

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
Benaissa Messaouda

THEME

Propriétés des espaces topologiques compacts et applications.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Y. Belabassi	M.C.A	Président
Mme. Y. Boukhatem	M.C.A	Examineur
Mr. A. Rahmoune	M.C.B	Examineur
Mr. A. Mokhtari	Professeur	Encadreur

Année Universitaire 2017/2018

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **Allah** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadreur, Monsieur **A. Mokhtari** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Je remercie très chaleureusement les membres de jury : **Y. Belabassi**, **Y. Boukhatem**, et **A. Rahmoune** qui n'ont pas hésité d'avoir accepté cette tâche.
Et sans oublier Mr. **Rahmoune.A.***

Enfin, tous mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Dédicaces

À la mémoire de mon défunt père.

*À la plus belle créature que Dieu a créée sur terre,,,
À cet source de tendresse, de patience et de générosité,,,
ma mère*

*À mes sœurs et mes frères pour leurs douceurs et leurs
gentillesse.*

À toute ma famille et surtout mon oncle Saleh

À tous mes amis et collègues

À tous les étudiants de la promotion 2013/2014.

*À tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de
continuer...*

ملخص:

في هذا العمل سوف نتطرق الى دراسة مفهوم التراص في الفضاء التوبولوجي والقياس. وذلك بإعطاء تطبيقات حول هذا المفهوم، على وجه الخصوص نظرية بيانو، وجود الحد للتطبيقات المستمرة في فضاء متراس و نظرية المؤثرات .

الكلمات الدلالية:

متراس، شبه متراس، مؤثر متراس، الحد، معادلة تفاضلية، محدود كلياً، محدودة بانتظام.

Résumé :

Dans ce mémoire de master, on va étudier la notion de compacité des espaces topologiques, et métriques. On donne quelques applications de cette notion, en particulier le théorème de **Piano**, l'existence de l'extremum d'une fonction continue sur un compact, et la théorie des opérateurs compacts.

Mots clés :

Compact, précompact, opérateurs compacts, extremum, équation différentielle, totalement borné, équicontinue, uniformément borné.

Abstract :

In this master thesis, we will study the notion of compactness of topological and metric spaces. We give some applications of this notion, in particular the Piano theorem, the existence of the extremum of a continuous function on a compact, and the theory of compact operators.

Key-words :

Compact, precompact, compact operators, extremum, differential equation, totally bounded, equicontinuous, uniformly bounded.

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels	4
1.1 Espaces topologique	4
1.2 Base d'un espace topologique	5
1.3 Dénombrabilité	7
1.3.1 Espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité	7
1.3.2 Espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité	8
1.3.3 Espace séparable	8
2 Compacité	9
2.1 Recouvrements	9
2.2 Espaces compacts	10
2.3 Compacité dénombrable	14
2.4 Ensembles précompacts	16
2.5 Compacité dans les espaces métriques	17
2.5.1 Ensembles totalement bornés	18
2.6 Espaces totalement bornés et compacité	19
2.7 Ensembles précompacts dans un espace métrique	21
2.8 Applications continues des espaces compacts	21
2.8.1 Fonctions continues et semi-continues définies sur un espace compact.	22
2.9 Continuité uniforme. Applications continues des compacts métriques. . . .	24
2.10 Théorème d'Arzelà	26
2.11 Théorème de Péano	29
3 Opérateurs compacts	32
3.1 Opérateurs compacts	32
3.2 Opérations sur les opérateurs compacts	35
3.3 Caractérisation des opérateurs compacts	36
3.4 Spectre d'un opérateur compact	37
3.5 Application	38

Conclusion	40
Bibliographie	41

Introduction

Dans ce mémoire nous allons étudier une propriété importante des ensembles d'un espace topologique, que l'on rencontre souvent en étudiant, l'existence de l'extremum des fonctions, le spectre d'un opérateur,...

Ce travail est dédié à la notion de compacité des ensembles d'un espace topologique. Il est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques. On donne des définitions sur les espaces topologiques, base d'un espace topologique, la notion de dénombrabilité, ainsi que quelques propriétés nécessaires pour la suite.

Le seconde chapitre sera consacré à la conception de la compacité qui représente " la colonne vertébrale de cette étude". On expose deux théorèmes importants, l'un des deux est le théorème **d'Arzela** et l'autre de **Piano**.

Dans le dernier chapitre on définit les opérateurs compacts, propriétés de ces opérateurs, spectre d'un opérateur compact et l'alternative de **Fredholm**. En fin une conclusion.

Chapitre 1

Rappels

Le premier chapitre est un rappel de quelques outils mathématiques. Nous commençons par des notions topologiques, des définitions, des propriétés élémentaire sur les espaces topologiques.

1.1 Espaces topologique

Définition 1.1. Soit E un ensemble quelconque, différent de l'ensemble vide que nous appellerons support. On appelle topologie de E toute famille τ de sous-ensemble $O \subset E$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. L'ensemble E lui même et l'ensemble vide $\emptyset$ appartiennent à τ .i.e.

$$(\emptyset, E \in \tau);$$

2. Une réunion quelconque d'éléments de τ appartient à τ .i.e.

$$(\forall (O_i)_{i \in I} \in \tau / \bigcup (O_i)_{i \in I} \in \tau)$$

τ est stable pour une réunion quelconque (finie ou infinie) ;

3. Une intersection finie d'éléments de τ appartient à τ .i.e.

$$\forall O_1, O_2, O_3 \dots O_n \in \tau, \bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$$

(τ est stable pour Une intersection finie).

On appelle le couple (E, τ) espace topologique, les éléments de τ sont appelés des ouverts.

Exemple 1.1.

1. Soit $E, \tau = P(E)$ (avec $P(E)$ l'ensemble des parties de E)
 τ est une topologie sur E , elle s'appelle topologie discrète.
2. Soit $E, \tau = \{\emptyset, E\}$
 τ est une topologie sur E , elle s'appelle topologie grossière.
3. Considérons tous les sous-ensembles de E dont le complémentaire est fini ainsi que l'ensemble vide $\emptyset$. Cette famille τ est également une topologie sur E . On l'appelle la topologie cofinie.

1.2 Base d'un espace topologique

Définition 1.2. Une famille $\mathcal{B}$ d'ensemble ouverts s'appelle base de l'espace topologique (E, τ) (noté par T) si tout ensemble ouvert de τ peut être représenté comme une réunion (finie ou infinie) d'ensemble de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.2.

L'ensemble des boules ouvertes (de centre et rayon arbitraires) d'un espace métrique est une base de cet espace. En particulier, l'ensemble de tous les intervalles est une base de la droite numérique. On obtiendra de même une base de la droite numérique, en se bornant aux intervalles à extrémités rationnelles, car tout intervalle et donc tout ensemble ouvert de la droite numérique peut être représenté comme une réunion de tels intervalles.

Proposition 1.1. *Toute base $\mathcal{B}$ d'un espace topologique $T = (E, \tau)$ jouit des deux propriétés suivantes :*

- i) *Tout point $x \in E$ appartient au moins à un ensemble $O \in \mathcal{B}$,*
- ii) *si x appartient à l'intersection de deux ensembles O_1 et O_2 de $\mathcal{B}$, il existe un ensemble $O_3 \in \mathcal{B}$ tel que*

$$x \in O_3 \subset O_1 \cap O_2.$$

En effet, la propriété i) signifie tout simplement que l'ensemble E , en tant qu'ensemble ouvert, doit représenter une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$; quant à la propriété ii), elle résulte du fait que $O_1 \cap O_2$ est un ensemble ouvert et représente donc une réunion d'ensembles de la base $\mathcal{B}$.

Réciproquement, soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{B}$ une famille de parties de E possédant les propriétés i) et ii). Alors, la famille d'ensembles qui peuvent être représentés sous forme de réunions d'ensembles de $\mathcal{B}$ est une topologie sur E (c.-à-d. vérifie les trois axiomes de l'espace topologique).

En effet, soit $\tau(\mathcal{B})$ la famille contenant tous les sous-ensembles de E qui peuvent être mis sous forme de réunions d'ensembles de $\mathcal{B}$. Alors, l'ensemble vide, l'ensemble E tout entier et toute réunion d'ensemble de $\tau(\mathcal{B})$ appartiennent à $\tau(\mathcal{B})$.

Remarque 1.1.

L'ensemble vide, peut être considéré comme la réunion d'une collection vide d'ensembles de la famille $\mathcal{B}$.

Montrons que toute intersection finie d'ensembles de $\tau(\mathcal{B})$ appartient à $\tau(\mathcal{B})$. Il suffit de vérifier cela pour l'intersection de deux ensembles. Soient $A = \bigcup_I O_I$ et $B = \bigcup_J O_J$; alors $A \cap B = \bigcup_{I,J} (O_I \cap O_J)$. En vertu de la propriété ii), tout ensemble $(O_I \cap O_J)$ appartient à $\tau(\mathcal{B})$. Il en résulte que $A \cap B \in \tau(\mathcal{B})$. Ainsi, nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.1. Pour qu'une famille $\mathcal{B}$ de parties O d'un ensemble E soit la base d'une topologie de E , il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ possède les propriétés i) et ii).

Soit maintenant E une topologie bien déterminée de l'espace T . Considérons dans T une famille $\mathcal{B}$ d'ensembles ouverts jouissant des propriétés i) et ii). En adoptant $\mathcal{B}$ comme

base, nous obtiendrons, évidemment, une topologie $\tau(\mathcal{B})$ de T coïncidant avec la topologie initiale τ ou plus faible que celle-ci. On se propose d'établir, à quelles conditions la famille $\mathcal{B}$ engendre exactement la topologie donnée τ .

Théorème 1.2. *Pour qu'une famille d'ensembles ouverts $\mathcal{B} \subset \tau$ soit base de la topologie τ , il faut et il suffit que :*

i) *Pour tout ensemble ouvert O et tout point $x \in O$ il existe un ensemble $O_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in O_x \subset O$.*

Démonstration.

Si la condition i) est vérifiée, tout ensemble ouvert O peut être mis sous la forme

$$O = \bigcup_{x \in O} O_x,$$

ce qui signifie que $\mathcal{B}$ est une base de la topologie τ . Inversement, si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie τ , tout ensemble $O \in \tau$ peut être représenté comme une réunion d'ensembles de $\mathcal{B}$ et alors pour tout $x \in O$ il existe un ensemble $O_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in O_x \subset O$. $\square$

1.3 Dénombrabilité

1.3.1 Espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité

Si le point p d'un espace topologique T possède un système fondamental de voisinages c.-à-d. Soit $p \in E$ il existe un ensemble au plus dénombrable $\mathcal{B}_p$ d'ouverts contenant p , tel que tout ouvert O contenant p contient un élément de $\mathcal{B}_p$, on dit que ce point satisfait au premier axiome de dénombrabilité.

Si cela a lieu pour tout point de l'espace T , on dit que cet espace satisfait au premier axiome de dénombrabilité.

Exemple 1.3.

Soit E un espace discret quelconque. A présent le singleton $\{p\}$ est ouvert et est contenu dans tout ouvert O contenant $p \in E$. Ainsi tout espace discret vérifie le premier axiome de dénombrabilité.

1.3.2 Espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité

Les espaces à base dénombrable s'appelle aussi espaces satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité .

Exemple 1.4.

L'ensemble $\mathcal{B}$ des intervalles ouverts (a, b) d'extrémités rationnelles, c.-à-d. $a, b \in \mathbb{Q}$, est dénombrable et est une base pour la topologie usuelle de la droite réelle $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{R}$ est un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité.

Exemple 1.5.

Tout espace normé de dimension finie est séparable : Si F est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est une base de F , l'ensemble dénombrable $D = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans F .

1.3.3 Espace séparable

Définition 1.3. un espace séparable est un espace topologique contenant un sous-ensemble dense et au plus dénombrable, c'est-à-dire contenant un ensemble fini ou dénombrable de points dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier.

Proposition 1.2. *Si l'espace topologique T possède une base dénombrable, alors il existe un ensemble dénombrable partout dense dans T , c.-à-d, un ensemble dénombrable dont la fermeture coïncide avec T .*

En effet, soit $\{O_n\}$ une telle base. Choisissons dans chacun de ses éléments un point arbitraire x_n . L'ensemble dénombrable $E = \{x_n\}$ est partout dense dans T , car dans le cas contraire l'ensemble ouvert non vide $O = T \setminus [E]$ ne contiendrait aucun point de E , ce qui est impossible, étant donné que O est une réunion d'ensembles de la famille $\{O_n\}$ et $x \in O_n$.

Exemple 1.6.

La droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie usuelle est un espace séparable puisque l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, c.-à-d $[\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$.

Chapitre 2

Compacité

2.1 Recouvrements

Définition 2.1. Soit T un espace topologique.

1. Un recouvrement de T est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de T telle que $T = \bigcup_{i \in I} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fini de T .
2. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement de T . Si $J \subset I$ tel que $T = \bigcup_{j \in J} A_j$, on dit que $(A_j)_{j \in J}$ est un sous recouvrement fini de $(A_i)_{i \in I}$, si $\text{card}(J) < +\infty$.
3. Un recouvrement ouvert de T est une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ de T telle que $T = \bigcup_{i \in I} O_i$.

Exemple 2.1.

Considérons la famille $A = \{D_p : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ où D_p est le disque ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ de rayon 1 et de centre $p = (m, n)$, m et n étant des entiers relatifs. Alors A est un recouvrement de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire tout point de $\mathbb{R}^2$ appartient à l'un au moins des éléments de A .

Par contre la famille des disques ouverts $A' = \{D_p^* : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ où D_p^* a pour centre p et pour rayon $\frac{1}{2}$ ne constitue pas un recouvrement de $\mathbb{R}^2$. Par exemple le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$

n'appartient à aucun élément de A' .

2.2 Espaces compacts

• Notion de compacité.

Un rôle fondamental en analyse est joué par la proposition suivante, connue sous le nom du lemme de **Heine-Borel** :

De tout recouvrement d'un segment $[a, b]$ de la droite numérique par des intervalles on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Cette proposition reste vraie, si l'on remplace les intervalles par des ensembles ouverts arbitraires : de tout recouvrement ouvert du segment $[a, b]$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

En partant de cette propriété des segments de la droite numérique, on introduit la notion importante suivante.

Définition 2.2. Un espace topologique T est appelé espace compact, si tout recouvrement ouvert de T contient un sous- recouvrement fini.

Définition 2.3. On dit qu'une famille de parties $\{A_i\}_{i \in I}$ d'un ensemble E est centrée, si aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^n A_i$ d'ensembles de cette famille n'est vide.

Théorème 2.1. *Pour qu'un espace topologique T soit compact, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :*

- i) Toute famille centrée de sous-ensembles fermés de T admet une intersection non vide.*

Démonstration.

En effet, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille centrée de sous-ensembles fermés de T et soit T un espace compact. Les ensembles $O_i = T \setminus F_i$ sont ouverts et comme aucune intersection finie $\bigcap_{i=1}^n F_i$ n'est vide, on en déduit qu'aucune famille d'ensembles $O_i = T \setminus F_i$ ne recouvre T entièrement. Mais alors (en vertu de la compacité de T) l'ensemble de tous les O_i ne peut pas constituer un recouvrement de T , ce qui signifie que $\bigcap F_i \neq \emptyset$. Ainsi donc, si T est un espace compact, il remplit la condition i).

Réciproquement, supposons que T vérifie la condition i) et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de T . En posant $F_i = T \setminus O_i$, on obtient $\bigcap F_I = \emptyset$, d'où l'on déduit (en vertu de la condition i)) que la famille $(F_i)_{i \in I}$ ne peut pas être centrée. Il existe donc des ensembles $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$, tel que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Mais alors les ouverts correspondants $O_i = T \setminus F_i$ forment un sous-recouvrement fini du recouvrement $\{O_I\}$. Donc, la condition i) est équivalente à la compacité.

□

Définition 2.4. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique T ($A \subset T, A \neq \emptyset$), un point x de T est un point d'accumulation ou bien un point limite de A si pour tout voisinage V de x , on a :

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Nous allons établir maintenant quelques propriétés importantes des espaces compacts.

Théorème 2.2. *Si T est un espace compact, tout sous-ensemble infini de T possède au moins un point d'accumulation.*

Démonstration.

Si T contient un ensemble infini X ne possédant aucun point d'accumulation, alors de X on peut extraire un sous-ensemble dénombrable

$$X_1 = (x_1, x_2, \dots),$$

ne possédant non plus aucun point d'accumulation. Mais alors les ensembles

$$X_n = (x_n, x_{n+1}, \dots),$$

forment une famille centrée de sous-ensembles fermés de T dont l'intersection est vide, ce qui signifie que T n'est pas compact.

□

Théorème 2.3. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est un espace compact.*

Démonstration.

Soit F un sous-ensemble fermé de l'espace compact T et soit $\{F_I\}$ une famille centrée quelconque de sous-ensembles fermés du sous-espace $F \subset T$. Comme tout ensemble F_I fermé dans F , est aussi fermé dans T , $\{F_I\}$ est une famille centrée de sous-ensembles fermés de T . Par conséquent $\bigcap F_I \neq \emptyset$. En vertu du théorème (2.1) on en déduit la compacité de F . □

Définition 2.5. On dit que T est un espace séparé (de **Hausdorff**) si :

$\forall x, y \in T$ avec $(x \neq y)$ il existe deux voisinages U de x et V de y tel que

$$U \cap V = \emptyset.$$

Théorème 2.4. *Un compact est fermé dans tout espace de **Hausdorff** qui le contient.*

Démonstration.

Soit A un sous-ensemble compact d'un espace de **Hausdorff** T et soit $y \notin A$. Alors, $\forall x \in A$, il existe un voisinage U_x du point x et un voisinage V_y du point y tels que

$$U_x \cap V_y = \emptyset.$$

Les voisinages U_x forment un recouvrement ouvert de A . En vertu de la compacité de A on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$. Posons

$$V = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \dots \cap V_{y_n}.$$

Alors V est un voisinage du point y qui ne rencontre pas $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \supset A$. Par conséquent, $y \notin [A]$, ce qui signifie que A est fermé.

Le théorème est démontré. □

Remarque 2.1.

*Les théorème (2.3) et (2.4) montrent que dans la classe des espaces de **Hausdorff** la compacité est une propriété intrinsèque, c.-à-d. que tout compact reste un compact, quel que soit l'espace de **Hausdorff** plus large qui le contient.*

Définition 2.6. On dit qu'un espace topologique est normal s'il est séparé et s'il vérifie de plus l'axiome de séparation T_4 : pour tous fermés disjoints X et Y , il existe deux ouverts disjoints U et V tels que X soit inclus dans U et Y dans V .

Définition 2.7. Un espace régulier est un espace topologique vérifiant les deux conditions de séparation suivantes :

- T_2 : l'espace est séparé ;
- T_3 : on peut séparer un point x et un fermé ne contenant pas x par deux ouverts disjoints.

Théorème 2.5. *Tout compact est un espace normal.*

Démonstration.

Soient X et Y deux sous-ensembles fermés disjoints d'un compact A . En appliquant les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème précédent, il est aisé de voir que pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage U_y de y et un ensemble ouvert $O_y \supset X$ tels que $U_y \cap O_y = \emptyset$. On en déduit que tout compact est un espace régulier. Supposons maintenant que y parcourt tout l'ensemble Y . Considérons un sous-recouvrement fini $U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}$ du recouvrement $\{U_y\}$ de l'ensemble Y . Les ensembles ouverts

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap O_{y_2} \cap \dots \cap O_{y_n} \quad \text{et} \quad O^{(2)} = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_n}$$

vérifient les conditions

$$O^{(1)} \supset X, \quad O^{(2)} \supset Y, \quad O^{(1)} \cap O^{(2)} = \emptyset,$$

d'où la normalité de A .

□

2.3 Compacité dénombrable

Définition 2.8. On dit qu'un espace T est dénombrablement compact, si tout sous-ensemble infini de T admet au moins un point d'accumulation.

Remarque 2.2.

Du théorème (2.2), il résulte que tout espace compact est dénombrablement compact.

La réciproque n'est pas en général vraie.

Le rapport entre la notion de compacité et celle de compacité dénombrable sera éclairci par le théorème suivant.

Théorème 2.6. *Pour qu'un espace topologique T soit dénombrablement compact, il faut et il suffit que l'une quelconque des conditions suivantes soit remplie :*

1. *Tout recouvrement ouvert dénombrable de l'espace T contient un sous-recouvrement fini.*
2. *Toute famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans T possède une intersection non vide.*

Démonstration.

L'équivalence des conditions 1) et 2) est une conséquence immédiate des relations de dualité. Si l'espace T n'est pas dénombrablement compact, alors en reprenant le raisonnement utilisé à la démonstration du théorème (2.2), il est aisé de voir que dans T il existe une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dont l'intersection est vide. Ceci prouve que la condition 2) (et donc, la condition 1) également) est suffisante. Montrons maintenant que la condition 2) est nécessaire. Supposons l'espace T dénombrablement compact et soit (F_n) une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans T .

Il s'agit de montrer que $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$. Posons

$$\Phi_n = \bigcap_{k=1}^n F_k.$$

Il est clair que tous les ensembles Φ_n sont fermés, non vides (puisque la famille (F_n) est centrée), qu'ils forment une suite non croissante

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \dots$$

et que

$$\bigcap_n \Phi_n = \bigcap_n F_n.$$

Deux cas sont possibles :

- 1) A partir d'un certain numéro n_0 , on a :

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \dots$$

Dans ce cas il est évident que $\bigcap_n \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \emptyset$.

- 2) Parmi les Φ_n il y a une infinité d'ensembles deux à deux distincts. Il suffit de considérer le cas, où tous les Φ_n diffèrent l'un de l'autre. Soit

$$x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}.$$

La suite (x_n) constitue un ensemble infini de points distincts de T ; en vertu de la compacité dénombrable de T , elle possède au moins un point d'accumulation, soit x_0 . Or, comme ϕ_n contient tous les points $x_n, x_{n+1}, \dots$, alors x_0 est également un point d'accumulation de Φ_n et comme Φ_n est fermé, $x_0 \in \Phi_n$. Par conséquent, $\bigcap_n \Phi_n \ni x_0$, c.-à-d.

$$\bigcap_n \Phi_n \neq \emptyset.$$

Ainsi donc, les espaces compacts comme les espaces dénombrablement compacts sont caractérisés par le « comportement » de leurs recouvrements ouverts. Et dans un cas et dans l'autre d'un recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, mais dans le premier cas il s'agit des recouvrements arbitraires, tandis que dans le deuxième cas il ne s'agit que des recouvrements dénombrables. Bien qu'en général la compacité dénombrable n'implique pas la compacité, on a le théorème suivant (2.8).

□

Théorème 2.7. *Si T est un espace topologique à base dénombrable, de tout recouvrement ouvert de T on peut extraire un sous-recouvrement fini ou dénombrable.*

Théorème 2.8. *Dans le cas des espaces à base dénombrable il y a identité entre la notion de compacité et celle de compacité dénombrable.*

Démonstration.

En effet, quel que soit le recouvrement ouvert d'un espace T à base dénombrable, on peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable d'après théorème (2.7). Si, en outre, T est dénombrablement compact, de ce dernier on peut extraire, d'après le théorème (2.6), un sous-recouvrement fini. On en déduit que l'espace T est alors Compact.

□

2.4 Ensembles précompacts

Si un ensemble E , inclus dans un espace de **Hausdorff** T , n'est pas fermé dans T , il ne peut pas être compact. Par exemple, aucun sous-ensemble non fermé de la droite numérique n'est compact. Pourtant, il est possible que la fermeture $[E]$ d'un tel ensemble E dans T possède la propriété de compacité. Il en est ainsi, par exemple, de tout sous-ensemble borné de la droite numérique ou d'un espace à n dimensions. On est conduit à la définition suivante.

Définition 2.9. Un ensemble E , inclus dans un espace topologique T , est dit précompact (ou compact par rapport à T), si sa fermeture dans T est compacte. De manière analogue, un ensemble E est dit dénombrablement précompact dans T , si tout sous-ensemble infini $A \subset E$ admet au moins un point d'accumulation (qui peut appartenir ou non à l'ensemble E).

Remarque 2.3.

La notion de précompacité (contrairement à celle de compacité) est évidemment liée à l'espace T , dans lequel nous plongeons l'ensemble donné. Par exemple, l'ensemble des

points rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ est précompact, s'il est considéré comme sous-ensemble de la droite numérique, mais il n'est pas précompact, si on le considère comme sous-ensemble de l'espace des nombres rationnels. La notion de précompacité a le plus d'importance dans le cas des espaces métriques.

2.5 Compacité dans les espaces métriques

Définition 2.10. On appelle métrique ou distance toute fonction d'un ensemble $E \times E$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et on la note d .

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$; (Symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) s'appelle espace métrique, on le note par R .

Exemple 2.2.

1. $(\mathbb{R}, d)$, avec $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.
2. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, on introduit la métrique ou la distance entre $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Comme les espaces métriques représentent un cas particulier des espaces topologiques, toutes les définitions et tous les résultats, établis au paragraphe précédent, sont valables pour les espaces métriques. Dans le cas des espaces métriques la notion de compacité est étroitement liée à la notion d'ensemble totalement borné que nous introduisons ci-après.

Définition 2.11. Soit M un ensemble quelconque d'un espace métrique R et soit ϵ un nombre positif quelconque. On dit que l'ensemble $A \subset R$ est un ϵ -réseau de M , si pour tout point $x \in M$ il existe au moins un point $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq \epsilon$. (L'ensemble A

n'est pas forcément inclus dans M et peut même n'avoir aucun point commun avec M ;
pourtant, s'il existe un ϵ -réseau A de M , on peut en construire un 2ϵ -réseau $B \subset M$.)

2.5.1 Ensembles totalement bornés

Définition 2.12. Un ensemble M est dit totalement borné, si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ϵ -réseau fini de M . Il est clair que tout ensemble totalement borné est nécessairement borné (contenu dans une boule), comme une réunion finie d'ensembles bornés. Comme le montre l'exemple ci-dessous, la réciproque n'est pas, en général, vraie.

Exemple 2.3.

La sphère S de rayon 1 dans l'espace l_2 nous fournit un exemple d'ensemble borné, mais non totalement borné. En effet, considérons dans S les points :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots),$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

.....

La distance de n'importe quels deux de ces points e_n et e_m ($n \neq m$) est égale à $\sqrt{2}$. Ceci montre que dans S il n'existe aucun ϵ -réseau pour $\epsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque 2.4.

Si un ensemble M est totalement borné, sa fermeture $[M]$ l'est aussi.

Remarque 2.5.

De la définition d'un ensemble totalement borné il résulte immédiatement que si l'espace métrique R est lui-même totalement borné, alors il est séparable. En effet, construisons dans R un ϵ -réseau pour chaque valeur de n . La réunion de ces $\frac{1}{n}$ -réseaux pour toutes les valeurs de n est un ensemble dénombrable, partout dense dans R . Comme tout espace

métrique séparable possède une base dénombrable, on en déduit que tout espace métrique totalement borné possède une base dénombrable.

2.6 Espaces totalement bornés et compacité

Théorème 2.9. *Si l'espace métrique R est dénombrablement compact, alors il est totalement borné.*

Démonstration.

Supposons que l'espace R ne soit pas totalement borné. Cela signifie que pour un certain $\epsilon_0 > 0$, dans R il n'existe pas de ϵ_0 -réseau fini. Soit a_1 un point arbitraire de R .

Il existe au moins un point de R soit a_2 , tel que $d(a_1, a_2) > \epsilon_0$ (sinon, le point a_1 formerait un ϵ_0 -réseau de R). De la même façon, dans R on peut trouver un point a_3 tel que

$$d(a_1, a_3) > \epsilon_0 \quad \text{et} \quad d(a_2, a_3) > \epsilon_0;$$

autrement le couple de points a_1, a_2 serait un ϵ -réseau de R . Si les points $a_1, \dots, a_k$ sont déjà fixés, choisissons un point $a_{k+1} \in R$ tel que

$$d(a_i, a_{k+1}) > \epsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

A l'aide de ce procédé on obtient une suite infinie $a_1, a_2, \dots$ qui n'a aucun point d'accumulation, étant donné que $d(a_i, a_j) > \epsilon_0$ pour $i \neq j$. Mais alors l'espace R n'est pas dénombrablement compact. Le théorème est démontré.

Ainsi, nous avons démontré que pour les espaces métriques la compacité dénombrable implique la propriété de l'espace d'être totalement borné, qui à son tour implique la présence d'une base dénombrable. □

En vertu du théorème (2.8), on en déduit le résultat important suivant.

Corollaire 2.1. *Tout espace métrique dénombrablement compact est un espace compact.*

Nous avons montré que la propriété d'un espace métrique d'être totalement borné est une condition nécessaire pour qu'il soit compact. Cette condition n'est pas suffisante ;

Exemple 2.4.

L'ensemble des points rationnels du segment $[0, 1]$, muni de la distance habituelle, est un espace totalement borné, mais non compact : la suite de points de cet espace

$$0; \quad 0, 4; \quad 0, 41; \quad 0, 414; \quad 0, 4142; \dots,$$

c.-à-d. la suite des valeurs décimales approchées par défaut du nombre $\sqrt{2} - 1$, n'a aucun point d'accumulation dans cet espace. Pourtant, on a le théorème suivant.

Théorème 2.10. *Pour qu'un espace métrique R soit compact, il faut et il suffit qu'il soit à la fois :*

- 1) *totalement borné,*
- 2) *complet.*

Démonstration.

La nécessité de la condition 1) a été déjà établie. Quant à la nécessité de la condition 2), elle est évidente ; en effet, si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy non convergente dans R , elle ne peut avoir dans R aucun point d'accumulation.

Montrons maintenant que si l'espace R est totalement borné et complet, alors il est compact. En vertu du corollaire du théorème (2.9), il suffit pour cela de démontrer que R est dénombrablement compact, c.-à-d. que toute suite $\{x_n\}$ de points de R a au moins un point d'accumulation.

Entourons d'une boule fermée de rayon 1 chaque point qui fait partie d'un 1-réseau de R . Comme ces boules sont en nombre fini et recouvrent tout l'espace R , au moins l'une d'elles, soit B_1 , contient une sous-suite infinie $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$ de la suite $\{x_n\}$. Choisissons ensuite dans B_1 un $\frac{1}{2}$ -réseau et entourons chacun de ses points d'une boule fermée de rayon $\frac{1}{2}$. Au moins l'une de ces boules, désignons-la par B_2 , contient une sous-suite infinie $x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$ de la suite $\{x_n^{(1)}\}$. De la même façon, on trouvera une boule fermée B_3 de rayon $\frac{1}{4}$ ayant le centre dans B_2 et contenant une sous-suite infinie $x_1^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}, \dots$ de la suite $\{x_n^{(2)}\}$, etc. Considérons maintenant avec chaque boule B_n une boule fermée A_n

ayant le même centre, mais un rayon deux fois plus grand. Il est aisé de voir que les boules A_n sont emboîtées. Comme l'espace R est complet, l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ n'est pas vide et contient un seul point x_0 . Ce point est un point d'accumulation de la suite initiale $\{x_n\}$, car tout voisinage de x_0 contient une boule B_k , donc, une sous-suite infinie $\{x_n^{(k)}\}$ de la suite $\{x_n\}$.

□

2.7 Ensembles précompacts dans un espace métrique

La notion de précompacité, introduite au paragraphe (2.4) pour les sous-ensembles d'un espace topologique arbitraire, est valable, en particulier, pour les sous-ensembles d'un espace métrique. En outre, il est évident que dans le cas des espaces métriques il y a identité entre la notion de précompacité et celle de précompacité dénombrable. Il convient de mentionner la proposition simple, mais importante, qui suit.

Théorème 2.11. *Pour qu'un ensemble M , inclus dans un espace métrique complet R , soit précompact, il faut et il suffit que cet ensemble soit totalement borné.*

Ceci découle immédiatement du théorème (2.10) et du fait évident que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet est lui-même complet. L'importance de ce théorème réside dans le fait que dans la plupart des cas il est plus facile de démontrer qu'un ensemble est totalement borné que d'établir directement sa précompacité. Tout de même, lorsqu'il s'agit des applications en analyse, c'est la précompacité qui est d'habitude plus importante.

2.8 Applications continues des espaces compacts

Les applications continues des espaces compacts, en particulier, des compacts, possèdent des propriétés aussi intéressantes qui sont importantes.

Théorème 2.12. *L'image d'un espace compact dans une application continue est un espace compact.*

Démonstration.

Soit X un espace compact et f une application continue de X dans un espace topologique

Y . Considérons un recouvrement quelconque $\{V_I\}$ de son image $f(X)$ par des ensembles ouverts dans $f(X)$. posons $U_I = f^{-1}(V_I)$. Les ensembles U_I sont ouverts (comme images réciproques d'ensembles ouverts dans une application continue) et constituent un recouvrement de l'espace X . En vertu de la compacité de X , de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini $U_1, U_2, \dots, U_n$. Alors les ensembles $V_1, V_2, \dots, V_n$, où $V_i = f(U_i)$, recouvrent l'image $f(X)$ de l'espace X . $\square$

Théorème 2.13. *Toute application biunivoque et continue φ d'un compact X sur un espace de **Hausdorff** Y est un homéomorphisme.*

Démonstration.

Il suffit de montrer que les conditions du théorème entraînent la continuité de l'application réciproque φ^{-1} .

Soient F un ensemble fermé dans X et $P = \varphi(F)$ son image dans Y . D'après le théorème précédent P est un compact et, par conséquent, P est fermé dans Y . Donc, l'image réciproque de tout ensemble fermé $F \subset X$ dans l'application φ^{-1} est fermée. D'où la continuité de l'application φ^{-1} . $\square$

2.8.1 Fonctions continues et semi-continues définies sur un espace compact.

Au numéro précédent il a été question des applications continues d'un compact dans un espace de **Hausdorff**. Un cas particulier des applications de ce type est constitué par les applications d'un compact dans la droite numérique, c.-à-d. par les fonctions numériques définies sur un compact. Ces fonctions possèdent les propriétés principales des fonctions définies sur un segment, connues du cours d'analyse.

Théorème 2.14. *Soient T un espace compact et f une fonction continue sur T . Alors f est bornée sur T et y atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.*

Démonstration.

Une fonction continue est une application continue de T dans la droite numérique $\mathbb{R}^1$. En

vertu du théorème général (2.12), l'image de T dans $\mathbb{R}^1$ est un ensemble compact. Or, du cours d'analyse on sait que tout sous-ensemble compact de la droite numérique est fermé et borné. Un tel ensemble non seulement admet une borne supérieure et une borne inférieure finies, mais aussi il les contient.

Le théorème est démontré. □

L'affirmation du dernier théorème admet une extension à une classe plus large de fonctions, nommées fonctions semi-continues.

Définition 2.13. Une fonction $f(x)$ est dite semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) en un point x_0 , si :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe U (voisinage de x_0) tel que pour tout $x \in U$, on a $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, (respectivement, $f(x) > f(x_0) - \epsilon$).

Théorème 2.15. *Toute fonction finie et semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur un T_1 -espace compact T est bornée inférieurement (resp. supérieurement) sur T .*

Démonstration.

En effet, supposons que $\inf f(x) = -\infty$. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x) < -n$. Comme l'espace T est compact, son sous-ensemble infini $\{x_n\}$ possède (d'après le théorème (2.2)) au moins un point d'accumulation x_0 . La fonction f étant par hypothèse finie et semi-continue inférieurement, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) > f(x_0) - 1$, si $x_0 \in U$. Mais alors le voisinage U ne peut contenir qu'un nombre fini de points de l'ensemble $\{x_n\}$, ce qui contredit le fait que x_0 est un point d'accumulation de cet ensemble. Pour le cas d'une fonction semi-continue supérieurement la démonstration est analogue. □

Théorème 2.16. *Toute fonction finie et semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur un T_1 -espace compact T atteint sur T sa borne inférieure (resp. supérieure).*

Démonstration.

Soit $f(x)$ une fonction semi-continue inférieurement. D'après le théorème (2.15) elle admet une borne inférieure finie et il existe dans T une suite $\{x_n\}$ telle que

$$f(x_n) \leq \inf f(x) + \frac{1}{n}.$$

Comme l'espace T est compact, l'ensemble $\{x_n\}$ possède un point d'accumulation x_0 . On ne peut pas avoir $f(x_0) > \inf f$, car alors, étant donné que la fonction f est semi-continue inférieurement, il existerait un voisinage U du point x_0 et un nombre $\delta > 0$ tels que $f(x) > \inf f + \delta$ pour tout $x \in U$. Mais un tel voisinage U ne pourrait pas contenir un sous-ensemble infini de $\{x_n\}$. Donc $f(x_0) = \inf f$, ce qu'il fallait démontrer.

□

2.9 Continuité uniforme. Applications continues des compacts métriques.

Pour les applications d'un espace métrique dans un autre, en particulier, pour les fonctions numériques définies sur un espace métrique il y a en plus de la notion de continuité une autre notion qui a un sens et présente de l'importance pour l'analyse. C'est la notion de continuité uniforme.

Définition 2.14. Une application F d'un espace métrique R_1 dans un espace métrique R_2 est dite uniformément continue, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad d_1(x_1, x_2) < \delta \implies d_2(F(x_1), F(x_2)) < \epsilon$$

(ici d_1 désigne la distance sur R_1 et d_2 la distance sur R_2), δ étant dépendant seulement de ϵ et non de x_1 et x_2 .

les applications continues des compacts métriques on a le théorème suivant qui généralise le théorème bien connu de l'analyse élémentaire sur les fonctions continues sur un segment.

Théorème 2.17. *Toute application continue d'un compact métrique dans un espace métrique est uniformément continue.*

Démonstration.

Soit F une application continue, mais non uniformément continue, d'un compact métrique K dans un espace métrique R . Cela signifie que pour un certain $\epsilon > 0$ et pour tout entier naturel n on peut trouver dans K deux points x_n et x'_n tels que

$$d_1(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$$

et pourtant

$$d_2(F(x_n), F(x'_n)) \geq \epsilon$$

(d_1 désigne la distance sur K et d_2 la distance sur R). En vertu de la compacité de K , de la suite $\{x_n\}$ on peut extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergeant vers un point $x \in K$. Alors la suite $\{x'_{n_k}\}$ converge aussi vers x . D'autre part, pour chaque valeur de k au moins l'une des inégalités

$$d_2(F(x), F(x_{n_k})) \geq \frac{\epsilon}{2}, \quad d_2(F(x), F(x'_{n_k})) \geq \frac{\epsilon}{2},$$

est vérifiée, ce qui contredit l'hypothèse que l'application F est continue au point x . $\square$

Définition 2.15. Une famille Φ de fonctions φ , définies sur un segment $[a, b]$, est dite uniformément bornée, s'il existe un nombre M tel que

$$|\varphi(x)| < M$$

pour tous les $x \in [a, b]$ et toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$.

Définition 2.16. Une famille Φ de fonctions φ , définies sur un segment $[a, b]$, est dite équicontinue, si à tout $\epsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \epsilon$$

pour tous les x_1 et x_2 appartenant à $[a, b]$ tels que $d(x_1, x_2) < \delta$, et pour toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$.

2.10 Théorème d'Arzelà

Le problème consistant à déterminer, si tel ou tel ensemble est compact dans un espace métrique, est assez fréquent en analyse. Par ailleurs, lorsqu'on essaie d'appliquer directement le théorème (2.10), on se heurte à des difficultés. C'est pourquoi, pour les ensembles contenus dans des espaces concrets, il est utile d'établir des critères de compacité (ou de précompacité) spéciaux, plus commodes dans la pratique. Dans un espace euclidien à n dimensions, pour qu'un ensemble soit précompact, il faut et il suffit, comme on l'a vu précédemment, qu'il soit borné. Mais pour des espaces métriques plus généraux ceci n'est plus vrai.

L'un des espaces les plus importants de l'analyse des espaces métriques est l'espace $C[a, b]$. Pour ses sous-ensembles un critère de précompacité important et fréquemment utilisé est fourni par le théorème **d'A r z e l à**.

Théorème 2.18. (d'A r z e l à). *Pour qu'une famille Φ de fonctions continues, définies sur le segment $[a, b]$, soit précompacte dans $C[a, b]$, il faut et il suffit que cette famille soit uniformément bornée et équicontinue.*

Démonstration. **La condition est nécessaire**

Supposons la famille Φ précompacte dans $C[a, b]$. Alors, selon le théorème (2.11), pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $\frac{\epsilon}{3}$ -réseau fini $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ de la famille Φ . Chacune des fonctions φ_i est bornée, comme fonction continue sur le segment $[a, b]$:

$$|\varphi_i(x)| \leq K_i.$$

Posons $K = \max K_i + \frac{\epsilon}{3}$. D'après la définition d'un $\frac{\epsilon}{3}$ -réseau pour chaque $\varphi \in \Phi$ il existe au moins une fonction φ_i telle que

$$d(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Par conséquent,

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi_i(x)| + \frac{\epsilon}{3} \leq K_i + \frac{\epsilon}{3} \leq K.$$

Donc, la famille Φ est uniformément bornée.

D'autre part, chacune des fonctions φ_i du $\frac{\epsilon}{3}$ -réseau étant continue sur le segment $[a, b]$ est aussi uniformément continue sur ce segment. Donc, à tout $\frac{\epsilon}{3}$ on peut faire correspondre

δ_i tel que

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

si $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Posons $\delta = \min \delta_i$. Soit φ une fonction arbitraire de la famille Φ . Faisons-lui correspondre une fonction φ_i telle que $d(\varphi, \varphi_i) < \frac{\epsilon}{3}$.

Alors pour $|x_1 - x_2| < \delta$ on a

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

D'où l'équicontinuité de la famille Φ .

La condition est suffisante. Soit Φ une famille de fonctions uniformément bornée et équicontinue. Conformément au théorème (2.11), pour établir la précompacité de cette famille dans $C[a, b]$, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il lui correspond dans $C[a, b]$ un ϵ -réseau fini. Soit

$$|\varphi(x)| \leq K$$

toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$ et soit $\delta > 0$ tel que si $|x_1 - x_2| < \delta$ on a

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\epsilon}{5}$$

pour toutes les fonctions $\varphi \in \Phi$. Partageons le segment $[a, b]$ de l'axe x par les points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ en intervalles de longueur inférieure à δ et traçons par ces points des droites verticales. Partageons ensuite le segment $[-K, K]$ de l'axe y par les points $y_0 = -K < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$ en intervalles de longueur inférieure à $\frac{\epsilon}{5}$ et traçons par les points de subdivision des droites horizontales. Le rectangle $a \leq x \leq b$ $-K \leq y \leq K$ se trouvera alors partagé en petits rectangles ayant le côté horizontal inférieur à δ et le côté vertical inférieur à $\frac{\epsilon}{5}$. A chaque fonction $\varphi \in \Phi$ faisons correspondre une ligne brisée

$\psi(x)$ ayant pour sommets les points (x_k, y_l) , c.-à-d. les nœuds du réseau construit, tels que pour $x = x_k$ l'écart de $\varphi(x)$ à $\psi(x)$ soit inférieur à $\frac{\epsilon}{5}$ (l'existence d'une telle ligne brisée est évidente).

Puisque par construction

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\epsilon}{5},$$

$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\epsilon}{5}$$

et

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\epsilon}{5},$$

on a

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\epsilon}{5}.$$

La fonction $\psi(x)$ étant linéaire entre les points x_k et x_{k+1} , on a

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\epsilon}{5}.$$

pour tous les $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Soit maintenant x un point quelconque du segment $[a, b]$ et x_k celui des points de subdivision choisis qui est le plus proche de x à sa gauche. Alors on a

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, les lignes brisées $\psi(x)$ forment un ϵ -réseau de Φ .

Il est évident qu'elles sont en nombre fini. On en conclut que la famille Φ est totalement bornée.

Le théorème est entièrement démontré.

□

2.11 Théorème de Péano

Théorème de Péano. Montrons, comment s'applique le théorème d'Arzelà, en prenant pour exemple, le théorème d'existence suivant pour les équations différentielles ordinaires à second membre continu.

Théorème 2.19. (de Péano) *Soit donnée une équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.1)$$

Si la fonction f est continue dans un domaine borné et fermé G , alors quel que soit le point (x_0, y_0) , intérieur à ce domaine, il existe au moins une courbe intégrale de l'équation donnée, passant par ce point.

Démonstration.

Comme la fonction f est continue dans un domaine borné et fermé, elle est aussi bornée :

$$|f(x, y)| < M = \text{const.}$$

Traçons par le point (x_0, y_0) deux droites à coefficients angulaires M et $-M$.

Traçons ensuite deux droites verticales $x = a$ et $x = b$ de façon que les deux triangles à sommet commun (x_0, y_0) , qu'elles déterminent avec les deux précédentes, soient situés entièrement à l'intérieur du domaine G .

Ce couple de triangles forme un ensemble fermé Δ .

Construisons pour l'équation donnée une ligne brisée dite **d'Euler** de la manière suivante : par le point (x_0, y_0) traçons une droite de coefficient angulaire $f(x_0, y_0)$; par un point quelconque (x_1, y_1) de cette droite traçons une droite de coefficient angulaire $f(x_1, y_1)$; par un point quelconque (x_2, y_2) de la dernière droite traçons une nouvelle droite ayant pour coefficient angulaire $f(x_2, y_2)$, etc. Considérons maintenant une suite de lignes brisées **d'Euler** $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ passant par le point (x_0, y_0) et telles que la longueur du plus grand maillon de la ligne L_k tende vers zéro pour $k \rightarrow \infty$. Désignons par φ_k la fonction ayant pour graphe la ligne brisée L_k . Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$ jouissent des propriétés suivantes :

1. elles sont définies sur le même segment $[a, b]$,
2. elles sont uniformément bornées,
3. elles sont équicontinues.

En vertu du théorème **d'Arzelà**, de la suite $\{\varphi_k\}$ on peut extraire une suite uniformément convergente, soit $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, \dots$

Posons

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x)$$

. Il est clair que $\varphi(x_0) = y_0$. Il reste à vérifier si la fonction φ satisfait sur $[a, b]$ à l'équation différentielle donnée. Pour cela il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \epsilon,$$

à condition que la différence $|x'' - x'|$ soit suffisamment petite. Pour la démonstration de ce fait il faut d'abord montrer que pour k assez grand on a

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi^{(k)}(x')) \right| < \epsilon,$$

pourvu que la différence $|x'' - x'|$ soit suffisamment petite.

Comme la fonction f est continue dans le domaine G , à tout $\epsilon > 0$ on peut faire correspondre $\eta > 0$ tel que

$$f(x', y') - \epsilon < f(x, y) < f(x', y') + \epsilon (y' = \varphi(x')),$$

si

$$|x'' - x'| < 2\eta \quad \text{et} \quad |y'' - y'| < 4M\eta.$$

L'ensemble des points $(x, y) \in G$ vérifiant ces deux inéquations représente un rectangle Q . Soit maintenant K tellement grand que pour tout $k > K$ on ait

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 4\eta$$

et tous les maillons de la ligne brisée L_k , aient la longueur inférieure à η . Alors pour $|x - x'| < 2\eta$ toutes les lignes brisées **d'Euler** $\varphi^{(k)}$ avec $k > K$ seront situées entièrement à l'intérieur de Q .

Soient, d'autre part, $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ les sommets de ligne brisée L_k et soit

$$a_0 \leq x' < a_1 < a_2 < \dots < a_n < x'' \leq a_{n+1}$$

(pour fixer les idées on suppose $x'' > x'$; pour $x'' < x'$ toutes les considérations sont analogues). Alors pour les fonctions $\varphi^{(k)}$ correspondantes on a :

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') &= f(a_0, b_0)(a_1 - x'), \\ \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) &= f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) &= f(a_n, b_n)(x'' - a_n).\end{aligned}$$

Pour $|x'' - x'| < \eta$ de ces égalités on obtient :

$$\begin{aligned}[f(x', y') - \epsilon](a_1 - x') &< \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \epsilon](a_1 - x'), \\ [f(x', y') - \epsilon](a_{i+1} - a_i) &< \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) < [f(x', y') + \epsilon](a_{i+1} - a_i); \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ [f(x', y') - \epsilon](x'' - a_n) &< \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', y') + \epsilon](x'' - a_n).\end{aligned}$$

En additionnant ces inégalités membre à membre, on obtient

$$[f(x', y') - \epsilon](x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \epsilon](x'' - x'),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Des sous-suites différentes de lignes brisées **d'Euler** peuvent converger vers des solutions différentes de l'équation (2.1). On en conclut que la solution de l'équation $y' = f(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0) n'est pas en général unique.

□

Chapitre 3

Opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs agissant dans un espace normé, on peut dégager une classe importante d'opérateurs dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs dans un espace de dimension finie.

3.1 Opérateurs compacts

Définition 3.1. [2]

Un opérateur linéaire A agissant dans un espace normé X est dit compact s'il transforme tout ensemble borné $Q \subset X$ en un ensemble précompact .

Exemple 3.1. Opérateur intégral de Fredholm

Soit $q(s, t)$ une fonction complexe continue de deux variables réelles s et t variant dans un même intervalle $[a, b]$. L'intégrale

$$y(t) = \int_a^b q(s, t) x(s) \, ds, \quad (3.1)$$

pour toute fonction $x(t)$ continue sur $[a, b]$, représente une fonction définie toujours sur $[a, b]$ et continue donc, il est évident que la formule (3.1) définit un opérateur linéaire $y = Ax$ agissant dans l'espace $C[a, b]$ de toutes les fonctions complexes continues sur $[a, b]$, avec $\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$; il s'appelle opérateur de **Fredholm**. Il résulte de l'inégalité

$$|y(t)| \leq \sup |x(s)| \int_a^b |q(s, t)| ds$$

que l'opérateur A est borné et que sa norme ne dépasse pas le nombre

$$\sup_t \int_a^b |q(s, t)| ds.$$

Montrons que l'opérateur A est compact. Supposons que la fonction $x(t)$ parcourt un ensemble borné $Q \in C[a, b]$, de sorte que par exemple, $\|x\| = \sup |x(t)| \leq r$.

Alors, pour $|t' - t''| \leq \delta$, on a

$$|y(t') - y(t'')| \leq \sup |x(s)| \int_a^b |q(s, t') - q(s, t'')| ds \leq \sup |x(s)| \omega_q(\delta) (b - a),$$

où

$$\omega_q(\delta) = \sup_{|t' - t''| \leq \delta} |q(s, t') - q(s, t'')|.$$

On en déduit l'estimation suivante pour l'oscillation $\omega_q(\delta)$ de la fonction $y(t)$:

$$\omega_q(\delta) \equiv \sup_{|t' - t''| \leq \delta} |q(s, t') - q(s, t'')| \leq r \omega_q(\delta) (b - a),$$

car toute fonction continue sur un compact est uniformément continue, cette estimation ne dépend pas du choix de la fonction $x(t) \in Q$; comme la fonction $q(s, t)$ est continue, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_q(\delta) = 0,$$

donc aussi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_y(\delta) = 0.$$

Ainsi, l'ensemble $AQ \subset C^s(a, b)$ est uniformément borné et équicontinu; d'après le théorème **d'Arzelà** (2.18) l'ensemble AQ est précompact pour tout $Q \in C[a, b]$ borné; l'opérateur A est donc compact, ce qu'il nous fallait démontrer.

Lemme 3.1. (*de Riesz*). Soit F un sous-espace fermé d'un espace vectoriel normé X et tel que $F \neq X$. Il existe un vecteur $y \in X$ tel que $\|y\| = 1$ et $\|y - x\| \geq 1/2$ pour tous $x \in F$.

Démonstration.

Choisissons un $y_0 \in X - F$; soit $d = \inf \|y_0 - x\|$ pour $x \in F$. Si l'on avait $\inf \|y_0 - x\| = 0$, il existerait une suite $x_n \in F$ en tendant vers y_0 ; F étant fermé, on aurait alors $y_0 = \lim x_n \in F$ en contradiction avec l'hypothèse. Donc $d > 0$. Trouvons un vecteur $x_0 \in F$ tel que $\|y_0 - x_0\| < 2d$. Posons $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. Nous avons $\|y\| = 1$; de plus, $x_0 + x\|y_0 - x_0\| \in F$ pour tout $x \in F$ et,

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \left\| \frac{y_0 - x_0 - x\|y_0 - x_0\|}{\|y_0 - x_0\|} \right\| \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer .

□

En appliquant ce lemme pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. (*F. Riesz*)

La boule unité d'un espace normé X de dimension infinie n'est pas un ensemble précompact.

Démonstration.

nous allons construire, dans la boule unité de l'espace X , une suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ des vecteurs éloignés l'un et l'autre d'une distance strictement supérieure à $1/2$. Comme une telle suite n'admet, évidemment, aucune sous-suite de Cauchy, la boule $S = \{x : \|x\| \leq 1\}$ n'est pas un ensemble précompact. Pour x_1 nous choisissons n'importe quel vecteur $x_1 \in S, \|x_1\| = 1$. Ses multiples λx_1 forment un sous-espace fermé $F_1 \subset X$. D'après le lemme (3.1) il existe un vecteur $x_2 \in S, \|x_2\| = 1$, tel que $\|x_2 - x\| > 1/2$ pour tout $x \in F_1$; en particulier $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Les combinaisons linéaires $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ forment un sous-espace fermé $F_2 \subset X$. D'après le lemme (3.1) il existe un vecteur $x_3 \in S, \|x_3\| = 1$, tel que $\|x_3 - x\| > 1/2$ pour tout $x \in F_2$; en particulier $\|x_3 - x_1\| > 1/2, \|x_3 - x_2\| > 1/2$. En

continuant nous aboutissons à suite $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ de sous-espace de dimension finie dont chacun est une partie propre de X (vu que ce dernier est de dimension infinie) et à une suite $x_1, x_2, \dots$ des vecteurs avec les distances relatives $|x_m - x_n| > 1/2$. $\square$

Propriétés 3.1.

- a) *Dans un espace de dimension finie, tout opérateur linéaire est compact.*
- b) *L'opérateur identique I dans un espace de dimension infinie n'est pas compact, car il transforme la boule unité en lui même, i.e. en un ensemble n'est pas précompact d'après théorème (3.1).*

3.2 Opérations sur les opérateurs compacts

Propriétés 3.2.

- 1) *La somme de deux opérateurs compacts A_1 et A_2 est un opérateurs compact.*
En effet, soient $Q \in X$ un ensemble borné et $\{x_n\}$ une suite de points de Q . L'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{x_n\}$ une sous-suite $\{x'_n\}$ de façon que $\{A_1 x'_n\}$ soit une suite de Cauchy, puis on peut extraire une sous-suite encore plus raréfiée $\{x''_n\}$ de façon que $\{A_2 x''_n\}$ soit une suite de Cauchy; alors $\{(A_1 + A_2)x''_n\}$ s'avère, évidemment, une suite de Cauchy, ce qu'il nous fallait.
- 2) *Le produit d'un opérateur compact A par n'importe quel opérateur borné B (l'ordre des opérateurs n'ayant pas d'importance) est un opérateur compact.*

En effet, soit $Q \in X$ un ensemble borné; alors BQ est borné également, donc ABQ est précompact; ainsi, l'opérateur AB est compact.

D'autre part, l'opérateur B transforme toute suite de Cauchy en une suite de Cauchy, et par conséquent, l'ensemble précompact AQ en un ensemble précompact; l'opérateur BA est donc compact lui aussi.

3) En particulier, si l'opérateur compact A est inversible, l'espace X est de dimension finie.

En effet; l'opérateur $I = AA^{-1}$ est compact d'après 2), et l'on peut appliquer propriété(3.1-b).

4) Si, pour tout $n = 1, 2, \dots$ on a A_n compact, et si un opérateur A est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0,$$

alors A est un opérateur compact.

En effet, pour un $\epsilon > 0$ donné, l'ensemble $A_n Q$ (où Q est un ensemble borné quelconque inclus dans une boule $|x| \leq r$ et $\|A - A_n\| < \epsilon$) est un ensemble précompact qui représente un ϵ -réseau pour l'ensemble AQ . Il en résulte que AQ est précompact et l'opérateur A est compact.

Définition 3.2. $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé, on dit que la suite (x_n) de X converge faiblement vers x si pour tout

$$x^* \in X^*, x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x).$$

Cette converge sera noté ω :

$$x_n \xrightarrow{\omega} x.$$

Théorème 3.2. Soit T un opérateur appartient à l'espace des opérateurs linéaire, continus, définit de X dans F ($T \in \mathcal{L}(X, F)$), et si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ alors

$$Tx_n \xrightarrow{\omega} Tx.$$

(la démonstration se trouve dans [4])

3.3 Caractérisation des opérateurs compacts

Théorème 3.3. Si T est compact et $x_n \xrightarrow{\omega} x$, alors (Tx_n) converge vers Tx au sens de la norme. (la démonstration se trouve dans [5])

Théorème 3.4. *Si de plus F est un espace de **Hilbert**, T est compact si et seulement si pour toute suite (x_n) converge faiblement vers x , alors la suite (Tx_n) converge fortement vers Tx . (la démonstration se trouve dans [4])*

3.4 Spectre d'un opérateur compact

Définition 3.3. Un opérateur linéaire borné A agissant dans un espace de Banach X appartient à l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ de tous les opérateurs linéaire bornés agissant dans l'espace X . En tant qu'élément de cette algèbre il possède un spectre S_A qui l'ensemble des nombres complexes λ pour lesquels $A - \lambda I$ n'a pas d'opérateur inverse borné.

Lemme 3.2. *Pour un opérateur compact dans un espace de **Banach** X , toute valeur propre généralisée non nulle est une valeur propre ordinaire.*

Démonstration.

Soit λ une valeur propre généralisée de l'opérateur compact A , de sorte qu'il existe une suite de vecteurs $x_1, x_2, \dots, |x_n| \geq C > 0$ telle que $(A - \lambda I)x_n = q_n \rightarrow 0$. En vertu de la précompacité de l'ensemble $\{Ax_n\}$, il existe une suite de numéros $n_1, n_2, \dots$ telle que les vecteurs Ax_{n_k} ont une limite dans l'espace X ; posons $\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k}$. Alors la suite

$$\lambda x_{n_k} = Ax_{n_k} - q_{n_k}$$

tend elle aussi vers z ; en particulier, $|z| = \lim |\lambda x_{n_k}| \geq |\lambda|C > 0$. Ensuite, vu que $\lambda \neq 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = z/\lambda, \quad z = \lim Ax_{n_k} = (1/\lambda)Az;$$

on aboutit à l'égalité $Az = \lambda z$ qui démontre le lemme □

Lemme 3.3. *A l'extérieur de tout cercle $|\lambda| \leq c, c > 0$, un opérateur compact A ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes.*

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ des valeurs propres distinctes de l'opérateur A , avec $|\lambda_n| \geq c$. Soient

$e_1, e_2, \dots$ les vecteurs propres respectifs : $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \dots$. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants, l'enveloppe linéaire L_{n-1} des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ est donc un sous-espace propre de l'enveloppe linéaire L_n des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$. D'après le lemme (3.1), il existe un vecteur $h_n \in L_n$ tel que $|h_n| = 1$ et $|h_n - x| > 1/2$ pour tout $x \in L_{n-1}$. On peut noter $h_n = x_0 + \alpha e_n$, où $x_0 \in L_{n-1}$. Alors on a

$$Ah_n = A(x_0 + \alpha e_n) = Ax_0 + \alpha \lambda_n e_n = Ax_0 + \lambda_n(h_n - x_0) = (Ax_0 - \lambda_n x_0) + \lambda_n h_n.$$

Etant donné que $Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0 \in L_{n-1}$, on en tire

$$|Ah_n - Ah_{n-1}| = |(Ax_0 - \lambda_n x_0 - Ah_{n-1}) + \lambda_n h_n| = |\lambda_n| \left| h_n - \frac{1}{|\lambda_n|} (Ah_{n-1} + \lambda_n x_0 - Ax_0) \right| \geq |\lambda_n| \frac{1}{2},$$

et l'on voit qu'il est impossible d'extraire une sous-suite convergente de la suite Ah_n . Ceci contredit la compacité de l'opérateur A .

Le lemme est démontré. □

3.5 Application

Alternative de Fredholm. Pour un μ complexe donné, deux possibilités peuvent se présenter : ou bien l'équation $(I - \mu A)x = y$ possède une solution unique par rapport à x pour tout $y \in X$, ou bien l'équation homogène $(I - \mu A)x = 0$ admet une solution non nulle.

Démonstration.

Il est évident que pour $\mu = 0$ c'est la première possibilité qui se réalise. Soit donc $\mu \neq 0$ et $\lambda = 1/\mu$; l'équation $(I - \mu A)x = y$ est alors équivalente à l'équation $(A - \lambda I)x = -\lambda y$. Si λ n'appartient pas au spectre de l'opérateur A , alors $A - \lambda I$ est inversible, et c'est le premier cas qui a lieu ; si λ appartient au spectre de A , alors λ est une valeur propre de A car $\lambda \neq 0$, et on a le deuxième cas.

Ainsi, l'alternative de **Fredholm** est équivalente au fait que, pour l'opérateur A , tout

nombre $\lambda \in S_A$ non nul est une valeur propre. Nous avons vu que c'est bien la propriété des opérateurs compacts ; mais il existe une plus large classe d'opérateurs possédant cette propriété (par exemple, les opérateurs dont une puissance quelconque est compact).

□

Conclusion

On vient de voir que la notion de compacité joue un rôle assez important pour :

- Calcul de l'extremum ;
- Théorie des opérateurs ;
- Résolution des équations différentielles.

Bibliographie

- [1] G. Chilov, *Analyse mathématique fonctions d'une variable*, Mir.Moscou.(Tome 1).1973
- [2] G. Chilov, *Analyse mathématique fonctions d'une variable*, Mir.Moscou.(Tome 2).1973
- [3] Claude Rerge, *Espaces topologiques fonction multivoques*, Dunod,Paris, 1959.
- [4] Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*, Dunod, Paris, 2011.
- [5] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* , Mir.Moscou, Décembre 1973.
- [6] Seymour Lipshutz, *Topologie cours et problèmes*, Louis-Jean,1981
- [7] Léonard Todjihounde, *Topologie élémentaire pour la licence de mathématiques*, Cépaduès, janvier 2013.