

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT**



**FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE**  
**DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE**

**Compte rendu sur les équations intégrales**  
**Présenté par: TAIBI HADJER (3<sup>ème</sup> année LMD maths)**

**Proposé et encadré par : Y. BELABBACI**

**Année universitaire 2009/2010**

## **Sommaire:**

1. Introduction.....	3
2. Préliminaire.....	4
3. Différentes espèces des équations intégrales de Fredholm.....	7
4. Systèmes orthogonaux de fonctions.....	7
5. Propriétés des équations de Fredholm de deuxième espèce.....	8
6. Noyaux itérés.....	9
7. Relation intégrale pour la résolvante. Théorème d'existence et d'unicité.....	12
8. Dénominateur et mineur de Fredholm.....	14
9. Exemples de résolution de l'équation de Fredholm de deuxième espèce.....	17
10. Équations de Fredholm pour $\lambda$ quelconque.....	20
11. Équation intégrale adjointe.....	22
12. Cas d'une valeur caractéristique.....	22
13. Équations dégénérées.....	27
14. Ensembles compacts de fonctions continues.....	30
15. Noyaux singuliers.....	33
16. Remarque.....	34

## **1. Introduction:**

Après avoir évolué de manière intense, les différentes sciences se compliquent jour après jour et deviennent la polémique du savoir. Par conséquent, les scientifiques traitant des phénomènes naturels qu'ils soient physiques, chimiques, biologiques ou géométriques ont eu recours aux équations intégrales. Celles-ci, sous toutes leurs sortes différentes contribuent énormément à la mise en évidence des phénomènes et à leur résolutions diverses : analytique, numérique.

Parmi les différentes branches des sciences mathématiques, les équations intégrales occupent une place importante, comme les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs...

Même si la majorité des questions physiques peuvent être reformulées et analysées en termes d'équations différentielles, on peut souvent les reformuler et les réétudier en termes d'équations intégrales.

Pour élaborer ce travail nous avons utilisé essentiellement l'ouvrage suivant : Cours de mathématiques supérieures T.4, partie.1 V.Smirnov [office des publications universitaires (1.place centrale de Ben Aknoun {Alger})].

## 2. Préliminaire:

Pour trouver la solution de l'équation

$$y' = f(x, y)$$

avec la condition initiale  $y(x_0) = y_0$ , il suffit de résoudre l'équation intégrale

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0$$

donc la résolution de l'équation

$$y'' = f(x, y)$$

avec les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y'_0$$

se ramène à obtenir la solution de l'équation intégrale

$$y(x) = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(z, y(z)) dz + y_0 + y'_0(x - x_0)$$

ou bien

$$y(x) = \int_{x_0}^x (x - z) f(z, y(z)) dz + y_0 + y'_0(x - x_0),$$

si on pose  $x_0 = 0$  dans cette équation on obtient l'équation suivante

$$y(x) = \int_0^x (x - z) f(z, y(z)) dz + c_1 + c_2 x \quad (1)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  des constantes arbitraires.

La solution de l'équation (1) est la solution générale de l'équation

$$y'' = f(x, y).$$

Maintenant on veut écrire l'équation (1) sous une autre forme par les conditions aux limites suivantes,

$$y(0) = a \quad \text{et} \quad y(l) = b;$$

pour cela on met  $x = 0$  puis  $x = l$  dans l'équation (1), on obtient que

$$c_1 = a \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{b-a}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (l - z) f(z, y(z)) dz,$$

on remplace  $c_1$  et  $c_2$  par leurs valeurs dans la formule (1), on trouve l'équation intégrale suivante

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x - z) f(z, y(z)) dz - \frac{x}{l} \int_0^l (l - z) f(z, y(z)) dz \quad (2)$$

où

$$F(x) = a + \frac{b-a}{l}x.$$

L'équation (2) s'écrit aussi sous la forme suivante

$$y(x) = F(x) - \int_0^x \frac{z(l-x)}{l} f(z, y(z)) dz - \int_0^l \frac{x(l-z)}{l} f(z, y(z)) dz. \quad (3)$$

De l'équation (3) on introduit la fonction de deux variables  $k(x, y)$  comme suit

$$k(x, y) \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l} & \text{pour } z \leq x \\ \frac{x(l-z)}{l} & \text{pour } x \leq z \end{cases} \quad (4)$$

donc l'équation (3) équivalente à l'équation suivante

$$y(x) = F(x) - \int_0^l k(x, z) f(z, y(z)) dz. \quad (5)$$

Si on applique les résultats obtenus ça veut dire (5) à l'équation linéaire

$$y'' + p(x)y = \omega(x) \quad (6)$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = a ; \quad y(l) = b \quad (7)$$

on trouve l'équation intégrale linéaire

$$y(x) = F_1(x) - \int_0^l k(x, z)p(z)y(z) dz \quad (8)$$

où

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l k(x, z)\omega(z) dz.$$

La multiplication du coefficient  $p(x)$  de l'équation (6) par un paramètre quelconque  $\lambda$  donne l'équation homogène

$$y'' + \lambda p(x)y = 0 \quad (9)$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$y(0) = 0 ; \quad y(l) = 0. \quad (10)$$

La résolution de l'équation homogène (9) avec les conditions aux limites homogène (10) revient à résoudre l'équation intégrale

$$y(x) = \lambda \int_0^l k(x, z)p(z)y(z) dz. \quad (11)$$

Propriétés caractéristiques de  $k(x, z)$  :

La fonction  $k(x, z)$  s'appelle le noyau de l'équation intégrale, ce noyau est une fonction continue dans le carré défini par

$$0 \leq x \leq l \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq l;$$

mais sur la diagonale où  $x = z$  la dérivée première du noyau présente une discontinuité

$$k_x(x, z) \Big|_{x=z+0} - k_x(x, z) \Big|_{x=z-0} = -1.$$

D'autre part, le noyau comme fonction est une solution hors de la diagonale de l'équation homogène  $y'' = 0$  avec les conditions homogènes (10), de plus le noyau est symétrique c'est-à-dire

$$k(x, z) = k(z, x) \tag{12}$$

Remarque:

En physique mathématique il existe plusieurs équations intégrales avec les conditions aux limites, par exemple on peut définir le potentiel de couche sphérique à l'aide de la formule suivante

$$u(M) = \iint_B \frac{\rho(M')}{d} ds$$

où  $\rho(M')$  est une fonction donnée sur la surface de la sphère  $S$  et  $ds$  est l'élément de cette surface et  $d$  est la distance entre un point quelconque  $M$  de l'espace et un point  $M'$  de la surface de la sphère. On désigne les valeurs limites de la dérivée

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n}.$$

Lorsque  $M \rightarrow M_0$  de l'intérieur et de l'extérieur de la sphère par

$$\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e.$$

On a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i = - \iint_B \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds + 2\pi\rho(M_0) \\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e = - \iint_B \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds - 2\pi\rho(M_0) \end{cases} \tag{13}$$

où  $\omega$  est l'angle formé par le rayon  $M'M_0$  avec la distance de la normale  $n$ . Pour chercher la densité  $\rho$  on doit utiliser le problème intérieur de Neumann pour la sphère, i.e. On suppose que l'on cherche une fonction qui soit harmonique à l'intérieur de la

sphère et dont la dérivée normale prenne des valeurs limites données sur la surface de la sphère

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f(M_0). \quad (14)$$

D'après la formule (13) et la condition aux limites (14), on obtient pour la détermination de la densité cherchée l'équation intégrale suivante

$$2\pi\rho(M_0) = f(M_0) + \iint_B \rho(M') \frac{\cos \omega}{d^2} ds.$$

### **3. Différentes espèces des équations intégrales de Fredholm:**

On appelle équation de Fredholm de deuxième espèce toute équation intégrale de la forme

$$y(x) = \int_a^b k(x, z)y(z)dz + f(x) \quad (16)$$

où  $y(x)$  est la fonction inconnue;  $f(x)$  et  $k(x, z)$  sont des fonctions données.

L'équation de Fredholm de première espèce est de la forme suivante

$$\int_a^b k(x, z)y(z)dz = f_1(x). \quad (17)$$

La théorie des équations intégrales présente beaucoup d'affinités avec les problèmes d'algèbre linéaire.

Si l'équation

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x, z)y(z)dz \quad (18)$$

admet des solutions non nulles, on dit alors que  $\lambda$  est une valeur caractéristique.

Les solutions  $y(x)$  de l'équation (18) sont appelées fonctions propres du noyau.

On donne comme exemple d'équation de Fredholm de première espèce le suivant

$$u(x) = \int_a^b k(x, z)p(z)dz$$

où  $u(x)$  est la déformation statique d'une corde et  $p(z)$  la charge continûment distribuée.

Remarque:

Dans la suite on n'étudie que les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce.

### **4. Systèmes orthogonaux de fonctions:**

Soient  $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$

des fonctions continues sur  $[a, b]$  et linéairement indépendantes, c'est-à-dire

$$\alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) + \dots + \alpha_m \psi_m(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m = 0$$

Notation:

On désigne l'intégrale suivante

$$\int_a^b f(x) \overline{F(x)} dx$$

par le symbole

$$(f, F).$$

Définitions:

- On dit que le système ci-dessus est orthogonal si

$$(\psi_p, \psi_q) = 0, \forall p \neq q \quad (p, q = 1, 2, \dots, m).$$

- On dit que ce système est normé s'il est orthogonal et si

$$(\psi_p, \psi_p) = 1, \forall p \quad (p = 1, 2, \dots, m).$$

## **5. Propriétés des équations de Fredholm de deuxième espèce:**

Soit l'équation de Fredholm suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt \quad (19)$$

où  $\lambda$  est un paramètre.

On suppose que l'intervalle  $[a, b]$  est fini,  $f(s)$  est continue dans  $[a, b]$  et  $k(s, t)$  une fonction continue dans le carré  $k_0$  défini par

$$a \leq s \leq b \quad \text{et} \quad a \leq t \leq b.$$

- Toute fonction  $\varphi(t)$  continue dans l'intervalle  $[a, b]$  se transforme en une fonction continue  $\psi(s)$  définie par

$$\psi(s) = \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt; \quad (20)$$

cette transformation est linéaire, c'est-à-dire

$$\int_a^b k(s, t) \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(t) dt = \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b k(s, t) \varphi_i(t) dt \quad (21)$$

où  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) sont des constantes arbitraires.

- L'équation homogène associée à l'équation (19) est la suivante

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt \quad (22)$$

elle admet comme solution la solution identiquement nulle  $\varphi(s) \equiv 0$ .

Remarque:

La valeur de  $\lambda$  est différente de zéro car si  $\lambda = 0$  alors en vertu de l'équation (22)  $\varphi(s) \equiv 0$ .

- Si

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_m(s)$$

sont des fonctions propres correspondant à la même valeur caractéristique  $\lambda_0$ , alors la fonction

$$\varphi(s) = c_1 \varphi_1(s) + c_2 \varphi_2(s) + \dots + c_m \varphi_m(s) \quad (23)$$

où  $c_i$  sont des constantes arbitraires, est une fonction propre correspondant à  $\lambda_0$ .

- On dit que les fonctions

$$\varphi_p(s), (p = 1, 2, \dots, m)$$

forme une base de solution de (22) avec  $\lambda = \lambda_0$ , si l'on opère une transformation linéaire sur la base  $\varphi_p(s)$ , soit

$$\psi_p(s) = a_{p1} \varphi_1(s) + a_{p2} \varphi_2(s) + \dots + a_{pm} \varphi_m(s) \quad (24)$$

où  $(p = 1, 2, \dots, m)$ ; si le déterminant  $\|a_{pq}\|$  n'est pas nul, alors les  $\psi_p(s)$  forment une autre base de solutions de l'équation homogène (22).

En particulier on peut appliquer au système de fonctions  $\varphi_p(s)$  l'opération d'orthogonalisation et ce fait considérer que la base forme un système fini orthonormé.

## **6. Noyaux itérés:**

Définition:

On dit que  $\psi(s)$  représente un opérateur intégral si  $\psi(s)$  s'écrit sous la forme suivante

$$\psi(s) = \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt. \quad (25)$$

Notation:

On note l'opérateur intégral (25) par

$$\psi = k\varphi.$$

Propriétés des opérateurs intégraux:

- Tout opérateur intégral est linéaire.
- Si on a les deux opérateurs intégraux à noyaux continus suivant

$$v(s) = \int_a^b k(s, t)u(t)dt ; v_1(s) = \int_a^b l(s, t)u(t)dt; \tag{26}$$

on les note par  $K$  et  $L$  alors

$$\begin{aligned}
LK[u(t)] &= \int_a^b l(s, t_1) \left[ \int_a^b k(t_1, t)u(t)dt \right] dt_1 \\
&= \int_a^b \left[ \int_a^b l(s, t_1)k(t_1, t)dt_1 \right] u(t)dt
\end{aligned}$$

donc le noyau de l'opérateur  $LK$  est

$$\tilde{K}(s, t) = \int_a^b l(s, t_1)k(t_1, t)dt_1 \tag{27}$$

et le noyau de l'opérateur  $KL$  est:

$$\tilde{L}(s, t) = \int_a^b k(s, t_1)l(t_1, t)dt_1. \tag{28}$$

D'une façon générale l'opérateur  $LK$  est différent de  $KL$ , si  $LK$  est confondu avec  $KL$  on dit que ces opérateurs commutent.

L'itération des noyaux:

Si  $k(s, t) = k_1(s, t)$  et  $k_n(s, t) = \int_a^b k_{n-1}(s, t_1)k(t_1, t)dt_1$  (29)

alors

$$k_2(s, t) = \int_a^b k_1(s, t_1)k(t_1, t)dt_1,$$

$$k_3(s, t) = \int_a^b \int_a^b k(s, t_2)k(t_2, t_1)k(t_1, t)dt_1 dt_2,$$

.....

$$k_n(s, t) = \int_a^b \dots \int_a^b k(s, t_{n-1})k(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots k(t_1, t)dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Remarque:

On a de toute évidence

$$k_{p+q}(s, t) = \int_a^b k_p(s, \tau) k_q(\tau, t) d\tau. \quad (30)$$

Notation:

Soit

$$p^2 = \int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt \quad (31)$$

où  $k(s, t) \neq 0$ , si on met les notations suivantes

$$Q(s) = \left( \int_a^b |k(s, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad R(t) = \left( \int_a^b |k(s, t)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient que (31) s'écrit comme suit

$$p^2 = \int_a^b Q^2(s) ds = \int_a^b R^2(t) dt. \quad (32)$$

La convergence de la résolvante :

Par l'utilisation de (29) et l'inégalité de Cauchy – Schwarz on trouve le suit

$$|k_2(s, t)|^2 = \left| \int_a^b k_1(s, t_1) k(t_1, t) dt_1 \right|^2 \leq Q^2(s) R^2(t),$$

$$|k_3(s, t)|^2 \leq Q^2(s) R^2(t) p^2,$$

$$|k_4(s, t)|^2 \leq Q^2(s) R^2(t) p^4,$$

.....

$$|k_{n+1}(s, t)| \leq Q(s) R(t) p^{n-1}, (n = 1, 2, \dots).$$

Soit la série

$$R(s, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(s, t) \lambda^n \quad (33)$$

où

$$k_1(s, t) = k(s, t).$$

Puisque la fonction  $k(s, t)$  est continue dans le carré  $k_0$ ,  $Q(s)$  et  $R(t)$  sont continues dans l'intervalle  $[a, b]$  alors

$$\exists M > 0 \text{ Tel que } Q(s) \text{ et } R(t) \leq M$$

donc

$$|k_{n+1}(s, t)| \leq M^2 P^{n-1}. \quad (34)$$

D'après ce qu'on a dit, la série (33) est uniformément et absolument convergente sous la condition

$$|\lambda| < [\int_a^b \int_a^b |k(s, t)|^2 ds dt]^{-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

et sous la même condition la série (33) est continue dans  $k_0$ .

Définition:

La série  $R(s, t; \lambda)$  est appelé résolvante du noyau  $k(s, t)$  ou de l'équation intégrale.

La solution de l'équation (19) de Fredholm:

Soit le paramètre  $\lambda$  est complexe, on cherche donc la solution de l'équation (19) par la méthode des approximations successives de sorte qu'on trouve la solution sous la forme

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(s) \lambda^n \quad (36)$$

Alors au début on exprime  $\varphi_n(s)$  en fonction de  $f(s)$  comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \\ \varphi_2(s) &= \int_a^b k_2(s, t_1) f(t_1) dt_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(s) &= \int_a^b k_n(s, t) f(t) dt, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (37)$$

Donc la somme (36) devient confondue à l'expression suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b [\sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(s, t) \lambda^n] f(t) dt$$

cette expression peut encore s'écrire comme suit

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s, t; \lambda) f(t) dt. \quad (38)$$

**7. Relation intégrale pour la résolvante. Théorème d'existence et d'unicité:**

La résolvante  $R(s, t; \lambda)$  satisfait aux

$$\begin{cases} R(s, t; \lambda) = k(s, t) + \lambda \int_a^b k(s, t_1) R(t_1, t; \lambda) dt_1 \\ R(s, t; \lambda) = k(s, t) + \lambda \int_a^b k(s, t_1) R(s, t_1; \lambda) dt_1 \end{cases} \quad (39)$$

Théorème:

Si pour une valeur de  $\lambda$  il existe une fonction  $R(s, t; \lambda)$  continue dans le carré  $k_0$  et vérifie l'équation (39), alors l'équation (19) admet pour cette valeur de  $\lambda$  une solution unique qui est définie par la formule (38).

Démonstration:

Soit  $\varphi(s)$  une solution quelconque de l'équation (19). On Multiplie les deux membres de (19) par

$$\lambda R(x, s; \lambda)$$

et on intègre par rapport à  $s$ , on obtient alors l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) \varphi(s) ds &= \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds \\ &+ \lambda \int_a^b \left[ \int_a^b \lambda R(x, s; \lambda) k(s, t) ds \right] \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

De plus on peut écrire la seconde des équations (39) comme suit

$$\lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) k(s, t) ds = R(x, s; \lambda) - k(x, t).$$

Donc la précédente formule devient confondue à la formule suivante

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) \varphi(s) ds &= \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds \\ &+ \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) \varphi(t) dt - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt; \end{aligned}$$

on élimine les termes semblables dans les deux membres de cette égalité on obtient que

$$\lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

et en vertu de l'équation (19) on remplace

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

par

$$\varphi(x) - f(x),$$

on obtient donc la formule (38), d'où l'unicité.

Si on substitue la formule (38) dans la formule (19) et on reporte tous les termes dans le premier membre, on obtient l'équation suivante



on applique à ce déterminant la formule de décomposition pour les déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

et ça se fait par le changement suivant  $x = 1$  et  $a_{ij} = -k_{ij} \delta$ ,

donc on obtient

$$\begin{aligned} D(\lambda) = & \frac{\lambda}{1!} \sum_{p_1=1}^n k_{p_1 p_1} \delta + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p_1, p_2=1}^n \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} \\ k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2 + \dots \\ & + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{p_1, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & \dots & k_{p_1 p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{p_n p_1} & \dots & k_{p_n p_n} \end{vmatrix} \delta^n. \end{aligned} \quad (41)$$

Notation:

On introduit la notation suivante

$$k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k(x_1, y_1) & \dots & k(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ k(x_n, y_1) & \dots & k(x_n, y_n) \end{vmatrix} \quad (42)$$

où  $(n = 1, 2, \dots)$ .

Remarque:

La somme

$$\sum_{p_1=1}^n k_{p_1 p_1} \delta = \sum_{i=1}^n k(x_i, x_i) \delta$$

est la somme de Riemann pour l'intégrale suivante

$$\int_a^b k(t_1, t_1) dt_1,$$

et quand  $n \rightarrow \infty$  elle tend vers cette intégrale.

Donc la somme

$$\sum_{p_1, p_2=1}^n \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} \\ k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2$$

est la somme de Riemann pour

$$\int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2.$$

Alors à la limite la formule (41) est confondue à la série

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n \quad (43)$$

où

$$d_n = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^a k \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n. \quad (44)$$

La démonstration de la convergence de la série (43):

La formule (44) représente l'intégral multiple d'un déterminant d'ordre  $n$  dont chaque élément  $k(t_i, t_k)$  est inférieur en module à un nombre positif  $M$ , et ça puisque les  $k(t_i, t_k)$  sont continues dans le carré  $k_0$ , donc le théorème de Hadamard et la majoration ordinaire d'une intégrale multiple donnent

$$|d_n| \leq n^{\frac{n}{2}} [M(b-a)]^n,$$

alors les termes de la série (43) sont inférieurs en module aux nombres positifs

$$\frac{|\lambda|^n}{n!} n^{\frac{n}{2}} [M(b-a)]^n \quad (45)$$

pour (45) on divise chaque terme par celui qui le précède, on obtient que

$$\frac{|\lambda|}{n+1} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} M(b-a) = \frac{|\lambda| M(b-a)}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}};$$

on remarque que si  $n \rightarrow \infty$ , l'expression  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$  tend vers  $\sqrt{e}$ , donc le rapport tend vers 0, ce qui entraîne la convergence de (45) quel que soit  $\lambda$ , d'où la convergence de (43).

La formule de  $D(s, t; \lambda)$ :

La multiplication de la série (33) par  $D(\lambda)$  donne

$$D(s, t; \lambda) = k(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(s, t). \quad (46)$$

La démonstration de la convergence de la série (46):

Les séries (33) et (43) sont convergentes dans le cercle(35), donc la série (46) est également convergente absolument dans ce cercle.

La détermination des  $d_n(s, t)$ :

On multiplie les deux membres de la première des équations (39) par  $D(\lambda)$  on obtient

$$D(s, t; \lambda) = k(s, t)D(\lambda) + \lambda \int_a^b k(s, t_1)D(t_1, t; \lambda)dt_1. \quad (47)$$

En suite on remplace  $D(\lambda)$  par (43) et  $D(s, t; \lambda)$  par (46) et on compare les coefficients des mêmes puissances de  $\lambda$ , on obtient que

$$d_n(s, t) = k(s, t)d_n - n \int_a^b k(s, t_1)d_{n-1}(t_1, t)dt_1 \quad (48)$$

où ( $n = 1, 2, \dots$ ) à condition de poser

$$d_0(s, t) = k(s, t).$$

Remarque:

D'après la formule (48) on a

$$\begin{aligned} d_1(s, t) &= \int_a^b k \begin{pmatrix} s & t_1 \\ t & t_1 \end{pmatrix} dt_1; \\ d_2(s, t) &= \int_a^b k \begin{pmatrix} s & t_1 & t_2 \\ t & t_1 & t_2 \end{pmatrix} dt_1; \\ &\dots\dots\dots \\ d_n(s, t) &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b k \begin{pmatrix} s & t_1 \dots t_n \\ t & t_1 \dots t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (49)$$

Quelques conséquences:

❖ De la formule (44) et la formule (49) il résulte

$$d_{n+1} = \int_a^b d_n(s, s)ds. \quad (50)$$

❖ Si dans la formule (46) on met  $t = s$  et on intègre les deux membres par rapport à  $s$ , alors d'après (50) il résulte

$$\int_a^b D(s, s; \lambda)ds = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_{n+1}.$$

❖ De la formule (43) il résulte

$$D'(\lambda) = - \int_a^b D(s, s; \lambda)ds \quad (51)$$

### **9. Exemples de résolution de l'équation de Fredholm de deuxième espèce:**

Exemple 1:

Résoudre l'équation suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 e^{s-t} \varphi(t)dt \quad \text{sur } [0,1]^2.$$

On a

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n,$$

donc on calcule les  $d_n$  par leurs formules et on trouve

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad d_2 = d_3 = \dots = d_n = \dots = 0,$$

alors

$$D(\lambda) = 1 - \lambda;$$

de plus on a

$$D(s, t; \lambda) = k(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(s, t),$$

donc après avoir calculé les  $d_n(s, t)$  on obtient

$$d_1(s, t) = d_2(s, t) = \dots = d_n(s, t) = \dots = 0,$$

alors

$$D(s, t; \lambda) = k(s, t) = e^{s-t};$$

et finalement on a

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{e^{s-t}}{1-\lambda};$$

d'où

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \frac{e^{s-t}}{1-\lambda} f(t) dt.$$

Exemple2:

Résoudre l'équation suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (s-t)\varphi(t) dt, \quad \text{sur} \quad [0,1]^2,$$

où  $f(s) = 1$ .

Dans cet exemple on obtient

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{1}{6}, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = \frac{1}{6}, \dots$$

Alors

$$D(\lambda) = 1 + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{6} (\cosh \lambda - 1),$$

de plus

$$d_1(s, t) = st - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}, d_2(s, t) = 0, d_3(s, t) = st - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}, d_4(s, t) = 0, \dots$$

Alors

$$D(s, t; \lambda) = s - t - \left(st - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} = s - t - \left(st - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}\right) sh\lambda;$$

donc

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{6[s - t - (st - \frac{s}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3})sh\lambda]}{ch\lambda + 5},$$

d'où

$$\varphi(s) = 1 + \frac{6\lambda}{ch\lambda + 5} \left(s - \frac{1}{2} + \frac{sh\lambda}{12}\right).$$

Exemple 3:

Résoudre l'équation suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_{-1}^1 (st^2 + ts^2)\varphi(t)dt, \text{ sur } [-1, 1]^2,$$

où  $f(s) \in C^2[-1, 1]$ .

On trouve dans ce cas que

$$d_1 = 0, d_2 = -\frac{8}{15}, d_3 = 0, d_4 = -\frac{8}{15}, \dots$$

Alors

$$D(\lambda) = 1 - \frac{8}{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{8}{15}(ch\lambda - 1),$$

et on trouve que

$$d_1(s, t) = -\frac{10(st)^2 + 6st}{15}, d_2(s, t) = \frac{8}{15}(s^2t + t^2s + t^3), \dots$$

Alors

$$\begin{aligned} D(s, t; \lambda) &= st^2 + ts^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{8}{15}(s^2t + t^2s + t^3) \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} - \left( \frac{10(st)^2 + 6st}{15} \right) \frac{\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} \right] \\ &= st^2 + ts^2 + \frac{8}{15}(s^2t + t^2s + t^3)(ch\lambda - 1) - \left( \frac{10(st)^2 + 6st}{15} \right) sh\lambda; \end{aligned}$$

donc

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{3(s^2t + t^2s) - 8t^3 + 8(s^2t + t^2s + t^3)ch\lambda - (10(st)^2 + 6st)sh\lambda}{23 - 8ch\lambda};$$

d'où

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_{-1}^1 \frac{3(s^2t+t^2s)-8t^3+8(s^2t+t^2s+t^3)ch\lambda-(10(st)^2+6st)sh\lambda}{23-8ch\lambda} f(t) dt.$$

## 10. Équations de Fredholm pour $\lambda$ quelconque:

Des remarques:

- Par l'utilisation du théorème d'existence et d'unicité du paragraphe [6], on obtient que si  $\lambda$  n'est pas racine de  $D(\lambda)$ , alors quelque soit  $f(s)$  l'équation (19) admet une solution unique dont l'expression est donnée par la formule (38) où  $R(s, t; \lambda)$  est déterminée par (40).
- Supposons que  $\lambda = \lambda_0$  est racine de  $D(\lambda)$ . Il se peut qu'elle soit également racine de  $D(s, t; \lambda)$  qu'ils que soient  $(s, t)$ .

Théorème 1:

*Toute racine  $\lambda_0$  de la fonction  $D(\lambda)$  est un pôle de la résolvante.*

Démonstration:

Soit  $\lambda_0$  une racine de  $D(\lambda)$  de multiplicité  $k$ , c'est-à-dire

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda) \quad \text{où} \quad [D_0(\lambda) \neq 0];$$

on suppose que  $\lambda_0$  est aussi racine de  $D(s, t; \lambda)$  mais de multiplicité  $l$ , c'est-à-dire

$$D(s, t; \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l D_0(s, t; \lambda),$$

où  $D_0(s, t; \lambda)$  est une série des puissances entières positives de  $(\lambda - \lambda_0)$ ;

de plus on a  $\lambda_0$  est une racine de la dérivée  $D'(\lambda)$  de multiplicité  $(k - 1)$ ; donc la formule (51) donne le suit

$$D'(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^l \int_a^b D_0(s, s; \lambda) ds;$$

on sait que le premier membre de cet équation admet pour solution  $\lambda_0$  avec la multiplicité  $(k - 1)$ ; et dans le second membre figure déjà le facteur  $(\lambda - \lambda_0)^l$ ; donc si on intègre les deux membres de cet équation par rapport à  $s$  alors de cet intégration il peut apparaître une puissance entière positive de  $(\lambda - \lambda_0)$ , donc ceci nous conduit à l'inégalité

$$l \leq k - 1.$$

D'où le résultat.

## Théorème2:

Si  $\lambda_0$  est racine de  $D(\lambda)$ , alors l'équation homogène suivante

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt \quad (52)$$

admet des solutions non identiquement nulles.

## Démonstration:

Supposons que  $\lambda_0$  est un pôle de la résolvante de multiplicité supérieur à  $r$ , donc au voisinage de  $\lambda_0$  on a le développement suivant

$$R(s,t;\lambda) = \frac{a_{-r}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \frac{a_{-r+1}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}} + \dots + \frac{a_{-1}(s,t)}{(\lambda-\lambda_0)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s,t)(\lambda-\lambda_0)^i$$

où  $a_{-r}(s,t)$  est continue et n'est pas identiquement nulle dans  $k_0$ .

On reporte le développement de  $R(s,t;\lambda)$  dans la première des équations (39) et on multiplie les deux membres du résultat par  $D(\lambda)$ , en suite on pose  $\lambda = \lambda_0$ , on obtient le suit

$$a_{-r}(s,t) = \lambda_0 \int_a^b k(s,t_1)a_{-r}(t_1,t)dt_1;$$

Donc la fonction  $a_{-r}(s,t)$  est solution de l'équation homogène (52), d'où la démonstration.

## Des remarques:

- Les valeurs caractéristiques de l'équation intégrale sont racines de  $D(\lambda)$ .
- Tout domaine borné du plan  $\lambda$  ne peut contenir qu'un nombre fini de valeur caractéristiques.
- Si on met le terme libre de l'équation (19) sous la forme suivante

$$f(s) = \int_a^b k(s,t)\omega(t)dt \quad (53)$$

où  $\omega(t)$  est une fonction quelconque, et si  $\lambda$  n'est pas une valeur caractéristique alors la solution de l'équation (19) s'écrit en vertu de l'équation (38) comme suit

$$\varphi(s) = \int_a^b k(s,t)\omega(t)dt + \lambda \int_a^b \int_a^b R(s,t;\lambda)k(t,t_1)\omega(t_1)dt dt_1;$$

donc la deuxième des équations (39) donne l'égalité suivante

$$\lambda \int_a^b R(s,t;\lambda)k(t,t_1)\omega(t_1)dt = R(s,t_1;\lambda) - k(t,t_1);$$

on reporte cet expression dans la précédente et on trouve pour la solution de (19) l'expression suivante

$$\varphi(s) = \int_a^b R(s, t; \lambda) \omega(t) dt. \quad (54)$$

### **11. Équation intégrale adjointe:**

#### Définition:

On appelle équation adjointe de l'équation (19) toute équation de la forme suivante

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(t, s) \psi(t) dt. \quad (55)$$

#### Remarque:

L'équation homogène correspondante à l'équation (55) est la suivante

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b k(t, s) \psi(t) dt. \quad (56)$$

#### Théorème3:

*Ou bien l'équation homogène (56) et l'équation adjointe (55) admettent une seule solution nulle ou bien elles admettent des solutions non nulles.*

#### Démonstration:

Puisque le numérateur de la résolvante se déduit par permutations des arguments  $s$  et  $t$ ; et puisque le dénominateur de Fredholm de l'équation adjointe (55) est le même que celui de l'équation (19), alors on déduit que l'équation adjointe admet les mêmes valeurs caractéristiques que l'équation principale (19), d'où la démonstration.

#### Remarque:

Tous les théorèmes formulés dans le paragraphe [8] sont évidemment valables pour l'équation adjointe.

### **12. Cas d'une valeur caractéristique:**

#### Théorème4:

*On a l'alternative: ou bien l'équation intégrale (19) admet une solution quelle que soit  $f(s)$  et l'équation homogène (22) n'admet que la solution nulle, ou bien l'équation homogène (22) admet des solutions non nulles et l'équation (19) possède des solutions pour certaines  $f(s)$ .*

#### Démonstration:

- ❖ Dans le premier cas l'équation (19) possède une seule solution, ceci découle du raisonnement simple suivant: si l'équation (19) possède deux solutions distinctes leur différence est une solution non nulle de l'équation (22), c'est à

dire Si  $\lambda$  n'est pas une valeur caractéristique, alors l'équation (19) admet une solution quelle que soit  $f(s)$ .

- ❖ Dans le deuxième cas on suppose que  $\lambda$  soit une valeur caractéristique et que l'équation (19) admette  $\varphi(s)$  pour solution. On multiplie les deux membres de l'équation (19) par  $\psi(s)$  et on intègre par rapport à  $s$  on obtient le suit

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)ds = \int_a^b f(s)\psi(s)ds + \int_a^b \left[ \lambda \int_a^b k(s,t)\psi(s)ds \right] \varphi(t)dt;$$

d'après (56) on a l'équation suivante

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)ds = \int_a^b f(s)\psi(s)ds + \int_a^b \psi(t)\varphi(t)dt ;$$

d'où

$$\int_a^b f(s)\psi(s)ds = 0; \tag{57}$$

ça veut dire pour que l'équation (19) soit soluble, il est nécessaire que  $f(s)$  satisfasse à la condition (57), où la fonction  $\psi(t)$  est une solution quelconque de l'équation (56) qui peut être non nulle puisque par hypothèse  $\lambda$  est une valeur caractéristique.

Remarque:

La condition (57) est non seulement nécessaire mais elle est suffisante pour que (19) soit résoluble.

Théorème5:

*A toute valeur caractéristique est associé un nombre fini de fonctions propres linéairement indépendantes.*

*I.e. le rang du système des fonctions propres associées à toute valeur caractéristique est fini.*

Démonstration:

Soit  $\lambda$  une valeur caractéristique et soient

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_m(s) \tag{58}$$

des solutions non nulles de l'équation (22), donc

$$\frac{\varphi_j(t)}{\lambda} = \int_a^b k(s,t)\varphi_j(s)ds \tag{59}$$

où  $(j = 1, \dots, m)$ .

On peut considérer que les fonctions (58) sont mutuellement orthogonales et normées c'est à dire

$$(\varphi_p, \varphi_q) = 0, p \neq q; \int_a^b |\varphi_p(s)|^2 ds = 1. \quad (60)$$

Si  $\lambda$  ou le noyau sont complexes, alors les fonctions (58) doivent être complexes, donc on peut écrire (59) sous la forme suivante

$$\frac{\overline{\varphi_j(t)}}{\lambda} = \int_a^b \overline{k(s,t)} \overline{\varphi_j(t)} dt; \quad (61)$$

et l'inégalité de Bessel entraîne

$$\sum_{j=1}^m \frac{|\varphi_j(t)|^2}{|\lambda|^2} \leq \int_a^b |k(s,t)|^2 dt;$$

si on intègre les deux membres de cet inégalité par rapport à  $s$  on trouve inégalité suivante

$$m \leq |\lambda|^2 \int_a^b \left[ \int_a^b |k(s,t)|^2 dt \right] ds,$$

de plus en vertu de la continuité du noyau, le second membre de cette intégrale est fini puisque  $\lambda$  est une valeur caractéristique donc  $m$  est fini, d'où la démonstration.

#### Théorème6:

*L'équation homogène (22) et son équation adjointe possèdent le même nombre de solutions linéairement indépendantes, i.e. leurs valeurs caractéristiques ont la même multiplicité.*

#### Démonstration:

On démontre ce théorème par l'absurde, on suppose que le rang de l'équation (22) soit égal à  $m$ , et celui de l'équation (56) à  $n$ , et que  $m < n$ .

Soit les fonctions (58) des solutions linéairement indépendantes de l'équation (22) et soit

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x) \quad (62)$$

des solutions linéairement indépendantes de l'équation (56), donc nous avons le suit

$$\begin{cases} \varphi_j(t) = \int_a^b k(s,t) \varphi_j(t) dt \quad (j = 1, \dots, m) \\ \psi_j(t) = \int_a^b k(s,t) \psi_j(t) dt \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (63)$$

Maintenant on compose le noyau suivant

$$l(s, t) = k(s, t) - \sum_{j=1}^m \overline{\varphi_j(t)} \overline{\psi_j(s)} \quad (64)$$

et on écrit les équations adjointes suivantes

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b l(s, t) \varphi(t) dt. \quad (65)$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b l(t, s) \psi(t) dt, \quad (66)$$

alors en vertu de l'équation (64) on peut écrire ces équations sous la forme

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt - \lambda \sum_{j=1}^m \overline{\psi_j(s)} \int_a^b \overline{\varphi_j(s)} \varphi(t) dt. \quad (67)$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b k(t, s) \psi(t) dt - \lambda \sum_{j=1}^m \overline{\varphi_j(s)} \int_a^b \overline{\psi_j(s)} \psi(t) dt. \quad (68)$$

Soit  $\varphi(s)$  une solution quelconque de l'équation (67), donc si on multiplie les deux membres de l'équation (67) par  $\psi_k(s)$ , où  $(k = 1, \dots, m)$ , et on intègre par rapport à  $s$  alors on obtient la formule

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(s) \psi_k(s) ds &= \int_a^b \left[ \lambda \int_a^b k(s, t) \psi_k(s) ds \right] \varphi(t) dt \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b \overline{\varphi_j(t)} \varphi(t) dt \int_a^b \overline{\psi_j(s)} \psi_k(s) ds \end{aligned}$$

donc en vertu des équations (63) et puisque les fonctions (62) sont orthonormées on peut écrire cette égalité sous la forme

$$\int_a^b \varphi(s) \psi_k(s) ds = \int_a^b \varphi(s) \psi_k(s) ds - \lambda \int_a^b \overline{\varphi_k(s)} \varphi(s) ds,$$

alors puisque  $\lambda \neq 0$  on obtient l'égalité suivante

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(s)} \varphi(s) ds = 0 \quad (69)$$

où  $(k = 1, \dots, n)$ .

Donc toute solution de l'équation (67) satisfait aux conditions (69); alors en vertu de ces conditions l'équation (67) peut s'écrire comme suit

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt,$$

c'est-à-dire toute solution de l'équation (67) ou de l'équation (65) vérifie l'équation (22), donc  $\varphi(s)$  peut être représentée sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions (58) comme suit

$$\varphi(s) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(s). \quad (70)$$

Maintenant on veut montrer que les  $c_j = 0$ , alors on multiplie les deux membres de la formule (70) par  $\overline{\varphi_k(s)}$  et on intègre par rapport à  $s$ , on trouve donc la formule suivante

$$\int_a^b \varphi(s) \overline{\varphi_k(s)} ds = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \varphi(s) \overline{\varphi_k(s)} ds ;$$

et en vertu de la condition (69) et de l'orthogonalisation des fonctions (58), on déduit que les  $c_k = 0$ , donc la formule (70) entraîne  $\varphi(s) \equiv 0$ , ça veut dire que l'équation (65) n'admet que la solution nulle, alors il reste de montrer que l'équation (66) possède des solutions non nulles, si on reporte

$$\psi(s) = \psi_k(s)$$

où  $k > m$ , dans la formule (68), et puisque les fonctions (62) sont orthonormées, alors on obtient l'équation suivante

$$\psi_k(s) = \lambda \int_a^b k(s,t) \psi_k(t) dt,$$

d'où il résulte en vertu des équations (63) que

$$\psi(s) = \psi_k(s),$$

où ( $k > m$ ) vérifie l'équation (66), et on a que l'équation (65) ne possède que la solution nulle, mais l'équation (66) admet des solutions non nulles, donc on ne peut pas avoir  $m < n$ .

On démontre de la même façon que  $m > n$  est impossible, donc  $m = n$ .

D'où la démonstration.

#### Théorème7:

*Si  $\lambda$  est une valeur caractéristique, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t) \varphi(t) dt \tag{71}$$

*soit résoluble est que le terme libre satisfasse à la condition*

$$\int_a^b f(s) \psi(s) ds = 0, \tag{72}$$

*où  $\psi(s)$  est une solution quelconque de l'équation*

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b k(t,s) \psi(t) dt. \tag{73}$$

*Si la condition (72) est réalisée, alors l'équation (71) admet une infinité de solutions qui s'expriment toutes par la formule suivante*

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(s) \quad (74)$$

où  $c_j$  sont des constantes arbitraires.

Démonstration:

On se propose maintenant de montrer que la condition (72) est suffisante, on compose donc le noyau  $l(s, t)$  comme dans la formule (64) et puisque  $\lambda$  n'est pas valeur caractéristique de ce noyau donc l'équation suivante

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b l(s, t) \varphi(t) dt \quad (75)$$

possède une solution, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt - \lambda \sum_{j=1}^m \overline{\psi_j(s)} \int_a^b \overline{\varphi_j(t)} \varphi(t) dt, \quad (76)$$

de plus on multiplie les deux membres de l'équation (75) par  $\psi_k(s)$  et on intègre par rapport à  $s$ , on obtient en vertu de la condition (72) la formule suivante

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(t)} \varphi(t) dt = 0$$

où ( $k = 1, 2, \dots, m$ ); donc La solution de l'équation (74) est solution de l'équation (71).

On a donc démontré que (72) est suffisante.

Si la condition (72) est réalisée, alors la théorie des équations linéaires et non homogènes dit que toutes les solutions de ces équations sont de la forme (74), donc l'équation (71) possède une infinité de solutions.

Remarque:

On peut construire  $\varphi_0(s)$  de la formule (74) à l'aide de la résolvante du noyau  $l(s, t)$ .

**13. Équations dégénérées:**

Définition:

On dit le noyau est dégénéré s'il se présente sous la forme suivante

$$k(s, t) = \sum_{k=1}^n \rho_k(s) \sigma_k(t). \quad (77)$$

Remarque:

On admet que les  $\rho_k(s)$  de même que les  $\sigma_k(t)$  sont linéairement indépendantes.

La méthode de la résolution d'une équation dégénérée:

On considère la formule (77) et son équation adjointe

$$\begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt \\ \psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b k(t,s)\psi(t)dt \end{cases} \quad (78)$$

En vertu de la formule (77) il vient

$$\begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n \rho_k(s) \int_a^b \sigma_k(t)\varphi(t)dt \\ \psi(s) = g(s) + \lambda \sum_{k=1}^n \sigma_k(s) \int_a^b \rho_k(t)\psi(t)dt \end{cases} \quad (79)$$

ou

$$\begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^n x_k \rho_k(s) \\ \psi(s) = g(s) + \lambda \sum_{k=1}^n y_k \sigma_k(s) \end{cases} \quad (80)$$

où

$$x_k = \int_a^b \sigma_k(t)\varphi(t)dt, \quad y_k = \int_a^b \rho_k(t)\psi(t)dt.$$

Donc le problème se ramène non pas à la recherche des fonctions mais des nombres  $x_k$  et  $y_k$ .

On porte les formules (80) dans les formule (79) et on identifie les coefficients des fonctions  $\rho_k(s)$  et  $\sigma_k(s)$ , on obtient pour la détermination de  $x_k$  et  $y_k$  les deux systèmes suivants

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = f_i \quad (81)$$

$$y_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ki} y_k = g_i \quad (82)$$

où

$$a_{ik} = \int_a^b \sigma_i(s)\rho_k(s)ds; \quad f_i = \int_a^b f(s)\sigma_i(s)ds, \quad g_i = \int_a^b g(s)\rho_i(s)ds, \quad (83)$$

les déterminants des systèmes (81) et (82) sont symétriques par rapport à leurs diagonales principales, si le déterminant du système (81) est non nul, alors quelles que soit  $f_i$  on obtient les  $x_i$ ; on les reporte dans les formules (80), et on déduit  $\varphi(s)$ .

Aux équations

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt,$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b k(t,s)\psi(t)dt,$$

correspondront les systèmes suivants

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0; \quad y_i - \lambda \sum_{k=1}^n a_{ki} y_k = 0 \quad (84)$$

on égalise le déterminant de l'un des systèmes (84) à zéro, on obtient donc une équation algébrique dont les racines sont les valeurs caractéristiques.

Alors si  $\lambda = \lambda_0$  est une racine quelconque de cette équation, le premier des systèmes (84) possède une solution non nulle.

On reporte cette solution dans l'équation suivante

$$\varphi(s) = \lambda_0 \sum_{k=1}^n x_k \rho_k(s) \quad (85)$$

on obtient la fonction propre correspondante.

Exemples:

1. Soit

$$k(s, t) = \cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq s \leq \pi \\ 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right)$$

on a

$$\rho_1(s) = \sigma_1(s) = \cos s ; \rho_2(s) = \sigma_2(s) = i \sin s.$$

Si on calcule les  $a_{ik}$  on trouve que

$$a_{11} = \int_0^\pi \cos^2 s \, ds = \frac{\pi}{2} \quad a_{12} = a_{21} = 0 ; \quad a_{22} = - \int_0^\pi \sin^2 s \, ds = -\frac{\pi}{2}.$$

Alors le système (81) s'écrit comme suit

$$\left(1 - \lambda \frac{\pi}{2}\right) x_1 = f_1 ; \left(1 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) x_2 = f_2 ;$$

donc on a deux valeurs caractéristiques

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$$

aux quelles sont associées les fonctions propres normées

$$\varphi_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos s \quad \text{et} \quad \varphi_2(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin s.$$

2. Soit

$$k(s, t) = st + s^2 t^2 \quad \left( \begin{array}{l} -1 \leq s \leq 1 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right)$$

ici on a

$$\rho_1(s) = \sigma_1(s) = s ; \rho_2(s) = \sigma_2(s) = s^2$$

et

$$a_{11} = \frac{2}{3} ; a_{12} = a_{21} = 0 ; \quad a_{22} = \frac{2}{5}.$$

Il existe donc deux valeurs caractéristiques

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

aux quelles sont liées les fonctions propres

$$\varphi_1(s) = \sqrt{\frac{3}{2}}s \text{ et } \varphi_2(s) = \sqrt{\frac{5}{2}}s^2.$$

3. Soit

$$k(s, t) = s - t \quad \begin{pmatrix} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{pmatrix}$$

on peut supposer que

$$\rho_1(s) = \sigma_2(s) = s; \rho_2(s) = -1; \sigma_1(s) = 1;$$

d'où

$$a_{11} = \frac{1}{2}; a_{12} = -1; a_{21} = \frac{1}{3}; a_{22} = -\frac{1}{2},$$

on obtient donc

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & \lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 + \frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\lambda^2 + 1 = 0;$$

cette équation ne possède que des racines imaginaires pures, alors le noyau réel satisfait ici à la condition  $k(t, s) = -k(s, t)$ .

4. Soit

$$k(s, t) = \sin s \sin 2t \quad \begin{pmatrix} 0 \leq s \leq \pi \\ 0 \leq t \leq \pi \end{pmatrix}$$

ce noyau dégénéré ne possède pas de valeurs caractéristiques.

#### **14. Ensembles compacts de fonctions continues:**

Définition:

On dit que l'ensemble infini  $E$  des fonctions continues sur un intervalle fini  $[a, b]$  est compact si de toute suite infinie de fonctions  $\varphi_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) appartient à  $E$  on peut extraire une suite  $\varphi_{n_k}(x)$  converge uniformément vers une fonction limite sur  $[a, b]$ .

Définition:

On dit que l'ensemble  $E$  est composé de fonctions équicontinues si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in E \forall x, y \in [a, b] \{ |x - y| < \delta \} \Rightarrow \{ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \} \quad (86)$$

Théorème fondamental (théorème d'Arzelà):

Soit  $E$  est un ensemble de fonctions  $f(x)$  équicontinues dans  $[a, b]$ .

Supposons qu'il existe un nombre  $L$  positif tel que  $|f(x)| \leq L$  pour toutes les fonctions  $f(x)$  de  $E$ ; alors cet ensemble est compact.

Lemme:

Si  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) est une suite infinie de fonctions définies dans  $[a, b]$  et limitées en module par un même nombre  $L$ , alors quel que soit l'ensemble dénombrable des points  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) de  $[a, b]$ , on peut extraire de la suite  $f_n(x)$  une suite partielle convergente en tous ces points.

La démonstration du théorème fondamental:

Soit une suite quelconque de fonctions de  $E$ . En vertu du lemme on peut affirmer que de cette suite on peut extraire une suite partielle convergente en tous les points  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) d'un ensemble dénombrable partout dense dans  $[a, b]$ .

Soit donc

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \quad (87)$$

une suite partielle convergente en tous les points  $x_k$ . On montre qu'elle est convergente uniformément sur  $[a, b]$ .

On compose la différence  $f_p(x) - f_q(x)$  et on la met sous la forme

$$f_p(x) - f_q(x) = [f_p(x) - f_p(y)] + [f_p(y) - f_q(y)] + [f_q(y) - f_q(x)] \quad (\alpha)$$

où  $y$  est un point de l'ensemble partout dense dans  $[a, b]$  mentionné plus haut.

Soit  $\varepsilon$  un nombre positif donné quelconque et  $\delta$  le nombre correspondant qui sert à définir l'équicontinuité.

On prend un ensemble fini  $\tau'$  de points  $x_k$ , tel que ses points divisent  $[a, b]$  en intervalles partiels de longueur  $\leq \delta$ , ce fractionnement est possible puisque l'ensemble des points  $x_k$  est partout dense dans  $[a, b]$ , il existe donc un  $N$  tel que

$$|f_p(y) - f_q(y)| < \varepsilon \quad \text{pour } p \text{ et } q > N, \quad (\beta)$$

si  $y$  est un point de l'ensemble fini  $\tau'$ .

On suppose que le point  $y$  de la formule  $(\alpha)$  appartient à l'ensemble fini  $\tau'$  et on écrit l'inégalité

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f_p(y)| + |f_p(y) - f_q(y)| + |f_q(y) - f_q(x)| \quad (\gamma)$$

qui découle immédiatement de  $(\alpha)$ .

Quelle que soit la position de  $x$  dans  $[a, b]$ , on peut trouver un  $y$  appartenant à  $\tau'$  tel que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } n,$$

le point  $y$  sera l'extrémité de l'intervalle partiel qui contient  $x$ .

De plus pour  $p$  et  $q > N$  l'inégalité  $(\beta)$  est vérifiée quel que soit  $y$  appartenant à  $\tau'$ .

Donc en vertu de  $(\gamma)$  on peut affirmer que pour tout nombre positif donné  $\varepsilon$  il existe un  $N$  ne dépend pas de  $x$  tel que

$$|f_p(x) - f_q(x)| < 3\varepsilon \text{ pour } p \text{ et } q > N \text{ et quel que soit } x \in [a, b];$$

or, cela prouve que la suite (87) est uniformément convergente sur  $[a, b]$ . Le théorème est donc démontré.

### Théorème 2.

Si

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

*est une suite de fonctions équi continues sur l'intervalle  $[a, b]$  converge en tous les points de cette intervalle (ou même en les points  $x_k$  d'un certain ensemble partout dense dans  $[a, b]$ ), alors cette suite est uniformément convergente sur  $[a, b]$ .*

### Remarque:

La démonstration de ce théorème se transpose littéralement au cas d'un ensemble  $E$  de fonctions définies dans un domaine fermé et borné d'un espace à  $n$  dimensions ou d'une surface.

### La démonstration de la nécessité des conditions de compacité de l'ensemble $E$ :

On a montré que des conditions suffisantes de compacité de  $E$  sont que toutes les fonctions de cet ensemble soient bornées en module par un même nombre et qu'elles soient équi continues. On démontre que ces deux conditions sont nécessaires.

Soit l'opérateur intégral à noyau continu

$$v(s) = \int_a^b k(s, t)u(t)dt \quad (88)$$

on sait qu'il transforme des fonctions continues  $u(t)$  en fonctions continues  $v(s)$ .

Soit  $E$  un ensemble infini de fonctions bornées

$$|u(t)| \leq m$$

alors en vertu de sa continuité dans  $k_0$  le noyau est également borné, i.e.

$$|k(s, t)| \leq M$$

et donc

$$|v(s)| \leq Mm(b - a),$$

i.e. l'ensemble des fonctions  $v(s)$  est borné, donc on a l'inégalité suivante

$$|v(s) - v(s')| \leq m \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)| dt$$

en vertu de la continuité du noyau, pour un  $\varepsilon > 0$  donné il existe un  $\delta > 0$  ne dépend pas de  $v(s)$  tel que

$$|k(s, t) - k(s', t)| \leq \frac{\varepsilon}{m(b-a)} \text{ pour } |s - s'| \leq \delta.$$

Les deux dernières inégalités entraînent

$$|v(s) - v(s')| \leq \varepsilon \text{ pour } |s - s'| \leq \delta.$$

Définition:

On dit qu'un opérateur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  est compact s'il transforme tout ensemble borné de fonctions  $u(t)$  continues dans  $[a, b]$  en un ensemble compact de fonctions continues dans  $[a, b]$ .

Remarque:

On a démontré que les fonctions  $v(s)$  sont bornées et équicontinues, elles engendrent donc un ensemble compact et l'opérateur intégral (88) est compact. Cette démonstration reste valable pour un noyau régulier.

## 15. Noyaux singuliers:

Définition:

On dit que  $K(s, t)$  est un noyau singulier s'il n'est pas continue sur la diagonal du carré  $k_0$  c'est-à-dire où  $s = t$ .

Remarque:

Les théorèmes démontrés plus haut peuvent ne pas être vrais pour les noyaux singuliers.

Définition:

On dit qu'un noyau infini est polaire s'il est de la forme suivante

$$K(s, t) = \frac{L(s, t)}{|s-t|^\alpha} \quad (89)$$

où  $L(s, t)$  est continue dans  $k_0$  et  $0 < \alpha < 1$ .

❖ On démontre que cet opérateur intégral

$$v(s) = \int_a^b \frac{L(s, t)}{|s-t|^\alpha} u(t) dt$$

est compact.

**16. Remarque:**

Tout ce qui a été dit et démontré pour les équations intégrales à noyaux continus ou polaires reste valable pour la théorie des équations intégrales dans les espaces  $L_2$  de Lebesgue.