الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L’ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمّار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT Sciences de la Matière

Mémoire de Master

Domaine : Sciences de la matière

Filière : Physique

Option : Physique Appliquée

Par :

RAMDANI RAHMA

<u>THEME</u>

Etude de l' équation de Schrödinger avec Dérivée Fractionnaire

---

Soutenu publiquement le 17/09/2020 ; devant le jury composé de :

Mr.Nouri Abdallah	*MCB*	*Président*
Mr.Choucha Abdelbaki	*MAA*	*Examinateur*
Mr.Bourega abdeldjabar	*MCB*	*Rapporteur*
Mr. Seffai Djamel	*MAA*	*Co-Rapporteur*

Année Universitaire 2019- 2020

Remerciements

Tout d’abord, je remercie Dieu le tout puissant de m’avoir donnée la patience, la volonté et l’énergie pour poursuivre ce travail.

Bien évidemment, c’est rapporteur de mémoire Bourega Abdeldjabar que vont mes premiers remerciements

Je tiens à remercier Seffai Djamel d'avoir accepté d'être

Mon co-rapporteur Mémoire lui sommes très reconnaissants de l'aide qu'il m'a apportée.

Je voudrais adresser un remerciement particulier au. Nouri Abdallahqui a pris la présidence du comité d'arbitrage, et je remercie le membre du jury: Chouha abdelbaki .

De m’avoir fait l’honneur d’examiner ce mémoire et d’en être rapporteur.

Je ne pourrais terminer sans remercier mon père, ma mère et ma famille qui m’ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l’élaboration de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

• Ma douce mère et mon cher père en reconnaissance des sacrifices qu'ils ont fait pour nous tracer un chemin dans cette vie. Que vie nous donne temps pour les remercier ! C'est grâce à leurs amours infinis, leurs patiences, leurs inestimables aide et ses conseils que ma vie s'est construite !

• Mes vifs remerciements vont également à mes frères, mes sœurs , et tous ma famille. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrifices que ce mémoire a été mené à bout enfin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi , en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

• Pour terminer, j'adresse mon grand amour à tous mes amis intimes pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné et les encouragements qu'ils m'ont offerts. Les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables.

Notations principales:

Symbole	La signification
$E_\alpha(x)$	Fonction de Mittag-Leffer.
$B\ (x, y)$	Fonction Bêta.
$\Gamma(\alpha)$	Fonction de Gamma d'Euler.
$D^\alpha x$	Dérivée fractionnaire d'ordre α.
$I^\alpha f$	Intégrale fractionnaire d'ordre α.
$\hbar$	Constante de Planck réduite.
t	Temps.
r	Position.
$H_{\alpha,\nu}$	Hamiltonien.
V (r, t)	Énergie potentielle.
$\psi\ (r, t)$	Fonction d’onde.
$\rho(r, t)$	Densité de probabilité.
v_φ	La vitesse de phase.
ω	Fréquence angulaire.
${}^{C}D^\alpha$	Dérivée fractionnel de Caputo.
${}^{RL}D^\alpha$	Dérivée fractionnel de Riemann-Liouville.
k_α	Ordre fractionnel vecteur d’onde.
ε_{α_k}	Énergie cinétique.
c_i	Une certaine constante.

Table des matières

Schrödinger composée via dérivé fractionnaire

Introduction

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques pour d'étendre les définitions des intégrales et des dérivées traditionnelles à des ordres non entiers. L'intégrale et la dérivée fractionnaires représentent respectivement la généralisation à des ordres non entiers de l'intégrale et de la dérivée, tout comme la fonction puissance à exposant réel qui correspond à la «prolongation » de la fonction puissance à exposant entier. Plusieurs définitions ont été proposées pour la dérivation non entière. Il faut cependant noter que ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont globalement équivalentes pour un grand nombre de fonctions.

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul [1-6], mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un plus large intérêt ; [5- 8] . Le calcul fractionnaire a un champ d'applications très vaste, [9, 10, 11, 2, 4], par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique, biologie . . .

Historiquement, la première définition de l'intégrale et de la dérivée d'ordre non entier a été établie par Riemann et Liouville comme une conséquence de la solution aux équations intégrales d'Abel [12]. Ces intégrales et dérivées ont été nommées en leur honneur comme les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville [13-14]. l'histoire du calcul remonte à la fin du $17^{éme}$ siècle, partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital,posée le 30/09/1695, sur la signification de$\frac{d^n f(x)}{dx^2}$ si $n = \frac{1}{2}$ [15-16].

le calcul fractionnaire entre dans le monde de la mécanique quantique pour l'objectif de généralisation - sans aucune contradiction avec les postulats de la mécanique quantique standard-. Les possibilités de cette généralisation a été montrée par LASKIN [17], qui a développé une nouvelle mécanique quantique fractionnaire. L'équation fractionnaire de Schrödinger comprend la dérivée d'ordre fractionnaire a au lieu de la dérivée seconde a = 2 dans l'équation standard de Schrödinger. Les résultats de la mécanique quantique fractionnaire ont été discutées par plusieurs auteurs [18]. Ces dernières années, A lisultanov [19] a discuté les possibilités d'introduire ce concept en physique statistique quantique et son interprétation physique. Ils ont également étudié les propriétés thermodynamiques de quelques systèmes statistiques quantiques avec hamiltenien fractionnaire

Ce mémoire est organisé à trois chapitres comme suit:

Le premier chapitre est réservée à la présentation des fonctions spéciales comme les fonctions gamma et bêta, fonction Mittag-Leffer ; le plus souvent utilisées dans le calcul fractionnaire, et les dérivées fractionnaire Caputo.

Dans le deuxième chapitre, on a exposé quelque définitions et postulat nécessaire dans la formulation de la théorie de la mécanique quantique et les principes fondamentaux. Puis, on a écrit la fonction d'onde et propagation de Schrödinger, et la notation de Dirac.

le troisième chapitre, est consacré à l'objectif de cette mémoire[20], nous avons étudié la formulation de la mécanique quantique en utilisant le calcul fractionnel de Jumarie [20], et le traitement de la solution de l'équation fractionnaire de Schrödinger, et l'étude plus approfondie de la fonction d'onde fractionnelle. A la fin, nous avons présenté nos conclusions.

Chapitre 1 :Préliminaires et définitions

1.1 Fonctions usuelles pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1. 1.1Fonction Gamma

Définition1.1.1: La fonction Γd'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes[21-22]**.**

Pour$Re(z) > 0$on définie$\Gamma(z)$par:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} exp(-t) dt. \qquad (1.1)$$

Vérifie la propriété suivant

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Et pour entier n on a:

$$n! = \Gamma(n + 1).$$

Certaines des propriétés les plus importantes sont:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \qquad (1.2)$$

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}(2n - 1)!, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

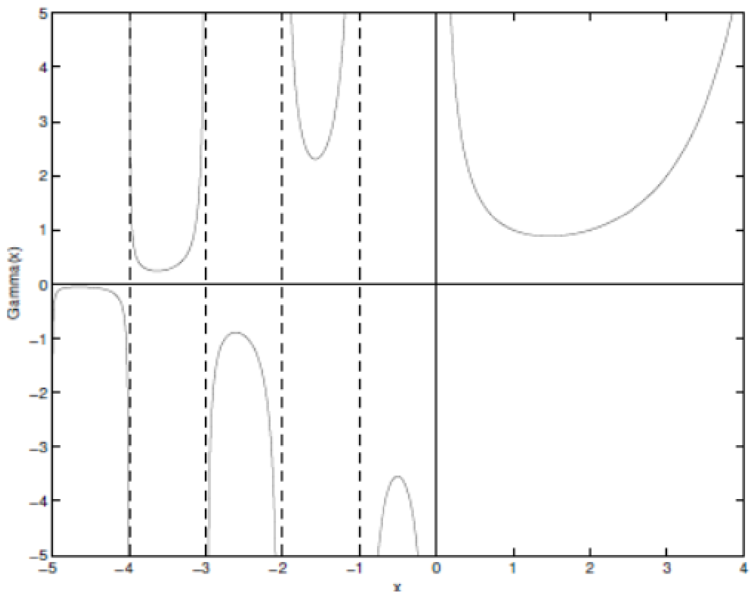

Fig. 1.1 –Courbe représentative de la fonction gamma.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition1.1.2: Comme la fonction gamma, la fonction bêta est définie par une intégrale finie. Sa définition est donnée par[22].

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \tag{1.3}$$

avec $\mathrm{Re}(z)>0$ $et\mathrm{Re}(w)>0$.

La fonction de Bêta peut également définie en termes de la fonction Gamma.

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.4}$$

avec $\mathrm{Re}(z)>0$ $et\mathrm{Re}(w)>0$.

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielleexp(x) et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire[22].

Définition1.1.3: Pour$z\epsilon\mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler$E_\alpha(z)$ (notée par M-L) est définie comme suit:

$$E_\alpha(z)=\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty}\frac{z^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{\Gamma(\alpha\kappa+1)}}, \tag{1.5}$$

avec $\alpha\epsilon\mathbb{R}^+$et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$est définie comme suit:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)},\ \ \alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}^+,\ \ z\epsilon\mathbb{C}. \tag{1.6}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple,

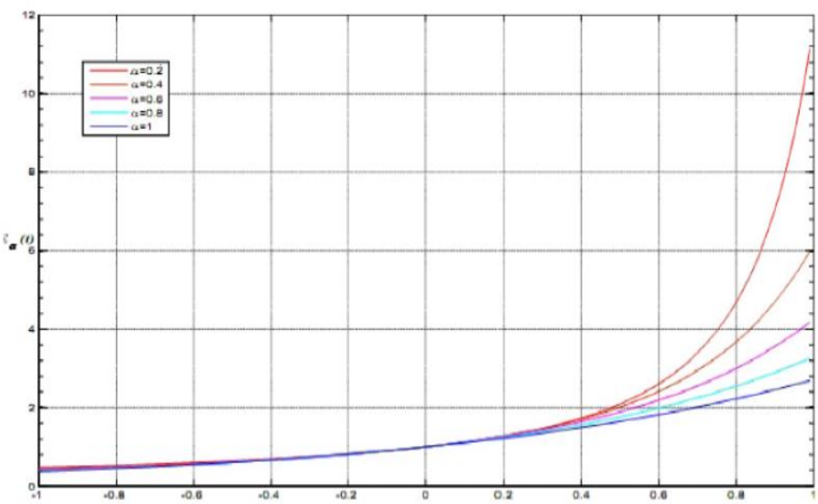

Fig. 1–La fonction.de Mittag-Leffler à un seul paramètre

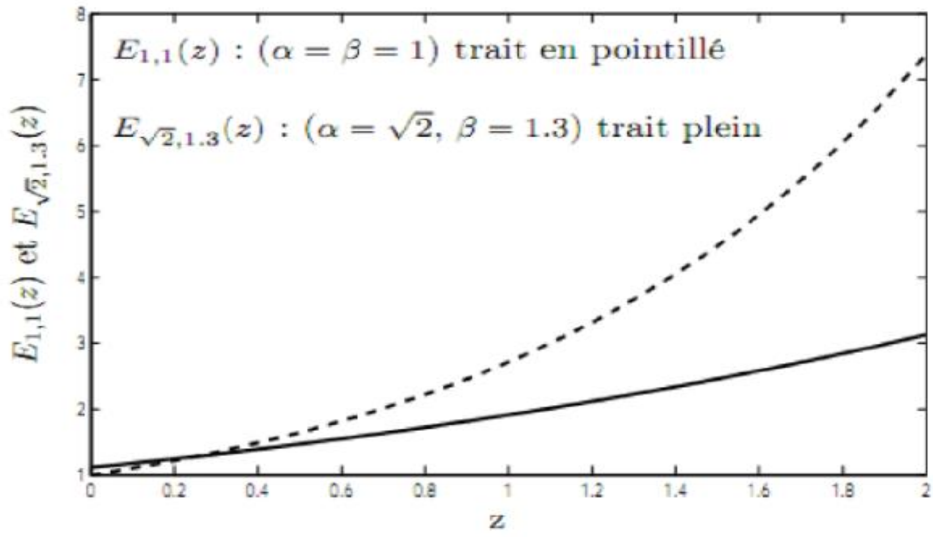

Fig. 2 –La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Exemples1.1.4: Soit $z\epsilon\mathbb{C}$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\kappa+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\kappa!} = exp(z).$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\kappa+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} = \frac{exp(z)-1}{z}.$$

$$E_{1,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2z^k}{\Gamma(\kappa+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{(2\kappa)!} = \cosh z.$$

1.1.4 *Fonction Mittag-Leffler et fonctions trigonométriques fractionnelles*

$Pour\alpha = 1$, c'est simple fonction exponentielle i.e.

$$E_1(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Une des propriétés les plus importantes de la fonction Mittag-Leffler[23].

Propriétés* 1.1.5*: *Pour tout* $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$*et* $0 < \alpha < 1$, *on a*

1. $E_\alpha(\lambda x^\alpha)E_\alpha(\lambda y^\alpha) = E_\alpha(\lambda(x+y)^\alpha)$.

2. $E_\alpha(ix^\alpha) = \cos_\alpha(t^\alpha) + i\sin_\alpha(t^\alpha),$ *où*

$$\cos_\alpha(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(t)^{2\alpha k}}{\Gamma(1+(2\,k)\alpha)}\,, \qquad \sin_\alpha(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(t)^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2\,k+1)\alpha)}.$$

3. $\mathrm{D}^{\alpha} E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}) = \lambda E_{\alpha}(x^{\alpha})$.

4. $\mathrm{D}^{\alpha} \cos_{\alpha}(t^{\alpha}) = -\sin_{\alpha}(t^{\alpha})$.

5. $\mathrm{D}^{\alpha} \sin_{\alpha}(t^{\alpha}) = \cos_{\alpha}(t^{\alpha})$.

1.2 Dérivées et intégrales fractionnaires

Dans cette section, nous présentons quelques approches de généralisation de la notion de dérivation et intégration[22] .

1.2.1 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction f définie pour $t > a$ on pose:

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau \,,$$

$$(I^2 f)(t) = \int_a^t (If)\,(x)dx = \int_a^t \int_a^x f(\tau)d\tau dx = \frac{1}{1!}\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.7)$$

En répétant fois on obtient d'après la formule de Cauchy[22].

$$(I^n f)(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau)d\tau \dots d\tau_2 d\tau_1 \;= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \quad (1.8)$$

En utilisent la fonction d'Euler (1.1) on aura la définition suivante.

Définition1.2.1: Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur I^{α} définit sur $L^1[a,b]$ par:

$$(I^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx. \quad (1.9)$$

Pour $t\epsilon[a,b]$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre α.

Pour $\alpha = 0$ on a:

$$I^0 f(t) = f(t).$$

C-à-d, $I^0 = I$ est un l'opérateur identité. Une autre propriété est la linéarité:

$$I^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = \lambda \mathrm{I}^{\alpha} f(\mathrm{t}) + \mathrm{I}^{\alpha} g(\mathrm{t}), \qquad \alpha\epsilon\mathbb{R}_+,\ \lambda\epsilon\mathbb{C}.$$

1.2.2 L'opérateur différentiel partiel fractionnaire de Riemann Liouville

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant[22].

Définition1.2.2: Si $\alpha > 0,\ t > a,\ \ a,\ t\epsilon\mathbb{R}$. Puis

$$
{}^{RL}D^{\alpha}f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx, & n-1<\alpha<n\epsilon\mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n}f(t), & \alpha = n\epsilon\mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.10}
$$

D'autre part, si $\alpha < 0$ on note par ${}^{RL}D^{\alpha}f(t) = I^{-\alpha}f(t)$, la définition peut être aussi appliquée et ${}^{RL}D^{\alpha}f(t)$existe pour$f$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$.
Cette dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville (RL) peut être aussi définie par la formule suivante :

$$
{}^{RL}D^{\alpha}f(t) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n)} \left(I^{(n-\alpha)}f\right)(t).
$$

Exemple1.2.3:
1- En général la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante non nulle, ce qui est contraire au calcul classique.

En effet, soit $f(t) = c,\quad c\epsilon\mathbb{R},\ 0 < \alpha < 1$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \left(\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t -(t-s)^{-\alpha}cds, \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{-1}{(1-\alpha)}(t-1)^{1-\alpha}\right]_0^t \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{-1}{(1-\alpha)}\left(0-t^{(1-\alpha)}\right)\right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \neq 0 .
\end{aligned}
$$

2- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction f telle que :

$$
f(t) = (t-a)^{\beta}.
$$

Soitα non entier et $0 \le n-1 < \alpha < n$avec $\beta > -1$alors on a :

$$
{}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}(x-a)^{\beta}dx.
$$

En faisant le changement de variable$x = a + s(t-a)$on aura :

$$
{}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds.
$$

D' après (1.3) on a:

$$
{}^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha,\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Et de (1.4) on a:

$$^{RL}D^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Pour $\alpha=1/2\ ,\ \beta=1/2\, eta=0$, on aura

$$^{RL}D^{1/2}t^{1/2}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)}=\Gamma(3/2).$$

1.2.3 L'opérateur fractionnaire de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires[22].

Définition1.2.4: Suppose que$\alpha>0\ ,t>a,\ a,t\epsilon\mathbb{R}$la dérivée fractionnaire de Caputo est définit par :

$$^{C}D^{\alpha}f(t):=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx, & n-1<\alpha<n,\\ \frac{d^{n}}{dt^{n}}f(t), & \alpha=n\epsilon\mathbb{N},\end{cases} \qquad (1.11)$$

Exemple1.2.5: La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle.

$$^{C}D^{\alpha}(c)\ =\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{0}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx=0.$$

La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t)=(t-a)^{\beta}$.

Soit non entier et $0\leq n-1<\alpha<n$avec $\beta>n-1$, alors on α:

$$f^{(n)}(x)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}.$$

D'où

$$^{C}D^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_{a}^{t}(t-x)^{n-\alpha-1}\,dx.$$

En faisant le changement de variable $x=a+s(t-a)$, on aura:

$$^{C}D^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}\,s^{\beta-n}ds$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction$f(t) = t^{\beta}$

$$^{C}D^{\alpha}t^{\beta} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-a+1)}t^{\beta-\alpha}, \beta > \alpha - 1, \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \beta \leq \alpha - 1. \end{cases}$$

Exemple1.2.6: On prendre que $a = 0$, $\alpha = 1/2, (n = 1)$, $f(t) = t$.Puis nous appliquons la formule on a donc

$$^{C}D^{1/2}t = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_{0}^{t}\frac{1}{(t-x)^{1/2}}dx.$$

D' après (1.2) est on a

$$^{C}D^{1/2}t = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^{0}\frac{1}{u}du^{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}}\frac{2u}{u}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{t}-0\right).$$

Ainsi, il détient

$$^{C}D^{1/2}t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \qquad (1.12)$$

1.3 Propriétés fondamental

Lemme1.3.1: Soit $n-1 < \alpha < n, n\epsilon\mathbb{N}, \alpha\epsilon\mathbb{R}$et soit $f(t)$telle que $^{C}D^{\alpha}f(t)$existe, alors :

$$^{C}D^{\alpha}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t). \qquad (1.13)$$

Cela signifie que l'opérateur fractionnaire de Caputo équivaut à l'intégration $n-\alpha$ après une différentiation d'ordre. L'équation (1.12) découle de l'équation (1.11).

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est équivalente à la composition des mêmes opérateurs (intégration $n-\alpha$et différentiation d'ordre) mais en inversant l'ordre, c-à-d,

$$D^{n}f(t) = D^{n}I^{n-\alpha}f(t). \qquad (1.14)$$

De (1.13) et (1.14), et comme $I^{n-\alpha RL}D^{n} \neq {}^{RL}D^{n}I^{n-\alpha}$ on a le résultat suivant.

Proposition1.3.2: Les deux opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ne coïncident pas, c-à-d,

$$^{RL}D^{\alpha}(f)(t) \neq {}^{C}D^{\alpha}(f)(t).$$

On verra dans la suite que pour une classe de fonction bien définie les deux opérateurs sont identiques[22].

Lemme1.3.3: Soit $n-1<\alpha<n,\ n\epsilon\mathbb{N},\ \alpha\epsilon\mathbb{R}$et soit $f(t)$telle que ${}^{C}D^{\alpha}f(t)$ existe alors, on les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo

$$\lim_{\alpha\to n}\ {}^{C}D^{\alpha}f(t)=f^{(n)}(t), \tag{1.15}$$

$$\lim_{\alpha\to n-1}\ {}^{C}D^{\alpha}f(t)=f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0).$$

Preuve1.3.4: La preuve utilise l'intégration par parties

$${}^{C}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-f^{(n)}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_{x=0}^{t}-\int_0^t-f^{(n+1)}(x)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dx\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f^{(n)}(0)t^{n-\alpha}+\int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha}dx\right).$$

Maintenant, en prenant la limite pour$\alpha\longrightarrow n,\alpha\longrightarrow n-1$respectivement, il s'ensuit

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n}\ {}^{C}D^{\alpha}f(t)=\left(f^{(n)}(0)+f^{(n)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{t}=f^{(n)}(t).$$

$${}^{C}D^{\alpha}f(t)=\left(f^{(n)}(0)t+f^{(n)}(x)(t-x)\right)\Big|_{x=0}^{t}-\int_0^t-f^{(n)}(x)dx$$

$$=f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0).$$

Remarque 1.3.5: Pour l'opérateur différentiel fractionnaire Riemann-Liouville, la propriété d'interpolation correspondante lit[22]

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n}\ {}^{RL}D^{\alpha}f(t)=f^{(n)}(t), \tag{1.16}$$

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n-1}\ {}^{RL}D^{\alpha}f(t)=f^{(n-1)}(t).$$

Linéarité

Lemme1.3.6: Soit$n-1<\alpha<n,\ n\epsilon\mathbb{N},\ \ \lambda\epsilon\mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$telles que ${}^{C}D^{\alpha}f(t),\ {}^{C}D^{\alpha}g(t)$existent. La dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur linéaire, c-à-d,

$${}^{C}D^{\alpha}(\lambda f+g)(t)=\lambda\,{}^{C}D^{\alpha}f(t)+\ {}^{C}D^{\alpha}g(t). \tag{1.17}$$

Prevue1.3.7 : On a

$${}^{C}D^{\alpha}f(t)=I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$$

$$^{C}D^{\alpha}(\lambda f+g)(t)=I^{n-\alpha}D^{n}[\lambda f(t)+g(t)]$$
$$=\lambda I^{n-\alpha}D^{n}[(f+g)(t)].$$

Comme la dérivée fractionnaire d'ordre α et l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$

$$^{C}D^{\alpha}\big((\lambda f+g)(t)\big)=\lambda I^{n-\alpha}D^{n}f(t)+I^{n-\alpha}D^{n}g(t)$$
$$=\lambda\, ^{C}D^{\alpha}f(t)+\,^{C}D^{\alpha}g(t).$$

Non-commutation

Lemme1.3.8: On suppose que $n-1<\alpha<n,\ m,n\in\mathbb{N}$, et soit la fonction $f(t)$telle que $^{C}D^{\alpha}f(t)$ existe, alors :

$$^{C}D^{\alpha}D^{m}f(t)=\,^{C}D^{\alpha+m}f(t)\neq D^{m}\,^{C}D^{\alpha}f(t). \tag{1.18}$$

Corollaire1.3.9: Supposons que, $\beta=\alpha-(n-1),(0<\beta<1),\ n\in\mathbb{N},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,et soit fonction $f(t)$telle que $^{C}D^{\alpha}f(t)$ existe, alors

$$^{C}D^{\alpha}f(t)=\,^{C}D^{\beta}D^{n-1}f(t).$$

Preuve1.3.10: On remplace β par α et $n-1$ pour m dans (1.17) alors

$$^{C}D^{\beta}D^{n-1}f(t)=\,^{C}D^{\beta+n-1}f(t)=D^{\alpha-(n-1)+n-1}f(t)=\,^{C}D^{\alpha}f(t).$$

Remarque1.3.11: Pour trouver la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre arbitraire α, $(n-1<\alpha<n\ )$d'une fonction $f(t)$il suet à trouver la dérivée de Caputo d'ordre $\beta=\alpha-(n-1)\ ou\ \alpha-(n-1)$est un nombre réel compris entre 0 et 1 par conséquent l'etude de dérivée de Caputo d'ordre $\beta\epsilon(0{,}1)$est sue sante pour trouver la dérivée de Caputo l'ordre arbitraire. De même l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative, i.e.

$$D^{m\,RL}D^{\alpha}f(t)=\,^{RL}D^{\alpha+m}f(t)\neq\,^{RL}D^{\alpha\,RL}D^{m}f(t),\ \ n-1<\alpha<n,\qquad m,n\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{R}$$

1.4 Comparaison avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Dans cette sous-section, on donne une comparaison entre les dérivés fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville[22].

1. L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x=a$.

2. Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle(0) par Caputo par contre par Riemann-Lioville elle est$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.

3. Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville) comme le montre la figure, c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $n-1 \leq \alpha \leq n$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$pour la fonction $f(x)$et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier n, mais pour trouver la dérivée fractionnaired'ordre où $n-1 \leq \alpha \leq n$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier de la fonction $f(x)$et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.

Propriété	Riemann-Liouville	Caputo
Répresentation	${}^{RL}D^{\alpha}f(t) = D^{n}I^{n-\alpha}f(t)$	${}^{C}D^{\alpha}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$
Interpolation	$\lim\limits_{\alpha\to n} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim\limits_{\alpha\to n-1} {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = f^{(n-1)}(t)$	$\lim\limits_{\alpha\to n} {}^{C}D^{\alpha}f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim\limits_{\alpha\to n-1} {}^{C}D^{\alpha}f(t) =$ $f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$
Linearité	${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) =$ $\lambda^{RL}D^{\alpha}f(t) + {}^{RL}D^{\alpha}g(t)$	${}^{C}D^{\alpha}(\lambda f + g)(t)$ $= \lambda\, {}^{C}D^{\alpha}f(t) + {}^{C}D^{\alpha}g(t)$
Non-commutation	${}^{RL}D^{m\,RL}D^{\alpha}f(t)$ $= D^{\alpha+m}f(t)$ $\neq {}^{RL}D^{\alpha\,RL}D^{m}f(t)$	${}^{C}D^{\alpha}\,{}^{C}D^{m}f(t)$ $= {}^{C}D^{\alpha+m}f(t)$ $\neq {}^{C}D^{m}\,{}^{C}D^{\alpha}f(t)$
T-Laplace	$L\{{}^{RL}D^{\alpha}f(t);s\} =$ $s^{\alpha}F(s)$ $-\sum_{k=0}^{n-1} s^{k}\left[{}^{RL}D^{\alpha-K-1}f(t)\right]_{t=0}$	$L\{{}^{C}D^{\alpha}f(t);s\} =$ $s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)$
Règle Leibniz	${}^{RL}D^{\alpha}\big(f((t)g(t)\big) =$ $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left({}^{RL}D^{\alpha-K}f(t)g^{(k)}(t)\right)$	${}^{C}D^{\alpha}\big(f((t)g(t)\big) =$ $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left({}^{C}D^{\alpha-k}f(t)g^{(k)}(t)\right) -$ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\left((f(t)g(t))^{k}\right)$
$f(t) = c = const$	$D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \neq 0$	${}^{C}D^{\alpha}c = 0$

Tableau 1: Comparaison entre Riemann-liouville et Caputo.

1.5 Relation avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Théorème1.5.1: Soit $t > 0, \alpha \epsilon \mathbb{R},\ n-1 < \alpha < n.$ Supposons que $f$est une fonction telle que

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}. \tag{1.19} $$

Preuve1.5.2: On considère le D.L en série de Taylor de la fonction f au point$t = 0$

$$ f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_{n-1} $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}. $$

Où, compete ten aussi (1.8)

$$ R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-1}dx = I^n f^{(n)}(t). $$

Maintenant, en utilisant la propriété de linéarité du dérivé fractionnaire de Riemann Liouville, le dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction de puissance, les propriétés de l'intégrale fractionnaire et de la formule de représentation (1.13)

$$ {}^{RL}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}\right). $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D^{\alpha}t^k + D^{\alpha}R_{n-1} $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + {}^{RL}D^{\alpha}I^n f^{(n)}(t) $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) $$

$$ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + {}^{C}D^{\alpha} f(t). $$

Donc

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha}. $$

Corollaire1.5.3: La relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann Liouville définie par la formule suivante :

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k}}{\mathrm{k}!} f^{(k)}(0)\right). $$

Preuve1.5.4: Pour démontrer la formule, on utilise la relation de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la propriété de linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville i. e:

$$ {}^{C}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} $$

$$ = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D^{\alpha}t^{k} $$

$$ = D^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\mathrm{k}!} t^{k}\right). $$

La formule de Leibniz pour la dérivée de Caputo est peu discutée dans la littérature, le corollaire suivant découle du théorème 1.2.3

Corollaire1.5.6:(La règle de Leibniz**):** Soit $t > 0, \alpha \epsilon \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, n \epsilon \mathbb{N}$ si $f(t)$

et $g(t)$ et tous ses dérivés sont continus dans $[0, t]$puis les cales suivantes:

$$ {}^{C}D^{\alpha}((fg)(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D^{\alpha-k}f(t)\right) g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left(f(t)g(t)^{(k)}\right). \tag{1.20} $$

Preuve1.5.7: On applique consécutivement la relation (1.19) et la Règle de Leibniz pour la dérivée de Riemann-Liouville

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\big((fg)(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D^{\alpha-k}f(t)\right) g^{(k)}(t). $$

Après, la règle de Leibniz pour la dérivée de Caputo est obtenue:

$$ {}^{C}D^{\alpha}\big((fg)(t)\big) = {}^{RL}D^{\alpha}(f(t)g(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left(f(t)g(t)^{(k)}\right) $$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(D^{\alpha-k} f(t)\right) g^{(t)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left(f(t) g(t)^{(k)}\right).$$

1.6 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Linéarité1.6.1:

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire:

$$^{RL}D^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda\, ^{RL}D^{\alpha} f(t) + \mu\, ^{RL}D^{\alpha} g(t). \tag{1.21}$$

Règle de Leibniz 1.6.2

Pour n entier on a:

$$\frac{d^n}{dt^n}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n\, f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \tag{1.22}$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$^{RL}D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n\, f^{(k)}(t)\, ^{RL}D^{\alpha-k} g(t).$$

$^{RL}D^{\alpha}$est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann Liouville.

1.7 Dérivée fractionnaire au sens de Jumarie

Définition1.7.1: Soit f :$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$une fonction continue et α un nombre réel strictement négatif. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $^{J}D^{\alpha} f(t)$la fonction définie par[24,25]

$$^{J}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, \qquad o\grave{u}\; t > 0,\ \alpha < 0. \tag{1.23}$$

Exemple1.7.2: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = c.$$

Où c est une constante réelle. Pour $\alpha < 0$ et $t > 0$, on a

$$^{J}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha-1} c dx = c \frac{[(t-x)^{-\alpha}]_0^t}{-\alpha \Gamma(-\alpha)} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0.$$

Définition1.7.3: Soit f :$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. On appelle la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $^{J}D^{\alpha} f(t)$ la fonction définie par

$$^{J}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha} \left(f(x) - f(0)\right) dx, \qquad o\grave{u}\; t > 0. \tag{1.24}$$

Remarque1.7.4:

1) Si $f(0) = 0$ alors ${}^{J}D^{\alpha}f(t)$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f .

2) La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est un dérivée non locale.

3) La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie pour $0 < \alpha < 1$ d'une constante est nulle.

Exemple1.7.5: Soit f la fonction définie sur ℝ par

$$f(\mathrm{x}) = t^{\gamma};\ 0 < \alpha < 1,\ \ 0 > \gamma.$$

Pour $t > 0$, on a

$${}^{J}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-x)^{-\alpha}(x^{\gamma}-0)dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-x)^{-\alpha}x^{\gamma}dx.$$

Posons

$$x = tv.$$

Alors

$${}^{J}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\alpha}\int_{0}^{1}(1-v)^{-\alpha}v^{\gamma}dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\alpha}\beta(1-\alpha,\gamma+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha+1)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\alpha} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}t^{\gamma-\alpha}.$$

Définition 1.7.6: Soit f :$\mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n < \alpha < n + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est définie par

$${}^{J}D^{\alpha}f(t) = \left({}^{RL}D^{\alpha-n}f(t)\right)^{(n)}. \tag{1.25}$$

Exemple1.7.7: Soit $f$la fonction définie sur ℝ par

$$f(t) = t^{\gamma}, n < \alpha < n + 1,\ \ 0 > \gamma.$$

Calculons ${}^{J}D^{\alpha}f(t)$.Pour t> 0.

On pose

$$\theta = \alpha - n.$$

Alors

$$0 < \theta < 1.$$

C'est-à-dire

$${}^{J}D^{\theta+n}f(t) = \left({}^{RL}D^{\theta}f(t)\right)^{(n)}.$$

D'autres part, on a

$${}^{RL}D^{\theta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-x)^{-\alpha}(x^{\gamma} - 0)dx = \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-x)^{-\alpha}x^{\gamma}dx$$

Posons

$$x = tv.$$

Alors

$${}^{J}D^{\theta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\theta}\int_{0}^{1}(1-v)^{-\theta}v^{\gamma}dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\theta)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\theta}\beta(1-\theta,\gamma+1)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\theta+1)}\frac{d}{dt}t^{1+\gamma-\alpha} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta+1)}t^{\gamma-\theta}.$$

Alors

$${}^{J}D^{\theta+n}f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}t^{\gamma-\theta} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\theta-n+1)}t^{\gamma-\theta-n}$$

Par suite

$${}^{J}D^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}t^{\gamma-\alpha}$$

Dans le sens classique de Leibniz le dérivé fractionnel Jumarie est défini par fractionnement différence. Soit$f$:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ en, dénote un continu (mais pas nécessairement différenciable) fonction, et laissez $h > 0$ ote un pas infinitésimal constant.

Définir un opérateur avant $E_h[f(x)] = f(x+h)$; puis la différence fractionnelle sur la droite et de l'ordre α, $0 < \alpha < 1$ de $f(x)$ est

$$\Delta_+^{(\alpha)} f(x) = (E_h - 1)^\alpha f(x),$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k ({}^{\alpha}C_k) f(x + (\alpha - k)h).$$

Où, $${}^{\alpha}C_k = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$$

Sont les coefficients binomiaux généralisés. Puis le fractionnement Jumarie dérivé est la suivante:

$$f_+^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\Delta_+^{(\alpha)} f(x)}{h^\alpha} = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\ . \tag{1.26}$$

De même on peut avoir quitté la dérivée de Jumarie par la définissant de l'opérateur du décalage vers l'arrière. Dans cette définition de Jumarie, nous soustrayons la valeur de la fonction au point de départ, de la fonction elle-même, puis la dérivée fractionnaire est prise (au sens de Riemann-Liouvelli). Cette compensation rend la dérivée fractionnaire de la fonction constante nulle, et donne plusieurs facilité et conjugaison avec le calcul classique d'ordre entier, en particulier les dérivés fractionnaires qui concerne la règle de série , dérivé fractionnaire de produit de deux fonctions etc [24].

1.7.1 *Quelques techniques de dérivés de Jumarie*

Considérez une fonction $[f\mathrm{u}(\mathrm{x})]$qui n'est pas différenciable mais légèrement différenciable. Jumarie a suggéré [24] trois façons différentes selon les caractéristiques de fonction.

$$D_1^\alpha(f[u(x)]) = f_u^{(\alpha)}(u)(u_x')^\alpha,$$

$$D_2^\alpha(f[u(x)]) = (f/u)^{1-\alpha}\big(f_u'(u)\big)^\alpha u^\alpha(x),$$

$$D_3^\alpha(f[u(x)]) = (1-\alpha)!\, u^{\alpha-1} f_u^{(\alpha)}(u) u^\alpha(x).$$

Ceci est dans conjugaison au calcul classique similaire à la fonction exponentielle et très utile dans la résolution équation différentielle fractionnelle composée d'un dérivé fractionnel Jumarie.

Lemme1.7.8:*Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $0 < \alpha < 1$. Alors, on a

$$\int_0^t f(\tau)(d\tau)^\alpha = \alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Lemme1.7.9:*Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$une fonction continue et$0 < \alpha < 1$. *Alors*, on a

$$^{J}D_t^{\alpha}\int_0^t f(\tau)(d\tau)^{\alpha} = \Gamma(\alpha+1)f(t).$$

1.8 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Définition1.8.1*: Soit* $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$une fonction. La transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie est définie par

$$F_{\alpha}(s) := L_{\alpha}\{f(t);s\} = \int_0^{+\infty} E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\, f(t)(dt)^{\alpha}. \tag{1.27}$$

Où $s \in \mathbb{C}$ **.**

Propriété1.8.*2:* *Soient* $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$*et* $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$*deux fonctions,* $0 < \alpha < 1$. *Alors*

1. $L_{\alpha}\{(af+bg)(t);s\} = aL_{\alpha}\{(f)(t);s\} + bL_{\alpha}\{(g)(t);s\}, \ \ \forall a,b \in \mathbb{R}.$
2. $L_{\alpha}\{t^{\alpha}f(t);s\} = -\,^{J}D_s^{\alpha}L_{\alpha}\{t^{\alpha}f(t);s\}.$
3. $L_{\alpha}\{f(at);s\} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha} L_{\alpha}\left\{f(t);\frac{s}{a}\right\}, \qquad \forall a > 0.$
4. $L_{\alpha}\{f(t-b);s\} = L_{\alpha}\{f(t);s\}E_{\alpha}(-s^{\alpha}b^{\alpha}), \forall b > 0.$
5. $L_{\alpha}\{f(t)E_{\alpha}(-c^{\alpha}s^{\alpha});s\} = L_{\alpha}\{f(t);s+c\}, \forall c > 0$.
6. $L_{\alpha}\{\,^{J}D_t^{\alpha}f(t);s\} = s^{\alpha}L_{\alpha}\{f(t);s\} - \Gamma(\alpha+1)f(0).$
7. $L_{\alpha}\left\{\int_0^t f(\tau)(d\tau)^{\alpha};s\right\} = \Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}L_{\alpha}\{f(t);s\}.$
8. $L_{\alpha}\{t^{\alpha k};s\} = \Gamma(\alpha+1)\frac{\Gamma(\alpha k+1)}{s^{(k+1)\alpha}}, \ \forall k \geq 0.$

Exemple*1.8.*3: On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \cos_{\alpha}(t^{\alpha})$$

Calculons$L_{\alpha}\{f(t);s\}$ *:*

On a

$$L_{\alpha}\{\cos_{\alpha}(t^{\alpha});s\} = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\cos_{\alpha}(t^{\alpha})\,(dt)^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

On utilise une intégration par parties, on pose

$$^{J}D_t^{\alpha}v(t) = \cos_{\alpha}(t^{\alpha}), \ \ u(t) = E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha}).$$

Alors

$$v(t) = \sin_{\alpha}(t^{\alpha}),$$

$$ {}^{J}D_t^{\alpha}u(t) = -s^{\alpha}E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha}). $$

Par suite

$$ L_{\alpha}\{f(t);s\} = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\cos_{\alpha}(t^{\alpha})\,(dt)^{\alpha} $$

$$ = \lim_{y\to+\infty}\Gamma(\alpha+1)[E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\sin_{\alpha}(t^{\alpha})]_0^y $$

$$ + \lim_{y\to+\infty} s^{\alpha}\int_0^y E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\sin_{\alpha}(t^{\alpha})\,(dt)^{\alpha} $$

$$ = \lim_{y\to+\infty} s^{\alpha}\int_0^y E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\sin_{\alpha}(t^{\alpha})\,(dt)^{\alpha}\ . $$

On utilise une deuxième intégration par parties, pour cela on pose

$$ {}^{J}D_t^{\alpha}v(t) = \sin_{\alpha}(t^{\alpha})\,,\ \ u(t) = -s^{\alpha}E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha}). $$

Alors

$$ v(t) = -\cos_{\alpha}(t^{\alpha}),\quad {}^{J}D_t^{\alpha}u(t) = -s^{\alpha}E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha}). $$

C'est-à-dire

$$ L_{\alpha}\{\cos_{\alpha}(t^{\alpha})\,;s\} = \Gamma(\alpha+1)s^{\alpha} - \lim_{y\to+\infty} s^{2\alpha}\int_0^y E_{\alpha}(-s^{\alpha}t^{\alpha})\cos_{\alpha}(t^{\alpha})\,(dt)^{\alpha}. $$

Alors

$$ L_{\alpha}\{\cos_{\alpha}(t^{\alpha})\,;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}}{1+s^{2\alpha}}. $$

1.9Applications de la transformée de Laplace fractionnaire au sens de Jumarie pour la résolution des problèmes de Cauchy

Exemple**1.9**.**1**:On considère le problème de Cauchy suivant

$$ \begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \epsilon\, \mathbb{R}, \end{cases} 0 < \alpha < \ 1. $$

On a:

$$ {}^{J}D^{\alpha}y(t) + y(t) = 0. \tag{1.28} $$

En appliquant la transformée fractionnaire de Laplace au sens de Jumarie aux deux membres de l'équation (1.27), on obtient

$$ L_{\alpha}\{\ {}^{J}D^{\alpha}y(t);s\} +\ L_{\alpha}\{y(t);s\} = 0. $$

D'après le propriété (6), on a

$$L_\alpha\left\{ {}^J D^\alpha y(t); s\right\} = t^\alpha L_\alpha\{y(t); s\} - \Gamma(\alpha+1)y_0.$$

Alors

$$L_\alpha\left\{ {}^J D^\alpha y(t); s\right\} + L_\alpha\{y(t); s\} = s^\alpha L_\alpha\{y(t); s\} + L_\alpha\{y(t); s\} - \Gamma(\alpha+1)y_0 = 0.$$

C'est-à-dire

$$L_\alpha\{y(t); s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)y_0}{s^\alpha + 1}.$$

Alors

$$y(t) = y_0 {L_\alpha}^{-1}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha+1}\right).$$

Donc d'après , on obtient

$$y(t) = y_0 E_\alpha(-t^\alpha).$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville
En utilisant la propriété de la transformée de Laplace (Dérivation), on arrive à la formule suivante:

$$L\left\{{}^{RL}D^\alpha f(t); s\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0} \tag{1.29}$$

$$= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left[D^k I^{n-\alpha} f(t)\right]_{t=0}$$

Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo avec les mêmes propriétés précédentes, on arrive à la formule suivante:

$$L\left\{ {}^C D^\alpha f(t); s\right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0),\ (n-1 < \alpha < n) \tag{1.30}$$

Preuve1.9.2: On sait que pour $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$alors:

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x).$$

On pose $g(t) = D^n f(x)$donc

$${}^C D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} g(t) \tag{1.31}$$

D'après (1.13)

$$L\left\{ {}^C D^\alpha f(x); s\right\} = L\left\{I^{n-\alpha} g(t); s = s^{-(n-\alpha)} G(s)\right\}. \tag{1.33}$$

Et $G(s) = L\{g(t); s\}$

d'après(1.29) on a :

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \tag{1.34}$$

Finalement, en remplaçant (1.33) dans (1.34), on obtient*:*

$$L\{\,{}^{C}D^{\alpha} f(t); s\} = s^{-(n-\alpha)}(s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

$$= s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Remarque1.9.3: La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est une généralisation de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier, où est remplacé parα . Il n'en va pas de même pour la dérivée de Riemann-Liouville. Cette propriété est un avantage important de l'opérateur Caputo sur l'opérateur Riemann-Liouville.

Chapitre 2 :L’équation de Schrödinger classique

Selon beaucoup de spécialistes, la mécanique quantique est la théorie scientifique la plus révolutionnaire du XXI ème siècle. Sans doute parce qu'elle s'est lancée le défi de comprendre l'univers de l'infiniment petit. Elle est à l'origine des progrès technologique extraordinaires, des semi-conducteurs aux nanotechnologies, en passant par l'imagerie médicale à résonance magnétique jusqu'à l'informatique quantique, autant de découvertes au service de l'humanité[26].

Venue au monde au début des années vingt pour mettre définitivement fin à la crise qu'a connu la physique de la fin du 19 siècle; marqué par l'impuissance et l'échec de la physique classique dans la description et la compréhension des phénomènes atomiques et subatomiques; couronnant ainsi les travaux d'illustres physiciens tels que : Bohr, De Broglie, Heisenberg, Dirac, Jordan, Schrödinger, Pauli, Planck,… etc, considérés commises pères fondateurs et ceux qui ont établi ses principes de base[26]. Bose et Fermi l'élargiront pour des systèmes de particules identiques. Quant à Van Neumann, il s'occupera du formalisme mathématique en s'appuyant sur les travaux d'anciens mathématiciens, principalement ceux de David Hilbert[26].

Il nous est impossible de parler de mécanique quantique sans évoquer l'équation de Schrödinger, la plus célèbre et la plus fondamentale de la physique. Elle fut conçue en 1925 par Erwin Schrödinger, c'est l'équation d'évolution dans le temps d'une fonction de carrée sommable, dite fonction d'onde, qu'on doit associer à toute particule matricielle selon l'hypothèse de Louis de Broglie, auteur du double aspect de la matière « onde-corpuscule»[27].

2- Fonction d'onde et propagation de Schrödinger

2.1 Equation d'onde

On considère un phénomène vibratoire se propageant suivant x avec la vitesse de phasev_φ. L'équation d'onde s'écrit[28]:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v_\varphi^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0. \tag{2.1}$$

On cherche les solutions de cette équation, en séparant les variables:

$$s(x,t) = \varphi(x)\chi(t).$$

Puis, on introduit la séparation des variables dans l'équation d'onde. Les équations de $\varphi(x)$ et $x(t)$ s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x,t) = \varphi(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(t),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(x,t) = \chi(t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x).$$

On obtient:

$$\frac{1}{\chi(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(t) = \frac{v_\varphi^2}{\varphi(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x).$$

Cette égalité n'est possible que si chaque terme est égal à une constante. On pose:

$$\frac{1}{\chi(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) = \frac{v_\varphi^2}{\varphi(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) = -\omega^2.$$

Ou ω est une constant ayant les dimensions d'une pulsation.

On trouve deux équations:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(t) + \omega^2\chi(t) = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + \frac{\omega^2}{v_\varphi^2}\varphi(x) = 0. \tag{2.3}$$

On pourrait aussi écrire que l'égalité correspond à une constante positive. Dans ce cas, il faudrait remplacer ω^2 par $-\omega^2$ dans les équations précédentes les solutions ne seraient pas sinusoïdales. Ce résultat ne sera pas retenu puisqu'il ne correspond pas à une propagation mais à une atténuation ou une amplification.

On cherche la solution de $\chi(t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Le temps étant une variable toujours positive ou nulle, on a:

$$\chi(t) = Ae^{i\omega t}.$$

On pose: $k = \omega/v_\varphi$. L'équation spatiale s'écrit:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0.$$

Les solutions sont sinusoïde les:

$$\begin{cases}\varphi_1(x) = B_1 e^{-i\vec{k}.\vec{x}} \\ \varphi_2(x) = B_2 e^{i\vec{k}.\vec{x}}\end{cases}$$

Avec: $\varphi(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$

On a:

$$s(x,t) = \varphi(x)x(t).$$

D'où

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t).$$

Avec:

$$s_1(x,t) = c_1 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})} c_1 = AB_1, \tag{2.4}$$

$$s_2(x,t) = c_2 e^{i(\omega t + \vec{k}.\vec{x})} c_2 = AB_2, \tag{2.5}$$

L'onde de la phase $(\omega t - \vec{k}.\vec{x})$ se propage dans le sens des x positifs, et l'onde de la phase $(\omega t + \vec{k}.\vec{x})$ se propage dans le sens des x négatifs.

2.1.1-Dualité onde-corpuscule

Toutes les interprétations de phénomènes de la physique classique, reposent sur le postulat suivant, toutes les grandeurs physiques qui caractérisent l'état d'un système sont mesurables, en principe, avec une précision aussi grande que l'on veut et l'évolution du système obéit à un d´terminisme rigoureux.

Certes, toute mesure est toujours entachée d'une erreur expérimentale qu'il est impossible de supprimer complètement. Cependant, on peut imaginer des appareils de mesure de plus en plus précis et la physique classique n'impose aucune borne à une précision toujours croissante. Il est donc naturel de dire, qu``a un instant donné, les grandeurs caractérisant l'état d'un système ont des valeurs données, puisque ces valeurs peuvent être effectivement mesurées avec une précision que rien ne limite, en principe.

Historiquement, le rayonnement thermique ou encore rayonnement du corps noir apportait la première preuve irréfutable de l'échec de la physique classique. En 1901, Max Planck proposa une explication du rayonnement isotherme. Il postula que l'change d'énergie entre atomes et radiation, c'est-à-dire la quantité d'énergie émise ou absorbée , est proportionnelle à la fréquence de celui-ci

$$E = \hbar\omega \,. \tag{2.6}$$

Et les phénomènes d'interférence et de diffraction sont plutôt de nature ondulatoire car la région d'interaction s'étend alors sur une partie importante du front d'onde; tandis que dans le cas de l'effet comptons et de l'effet photoélectrique, l'interaction entre la lumière et la matière est de nature corpusculaire et localisée. De ce qui précède, nous pouvons conclure que la lumière possède à la fois un caractère ondulatoire et un caractère corpusculaire. Cette dualité onde-corpuscule porte le nom de "principe de complémentarité de Bohr".

En physique classique, nous représentons fréquemment une onde plane se propageant le long de l'axe x par la partie réelle ou imaginaire d'une onde plane

$$\psi(\vec{x},t) = Ae^{-i(\vec{k}.\vec{x}-\omega t)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-Et)}.$$

Ou Aest l'amplitude de l'onde, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$est le vecteur d'ondes et $\omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar}$sa fréquence angulaire.

2.1.2 Principe de correspondance

Ces postulats sont complétés par le "principe de correspondance" qui suggère ce que doit être l'opérateur A du formalisme quantique, étant donné son analogue classique[29].Ce principe fait aussi appel à l'observation que dans le passage mécanique Classique →mécanique quantique, on passe du crochet de Poisson au commutateur[29]

$$\{f,g\} \to [\hat{f},\hat{g}] = -i\hbar\,\{\hat{f},\hat{g}\}. \tag{2.7}$$

En particulier on a le commutateur canonique entre les opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$de position et d'impulsion, soit[29]

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar. \tag{2.8}$$

(Opérateurs conjugués). Noter cependant que ce principe de correspondance n'est pas sans ambigüité il ne dit rien sur l'ordre des opérateurs$p$ et q à adopter pour passer d'une fonction $f(p,q)$ à sa version quantique $\hat{f}(\hat{q},\hat{p})$.

On omettra l'indice "op" dans la suite chaque fois que cela ne prêtera pas à confusion.

Notons $|q>$l'état propre de l'opérateur $\hat{q}$ de valeur propre q

$$\hat{q}|q >= q|q >, \; < q|q' >= \delta(q - q')\,, \; \int dq\,|q >< q| = Id\,.$$

A la description d'un état par un vecteur normalisé ψ (à une phase près), on peut préférer celle par sa fonction d'onde $\psi(q)$, obtenue par produit scalaire

$$\psi(q) = < q|\psi >.$$

L'action de $\hat{p}$ sur ψ se traduit en un opérateur différentiel sur $\psi(q)$:

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} i.e. < q|\hat{p}\psi \geq = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi(q).$$

De telle sorte que $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$est bien vérifiée. En particulier, pour les états propres notés $|p>$de $\hat{p}$

$$\hat{p}|p >= p|p >.$$

On a les fonctions d'onde $\psi_p\ (q) \ = < q|p >$satisfaisant

$$< q|\hat{p}\ |p >= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\psi_p(q) = p\psi_p(q).$$

D'où

$$< q|p >= \psi_p\ (q) \ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} exp \frac{i}{\hbar}\ p.q$$

(avec une normalisation conventionnelle).

2.1.3- Normalisation de la fonction d'onde

Pour étudier une particule quelconque en mécanique quantique, il faut substituer au concept classique de trajectoire celui d'un état dépendant du temps. Ainsi l'état quantique est caractérisé par une fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$qui contient toutes les informations disponibles sur la particule, $\vec{r}$et t matérialisent la dépendance de la fonction d'onde vis-à-vis de la position et du temps. $\psi(\vec{r},t)$est appelée amplitude de probabilité alors que $|\psi(x,t)|^2$est une densité de probabilité.

L'interprétation probabiliste de la fonction d'onde impose une condition, appelée condition de normalisation, cette condition est fondée sur le fait que la probabilité de trouver la particule dans la totalité de l'espace vaut 1[26.29].

Comme nous savons que la particule doit bien se trouver quelque part sur l'axe des *x*, la normalisation de la fonction d'onde est telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2\, dx = 1. \tag{2.9}$$

Cette condition entraine naturellement que la fonction d'onde ne peut pas diverger ou rester constante à l'infini, on utilise cette nécessité pour éliminer certaines solutions mathématiques divergentes.

2.2 Equation de Schrödinger stationnaire:

L'équation de Schrödinger pour l'évolution dans le temps de la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ d'une particule repérée par son vecteur position $\vec{r}$s'écrit [29.30]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \mathrm{H}\ \psi(\vec{r},t). \tag{2.10}$$

Où *H* est l'opérateur Hamiltonien de la particule et$\hbar$ la constante de Planck. Si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire stationnaire et en l'absence de champ magnétique, *H* ne dépendra pas explicitement du temps et prendra la forme simple suivante :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}). \tag{2.11}$$

Où m est la masse de la particule, supposée constante. Δest l'opérateur La placier et$V(\vec{r})$ étant l'opérateur d'énergie potentielle associée au potentiel d'interaction. Les états physiques sont ceux qui correspondent à des solutions pour lesquelles $\psi(\vec{r},t)$est normalisable sur tout l'espace de définition de$V(\vec{r})$.

Pour résoudre une équation de type (2.10) dans le cas stationnaire, on utilise souvent la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Ceci consiste à chercher les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps:

$$\psi(\vec{r},t) \; = \varphi(\vec{r})u(\mathrm{t}). \tag{2.12}$$

En substituant (2.12) dans (2.10), on obtient après séparation:

$$\frac{i\hbar}{u(\mathrm{t})}\frac{du(\mathrm{t})}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})}\mathrm{H}\,\varphi(\vec{r}). \tag{2.13}$$

Il s'agit d'une égalité entre deux expressions, dont l'une ne dépend que de l'espace et l'autre ne dépend que du temps, qui n'est satisfaite que si chaque membre est égal à la même constante.
Ainsi, si on dénote cette constante par E, u(t) et $\varphi(\vec{r})$ seront données par :

$$\frac{du(\mathrm{t})}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E\,u(\mathrm{t}). \tag{2.14}$$

Dont la solution est simplement donnée par:

$$u(t) = u(0)exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,E\mathrm{t}\right),$$

$$\mathrm{H}\,\varphi(\vec{r}) = E\,\varphi(\vec{r}). \tag{2.15}$$

L'équation (2.15) qui doit satisfaire la fonction φ(r) est une équation aux valeurs propres de l'opérateur H agissant dans l'espace de Hilbert. Par conséquent les valeurs propres E de l'Hamiltonien coïncident avec les énergies possibles que peut prendre la particule soumise aux interactions extérieures.

Cette équation est appelée ≪équation de Schrödinger stationnaire≫. Selon la forme de l'interaction, les solutions physiques peuvent être de deux natures différentes. Les solutions étendues dans l'espace, c'est-à-dire qui ne s'annulent qu'à l'infini, représentent les états de diffusion et sont associées à des énergies appartenant au spectre continu de la particule. Par contre, les solutions localisées dans l'espace, s'est-à-dire qui s'annulent à l'extérieur d'un domaine fermé et borné, représentent les états liés et correspondent à des énergies discrètes appartenant au spectre quantifié. Un système physique peut avoir uniquement des états de diffusion ou uniquement des états liés comme il peut avoir les deux à la fois.

Pour un Hamiltonien de type (2.11), on peut avoir une idée sur la nature du spectre directement à partir de la forme du potentiel si ce dernier est unidimensionnel, $V(\vec{r}) \equiv V(x)$ou central,
$V(\vec{r}) \equiv V(r)$. Dans ces cas particuliers, comme en mécanique classique, l'existence d'un minimum pour le potentiel est une signature de l'existence d'états localisés et par conséquent d'un spectre quantifié dont le nombre dépend de la profondeur du minimum. Par ailleurs, on montre que dans ces cas le spectre n'est pas dégénéré, de telle sorte que chaque niveau d'énergie quantifiée lui correspond une seule fonction propre caractérisée par le nombre zéro qu'elle possède sur l'intervalle de définition du potentiel. L'énergie la plus basse lui

correspond une fonction d'onde qui n'a aucun zéro et est appelée niveau fondamental, celle du premier niveau excité possède un seul zéro, et ainsi de suite. De façon générale la fonction d'onde du nième niveau excité possède exactement n zéros. Toutes les solutions ne satisfaisant pas ces conditions ne peuvent pas représenter des états physiques.

2.2.1- Particule libre de Schrödinger

On considère une particule libre (sans interaction avec l'extérieur$V = 0$) d'impulsion p_x et de position x se déplaçant dans l'espace suivant la direction x,

En mécanique quantique non relativiste on peut établir l'équation de Schrödinger si en s'appuyant le principe de correspondance équations ($\mathrm{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$) et à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste ($\mathrm{H} = p_x^2/2m$).

On obtient le Hamiltonien $\mathrm{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (2.16)

D'où :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{2.17}$$

On sépare les variables d'espace et de temps en posant :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\chi(t).$$

Puisque le Laplacien est une dérivée seconde par rapport à l'espace.

L'équation de Schrödinger devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi(t)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} = i\hbar\varphi(x)\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}.$$

Soit encore :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\chi(\mathrm{t})}\frac{\partial\chi(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}.$$

Cette égalité signifie que chaque terme est égal à une constante. Pour obtenir une onde sinusoïdale associée à la particule, cette constante doit être positive. Dimensionnellement, c'est une énergie:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} = \frac{i\hbar}{\chi(t)}\frac{\partial\chi(t)}{\partial t} = E. \tag{2.18}$$

La solution est: $\chi(t) = \chi(0)e^{-iEt/\hbar}$.

On utilise l'équation spatiale:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi(x) = 0. \tag{2.19}$$

La solution est sinusoïdale. On obtient:

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \tag{2.20}$$

En posant: $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$.

On écrit l'équation aux valeurs propres du Hamiltonien : $\mathrm{H}\varphi = E\varphi$.

Soit encore: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi$.

En récapitulant les résultats précédents, on a:

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-Et/\hbar)} + Be^{-i(kx+Et/\hbar)} \tag{2.21}$$

La particule étant libre, son énergie est quantifiée sous la forme:$\mathrm{E} = \mathrm{i}\hbar\omega$ et $\mathrm{p} = \hbar\mathrm{k}$,

Compte tenu de la définition de k. Ce résultat pouvait être obtenu directement en utilisant la relation de Louis de Broglie.
La solution devient:

$$\Psi(x,t) = A' e^{i(p_x x - Et)/\hbar} + B' e^{-i(p_x x + Et)/\hbar}. \qquad (2.22)$$

Avec : $\begin{cases} A' = A\chi(0) \\ B' = B\chi(0) \end{cases}$

2.2.2- Notation de Dirac

Une des propriétés des fonctions d'onde est d'appartenir à un espace de Hilbert$\mathcal{H}$ par exemple, pour une particule en mouvement dans l'espace, ξest l'espace des fonctions de carré sommable définies sur $\mathcal{L}^2$. La description de l'état fournie par cette fonction d'onde n'est pas unique. Une représentation équivalente de cette d'onde peut par exemple être donnée par sa transformée de Fourier[29].Dirac a proposé une écriture équivalente aux fonctions d'onde. Il propose de décrire les états par des vecteurs d'état.

A la fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ on assoie un vecteur qu'on appelle le Ket $\psi(t)$ qui appartient à un espace des états ξ isomorphe à l'espace de Hilbert . Cette notation va s'avérer très commode pour les manipulations formelles que nous aurons à faire. L'espace de Hilbert$\mathcal{H}$ est muni d'un produit scalaire Hermitien:

$$\left(\psi_1(\vec{r},t), \psi_2(\vec{r},t)\right) \qquad (2.23)$$

Dont la représentation dans l'espace des états $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$\langle \psi_1(t) \mid \psi_2(t) \rangle = \langle \psi_1(t) \mid \psi_2(t) \rangle^*. \qquad (2.24)$$

La construction du premier membre $\langle \psi_1(t) |$ est analogue à celle d'un Ket, on appelle $\langle \psi_1(t) |$

un Bra, en raison de l'interprétation probabiliste, les vecteurs

d'état sont considérés normés :

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1. \qquad (2.25)$$

2.3- Postulats de la mécanique quantique

2.3.. - Enoncé des postulats

En mécanique quantique, l'état d'une particule est complètement spécifié par deux variables dynamiques: la position $r(t)$ et l'impulsion $p(t)$, toutes les autres quantités physiques (énergie, moment cinétique,…) peuvent être obtenues de ces variables dynamiques; de même, connaissant l'état du système au temps $t = t_0$, les équations du mouvement[29]:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{P}}. \qquad \dot{P} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{r}} \qquad (2.26)$$

Permettent de déterminer complètement l'état du système en tout autre temps.

Les postulats de la mécanique quantique permettent de répondre aux questions suivantes:
- Comment décrire mathématiquement l'état d'un système quantique à un temps t donné ?
- Comment, étant donné cet état, prévoir les résultats de mesure des diverses grandeurs physique?
- Comment, trouver l'état d'un système au temps t étant donné la connaissance de son état au temps t_0.

2.3.2 - Description de l'état d'un système:

Postulat 01:

A chaque système physique est associé un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, l'état du système est défini à chaque instant par un vecteur normé $|\psi(t)\rangle$ de $\mathcal{H}$.

2.3.3 - Description des grandeurs physiques:

Postulat 02 :

A toute grandeur physique $\mathcal{A}$ est associé un opérateur hermétique A de $\mathcal{H}$: A est l'observable représentant la grandeur $\mathcal{A}$.

2.3.4- Mesure des grandeurs physiques :

Postulat 03 :

Soit $|\psi\rangle$ l'état dans lequel se trouve le système au moment où la mesure d'est effectuée, quel que soit $|\psi\rangle$, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres a_n de A.

Commentaire:

Une mesure physique doit évidemment toujours donner une valeur réelle (un courant, une intensité lumineuse, …), c'est bien ce que dit ce postulat puisque les valeurs propres d'une observable sont toujours réelles. De même, notons que l'on aura quantification des résultats si le spectre de l'observable A correspondant à la quantité mesurée $\mathcal{A}$ est discret. On retrouve donc la quantification des quantités physiques (par exemples l'énergie des atomes) bien connue de la mécanique quantique, évidemment, certains opérateurs ont un spectre continu et ce n'est donc pas tous les résultats qui ne prendront que des valeurs quantifiées.

2.3.5 - Résultat de mesure des grandeurs:

Postulat 04 :

Notons $p_n$le projecteur sur le sous-espace associé à la valeur propre a_n(supposé discrète), la probabilité de trouver la valeur a_n lors d'une mesure de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{P}(a_n) = \left|p_n|\psi\rangle\right|^2 \langle\psi|p_n|\psi\rangle. \tag{2.27}$$

Dans le cas d'une valeur propre discrète et non dégénérée, le projecteur est simplement:

$$p_n = |n\rangle\langle n| \quad \text{où:} A|n\rangle = a_n|n\rangle. \tag{2.28}$$

La probabilité peut donc s'écrire:

$$\mathcal{P}(a_n) = \left|\langle n \mid \psi\rangle\right|^2. \tag{2.29}$$

Si le degré de dégénérescence $g_n$est supérieur à 1, le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $a_n$est:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} \mid n_i\rangle\langle n_i \mid. \tag{2.30}$$

La probabilité s'exprime comme:

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle\psi|p_n|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{g_n}\left|\langle n_i \mid \psi\rangle\right|^2. \tag{2.31}$$

Dans le cas d'une quantité physique à spectre continu (la position, l'impulsion, par exemple). La seule prédiction que l'on peut faire correspond à un résultat situé dans une plage de valeurs, la probabilité d'obtenir un résultat compris entre a_α et $a_\alpha + da_\alpha$est

$$\mathcal{P}(a_n)da_\alpha = \langle\psi|p_\alpha|\psi\rangle da_\alpha. \tag{2.32}$$

2.3.6 - Réduction du paquet d'onde

Postulat 05 :

Immédiatement après une mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$ ayant donné le résultat a_n pour un système décrit par ψ, l'état du système $\mid \psi'\rangle$ donné par la projection normée de $\mid \psi\rangle$ sur le sous-espace propre associea_n à est:

$$\mid \psi'\rangle = \frac{p_n \mid \psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|p_n|\psi\rangle}} \tag{2.33}$$

Commentaire :

Ce postulat, dû à Von Neumann, formalise l'observation que l'action de mesurer un système physique en mécanique quantique, perturbe ce système.

2.3.7- Evolution dans le temps

Postulat 06 :

L'évolution dans le temps du vecteur d'état $\mid \psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mid \psi(t)\rangle = H(t) \mid \psi(t)\rangle \tag{2.34}$$

Où est$H(t)$ l'observable associée à l'énergie totale du système, également appelée Hamiltonien du système.

2.4-Le courant correspondant à l'équation de Schrödinger :

La densité de probabilité d'une particule en un point de l'espace est donnée Par[28.29]:

$$\rho(t,x) = |\psi(t,x)|^2 \tag{2.35}$$

En cherchons l'équation de conservation associée à cette quantité

$$\partial_t |\psi|^2 = \psi \partial_t \psi^* + \psi^* \partial_t \psi$$

$$= \psi \left(\frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi^* \right) + \psi^* \left(- \frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi^* \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \nabla (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

Ce qui donne.

$$\partial_t \rho + \nabla J = 0. \tag{2.36}$$

En définissons

$$J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \,. \tag{2.37}$$

Cette équation signifie que la "charge" associée à la densité ρ, définie par:

$$Q = \int \rho(t, x) dx \tag{2.38}$$

Chapitre 3 : Une étude de l’équation fractionnaire de Schrödinger composée via dérivé fractionnaire

Dans cette section, nous avons étudié la formulation sur la forme fractionnaire de la mécanique quantique en utilisant le calcul fractionnel. Nous avons essayé de trouver le comportement interne du royaume quantique. Dans ce but, nous avons développé l'équation fractionnaire de Schrödinger et essayé de comprendre la nature de la mécanique quantique pour la région fractale. Cette formulation conduit également à la mécanique quantique normale à condition limite. La nature de la solution change en fonction de divers ordres fractionnels de différenciation, ce qui peut mener à la signification sous-jacente de la mécanique quantique. Nous avons dû modifier l'hypothèse de De-Broglie et de Plank au sens fractionnel pour qu'elles restent intactes si des conditions limitatives sont utilisées la solution de l'équation fractionnaire de Schrödinger et nous avons discuté le spectre d'énergie.

1. Onde progressive plane d'origine:

L'onde plane est une onde spéciale qui ne change pas de direction avec l'évolution du temps, et une onde progressive n'est perturbée par aucune condition limite [31]. Considérons une onde progressive plane qui se propage dans la direction positive x avec une vitesse constante ν. La forme générale est $f(\mathrm{x},\mathrm{t}) = f(\mathrm{x}-\nu\mathrm{t})$ [31]. Nous considérons ici l'onde progressive du plan fractionnel sous la forme suivante

$$f(x,t) = f(x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha),\ 0<\alpha\leq 1. \tag{3.1}$$

Pour $\alpha = 1$, $f(x,t) = f(x-\nu t)$.

Ici ν_α est la vitesse fractionnelle. Quand α tend à un, ce plan de l'onde progressive tourner à un plan-onde dimensionnelle. Ainsi l'onde que nous avons considéré dans l'équation (3.1) est un plan onde progressive dans l'onde fractionnelle de l'ordre α, où l'espace et l'axe du temps sont transformées en x^α et t^α respectivement

et $0<\alpha\leq 1$, la valeur de α est un nombre fractionnel.

Ainsi, l'onde que nous avons considérée est une onde plane fractionnelle se déplaçant dans la direction x. Maintenant, le dérivé fractionnel de type Jumarrie [24.25] est utilisé pour trouver diverses quantités physiques et propriétés physiques d'onde correspondante. Définissons l'operateur

$${}^{J}D_x^\alpha \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},\ {}^{J}D_x^{2\alpha} \equiv \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}\, et\ {}^{J}D_t^\alpha \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha},\ {}^{J}D_t^{2\alpha} \equiv \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}}.$$

Considérer $f[u(x,t)] = f(x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha),\ 0<\alpha\leq 1, u(x,t) = x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha,\ 0<\alpha\leq 1.$

Maintenant, nous choisissons le tour différentiel qui est

$$D_3^\alpha(f[u(x)]) = (1-\alpha)!\,u^{\alpha-1} f_u^{(\alpha)}\ (u)u^\alpha(x)\ .$$

Ici, le numéro 3 définit la troisième astuce et enfin 3 n'est pas utilisé dans les opérateurs différentiels.

Maintenant $D_x^\alpha(f[u(x,t)]) = \Gamma(2-\alpha)u^{\alpha-1} f_u^{(\alpha)}\ (u)u^\alpha(x,t).$

Nous savons, à partir d'un dérivé fractionnel standard, que

$$u_x^{(\alpha)} = D_x^\alpha u(x,t) = D_x^\alpha[x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha] = D_x^\alpha[x^\alpha] = \alpha! = \Gamma(\alpha+1).$$

Clairement

$$D_x^\alpha(f[u(x,t)]) = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)u^{\alpha-1}f_u^{(\alpha)}(u). \tag{3.2}$$

De même

$$D_t^\alpha(f[u(x,t)]) = -\nu_\alpha\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)u^{\alpha-1}f_u^{(\alpha)}(u) \tag{3.2a}$$

Des équations (3.2) et (3.2a) nous obtenons

$$D_t^\alpha f[u(x)] = -\nu_\alpha D_x^\alpha f[u(x)].$$

Fonctionnement D_x^αdans les deux côtés,

$$D_x^\alpha D_t^\alpha f[u(x)] = -\nu_\alpha D_x^{2\alpha} f[u(x)] \tag{3.2b}$$

Maintenant exploitation D_t^α sur les deux côtés

$$\begin{aligned} D_t^{2\alpha} f[u(x)] &= D_t^\alpha(D_t^\alpha f[u(x)]) \\ &= D_t^\alpha(-\nu_\alpha D_x^\alpha f[u(x)]) \\ &= -\nu_\alpha D_t^\alpha D_x^\alpha f[u(x)]. \end{aligned} \tag{3.2c}$$

Maintenant en combinant les équations (3.2b) et (3.2c) nous obtenons

$$\begin{aligned} D_x^{2\alpha} f[u(x)] &= D_x^\alpha(D_x^\alpha f[u(x)])) \\ &= D_x^\alpha\left(-\frac{D_t^\alpha}{\nu_\alpha} f[u(x)]\right) \\ &= -\frac{D_t^\alpha}{\nu_\alpha}\left(-\frac{D_t^\alpha}{\nu_\alpha} f[u(x)]\right) \\ &= \frac{1}{\nu_\alpha^2} D_t^{2\alpha} f[u(x)]. \end{aligned}$$

$$D_t^{2\alpha}\big(f(x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha)\big) = {\nu_\alpha}^2\,(D_x^{2\alpha}[f(x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha)]). \tag{3.3}$$

L'équation (3.3) représente l'équation d'onde fractionnaire de l'ordre α. Si $\alpha = 1$, l'équation se transforme en équation d'onde classique unidimensionnelle pour l'onde progressive plane.

2. Solution de l'équation d'onde

Considérer que la solution de l'équation (3.3) est du type $f(x,t) = g(x^\alpha)r(t^\alpha)$ équation (3.3) nous obtenons

$$D_t^{2\alpha} f(x,t) = D_t^{2\alpha} g(x^\alpha) r(t^\alpha) = g(x^\alpha) D_t^{2\alpha} r(t^\alpha)$$

$$D_x^{2\alpha} f(x,t) = r(t^\alpha) D_x^{2\alpha} g(x^\alpha)$$

$$g(x^\alpha) D_t^{2\alpha}\big(r(t^\alpha)\big) = -{\nu_\alpha}^2 D_x^{2\alpha} g(x^\alpha) r(t^\alpha)$$

$$\frac{1}{{\nu_\alpha}^2} \frac{D_t^{2\alpha} r(t^\alpha)}{r(t^\alpha)} = \frac{D_x^{2\alpha} g(x^\alpha)}{g(x^\alpha)}. \tag{3.4}$$

Côté gauche dépend de l’espace et côté droit dépend du temps. Clairement, nous pouvons assimiler cette équation à une constante k_α^2. La partie de l'espace de l’équation est maintenant

$$\frac{1}{g(x^\alpha)} D_x^{2\alpha} g(x^\alpha) = -k_\alpha^2 \;\; or \; D_x^{2\alpha} g(x^\alpha) = -k_\alpha^2\, g(x^\alpha). \tag{3.5}$$

$$D_t^{2\alpha} r(t^\alpha) = k_\alpha^2\, \nu_\alpha^2 r(t^\alpha) \tag{3.6}$$

La solution de l’équation(3.5)*est* $g(x^\alpha) = bE_\alpha(\pm ik_\alpha x^\alpha)$, b est une constante. De même,la solution de la partie du temps de l’équation(3.6) est $r(t^\alpha) = cE_\alpha(\pm i\omega_\alpha t^\alpha)$. [11]

où nous mettons$\omega_\alpha = k_\alpha \nu_\alpha$est une constante. Ainsi, la solution générale est

$$f(x,t) = AE_\alpha(\pm ik_\alpha x^\alpha) E_\alpha(\pm i\omega_\alpha t^\alpha)\,, \tag{3.7}$$

A est constant.

3. Calcul de l’équation fractionnaire de Schrödinger

Considérer une particule de masse m déplaçant avec la vélocité ν. Selon l’hypothèse de Broglie [32] il y a une onde associée à chaque particule de matière en mouvement. La forme mathématique de l’hypothèse de Broglie est $P = \hbar k$. Ici, l’impulsion de la particule est indiquée par P et $k$sont des vecteur d’onde a une dimension; $\hbar$ est constante de planche réduite. Maintenant l’hypothèse de Planche [32] indiquer l’énergie $\mathcal{E}$ d’une particule quantique est proportionnelle à la fréquence angulaire qui est $\mathcal{E} = \hbar\omega$. Dans ce contexte, on suppose que l’hypothèse de De-Broglie et l’hypothèse de Plank sont également valables dans le calcule fractionnel à l’ordre α avec la forme modifiée suivant

$$p_\alpha = \hbar_\alpha k_\alpha \tag{3.8}$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \hbar_\alpha \omega_\alpha \tag{3.9}$$

Il est clair que si $\alpha = 1$ les équations (3.8) et (3.9) se réduisent à la forme originale de Broglie et Hypothèse de la planche. Ici $\hbar_\alpha$est la constante réduite de la planche de l’ordre de α; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, et h est la planche constante. Ici, nous avons défini $\omega_\alpha$comme ordre fractionnel fréquence angulaire et $k_\alpha$comme ordrefractionnel vecteur d’onde.

La solution générale pour l’équation (3.7) est $u = Af(x^\alpha - \nu_\alpha t^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ où A est une constante. Pour trouver la forme explicite de la solution Mittag-Leffler [33] fonction est prise comme une solution d'essai [34] comme dans l'équation différentielle classique, nous considérons $exp(x)$ comme la solution d'essai [35]. Ainsi

$$f(x^\alpha, t^\alpha) = AE_\alpha(-ik_\alpha x^\alpha)E_\alpha(i\omega_\alpha t^\alpha). \tag{3.10}$$

Ceci est une solution d'essai de l'équation (3.7).

Maintenant la vitesse fractionnaire $v_\alpha$peut être définie comme$v_\alpha = \omega_\alpha / k_\alpha$. On suppose ici que la vitesse $v_\alpha$est constante. C'est la vitesse de particule ainsi que la vitesse de groupe de l'onde. Considérant que la particule possède l'impulsion constante $p_\alpha$et l'énergie constanteε_α, i.e. l'énergie et l'élan ne varient pas avec la propagation de l'onde dans l' espace et le temps.

En utilisant les conditions de (3.8) et (3.9) dans la solution de (3.10), il peut être écrit

$$f(x^\alpha, t^\alpha) = AE_\alpha\left(-\frac{i}{\hbar_\alpha} p_\alpha x^\alpha\right) E_\alpha\left(\frac{i}{\hbar} \varepsilon_\alpha t^\alpha\right). \tag{3.11}$$

Cette particule a quelques propriétés physiques cachées à l'intérieur. Pour les étudier certaines opérations doivent être nécessaires. Il faut vérifier que la façon dont cette fonction change avec le variation de l'espace et du temps. Cette variation peut être mesurée par une opération disons α ordre différenciation fractionnelle.

Différenciation partielle par rapport à x de l'ordre α de l'équation (3.11), nous obtenons ce qui suit :

$${}^J D_x^\alpha f(x^\alpha, t^\alpha) = A\left(\frac{ip_\alpha}{\hbar_\alpha}\right) E_\alpha\left(-\frac{i}{\hbar_\alpha} p_\alpha x^\alpha\right) E_\alpha\left(\frac{i}{\hbar_\alpha} \varepsilon_\alpha t^\alpha\right),$$

$${}^J D_x^\alpha f(x^\alpha, t^\alpha) = \frac{i}{\hbar_\alpha}\left(p_\alpha f(x^\alpha, t^\alpha)\right). \tag{3.12}$$

Et le faire encore une fois nous obtenons

$${}^J D_x^{2\alpha} f(x^\alpha, t^\alpha) = -\frac{1}{{\hbar_\alpha}^2}\left({p_\alpha}^2 f(x^\alpha, t^\alpha)\right). \tag{3.13}$$

Et le faire encore une fois nous obtenons

$${}_0^J D_x^\alpha [E_\alpha(ax^\alpha)] = aE_\alpha(ax^\alpha).$$

Définissons$p_\alpha^2 = 2^\alpha m_\alpha \varepsilon_{\alpha k}$où mα est la masse (dans le cadre fractionnel), et $\varepsilon_{\alpha k}$ est énergie cinétique de l'ordre fractionnel α. Ensuite, l'équation (3.13) peut être écrite comme

$${}^J D_x^{2\alpha} f(x^\alpha, t^\alpha) = -\frac{1}{{\hbar_\alpha}^2}(2^\alpha m_\alpha \varepsilon_{\alpha k}) f(x^\alpha, t^\alpha).$$

Cela implique ce qui suit:

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha}\left({}^J D_x^{2\alpha} f[x^\alpha, t^\alpha]\right) = \varepsilon_{\alpha k} f(x^\alpha, t^\alpha). \tag{3.14}$$

Maintenant la variation de la fonction avec le temps est étudiée. Répétant ainsi les étapes

ci-dessus. Prendre Jumarie fractionnel dérivé de l'ordre α, w, r, t. Temps, nous avons suivant ${}^{J}D_t^{\alpha} f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = A\left(-\frac{i}{\hbar_{\alpha}}\varepsilon_{\alpha}\right) E_{\alpha}\left(-\frac{i}{\hbar_{\alpha}}p_{\alpha}x^{\alpha}\right) E_{\alpha}\left(\frac{i}{\hbar_{\alpha}}\varepsilon_{\alpha}t^{\alpha}\right)$

$$ {}^{J}D_x^{\alpha} f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = -\frac{i}{\hbar_{\alpha}}\varepsilon_{\alpha} f(x^{\alpha}, t^{\alpha}). \tag{3.15}$$

Ici ε_{α} est l'énergie totale du système. De la conservation de l'énergie dans l'espace fractal, il peut être écrit :

énergie Total $(\varepsilon_{\alpha}) =$ (énergie cinétique ε_{α_k}) $+$ (énergie potentiel $\mathrm{V}(x^{\alpha}, t^{\alpha})$).

Ainsi

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha k} + \mathrm{V}(x^{\alpha}, t^{\alpha}). \tag{3.16}$$

Utilisation de cette condition de l'équation (3.16) dans l'équation (3.15) et combinaison

des équations (3.14) et (1.15) nous obtenons ce qui suit

$$-\frac{{\hbar_{\alpha}}^2}{2^{\alpha} m_{\alpha}}\left({}^{J}D_x^{2\alpha}[f(x^{\alpha}, t^{\alpha})]\right) = \left(\varepsilon_{\alpha} - \mathrm{V}(x^{\alpha}, t^{\alpha})\right) f(x^{\alpha}, t^{\alpha}),$$

$$-\frac{{\hbar_{\alpha}}^2}{2^{\alpha} m_{\alpha}}\left({}^{J}D_x^{2\alpha} f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) + \mathrm{V}(x^{\alpha}, t^{\alpha}) f(x^{\alpha}, t^{\alpha})\right) = i\hbar_{\alpha}\left({}^{J}D_t^{\alpha} f(x^{\alpha}, t^{\alpha})\right). \tag{3.17}$$

Où

$$f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = AE_{\alpha}\left(-\frac{i}{\hbar_{\alpha}}p_{\alpha}x^{\alpha}\right) E_{\alpha}\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{\alpha}t^{\alpha}\right).$$

C'est l'équation fractionnelle de Schrödinger de l'ordre α. À la limite $\alpha = 1$ l'équation réduit à l'équation de Schrödinger dans une dimension espace et le temps. Cette équation a la solution qui mènera à certaines propriétés physiques intéressantes.

3.1 Solution de l'équation fractionnaire de Schrödinger

La méthode de base de la solution de l'équation (3.17) est la méthode de séparation des variables en supposant que la solution est identifiée comme le produit de deux fonctions différentes $\Phi(x^{\alpha})$ et $T(t^{\alpha})$, où $\Phi(x^{\alpha})$ dépend de la variable d'espace et $T(t^{\alpha})$ dépend de la variable de temps. La fonction est $f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = \Phi(x^{\alpha})T(t^{\alpha})$. Ici $\Phi(x^{\alpha})$ est le fonction spatiale, c-à-d. uniquement dépendante de l'espace transformé x^{α}et $T(t^{\alpha})$ est une autre fonction qui est uniquement fonction du temps transformé t^{α} .

Substitut $f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = \Phi(x^{\alpha})T(t^{\alpha})$ équation (3.17), nous obtenons ce qui suit

$$-\frac{\hbar_{\alpha}^2}{(2)^{\alpha} m_{\alpha}}\frac{1}{\Phi(x^{\alpha})}\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^{\alpha})]}{dx^{2\alpha}} + V(x^{\alpha}) = \frac{i\hbar_{\alpha}}{T(t^{\alpha})}\frac{d^{\alpha}[T(t^{\alpha})]}{dt^{\alpha}}. \tag{3.18}$$

Côté gauche de l'équation dépend de l'espace et main droite dépend du temps. Ainsi, pour satisfaire à l'équation (3.18) les deux côtés doivent être égaux à une certaine constante. Maintenant, sur le côté gauche de l'équation a un terme potentiel fractionnel. Cela a la dimension de l'énergie fractionnelle, qui est $[ML^2T^{-2}]^\alpha = [M^\alpha L^{2\alpha}T^{-2\alpha}]$.

Clairement, la constante doit avoir la dimension de fractionnement l'homogénéité de la dimension.

Du côté droit de l'équation, le l'analyse dimensionnelle nous permet de choisir l'unité de la constante $\varepsilon_\alpha$comme $(\text{Joule})^\alpha$ pour le fractionnement valeurs de α. Il est également soutenu par l'équation (3.15) que cette constante est ε_α , c'est fractionnel énergie. Maintenant, l'équation (3.18) peut être écrite comme deux équations différentes, l'une est uniquement le temps dépendant et un autre ne dépend que de l'espace.

$$\frac{i\hbar_\alpha}{T(t^\alpha)}\frac{d^\alpha[T(t^\alpha)]}{dt^\alpha} = \varepsilon_\alpha \ , \tag{3.19}$$

$$-\frac{\hbar_\alpha^2}{(2)^\alpha m}\frac{1}{\Phi(x^\alpha)}\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} + V(x^\alpha) = \varepsilon_\alpha. \tag{3.20}$$

La solution de l'équation de type (3.19) a été trouvée par Ghosh [34] à l'aide du Mittag-Leffler fonctionne dans le forme $T(t^\alpha) \approx E_\alpha \ \left(-\frac{i}{\hbar_\alpha}\varepsilon_\alpha t^\alpha\right)$. Ainsi la solution de l'équation (3.18) est (en omettant la constante intégrale) est

$$f(x^\alpha, t^\alpha) = \Psi_\alpha = \Phi(x^\alpha)E_\alpha \left(-\frac{i}{\hbar_\alpha}\varepsilon_\alpha t^\alpha\right). \tag{3.21}$$

Pour $\alpha = 1$, c-à-d. dans le cas de limitation la solution (3.21) se tourne vers la solution d'une dimension équation classique de l'onde de Schrödinger.

3.2 Équation fractionnaire de Schrödinger indépendante du temps et fractionnaire Hamiltonien

L'équation (3.20) n'a pas de solution dépendante du temps ainsi que l'équation n'a pas d'effet avec la variation du temps. Ainsi l'équation (3.20) peut être réarrangée comme

$$-\frac{\hbar_\alpha^2}{(2)^\alpha m_\alpha}\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} - \left(\varepsilon_\alpha - V(x^\alpha)\right)\Phi(x^\alpha) = 0. \tag{3.22}$$

C'est l'équation indépendante de Schrödinger. Cette équation est dépendante du potentiel. Donc, il n'est pas possible de résoudre l'équation sans connaître le caractère de la fonction potentielle. Mais il peut être confirmé que la solution a seulement la dépendance de l'espace. Donc, cette équation dit au sujet seule la caractéristique de la particule avec la variation de l'espace. Cette équation est l'énergie équation. Ainsi, Hamiltonien peut être construit avec l'analogie de Schrödinger l 'un équation dimensionnelle d'onde quantique. Le Hamiltonien en termes d'ordre non intégré dérivé est défini comme

$$\widehat{H_\alpha} = -\frac{\hbar_\alpha^2}{(2)^\alpha m_\alpha}\frac{d^{2\alpha}}{dx^{2\alpha}} + V(x^\alpha). \tag{3.23}$$

Par conséquent, l'équation (3.22) peut être écrite en termes de Hamiltonian comme

$$\widehat{H_\alpha}\Phi = \varepsilon_\alpha \Phi. \tag{3.24}$$

Cette équation n'est rien d'autre qu'une équation Eigen avec la valeur Eigenε_α. La fonction Eigen de l'équation est Φ . La fonction Eigen est le « centre d'information » d'une particule. On peut l'exploiter de différentes façons pour trouver la propriété physique correspondante. De l'équation (3.24) il est clair que le Hamiltonien est un tel opérateur, faisant le même travail. Le Hamiltonien donne l'information correcte sur l'énergie de la particule.

4. Équation de continuité:

Considérez l'équation de Schrödinger précédemment dérivée dans l'équation (3.17)

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha}\left({}^J D_x^{2\alpha}[f(x^\alpha,t^\alpha)] + V(x^\alpha,t^\alpha) f(x^\alpha,t^\alpha)\right) = i\hbar_\alpha\left({}^J D_t^{\alpha}[f(x^\alpha,t^\alpha)]\right).$$

Multipliez l'équation avec la conjugaison complexe de la solution par exemple $f^*(x^\alpha,t^\alpha)$ de l'équation et la réécriture de l'équation comme suit

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha} f^*(x^\alpha,t^\alpha)\left({}^J D_x^{2\alpha}[f(x^\alpha,t^\alpha)] + \mathrm{V}(x^\alpha,t^\alpha) f^*(x^\alpha,t^\alpha) f(x^\alpha,t^\alpha)\right)$$

$$= -i\hbar_\alpha f(x^\alpha,t^\alpha)\left({}^J D_t^{\alpha}[f^*(x^\alpha,t^\alpha)]\right). \tag{3.24}$$

Prenons la conjugaison complexe de l'équation (3.17) et multiplions avec la fonction f dans le droit côté de l'équation et la nouvelle équation est

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha} f(x^\alpha,t^\alpha)\left({}^J D_x^{2\alpha}[f^*(x^\alpha,t^\alpha)] + \mathrm{V}(x^\alpha,t^\alpha) f(x^\alpha,t^\alpha) f^*(x^\alpha,t^\alpha)\right)$$

$$= -i\hbar_\alpha f(x^\alpha,t^\alpha)\left({}^J D_t^{\alpha}[f^*(x^\alpha,t^\alpha)]\right). \tag{3.25}$$

Soustraction de l'équation (3.24) de l'équation (3.25) que nous avons suivi (en laissant tomber (x^α,t^α).

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha}\left(f^*\left({}^J D_x^{2\alpha}[f]\right) - f\left({}^J D_x^{2\alpha}[f^*]\right)\right) = i\hbar_\alpha\left(f^*\left({}^J D_x^{\alpha}[f]\right) + f\left({}^J D_x^{\alpha}[f^*]\right)\right). \tag{3.26}$$

Maintenant, l'équation peut être réécrite sous la forme suivante

$$-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha}\ {}^J D_x^{\alpha}\left(f^*\left({}^J D_x^{\alpha}[f]\right) - f\left({}^J D_x^{\alpha}[f^*]\right)\right) = i\hbar_\alpha\left(f^*\left({}^J D_x^{\alpha}[f]\right) + f\left({}^J D_x^{\alpha}[f^*]\right)\right). \tag{3.27}$$

Définissons $-\frac{{\hbar_\alpha}^2}{2^\alpha m_\alpha}\left(f^*\ {}^J D_x^{\alpha}\ f - f\ {}^J D_x^{\alpha} f^*\right) = j_\alpha$

C'est-à-dire la densité actuelle de probabilité de α de l'ordre de la et $f^*f = \rho_\alpha$ est la densité de probabilité de α de l'ordre. Pour $\alpha = 1$ la densité de probabilité fractale $f^*f = \rho_\alpha$ de se tourne vers la densité de probabilité unidimensionnelle .

Ainsi, l'équation (3.27) réduit à

$$^{J}D_x^{\alpha}[j_\alpha] = \ ^{J}D_x^{\alpha}[\rho_\alpha\ ] \tag{3.28}$$

C'est l'équation de la continuité de l'ordre α dans une dimension. Si la densité de probabilité$f^*f = \rho_\alpha$ est indépendant du temps, côté droit est zéro. Ainsi, le côté gauche est également égal à zéro. Cela implique que la variation unidimensionnelle de la densité de courant avec l'espace est zéro. L'importance physique du fait est qu'il n'y a pas de source ou de puits de courant de probabilité densité.

C'est la condition de l'état stationnaire. Pour satisfaire la condition ci-dessus de ρ_α

Moût de solution du type

$$f(x^\alpha, t^\alpha) = \Psi_\alpha = \Phi(x^\alpha)E_\alpha\big(-i(\varepsilon_\alpha t^\alpha/\hbar_\alpha)\big).$$

C'est l'état stationnaire de l'ordre α. Pour$\alpha = 1$, l'état est le même que pour l'état stationnaire unidimensionnel.

4.1 Propriétés de la fonction d'onde fractionnée

Pour une recherche plus approfondie, il est nécessaire de caractériser les propriétés de base de la solution d'équation fractionnaire de Schrödinger.

a) La fonction d'onde fractionnée doit être continue et doit être unique. Comme le particule a l'existence physique, la fonction d'onde fractionnelle de la particule doit être continu à chaque position de l'espace et du temps. Si la fonction d'onde fractionnelle n'est pas continue pendant une certaine position ou un certain temps, puis la particule disparaîtra au milieu de son trajectoire qui n'est pas du tout possible. La fonction d'onde fractionnelle doit être évaluée par une seule valeur, c.-à-d. pour chaque position de l'espace-temps la propriété de la particule est unique.

b) La fonction d'onde fractionnelle doit être carrée intégrable au sens fractionnel, c.-à-d.

$$\int_a^b \Psi_\alpha \Psi_\alpha^*\, dx^\alpha < \infty \quad dans\ la\ région \quad a \leq x \leq b.$$

c) Combinaison linéaire de solutions de l'équation d'onde fractionnaire de Schrödinger lui-même est une solution du système. Ainsi, la combinaison linéaire de la fonction d'onde est une autre d'onde fonction.

d) La fonction d'onde fractionnée doit disparaître à la limite. Si elle ne l'est pas, la limite elle-même perd ses significations. Les limites saisissent le mouvement de la particule pour aller plus loin. En conséquence, la particule doit s'arrêter à la limite et, par conséquent, le fractionnement fonction d'onde disparaît. Ici, la limite signifie une frontière parfaitement rigide. Si nous avons une analogie avec une corde vibrante délimitée par deux certains points, alors nous ne pouvons obtenir aucune amplitude sur les deux points finaux. Mathématiquement, la condition peut être décrite comme

$$\Psi(a) = \Psi(b) = 0 \ \ si\ la\ vague\ est\ dans\ la\ région\ \ a \leq x \leq b$$

e) L'équation fractionnelle de Schrödinger suggère que le dérivé fractionnel de l'ordre α.

${}^{J}D_x^{\alpha} \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$d'onde de valeur unique et continue.

f) L'ordre α dérivé fractionnel de la fonction d'onde doit disparaître à la limite. Sinon, condition de l'état stationnaire violera comme suggéré dans l'équation de la continuité.

g) La fonction d'onde doit être normalisée; cela signifie que l'existence de la particule est certainement mesuré à l'intérieur d'une limite.

4.2Etude approfondie sur la fonction d'onde fractionnelle

La solution générale de l'équation de l'onde fractionnée est

$$f(x^{\alpha}, t^{\alpha}) = \Psi_{\alpha} = \Phi(x^{\alpha}) E_{\alpha}\left(-i\left(\frac{\varepsilon_{\alpha} t^{\alpha}}{\hbar_{\alpha}}\right)\right). \tag{3.29}$$

Son conjugué complexe est $\Psi_{\alpha}{}^{*} = \Phi^{*}(x^{\alpha}) E_{\alpha}\left(i\left(\frac{\varepsilon_{\alpha} t^{\alpha}}{\hbar_{\alpha}}\right)\right)$.

Multiplier Ψ_{α} avec $\Psi_{\alpha}{}^{*}$ on obtient$\Psi_{\alpha}\Psi_{\alpha}{}^{*} = \Phi(x^{\alpha})\Phi^{*}(x^{\alpha})$. Sa quantité est indépendante du temps. Nous définissons cette quantité comme suit:« Intensité d'existence » et Ψ ou comme amplitude d'existence. Dans une certaine limite, la particule existe certainement. Donc, il peut être écrit sous forme mathématique. Soit Ψest défini dans la limite$-\infty \leq x \leq +\infty$.

Puis $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\alpha}\Psi_{\alpha}^{*}\, dx^{\alpha} = constante.$

Notez que la notation $\int_{-\infty}^{x} f(x) dx^{\alpha}$implique intégration fractionnelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\alpha}\Psi_{\alpha}^{*}\, dx^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi \ avec\ \alpha > 0. \tag{3.30}$$

Si la particule se pêche. Maintenant, nous pouvons définir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\alpha}\Psi_{\alpha}^{*}\, dx^{\alpha} = 1. \tag{3.31}$$

Si la particule existe certainement et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\alpha}\Psi_{\alpha}^{*}\, dx^{\alpha} = 0, \tag{3.32}$$

n'existe pas dans la limite le van d'intégration s'il n'existe nulle part. Clairement existence paramètre $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\alpha \Psi_\alpha^* \, dx^\alpha$est tel que la condition

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\alpha \Psi_\alpha^* \, dx^\alpha \leq 1.$$

Considérons que nous devons trouver l'information une certaine région à l'intérieur de la limite. Puis la quantité

$$\int_{-a}^{+b} \Psi_\alpha \Psi_\alpha^* \, dx^\alpha = l. \qquad (3.33)$$

l'existence su doit être inférieur à 1. Il définit que particule n'est pas localisée et il est commode parce que la particule se comporte comme l'onde et un vague n'est pas localisée. Si tout th mètre ou la probabilité ajoute, la probabilité entière est l'unité. D'après les équations (3.12), (3.13), (3.15), (3.20) nous avons constaté que la fonction d'onde est Eigen fonction des différents opérateurs.

4.3 Conditions orthogonales et normales des fonctions des ondes

Deux fonctions $F(x)$et $G(x)$définies dans la région $a \leq x \leq b$ sont orthogonales si leur intérieur produit est zéro [35]. De analogie cette condition orthogonale dans l'espace $\{x\}$nous pouvons définir la condition orthogonale pour $\{x^\alpha\}$ espace avec intégration fractionnelle de l'aile fonctionnement tel que,

$$\langle F|G\rangle = \int_a^b F^* \, (x^\alpha) G(x^\alpha) dx^\alpha = 0 \qquad (3.34)$$

Est défini comme produit intérieur de l'ordre αoù est $F^*(x^\alpha)$ condition al peut être définie par l'intégration fractionnaire suivante conjugué complexe. De la même façon normal condition peut être définie par l'intégration fractionnaire suivante:

$$\langle F|G\rangle = \int_a^b F^* \, (x^\alpha) G(x^\alpha) dx^\alpha = 1 \qquad (3.35)$$

La solution générale de la fonction d'onde est $\Psi_\alpha = \sum_i^\infty c_i \Psi_i$,Ici c_i une certaine constante. Ici i est l'indice fictif. Le conjugué complexe de la solution est $\Psi_\alpha{}^* = \sum_j^\infty c_j{}^* \Psi_j{}^*$le produit intérieur en utilisant la notation Bracket de Dirac.

$$\langle \Psi_\alpha^* | \Psi_\alpha \rangle = \sum_j^\infty \sum_i^\infty c_j{}^* c_i \langle \Psi_{j\alpha}{}^* \Psi_{i\alpha} \rangle. \qquad (3.36)$$

De l'état orthogonal et normal, nous avons ce qui suit

$$\langle \Psi_\alpha^* | \Psi_\alpha \rangle = \sum_j^\infty \sum_i^\infty c_j{}^* c_i \langle \Psi_{j\alpha}{}^* \Psi_{i\alpha} \rangle = 0 \;\; si \; i \neq j \quad \text{et}$$

$$\langle \Psi_\alpha^* | \Psi_\alpha \rangle = \sum_j^\infty \sum_i^\infty c_j{}^* c_i \langle \Psi_{j\alpha}{}^* \Psi_{i\alpha} \rangle = 1 \; si \; i = j.$$

Clairement

$$\langle \Psi_\alpha^* | \Psi_\alpha \rangle = \sum_j^\infty \sum_i^\infty c_j{}^* c_i = 1.$$

Plus précisément ça peut être écrit

$$\langle \Psi_\alpha^* | \Psi_\alpha \rangle = \sum_i^\infty |c_i|^2 = 1.$$

Maintenant, nous pouvons définir $c_i$comme existence coefficient ou coefficient de probabilité.

5. Opérateurs et valeurs des attentes

En mécanique quantique, toutes les quantités mesurables qui ne peuvent être mesurées directement sont mesurées par les valeurs d'attente [35]. Ainsi, dans le cas de la mécanique quantique α d'ordre, il doit définir les opérateurs pour chaque quantité mesurable. À cette fin, il doit y avoir des règles choisir des opérateurs[37].

i) Chaque opérateur doit être opérateur Eigen de la fonction d'onde.

ii) La valeur propre de l'exploitant définit la quantité mesurable.

iii) La valeur attendue d'un exploitant est la mesure de l'exploitant correspondant.

Envisager un exploitant $\widehat{A_\alpha}$ fonctionne sur une certaine fonction $\Psi_{i\alpha}$telle que

$$\widehat{A_\alpha}\Psi_{i\alpha} = \lambda_i \Psi_{i\alpha} . \tag{3.37}$$

De la forme générale de Ψ_α, l'équation se tourne vers

$$\widehat{A_\alpha}[\Psi_\alpha] = \sum_i^\infty c_i \widehat{A_\alpha}\Psi_{i\alpha} = \sum_i^\infty \lambda_i c_i \Psi_{i\alpha}.$$

Ainsi λ_i ne peut pas être déterminé directement. Pour les informations correctes du système, nous devons trouver valeur moyenne ou valeur d'attente du système. La valeur d'attente d'un exploitant est défini comme

$$\langle A \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{i\alpha} \widehat{A_\alpha} \Psi_{i\alpha}^* dx^\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{i\alpha} \Psi_{i\alpha}^* dx^\alpha}. \tag{3.38}$$

Pour chaque quantité physique mesurable, il y a une valeur d'attente correspondante.

6. Particules d'application simples dans un potentiel infini unidimensionnel bien

Considérer une particule est limitée par un potentiel infini unidimensionnel bien avec la longueur $x = 0$ à $x = a$ pour $0 \leq x \leq a$. Le potentiel est défini ici est du type de $V = 0$ si $0 \leq x \leq a$ et $V = \infty$ autrement la particule est strictement limitée par le puits potentiel dans le échelle transformée aussi. Ainsi, la fonction d'onde est également zéro à l'extérieur du puits. Pour la continuité[37], le la fonction d'onde doit également disparaître aux frontières.$\Phi(0) = \Phi(a^\alpha) = 0$. Le fractionnement Schrödinger équation comme suggéré dans l' équation (3.22) est

$$-\frac{\hbar_\alpha^2}{(2)^\alpha m_\alpha}\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} - \left(\varepsilon_\alpha - V(x^\alpha)\right)\Phi(x^\alpha) = 0.$$

En cela nous prenons $V(x^\alpha) = 0$. Ainsi l'équation est de la forme comme suit :

$$-\frac{\hbar_\alpha^2}{(2)^\alpha m_\alpha}\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} - \varepsilon_\alpha \Phi(x^\alpha) = 0.$$

Réarrangement nous obtenons ce qui suit :

$$\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} + \frac{(2)^\alpha m_\alpha \varepsilon_\alpha}{\hbar_\alpha^2}\Phi(x^\alpha) = 0.$$

Prenons

$$\frac{(2)^\alpha m_\alpha \varepsilon_\alpha}{\hbar_\alpha^2} = k_\alpha^2 \tag{3.38a}$$

et l'équation est maintenant suit

$$\frac{d^{2\alpha}[\Phi(x^\alpha)]}{dx^{2\alpha}} + k_\alpha^2 \Phi(x^\alpha) = 0\,. \tag{3.39}$$

Cette équation a la solution suggérée par Ghosh et al [11]

$$\Phi(x^\alpha) = AE_\alpha(-ik_\alpha x^\alpha) + BE_\alpha(ik_\alpha x^\alpha). \tag{3.40}$$

En utilisant la condition limite $\Phi(0) = \Phi(x^\alpha)$, on obtien $A + B = 0$ t Ainsi la solution (3.39) est

$$\Phi(x^\alpha) = B\left(E_\alpha(-ik_\alpha x^\alpha) - E_\alpha(ik_\alpha x^\alpha)\right).$$

En utilisant la définition de la fonction sinusoïdale fractionnée [25], nous écrivons ce qui suit :

$$\Phi(x^\alpha) = C\sin_\alpha(k_\alpha x^\alpha). \tag{3.41}$$

En utilisant la condition limite sur l'équation (3.41), nous obtenons à nouveau

$$\Phi(a^\alpha) = Csin_\alpha(k_\alpha a^\alpha) = \Phi(0) = 0. \tag{3.41a}$$

Comme défini par Jumarie [34] $\sin_\alpha(x^\alpha) = \sin_\alpha((x+M_\alpha)^\alpha)$ici nous avons défini $M_\alpha$comme premier ordre zéro ou premier passage à zéro [36] pour α fonction péché ordonnée.

Depuis $\sin_\alpha(0) = 0$, donc

$$\sin_\alpha((M_\alpha)^\alpha) = 0. \tag{3.41b}$$

En comparant les équations (3.41a) et (3.41b)

$$\sin_\alpha(k_\alpha a^\alpha) = \sin_\alpha((M_\alpha)^\alpha).$$

On obtient $k_\alpha a^\alpha = (M_\alpha)^\alpha$sous-entendant

$$k_\alpha = \left(\frac{M_\alpha}{a}\right)^\alpha. \tag{3.41c}$$

En utilisant la valeur de $k_\alpha = \left(\frac{M_\alpha}{a}\right)^\alpha$dans l'équation (3.41), la solution est

$$\Phi(x^\alpha) = C sin_\alpha\left(\left(\frac{M_\alpha}{a}\right)^\alpha x^\alpha\right).$$

6.1 Normalisation de la fonction d'onde

La condition de normalisation pour la fonction d'onde à l'ordre α est

$$\int_0^a \Phi_\alpha\, \Phi_\alpha^* dx^\alpha = 1 \tag{3.42}$$

Maintenant $\Phi(x^\alpha) = C\sin_\alpha(k_\alpha x^\alpha)$ est réel si $\Phi_\alpha\Phi_\alpha^* = |\Phi_\alpha|^2$; alors

$$\int_0^a |\Phi_\alpha|^2\, dx^\alpha = 1 \quad \text{ici } \Phi_\alpha\Phi_\alpha^* = |\Phi_\alpha|^2 \text{est} |\Phi(x^\alpha)|^2 = C^2 sin_\alpha{}^2(k_\alpha x^\alpha).$$

Ainsi, l'intégration est $C^2\int_0^a \sin_\alpha{}^2(k_\alpha x^\alpha) dx^\alpha = 1.$

Pour intégrer l'équation une identité doit être développée. Par définition, nous avons ce qui suit

$$\cos_\alpha(2x^\alpha) = \frac{E_\alpha(2ix^\alpha) + E_\alpha(-2ix^\alpha)}{2}.$$

Maintenant nous avons les identités suivantes

$$\cos_\alpha(2x^\alpha) - 1 = \frac{E_\alpha(2ix^\alpha) + E_\alpha(-2ix^\alpha)}{2} - 1$$

$$\cos_\alpha(2x^\alpha) - 1 = \frac{E_\alpha(2ix^\alpha) + E_\alpha(-2ix^\alpha) - 2}{2}$$

$$\cos_\alpha(2x^\alpha) - 1 = \frac{\left(E_\alpha(ix^\alpha)\right)^2 + \left(E_\alpha(-ix^\alpha)\right)^2 - 2E_\alpha(ix^\alpha)E_\alpha(-ix^\alpha)}{2}$$

$$\cos_\alpha(2x^\alpha) - 1 = \frac{\left(E_\alpha(ix^\alpha) - E_\alpha(-ix^\alpha)\right)^2}{2}.$$

Par définition, nous avons

$$\sin_\alpha(x^\alpha) = \frac{E_\alpha(ix^\alpha) - E_\alpha(-ix^\alpha)}{2i}. \tag{3.43}$$

Donc nous obtenons l'identité suivante

$$1 - \cos_\alpha(2x^\alpha) = 2\sin_\alpha^2(x^\alpha). \tag{3.44}$$

En utilisant l'identité de l'équation (3.44), nous avons

$$C^2 \int_0^a \sin_\alpha{}^2(k_\alpha x^\alpha)dx^\alpha = 1$$

$$C^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^a (1 - \cos_\alpha 2k_\alpha x^\alpha)\, dx^\alpha\right) = 1$$

$$C^2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^\alpha dx^\alpha - C^2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^\alpha (\cos_\alpha 2k_\alpha x^\alpha)\, dx^\alpha = 1$$

$$\frac{C^2}{2}\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sin_\alpha(2k_\alpha x^\alpha)}{2k_\alpha}\right)_{x=0}^{x=a} = 1$$

$$\frac{C^2}{2}\left(\frac{a^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\sin_\alpha(2k_\alpha a^\alpha)}{2}\right) = 1.$$

Aussi $\frac{\sin_\alpha(2k_\alpha a^\alpha)}{2}$ est zéro comme suggéré par la condition limite. Ainsi

$$\frac{C^2}{2}\left(\frac{a^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) = 1.$$

D'où

$$C = \sqrt{\frac{2\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}}\ .$$

Maintenant, la solution est

$$\Phi(x^\alpha) = \sqrt{\frac{2\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}} sin_\alpha\left(\left(\frac{M_\alpha}{a}\right)^\alpha x^\alpha\right) = \sqrt{\frac{2\Gamma(1+\alpha)}{a^\alpha}} sin_\alpha(k_\alpha x^\alpha).$$

Pour$\alpha = 1$, la solution est converti en une solution dimensionnelle pour une équation Schrödinger dimensionnelle de l'infini bien potentiel.

Ils sont énumérés ci-dessous dans le tableau-1.

Tableau-1 : les premiers zéros de fonction $\sin_\alpha(x^\alpha)$pour différentα , après $x = 0$.

α	M_α
0.736	3.19590
0.75	2.96354
0.80	2.80107
0.85	2.80556
0.90	2.87596
0.95	2.99051
1.0	3.14159

6.2 Calcul de l'énergie

Maintenant, nous pouvons calculer l'énergie de la particule[37].En utilisant les équations (3.38a) et (3.41c) qui est

$$(2^\alpha m_\alpha \varepsilon_\alpha)/\hbar_\alpha^2 = (M_\alpha/a)^{2\alpha} .$$

Impliquer

$$\varepsilon_\alpha = (\hbar_\alpha^2/2^\alpha m_\alpha)(M_\alpha/a)^{2\alpha} .$$

Pour $\alpha = 1$ l'énergie est $\varepsilon_1 = (\hbar^2/2m)(\pi/a)^2$.

Il s'agit de l'énergie du premier état quantique tel que décrit dans le quantum mécanique.

Conclusion :

Conclusion:

Dans ce travail, nous avons présenté une contribution importante à l'approche du calcul fractionnaire et des notions de base de la mécanique quantique qui nous utiles pour la compréhension de notre travail, nous avons présenté les différentes fonctions qui sont très utilisées et qui permettent en général de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. C'est ainsi que nous avons donné les définitions les plus utilisées de l'opérateur fractionnaire et ses propriétés et en donne une généralisation sur de l'équation de Schrödinger et la fonction d'onde dans La théorie du calcul fractionnaire.

Nous avons étudié la mécanique quantique fractionnaire, nous avons focalisé notre travail sur de l'équation fractionnaire de Schrödinger avec des dérivée fractionnaire de Jumarie. la fonction d'onde fractionnaire est en termes de fonction Mittag-leffler, cette dernière fonction est joue un rôle important dans le domaine de calcul fractionnaire; et les fonctions trigonométriques d'ordre fractionnaire sont définies à l'aide de cette fonction.

Dans ce mémoire, nous utilisant des dérivées fractionnel de type Jumarie, nous avons étude l'équation de Schrödinger fractionnaire de type Jumarie. Pour $\alpha = 1$ toutes les l'état stationnaire de l'équation de Schrödinger est devienne à sont forme classiques dans le cas ordinaire. Nous avons étudié les particules dans un problème de boîte et avons constaté que l'équation d'onde au sens fractionnel répond également à la condition et en donne une généralisation sur de le principe de correspondance qui permet de reformule la mécanique quantique relativiste.

Références

Références:

[1] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc. 7 (1995), 89-100.

[2] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[3] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations 41 (2005), 84-89.

[4] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics,in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi,Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[5] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,John Wiley, New York, 1993.

[6] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[7] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[8] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[9] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering IIComputational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[10] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech.Systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.

[11] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar proteindynamics, Biophys. J. 68 (1995), 46-53.

[12] NH. Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Ouvres complètes. 1, pp. 11-27, 1881.

[13] J. Liouville Mémoire sur quelques questions de géometrie et de mécanique et sur Mémoire sur quelques questions de géometrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour resoudre ces questions. Journalde l'École Royale Polytechnique. 13(21), pp. 1-69, 1832.

[14] G .Riemann, Versuch Einer Allgemeinen Auffasung Der Integration und Differentiation., 1876. M Riesz. In: Mathematiker in Göttingen. Leipzig: Teubner; 1876. p. 331-344.

[15] B. Ross, The Development of Fractional Calculus 1695-1900, Historia Math,4 : 75-89, 1977.

[16] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differantial equations, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1993.

[17] N. Laskin, Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals, PhysicsLetters A, 268 : 298-305, 2000.

[18] X. Guo and M. Xu, Some physical applications of fractional Schrodingerequation, J. Math. Phys, 47 :082104, 2006. J. Dong and M. Xu, Some solutions to the space fractional Schrodingerequation using momentum representation method, J.Math.Phys, 48 : 072105,2007. N. Laskin, Fractals and quantum mechanics, Chaos, 10 : 780-790, 2000. S. Wang, M. Xu, Generalized fractional Schrodinger equation with spacetime fractional derivatives, J. Math. Phys, 48 :043502, 2007. V.E. Tarasov, Weyl quantization of fractional derivatives. J. Math. Phys, 49 :102112, 2008. A. Iomin, Fractional-time quantum dynamics. Physical Review E, 80 :022103, 2009.

[19] Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some features of quantum statisticalsystems with an energy spectrum of the fractional-power type, Theor. Math.Phys, 171 : 404-416, 2012.

Z. Z. Alisultanov and R. P. Meilanov, Some problems of the theory of quantum statistical systems with an energy spectrum of the fractional powertype, Theor. Math. Phys, 173 : 135-148, 2012.

[20] J. Banerjee, A Study of Fractional Schrödinger Equation-composed via Jumarie fractional derivative.

[21] E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, Leipzig,1931. English translation by M. Butler, The Gamma Function, Holt, Rinehart, and Winston, San Francisco(1964).

[22] F. Zouai, Mémoire master en Mathématiques. université Mohamed Khider, Biskra, Juin 2018

[23] U. Ghosh, S. Sengupta, S. Sarkar and S. Das. Analytic solution of linear fractional differential equation with Jumarie derivative in term of Mittag-Leffler function. American Journal of Mathematical Analysis. 2015;3(2). 32-38

[24] G. Jumarie. On the derivative chain-rules in fractional calculus via fractional difference and their application to systems modelling . Cent. Eur. J. Phys. • 2013 • 11(6) • 617-63.

[25] G. Jumarie. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions Further results, Computers and Mathematics with Applications, 2006. (51), 1367-1376.

[26] A. Rabah,mémoire de MagisterEn Physique Théorique,Université de MEDEA.

[27]E. Kartheuser , elements de Mécanique Quantique, l'Université de Liège.

[28] B. Gagnac et J.C. Pebay-Peyroula, "Physique atomique" (Dunod, Paris, 1971).

[29] C.T. Claude, Diu Bernard, Laloe Franck, Mécanique Quantique, Collection Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1973 (Nouveaux tirages 1998)

[30] E. Schrödinger, Ann. Phys. 79, 361 et 489 (1926) ; 80, 437 (1926) ; 81, 109 (1926).

[31] D.P. Ray-Chaudhuri. Advanced Acoustics . The new Book Stall. 2001.

[32] J. L. Powell and B. Crasemann, Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 1965.

[33] G. M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction $E\alpha (x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, (Ser. II) 137, 554-558 (1903).

[34] U. Ghosh, S. Sengupta, S. Sarkar and S. Das. Analytic solution of linear fractional differential equation with Jumarie derivative in term of Mittag-Leffler function. American Journal of Mathematical Analysis. 2015;3(2). 32-38.

[35] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris, Mathematical Methods for Physicist. Academic press. Seventh edition. 2012.

[36] D. J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Pearson Education, Inc. , second edition ninthimpression, 2011.

[37] J. Banerjee, U. Ghosh ,S. Sarkar and S. Das,A Study of Fractional Schrödinger Equation-composed via Jumarie fractional derivative.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté, le calcul fractionnaire et différenciation fractionnelle, permet de généraliser le principe de compatibilité de la mécanique quantique avec les dérivés fractionnaires, et nous avons utilisé ce principe pour développé une nouvelle mécanique quantique fractionnaire, on utilisant le calcul fractionnaire pour reformuler l'équation de Schrödinger on incluant une dérivée fractionnaire d'ordre α au lieu de la dérivée seconde $\alpha = 2$ dans l'équation de Schrödinger standard ; et en décrivant la solution analytique de l'équation de Schrödinger fractionnel par la fonction de Mittag-leffler.

Mots clés: fonction de Mittag-leffler , L'équation fractionnaire, Dérivation fractionnaire, Mécanique quantique fractionnaire.

Abstract

In this work, we introduce partial calculus, a partial computation that allows to generalize the principle of compatibility of quantum mechanics with fractional derivatives, and we used this principle which developed new partial quantum mechanics using calculus to reformulate the fractional Schrödinger equation including the fractional derivative of the order α Instead of the second derivative $\alpha = 2$ in the standard Schrödinger equation. He also described the analytical solution to the fractional Schrödinger equation using the Mittag-leffler function.

Keywords: function of Mittag-leffler, equation The fractional equation, fractional derivation, fractional quantum mechanics.

ملخص

في هذا العمل، قدمنا الحساب الكسري و الحساب التفاضلي الكسري ، و هو حساب يسمح بتعميم مبدأ الحساب في ميكانيكا الكم مع المشتقات الكسرية ، و استخدمنا هذا المبدأ لإعادة كتابة ميكانيكا الكم باستخدام المشتقات الكسرية، لإعادة صياغة معادلة شرودنغر الكسرية باستعمال المشتقا لكسري من الرتبة α بدلا من المشتق من الرتبة $\alpha = 2$ في معادلة شرودنغر العادية. كما و صفنا الحل التحليلي لمعادلة شرودنغر الجزئية باستخدام دالة ميتاغ-ليفلر.

الكلمات المفتاحية:الدالة مبتاغ ليفر، المعادلة الكسرية، الاشتقاق الكسري ، ميكانيكا الكم الكسري.