, et on a un ensemble de caractéristiques $\varphi(x, y) = C$

En introduisant des nouvelles variables

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y)$$

où $\varphi(x, y)$ est les caractéristiques de l'équation (*), et

$\psi(x, y)$ est une fonction différentiable quelconque ne dépendant pas de $\varphi(x, y)$

La fonction $W = \varphi(x, y)$ est la solution de (1),

$$d'où: A^* \equiv A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 \equiv 0$$

Le type de l'équation ne change pas pendant la transformation et par conséquent

$$\Delta^* = (B^*)^2 - 4A^*C^* = 0, \text{ cependant } A^* \equiv 0 \text{ signifie que } B^* \equiv 0$$

Montrons que $C \neq 0$ aux alentours du point (x, y) , admettons l'inverse, soit:

$$C^* = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0$$

A condition que les coefficients A, B et C ne s'annulent pas en même temps,

c'est pourquoi si l'on pose: $A = 0, C = 0,$

alors de $\Delta = B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow B = 0,$

$A = B = C = 0,$ donc on a soit $A \neq 0,$ soit $C \neq 0$

Si $A > 0$ aux alentours du point $(x, y),$ alors de $\Delta = B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow C \geq 0$

Et on peut écrire: $B = \sqrt{A} \cdot \sqrt{C},$ alors:

$$\begin{aligned} C^* &= (\sqrt{A}\psi_x)^2 + 2\sqrt{A}\psi_x \cdot \sqrt{C}\psi_y + (\sqrt{C}\psi_y)^2 \\ &= (\sqrt{A}\psi_x + \sqrt{C}\psi_y)^2 = 0 \\ \Rightarrow \frac{\psi_x}{\psi_y} &= -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

Analogiquement de $A^* = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 \equiv 0,$ on trouve:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Rightarrow \psi_x\varphi_y - \varphi_x\psi_y = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = 0$$

Par conséquent $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont dépendantes, ce qui contredit la condition

de choix de la fonction $\varphi(x, y)$ et signifie que $C^* \neq 0$ aux alentours du point

$(x, y),$ donc, on obtient enfin: $A^* \equiv B^* \equiv 0, C^* \neq 0,$

et la transformation de l'équation (*), après division par C^* , s'écrit:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F^{**}(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0$$

Qui s'appelle la forme canonique de l'équation parabolique.

Type elliptique

$\Delta = B^2 - 4AC < 0$, les parties à droite de l'équation (3) sont complexes et

$$\text{conjuguées, c'est pourquoi: } \varphi(x, y) \equiv \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$$

$$\psi(x, y) \equiv \alpha(x, y) - i\beta(x, y)$$

Si l'on passe à de nouvelles variables:

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y)$$

$$\text{Alors, on a: } \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + F^{**}(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0 \quad \rightarrow (7)$$

Où ξ et η sont des variables complexes

Si l'on passe à de nouvelles variables:

$$\xi_1 = \frac{\xi + \eta}{2} = \alpha(x, y) \quad \eta_1 = \frac{\xi - \eta}{2i} = \beta(x, y)$$

$$\text{Alors: } \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{1}{i} \frac{\partial U}{\partial \eta_1} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2}$$

Et l'équation (7) s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + F^{***}(\xi_1, \eta_1, U, \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \frac{\partial U}{\partial \eta_1}) = 0 \quad \rightarrow (8)$$

Qui est la forme canonique de l'équation elliptique

Remarque

La classification de l'équation (1) dépend des coefficients: $A(x, y)$, $B(x, y)$ et $C(x, y)$

en un point $(x, y) \in D$ fixe.

Réécrire les équations (1) et (2) sous la forme:

$$AU''_{x^2} + BU''_{xy} + CU''_{y^2} = H(x, y, U, U_x, U_y) \quad \rightarrow (3)'$$

$$A^*U''_{\xi^2} + B^*U''_{\xi\eta} + C^*U''_{\eta^2} = H^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \quad \rightarrow (4)'$$

1.1.2 Exemples

$$1^\circ / x^2U''_{x^2} + 2xyU''_{xy} + y^2U''_{y^2} + xyU'_x + y^2U'_y = 0 \quad \rightarrow (*)$$

$$\text{On a: } A = x^2, B = 2xy, C = y^2, D = xy, E = y^2$$

$$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (2xy)^2 - 4x^2y^2$$

$\Rightarrow \Delta = 0$, donc l'équation (*) est de type parabolique

Les équations des caractéristiques:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2xy}{2x^2} = \frac{y}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow xdy = ydx \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln y - \ln x = \ln c_1 \\ &\Rightarrow \ln c_1 = \ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ &\Rightarrow c_1 = \frac{y}{x} \qquad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Les coordonnées caractéristiques:

$$\xi(x, y) = \frac{y}{x} \qquad \eta(x, y) = y$$

$$\xi_x = \frac{-y}{x^2} \qquad \eta_x = 0$$

$$\xi_y = \frac{1}{x} \qquad \eta_y = 1$$

$$U'_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = \frac{-y}{x^2} U_\xi \quad \rightarrow (1)$$

$$\begin{aligned} U''_{x^2} &= U_{\xi^2} \xi_x^2 + U_{\eta^2} \eta_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_\xi \xi_{x^2} + U_\eta \eta_{x^2} \\ &= \frac{y^2}{x^4} U_{\xi^2} + \frac{2y}{x^3} U_{\xi\eta} \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

$$U'_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = \frac{1}{x} U_\xi + U_\eta \quad \rightarrow (3)$$

$$\begin{aligned} U''_{y^2} &= U_{\xi^2} \xi_y^2 + U_{\eta^2} \eta_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_\xi \xi_{y^2} + U_\eta \eta_{y^2} \\ &= \frac{1}{x^2} U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + \frac{2}{x} U_{\xi\eta} \quad \rightarrow (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U''_{xy} &= U_{\xi^2} \xi_x \xi_y + U_{\eta^2} \eta_x \eta_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy} \\ &= \frac{-y}{x^3} U_{\xi^2} - \frac{y}{x^2} U_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} U_\xi \quad \rightarrow (5) \end{aligned}$$

En remplaçant (1),(2),(3),(4) et (5) dans (*), on obtient:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^2 \left(\frac{y^2}{x^4} U_{\xi^2} + \frac{2y}{x^3} U_{\xi\eta} \right) + 2xy \left(\frac{-y}{x^3} U_{\xi^2} - \frac{y}{x^2} U_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} U_\xi \right) + y^2 \left(\frac{1}{x^2} U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + \frac{2}{x} U_{\xi\eta} \right) + xy \left(\frac{-y}{x^2} U_\xi \right) + \\ &\qquad y^2 \left(\frac{1}{x} U_\xi + U_\eta \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{y^2}{x^2} U_{\xi^2} + \frac{2y}{x} U_{\xi\eta} - \frac{2y^2}{x^2} U_{\xi^2} - \frac{2y^2}{x} U_{\xi\eta} - \frac{2y}{x} U_\xi + \frac{y^2}{x^2} U_\xi + y^2 U_{\eta^2} + \frac{2y^2}{x} U_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x} U_\xi + \frac{y^2}{x} U_\xi + y^2 U_\eta = 0 \\ &\Rightarrow y^2 U_{\eta^2} + y^2 U_\eta = 0 \\ &\Rightarrow U_{\eta^2} + U_\eta = 0 \end{aligned}$$

$$2^\circ / U''_{x^2} - \frac{1}{c^2} U''_{y^2} = 0 \quad \rightarrow (*) \quad c > 0$$

$$\text{On a: } A = 1, B = 0, C = -\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4\left(-\frac{1}{c^2}\right)^2$$

$\Rightarrow \Delta = \frac{4}{c^2} > 0$, donc l'équation (*) est de type hyperbolique

Les équations des caractéristiques:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \Rightarrow dx = cdy$$

$$\Rightarrow x - cy = c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}} = -\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{c} \Rightarrow dx = -cdy$$

$$\Rightarrow x + cy = c_2 \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées caractéristiques:

$$\xi(x, y) = x - cy \quad \eta(x, y) = x + cy$$

$$\xi_x = 1 \quad \eta_x = 1$$

$$\xi_y = -c \quad \eta_y = c$$

$$U'_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$

$$\begin{aligned} U''_{x^2} &= U_{\xi^2} \xi_x^2 + U_{\eta^2} \eta_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_\xi \xi_{x^2} + U_\eta \eta_{x^2} \\ &= U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + 2U_{\xi\eta} \quad \rightarrow (1) \end{aligned}$$

$$U'_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$

$$\begin{aligned} U''_{y^2} &= U_{\xi^2} \xi_y^2 + U_{\eta^2} \eta_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_\xi \xi_{y^2} + U_\eta \eta_{y^2} \\ &= c^2 U_{\xi^2} + c^2 U_{\eta^2} - 2c^2 U_{\xi\eta} \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

En remplaçant (1) et (2) dans (*), on obtient:

$$\Rightarrow U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + 2U_{\xi\eta} - \frac{1}{c^2}(c^2 U_{\xi^2} + c^2 U_{\eta^2} - 2c^2 U_{\xi\eta}) = 0$$

$$\Rightarrow U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + 2U_{\xi\eta} - U_{\xi^2} - U_{\eta^2} + 2U_{\xi\eta} = 0$$

$$\Rightarrow 4U_{\xi\eta} = 0$$

$$\Rightarrow U_{\xi\eta} = 0$$

$$\Rightarrow U(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

$$\Rightarrow U(x, y) = f(x + cy) + g(x - cy)$$

$$3^\circ / 4U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0 \quad \rightarrow (*)$$

$$\text{On a: } A = 4, B = 0, C = 1$$

$$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4(4)(1)$$

$$\Rightarrow \Delta = -16 = 16i^2, \text{ donc l'équation (*) est de type elliptique}$$

Les équations des caractéristiques:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4i}{8} = \frac{-i}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4i}{8} = \frac{i}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{i}{2} \Rightarrow 2dy = idx$$

$$\Rightarrow 2y = ix + c$$

$$\Rightarrow c = 2y - ix \quad c \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées caractéristiques:

$$\text{on pose: } \alpha = 2y \quad \beta = -x$$

$$\alpha_x = 0 \quad \beta_x = -1$$

$$\alpha_y = 2 \quad \beta_y = 0$$

$$U'_x = U_\alpha \alpha_x + U_\beta \beta_x$$

$$\begin{aligned} U''_{x^2} &= U_{\alpha^2} \alpha_x^2 + U_{\beta^2} \beta_x^2 + 2U_{\alpha\beta} \alpha_x \beta_x + U_\alpha \alpha_{x^2} + U_\beta \beta_{x^2} \\ &= U_{\beta^2} \quad \rightarrow (1) \end{aligned}$$

$$U'_y = U_\alpha \alpha_y + U_\beta \beta_y$$

$$\begin{aligned} U''_{x^2} &= U_{\alpha^2} \alpha_y^2 + U_{\beta^2} \beta_y^2 + 2U_{\alpha\beta} \alpha_y \beta_y + U_\alpha \alpha_{y^2} + U_\beta \beta_{y^2} \\ &= 4U_{\alpha^2} \quad \rightarrow (2) \end{aligned}$$

En remplaçant (1) et (2) dans (*), on obtient:

$$4U_{\beta^2} + 4U_{\alpha^2} = 0 \Rightarrow U_{\beta^2} + U_{\alpha^2} = 0$$

1.2 Cas de trois variables

L'équation aux dérivées partielles de second ordre à trois variables indépendantes,

s'écrit sous la forme:

$$A_{11}U''_{x^2} + A_{22}U''_{y^2} + A_{33}U''_{z^2} + 2A_{12}U''_{xy} + 2A_{13}U''_{xz} + 2A_{23}U''_{yz} + F = 0 \quad \rightarrow (1)$$

On considère de la forme quadratique

$$A_{11}t_1^2 + A_{22}t_2^2 + A_{33}t_3^2 + 2A_{12}t_1t_2 + 2A_{13}t_1t_3 + 2A_{23}t_2t_3$$

On réduit à une somme de carrés $\sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \cdot t_i \cdot t_j$

La forme se réduit à $\sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot t_k^2$

1—Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont de même signe, le type de l'équation est elliptique.

2—Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ au moins un est nul, le type de l'équation est parabolique.

3—Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ne sont pas de même signe, le type de l'équation est hyperbolique.

Dans (1):

En effectuant sur les variables indépendants le changement de variable suivante:

$$\xi(x, y, z) = C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z$$

$$\eta(x, y, z) = C_{21}x + C_{22}y + C_{23}z$$

$$\zeta(x, y, z) = C_{31}x + C_{32}y + C_{33}z$$

Où C_{hj} est une matrice

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$U''_{x^2} = U_{\xi^2}\xi_x^2 + U_{\eta^2}\eta_x^2 + U_{\zeta^2}\zeta_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2U_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + 2U_{\eta\zeta}\eta_x\zeta_x$$

$$U''_{y^2} = U_{\xi^2}\xi_y^2 + U_{\eta^2}\eta_y^2 + U_{\zeta^2}\zeta_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + 2U_{\xi\zeta}\xi_y\zeta_y + 2U_{\eta\zeta}\eta_y\zeta_y$$

$$U''_{z^2} = U_{\xi^2}\xi_z^2 + U_{\eta^2}\eta_z^2 + U_{\zeta^2}\zeta_z^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_z\eta_z + 2U_{\xi\zeta}\xi_z\zeta_z + 2U_{\eta\zeta}\eta_z\zeta_z$$

$$U''_{xy} = U_{\xi^2}\xi_x\xi_y + U_{\eta^2}\eta_x\eta_y + U_{\zeta^2}\zeta_x\zeta_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\xi\zeta}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) \\ + U_{\eta\zeta}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x)$$

$$U''_{xz} = U_{\xi^2}\xi_x\xi_z + U_{\eta^2}\eta_x\eta_z + U_{\zeta^2}\zeta_x\zeta_z + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + U_{\xi\zeta}(\xi_x\zeta_z + \xi_z\zeta_x) \\ + U_{\eta\zeta}(\eta_x\zeta_z + \eta_z\zeta_x)$$

$$U''_{yz} = U_{\xi^2}\xi_y\xi_z + U_{\eta^2}\eta_y\eta_z + U_{\zeta^2}\zeta_y\zeta_z + U_{\xi\eta}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_y) + U_{\xi\zeta}(\xi_y\zeta_z + \xi_z\zeta_y) \\ + U_{\eta\zeta}(\eta_y\zeta_z + \eta_z\zeta_y)$$

En remplaçant les dérivées dans (1), on obtient:

$$A_{11}^*U''_{\xi^2} + A_{22}^*U''_{\eta^2} + A_{33}^*U''_{\zeta^2} + 2A_{12}^*U''_{\xi\eta} + 2A_{13}^*U''_{\xi\zeta} + 2A_{23}^*U''_{\eta\zeta} + F = 0 \quad \rightarrow (3)$$

$$\text{Avec: } A_{11}^* = A_{11}\xi_x^2 + A_{22}\xi_y^2 + A_{33}\xi_z^2 + 2(A_{12}\xi_x\xi_y + A_{13}\xi_x\xi_z + A_{23}\xi_y\xi_z)$$

$$A_{22}^* = A_{11}\eta_x^2 + A_{22}\eta_y^2 + A_{33}\eta_z^2 + 2(A_{12}\eta_x\eta_y + A_{13}\eta_x\eta_z + A_{23}\eta_y\eta_z)$$

$$A_{33}^* = A_{11}\zeta_x^2 + A_{22}\zeta_y^2 + A_{33}\zeta_z^2 + 2(A_{12}\zeta_x\zeta_y + A_{13}\zeta_x\zeta_z + A_{23}\zeta_y\zeta_z)$$

$$A_{12}^* = \xi_x(A_{11}\eta_x + A_{12}\eta_y + A_{13}\eta_z) + \xi_y(A_{21}\eta_x + A_{22}\eta_y + A_{23}\eta_z) + \xi_z(A_{31}\eta_x + A_{32}\eta_y + A_{33}\eta_z)$$

$$A_{13}^* = \xi_x(A_{11}\zeta_x + A_{12}\zeta_y + A_{13}\zeta_z) + \xi_y(A_{21}\zeta_x + A_{22}\zeta_y + A_{23}\zeta_z) + \xi_z(A_{31}\zeta_x + A_{32}\zeta_y + A_{33}\zeta_z)$$

$$A_{23}^* = \eta_x(A_{11}\zeta_x + A_{12}\zeta_y + A_{13}\zeta_z) + \eta_y(A_{21}\zeta_x + A_{22}\zeta_y + A_{23}\zeta_z) + \eta_z(A_{31}\zeta_x + A_{32}\zeta_y + A_{33}\zeta_z)$$

Où la matrice (C_{h_j}) est convenable et diagonalisable.

Il existe une transformation linéaire par (C_{ij}) pour laquelle on aura:

$$A^* = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ ou nulle}$$

On aura: $\lambda_1 U_{\xi^2} + \lambda_2 U_{\eta^2} + \lambda_3 U_{\zeta^2} + F = 0$

Avec les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 égaux à 1, -1, ou 0

1.2.1 Exemples

1°/ $4U''_{x^2} + 2U''_{y^2} - 6U''_{z^2} + 6U''_{xy} + 10U''_{xz} + 4U''_{yz} + 24 = 0$

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2, t_3) &= 4t_1^2 + 2t_2^2 - 6t_3^2 + 6t_1t_2 + 10t_1t_3 + 4t_2t_3 \\ &= \frac{1}{4}(4t_1 + 3t_2 + 5t_3)^2 - \frac{1}{4}(3t_2 + 5t_3)^2 + 2t_2^2 + 4t_2t_3 - 6t_3^2 \\ &= \frac{1}{4}(4t_1 + 3t_2 + 5t_3)^2 - \frac{1}{4}(9t_2^2 + 25t_3^2 + 30t_2t_3) + 2t_2^2 + 4t_2t_3 - 6t_3^2 \\ &= \frac{1}{4}(4t_1 + 3t_2 + 5t_3)^2 - \frac{1}{4}t_2^2 - \frac{49}{4}t_3^2 - \frac{14}{4}t_2t_3 \\ &= \frac{1}{4}(4t_1 + 3t_2 + 5t_3)^2 - \frac{1}{4}(t_2^2 + (7t_3)^2 + 14t_2t_3) \\ &= \frac{1}{4}(4t_1 + 3t_2 + 5t_3)^2 - \frac{1}{4}(t_2 + 7t_3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = 4t_1 + 3t_2 + 5t_3 \\ \tau_2 = t_2 + 7t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$Q(t_1, t_2, t_3) \rightsquigarrow \frac{1}{4}\tau_1^2 - \frac{1}{4}\tau_2^2 = 0$, le type de l'équation est parabolique

2°/ $U''_{x^2} - 4U''_{xy} + 2U''_{xz} + 4U''_{y^2} + U''_{z^2} - 2xyU'_x + 4xz = 0$

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2, t_3) &= t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 \\ &= (t_1 - 2t_2)^2 - (-2t_2)^2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 \\ &= (t_1 - 2t_2)^2 - 4t_2^2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 \\ &= (t_1 - 2t_2)^2 + 2t_1t_3 + t_3^2 \\ &= (t_1 - 2t_2)^2 + (t_3 + t_1)^2 - t_1^2 \\ &= -t_1^2 + (t_1 - 2t_2)^2 + (t_3 + t_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 \\ \tau_2 = t_1 - 2t_2 \\ \tau_3 = t_1 + t_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$Q(t_1, t_2, t_3) \rightsquigarrow -\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 0$, le type de l'équation est hyperbolique.

Application

$$1^\circ / U''_{x^2} + 3U''_{y^2} + 3U''_{z^2} - 2U''_{xy} - 2U''_{xz} - 2U''_{yz} - 84 = 0$$

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2, t_3) &= t_1^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 - 2t_2t_3 \\ &= (t_1 - t_2 - t_3)^2 - (-t_2 - t_3)^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_2t_3 \\ &= (t_1 - t_2 - t_3)^2 - t_2^2 - t_3^2 - 2t_2t_3 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_2t_3 \\ &= (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 2t_2^2 + 2t_3^2 - 4t_2t_3 \\ &= (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 2(t_2^2 + t_3^2 - 2t_2t_3) \\ &= (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 2(t_2 - t_3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ \tau_2 = t_2 - t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$Q(t_1, t_2, t_3) \rightsquigarrow \tau_1^2 + 2\tau_2^2 = 0$, le type de l'équation est parabolique

$$\text{On a: } \begin{cases} \tau_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ \tau_2 = t_2 - t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \tau_1 + \tau_2 + 2\tau_3 \\ t_2 = \tau_2 + \tau_3 \\ t_3 = \tau_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi_x = 1 \quad \eta_x = 1 \quad \zeta_x = 2$$

$$\xi_y = 0 \quad \eta_y = 1 \quad \zeta_y = 1$$

$$\xi_z = 0 \quad \eta_z = 0 \quad \zeta_z = 1$$

$$U'_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x + U_\zeta \zeta_x$$

$$U''_{x^2} = U_{\xi^2} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta^2} \eta_x^2 + 2U_{\eta\zeta} \eta_x \zeta_x + U_{\zeta^2} \zeta_x^2 + 2U_{\xi\zeta} \xi_x \zeta_x$$

$$= U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + 4U_{\zeta^2} + 2U_{\xi\eta} + 4U_{\eta\zeta} + 4U_{\xi\zeta} \quad \rightarrow (1)$$

$$U'_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y + U_\zeta \zeta_y$$

$$U''_{y^2} = U_{\xi^2} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta^2} \eta_y^2 + 2U_{\eta\zeta} \eta_y \zeta_y + U_{\zeta^2} \zeta_y^2 + 2U_{\xi\zeta} \xi_y \zeta_y$$

$$= U_{\eta^2} + 2U_{\eta\zeta} + U_{\zeta^2} \quad \rightarrow (2)$$

$$U'_z = U_{\xi}\xi_z + U_{\eta}\eta_z + U_{\zeta}\zeta_z$$

$$\begin{aligned} U''_{zz} &= U_{\xi^2}\xi_z^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_z\eta_z + U_{\eta^2}\eta_z^2 + 2U_{\eta\zeta}\eta_z\zeta_z + U_{\zeta^2}\zeta_z^2 + 2U_{\xi\zeta}\xi_z\zeta_z \\ &= U_{\zeta^2} \quad \rightarrow (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U''_{xy} &= U_{\xi^2}\xi_x\xi_y + U_{\eta^2}\eta_x\eta_y + U_{\zeta^2}\zeta_x\zeta_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\xi\zeta}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) \\ &\quad + U_{\eta\zeta}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x) \\ &= U_{\eta^2} + 2U_{\zeta^2} + U_{\xi\eta} + U_{\xi\zeta} + 3U_{\eta\zeta} \quad \rightarrow (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U''_{xz} &= U_{\xi^2}\xi_x\xi_z + U_{\eta^2}\eta_x\eta_z + U_{\zeta^2}\zeta_x\zeta_z + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + U_{\xi\zeta}(\xi_x\zeta_z + \xi_z\zeta_x) \\ &\quad + U_{\eta\zeta}(\eta_x\zeta_z + \eta_z\zeta_x) \end{aligned}$$

$$= 2U_{\zeta^2} + U_{\eta\zeta} + U_{\eta\zeta} \quad \rightarrow (5)$$

$$\begin{aligned} U''_{yz} &= U_{\xi^2}\xi_y\xi_z + U_{\eta^2}\eta_y\eta_z + U_{\zeta^2}\zeta_y\zeta_z + U_{\xi\eta}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_y) + U_{\xi\zeta}(\xi_y\zeta_z + \xi_z\zeta_y) \\ &\quad + U_{\eta\zeta}(\eta_y\zeta_z + \eta_z\zeta_y) \\ &= 2U_{\zeta^2} + U_{\xi\zeta} + U_{\eta\zeta} \quad \rightarrow (6) \end{aligned}$$

En remplaçant (1),(2),(3),(4),(5) et (6) dans (*), on obtient:

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_{\xi^2} + U_{\eta^2} + 4U_{\zeta^2} + 2U_{\xi\eta} + 4U_{\eta\zeta} + 4U_{\xi\zeta} + 3U_{\eta^2} + 6U_{\eta\zeta} + 3U_{\zeta^2} + 3U_{\zeta^2} - 2U_{\eta^2} - 4U_{\zeta^2} \\ - 2U_{\xi\eta} - 2U_{\xi\zeta} - 6U_{\eta\zeta} - 4U_{\zeta^2} - 2U_{\eta\zeta} - 2U_{\xi\zeta} - 2U_{\zeta^2} - 2U_{\eta\zeta} - 84 = 0 \\ \Rightarrow U_{\xi^2} + 2U_{\eta^2} - 84 = 0 \end{aligned}$$

1.3 Cas de n variables

L'équation aux dérivées partielles de second ordre à n variables indépendantes,

peut être écrite sous la forme:

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}.U_{x_i x_j} + F(x_1, x_2, \dots, x_n, U, U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}) = 0$$

où $A_{ij} = A_{ji}$, et A_{ij} est des fonctions de variables (x_1, x_2, \dots, x_n) de classe C^2 .

Au point fixe (x_1, x_2, \dots, x_n) , soit la forme quadratique:

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}.t_i.t_j \quad \rightarrow (2)$$

On peut passer à la loi de la transformation linéaire,

où: $\tau = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot t_j^2$ $\alpha_j = -1, +1, 0$

L'équation (1) sera alors de type elliptique au point (x_1, x_2, \dots, x_n) si $\alpha_j = 1$,
 $j = 1, \dots, n$, où bien:

hyperbolique si $\alpha_j = 1$, $j = 1, \dots, m < n$ et $\alpha_j = -1$, $j = m + 1, \dots, n$,

et parabolique si au moins un des coefficients $\alpha_j = 0$.

En effectuant sur les variables indépendantes la transformation linéaire non-singulière

$$\xi_h = \sum_{j=1}^n C_{hj} \cdot x_j \quad h = 1, \dots, n$$

En passant: $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

$$U_{x_i x_j} = \sum_{h,k=1}^n C_{hi} \cdot C_{kj} \cdot U_{\xi_h \xi_k}$$

En substituant dans (2), on obtient:

$$\sum_{h,k=1}^n A_{hk}^* \cdot U_{\xi_h \xi_k} + G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \dots, U_{\xi_n}) = 0$$

Où C_{ij} est une matrice convenable et diagonalisable.

Il existe une transformation linéaire par (C_{ij}) pour laquelle on aura:

$$A^* = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou nulle}$$

On aura en définitive: $\lambda_1 U_{\xi_1^2} + \lambda_2 U_{\xi_2^2} + \lambda_3 U_{\xi_3^2} + F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \dots, U_{\xi_n}) = 0$

Avec les coefficients λ_1, λ_2 et λ_3 égaux à 1, -1, ou 0.

CHAPITRE 2

Méthodes de résolution d'une E.D.P de type parabolique

2.1 Méthode de la séparation des variables

La méthode de séparation de variable est une technique qui permet de remplacer les équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires.

Dans ce cas, cette méthode exige que la solution U soit écrite comme un produit:

$$U(x, y) = f(x).g(y), \text{ ou comme une somme: } U(x, y) = f(x) + g(y)$$

avec: f et g deux fonctions arbitraires.

2.1.1 Exemples

$$1^\circ / \begin{cases} U_t' = a^2 U_{x^2}'' + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, l] \\ U(0, t) = U(l, t) = 0 \end{cases}$$

On a: $U(x, t) = f(x).g(t)$

$$f(x).g'(t) = a^2 f''(x).g(t) + f(x, t) \dots * \frac{1}{f(x).g(t)}$$

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = a^2 \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{f(x, t)}{f(x).g(t)}$$

$$1 - f(x, t) = 0 \Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = a^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda & \rightarrow (1) \\ \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda & \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$\text{De (1) on } a: \frac{1}{a^2} \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda \Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda a^2$$

$$\Rightarrow g'(t) = \lambda a^2 g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} = \lambda a^2 g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dg(t)}{g(t)} = \lambda a^2 dt$$

$$\Rightarrow \ln g(t) = \lambda a^2 t + \ln A$$

$$\Rightarrow g(t) = A \exp(\lambda a^2 t)$$

$$\text{De (2) on } a: \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

$$\Rightarrow f''(x) - \lambda f(x) = 0$$

$$\text{Si } \lambda < 0, \lambda = -\mu^2$$

$$f''(x) + \mu^2 f(x) = 0 \Rightarrow r^2 + \mu^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = -\mu^2$$

$$\Rightarrow r = \pm \mu$$

$$\Rightarrow f(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc: } U(x, t) = (A \exp(\lambda a^2 t))(C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x))$$

$$U(x, 0) = A \exp(0) = \varphi(x) \Rightarrow A = \varphi(x)$$

$$U(0, t) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0$$

$$U(l, t) = C_1 \cos(lx) + C_2 \sin(lx) = 0$$

Il faut annuler $\sin(\mu l)$

$$\mu l = \pi n \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow U_n(x, t) = C_n \exp(-(\frac{n\pi}{l})^2 t) \sin(\frac{n\pi}{l} x)$$

est solution:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp(-(\frac{n\pi}{l})^2 t) \sin(\frac{n\pi}{l} x)$$

est solution formelle:

La condition $U(x, 0) = \varphi(x)$ donne

$$\varphi(x) = U(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

C'est la série de Fourier de $\varphi(x)$

$2 - f(x, t) \neq 0$, et $\varphi(x) = 0$

On cherche la solution $U(x, t)$ sous la forme:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On considère $f(x, t)$ comme une fonction de x dépendant du paramètre t

qu'on développe en série de Fourier sinus

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

On aboutit à:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t - \tau)\right) f_n(\tau) d\tau \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Les coefficients $f_n(\tau)$ sont connus:

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$2^\circ / \begin{cases} U_t' = a^2 \Delta U & (x, y) \in P = [0, l_1] \cdot [0, l_2], \quad t > 0 \\ U_{/S} = 0 & t > 0 \quad s = F_2(P) \\ U(0, x, y) = \varphi(x, y) & (x, y) \in P \end{cases}$$

$$\text{On a: } U_t' = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Rightarrow U_t' - a^2 (U_{x^2}'' + U_{y^2}'') = 0$$

On cherche une solution sous la forme: $U(x, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$, on trouve:

$$\begin{aligned} X(x) \cdot Y(y) \cdot T'(t) &= a^2 [X''(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot T(t)] = 0 \quad \dots * \frac{1}{X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)} \\ \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} &= a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda & \rightarrow (1) \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda & \rightarrow (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Dans (1) on a: } \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda a^2$$

$$\Rightarrow T'(t) = \lambda a^2 T(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} &= \lambda a^2 T(t) \\ \Rightarrow \frac{dT(t)}{T(t)} &= \lambda a^2 dt \\ \Rightarrow \ln T(t) &= \lambda a^2 t + \ln A \\ \Rightarrow T(t) &= A \exp(\lambda a^2 t) \end{aligned}$$

Dans (2) on a: $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \equiv \mu + \nu$

$$\begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 \\ X(0) = X(l_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) - \nu Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(l_2) = 0 \end{cases}$$

Les calculs donnent:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin\left(\frac{n\pi}{l_1}x\right) & Y_n(y) &= \sin\left(\frac{m\pi}{l_2}y\right) \\ \mu_n &= \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2 & \nu_m &= \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\lambda_{n,m} = \mu_n + \nu_m$$

$\lambda = \lambda_{n,m}$ la solution de (t) est:

$$T_{n,m}(t) = C_{n,m} \exp(-a^2 \lambda_{n,m} t)$$

D'où $U_{n,m}(t) = C_{n,m} \exp(-a^2 \lambda_{n,m} t) X_n(x) Y_m(y)$

doit être solution. Donc:

$$U_{n,m}(0) = C_{n,m} X_n(x) Y_m(y) = \varphi(x, y).$$

La solution est:

$$U(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} A_{n,m} \exp(-a^2 \pi^2 (\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}) t) \sin(\frac{n\pi}{l_1} x)$$

$$\text{avec } A_{n,m} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} U(\xi, \eta) \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l_1} \xi\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l_2} \eta\right) \right] d\eta$$

2.2 Transformation de Fourier

On définit la transformée de Fourier de f par:

$$\mathbb{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(ix\xi) dx$$

La transformation inverse de Fourier est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi$$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier

1-Parité:

Si f est réelle et paire, alors $\mathbb{F}(f)$ est réelle et paire et

$$\mathbb{F}(f)(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\pi\xi x) f(x) dx$$

Si f est réelle et impaire, alors $\mathbb{F}(f)$ est imaginaire pure et impaire et

$$\mathbb{F}(f)(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi\xi x) f(x) dx$$

2-Dérivation de f :

Notons f' la dérivée de f par rapport à x . Alors:

$$\mathbb{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi \mathbb{F}(f)(\xi)$$

$$\text{et donc } \mathbb{F}(f^{(n)})(\xi) = (2i\pi\xi)^n \mathbb{F}(f)(\xi)$$

3-Multiplication par la variable x :

En notant F' la dérivée F par rapport à ξ , on remarque que:

$$F(-2i\pi x f)(\xi) = F'(\xi)$$

2.2.1 Exemple

$$1 - \begin{cases} U'_t = a^2 U''_{x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Soit } \mathbb{F}(U)(\xi) = \widehat{U}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \exp(ix\xi) dx$$

$$\text{Alors } \frac{d}{dt} \widehat{U} = a^2 (-i\xi)^2 \widehat{U}$$

$$\text{D'où } \widehat{U}(\xi) = A \exp(-a^2 \xi^2 t)$$

On calcule $U(x, t)$ par la transformation de Fourier inverse:

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi$$

Après les calculs donnent:

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) d\xi.$$

Conclusion

Les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux de deux variables, trois variables et n variables jouent un rôle très importants dans les domaines de la science. Grâce à ça, on a traité dans ce mémoire un seul type est le type parabolique et les méthodes pour la résolution.

Afin de déterminer la solution sous les conditions initiales, on a choisit deux méthodes qui sont simple à appliquer. La première méthode est la méthode de séparation de variables. Dans la deuxième méthode, on a utilisé la transformation de Fourier.

Bibliographie

- [1] Claude Zuily, élément de distribution et d'équation aux dérivées partielles, Dunod, 2002.
- [2] Courant R. Hilbert R, methode of mathematical physics, John Wiley et sons ,1989.
- [3] Georges Koeper, équations aux dérivées partielles, université rené descartes paris, 2001.
- [4] Patrice Tauvel, analyse complexe pour la licence 3, Dunod, 2006.