

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار ثايجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT Sciences de la Matière



## ***Mémoire de Master***

**Domaine : Sciences de la matière**  
**Filière de sciences**  
**Option : physique Appliquée**

**Présente Par :**  
**Amieur Maria**

### **THEME**

---

**Etude de La correction relativiste de l'atome d'hydrogène  
dans l'espace non commutatif.**

---

*Soutenu publiquement devant le jury composé de :*

<b><i>Ben Makhlouf Abdennour</i></b>	<b>MCB</b>	<b>Président</b>
<b><i>Souleh Kouider</i></b>	<b>MAA</b>	<b>Examineur</b>
<b><i>Mahboub Mohamed Fauzi</i></b>	<b>MAA</b>	<b>Examineur</b>
<b><i>Seffaidjamel</i></b>	<b>MAA</b>	<b>Rapporteur</b>

**Année Universitaire 2017- 2018**



# Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Allah, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous remercions l'ensemble des enseignants, qui nous ont apporté leur aide et qui ont permis grâce à leur contribution à l'élaboration de ce mémoire.

Nous remercions en particulier notre encadreur

*Seffaidjamel,*

pour nous avoir honorés de son aide dans la direction de ce travail, pour sa confiance et ses conseils ainsi que ses motivations qui ont été pour nous un précieux encouragement.

Ainsi pour l'inspiration, *Ben Makhlouf Abdennour*

*et Souleh Kouider et Mahboub Mohamed Fauzi aux membres de jury*

Nos plus vifs remerciements s'adressent aussi à tout le cadre administratif Université Amar Telidji , "Département Sciences de la Matière", Ainsi que .....

# اهداء

أولا و قبل كل شيء الحمد و الشكر و الثناء لله الذي وفقني لهذا و رحمننا  
بالنبي الكريم محمد صلى الله عليه و سلم.  
أود أن أهدي جهدي المتواضع إلى من ربنتي صغيرة، و نلت من أخلاقها  
و قيمها كثيرا ، و تعلمت من صبرها دروسا طويلا ...أمي الغالية رعاها  
الله .

إلى صاحب القلب الطيب ... أبي الغالي رعاه الله .  
إلى اخواني مصدر عزي حفظهم الله ورعاهم كل باسمه محمد خالد  
محمود.

إلى حبيبات قلبي كلثوم مروة اكرام  
إلى كل عائلتي واقاربي  
إلى كل من ساهم في دعمي في مشواري الدراسي وخاصة مرحلة  
الماستر لا يسعني ذكر الاسماء لكم مني كل الشكر والتقدير والاحترام .

إلى أعز الصديقات و أروعهن تعاملنا و تعاطفنا

إلى حبيبات قلبي بالإقامة الجامعية

مارية



# Sommaire

Introduction:.....	1
<b>Chapitre I: mécanique quantique relativiste</b>	
I.1 Relativité restreint:.....	5
I.2 Transformations de Lorentz.....	5
I.3 Postulat :       6	
I.4 Relativité et formalisme quadridimensionnel.....	7
I.5 Mécanique Quantique et Postulats. ....	10
I.6 Principe de correspondance.....	12
I.7 Equation de Klein-Gordon.....	13
I.8 Couplage minimal au champ électromagnétique.....	14
<b>Chapitre II : solution de l'équation de Klein-Gordon pour un potentiel coulombien</b>	
II.1 Solutions d'équation de Klein-Gordon pour une particule libre.....	16
II.2 Application aux atomes pioniques :.....	18
<b>Chapitre III : Géométrie Non Commutatif</b>	
III.1 La géométrie non-commutative:.....	24
III.1.1 Espace-temps non commutatif.....	24
III.2 La quantification de Weyl et le produit de Moyal.....	25
III.2.1 La quantification de Weyl.....	25
III.2.2 Le produit de Moyal (Produit star).....	26
III.3 Reformulation des équations de Maxwell :.....	27
<b>Chapitre IV : La correction relativiste dans l'espace non commutatif de l'atome d'hydrogène</b>	
IV.1 L'équation de Klein-Gordon dans l'espace non commutative.....	33
VI.2 La solution de l'équation de Klein –Gordon dans l'espace non commutative.....	36
Conclusion :.....	40
Référence :.....	42
1 Rappel des lois de l'électromagnétisme.....	45
LE TENSEUR CHAMP ELECTROMAGNETIQUE . ....	46
Annexe	

# **Introduction**

## Introduction:

En physique théorique, la mécanique quantique relativiste est une théorie qui unifie les postulats de la mécanique quantique et le principe de relativité restreinte afin de décrire la dynamique quantique d'une particule relativiste. Cette théorie décrit le monde physique à l'échelle atomique et subatomique dans l'un espace-temps (Minkowskien) dans lequel évoluent les champs de matières; l'unification de la mécanique quantique et la théorie de la relativité restreinte a abouti à la construction de la théorie quantique des champs, et les théories de jauge modernes, qui ont permis d'unifier les trois interactions fondamentales faible forte et Electromagnétique dans le cadre du modèle standard.

La mécanique quantique relativiste a ainsi débuté avec l'arrivée de l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière décrit une particule relativiste sans spin et présente quelques difficultés d'interprétation notamment une densité de probabilité non positive. En 1927, Oskar Klein et Walter Gordon a introduit l'équation qui porte leurs nom. Cependant, les physiciens faisant toujours face à d'autres problèmes, ils ont développée la théorie quantique des champs, dans laquelle la seconde quantification, où les champs obtenaient le statut d'opérateurs (contrairement à la position et la quantité de mouvement pour la première quantification), prend toute son importance.

L'étude de la mécanique quantique relativiste dans l'espace non commutative peut être réalisée de deux manières différentes: via le produit Moyal sur l'espace de l'ordinaire, ou redéfinir la théorie des champs sur un espace d'opérateur de coordonnées qui est intrinsèquement non-commutatif [1-2]. L'équivalence entre les deux approches a été décrites dans les références [3-4]. Dans la méthode habituelle, nous introduisons la non-commutativité au moyen de coordonnées non commutatives position et impulsion  $(x, p)$  satisfaisant les relations de commutation suivantes  $[x_i, x_j] = i\theta_{ij}$ ,  $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ ,

$$[p_i, p_j] = 0, i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

## *Introduction*

---

où  $\theta_{ij} = \epsilon_{ij}\theta$ , où  $\epsilon_{ij}$  est le symbole de Levi-Civita et  $\theta$  est un paramètre qui permet la non commutativité des coordonnées. Dans l'espace non-commutatif le produit ordinaire est remplacé par le produit Moyal

$$f(x) \star g(x) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \theta^{jk} \partial_j^{(1)} \partial_k^{(2)} \right\} f(x_1) g(x_2) \Big|_{x_1=x_2=x}$$

Où  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions différentiables arbitraires.

Au cours des dernières années, il y a un intérêt croissant pour trouver les solutions exactes de l'équation de Klein-Gordon (KG) [5-6], et les valeurs propres d'énergie de cette équation ont été présentées par Scarf [7], Rosen-Morse [8], Hulthen [9], Wood-saxon [10, 11], Posch-Teller [12]. Pour avoir les effets non-commutatifs en plus évidents sur les phénomènes naturels en utilisant de simples systèmes de mécanique quantique, par exemple l'atome d'hydrogène [13, 14, 15]. Dans l'espace non-commutatif on s'attend à la levée de la dégénérescence de la ligne spectrale, on peut donc dire que la non-commutativité joue un rôle de spin.

Dans le cadre de la non-commutativité, la situation est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus exactement. En conséquence, la plupart des résultats disponibles sont basés sur la théorie des perturbations [13-16]. Cela implique qu'un système physique simple dans l'espace commutatif peut être changé en une théorie complexe dans un cadre non-commutatif.

Dans ce travail, nous présentons globalement une contribution importante à l'approche de la mécanique quantique relativiste dans l'espace ordinaire et une généralisation de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace non commutatif, puis on cherche une solution pour cette dernière équation généralisée à l'espace non commutatif pour l'atome d'hydrogène.

Ce mémoire est composé de 2 parties principales :

➤ La première partie concerne le cas commutatif, qui contient deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous présenterons l'introduction à la relativité restreinte, les lois de transformation entre référentiels inertiels et les postulats de la relativité restreinte et le formalisme quadridimensionnel, le principe de

## *Introduction*

---

correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre,  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , ce qui conduit à l'équation de Klein-Gordon. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la résolution de l'équation de Klein-Gordon.

➤ La deuxième partie est réservée au cas de la géométrie non commutative. Elle est scindée en deux chapitres. Dans le troisième chapitre, nous présenterons l'espace non commutatif, Le produit de Moyal-Weyl, et la déformation de l'opérateur de la dérivation à partir de l'application de la quantification de Weyl sur la théorie de jauge, qui permet d'avoir une déformation sur l'équation de Maxwell. le quatrième chapitre, est réservé à la formulation de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace non commutatif et leur solution analytique.

A la fin, nous allon présenté nos conclusions, qu'une appendice consacré à certains calculs.

# Chapitre I: mécanique quantique relativiste

# Chapitre I: mécanique quantique relativiste

## I.1 Relativité restreinte:

Un observateur lié à un référentiel inertiel décrit un événement (par exemple l'émission d'un photon dans la désintégration  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  par ses coordonnées d'espace temps  $(t, \vec{x})$ . Considérons 2 événements successifs  $(t_1, \vec{x}_1); (t_2, \vec{x}_2)$  (l'émission du photon et sa détection dans un compteur). On définit l'intervalle entre ces événements [17]:

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \quad (1.1)$$

Le fait supposer que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels se traduit par considérer l'intervalle  $(\Delta s)^2$  comme un invariant (ici nul). Il est le même dans tous les référentiels. On notera

$x^\mu = (ct, \vec{x})$  un point de l'espace de Minkowski. L'expression du  $(\Delta s)^2$  permet à munir cet espace par la métrique [17]

$$g_{\mu\nu} = -\text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.2)$$

de sorte que  $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu}(x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$ . On définit trois types d'intervalles selon  $(\Delta s)^2$

$(\Delta s)^2 > 0$  intervalle de genre temps

$(\Delta s)^2 < 0$  espace

$(\Delta s)^2 = 0$  lumière

## I.2 Transformations de Lorentz

La relativité restreinte postule que les lois de transformation entre référentiels inertiels s'écrivent sous la forme [17]

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (1.3)$$

Où  $\Lambda_\nu^\mu$  est une matrice 4x4 constante. En exprimant l'invariance de l'intervalle entre deux événements on obtient la contrainte [17]

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\nu^\mu \Lambda_\beta^\mu = g_{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

Le groupe des transformations linéaires satisfaisant cette contrainte est appelé groupe de Poincaré.

**1.3 Postulat :**

Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels.

Ce postulat a pour conséquence que la vitesse de la lumière est une vitesse universelle. On posera  $c = 1$  dans la suite.

On considère un espace à quatre dimensions  $x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$

Notées aussi  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  on dénotera les coordonnées et autres grandeurs dans un autre référentiel.

Les transformations de Galilée sont définies par [18]

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \\ \mathbf{t}' = \mathbf{t}' \end{cases} \quad (1.5)$$

Elles ne sont valables que pour des vitesses  $|\mathbf{v}| \ll c$ .

Considérons deux points  $A$  et  $B$ . On émet un signal lumineux du point  $A$  au temps  $t$  qui arrive en  $B$  au temps  $t'$ . On doit alors avoir

$$|c(t - t')| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

ou encore

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2 = 0 \quad (1.6)$$

Cette quantité invariante est appelée intervalle d'espace-temps.

Plus généralement, on notera cette grandeur [18]

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 = \eta dx \quad (1.7)$$

en définissant le tenseur métrique  $\eta$  par

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

En adoptant la convention de sommation sur les indices répétés, on note

Encore

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.9)$$

Cherchons maintenant la loi de transformation des coordonnées

$$x \rightarrow x'^\mu = f^\mu(x^\nu) = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \mathbf{a}^\mu \quad (1.10)$$

On a

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \\ &= \eta_{\rho\sigma} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

d'où

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \quad (1.11)$$

On a

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

## 1.4 Relativité et formalisme quadridimensionnel

La similitude entre les notions de temps et d'espace nous suggère d'adopter un formalisme quadridimensionnel. Par exemple, le vecteur de position espace-temps  $x$  est représenté par ses composantes contravariantes  $x^\mu$  (indicesupérieur) [19]

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x_0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x}) \quad (1.12)$$

En général, dans un espace vectoriel à  $D$  dimensions, il est possible de choisir  $D$  vecteurs de base  $e_\mu$  et de représenter un vecteur  $A$  à partir de ses composantes (contravariantes)  $A^\mu$ , parallèles aux  $e^\mu$ . Alors le vecteur  $A$  s'écrit dans un espace à quatre dimensions (4D) [19]

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu = A^\mu e_\mu \quad (1.13)$$

La deuxième égalité utilise la convention d'Einstein où un indice répété contravariant covariant (les composantes covariantes sont en indice inférieur et sont définies plus bas) dans un terme réputé être sommé sur toutes ses valeurs possibles.

Le produit scalaire des vecteurs  $A$  et  $B$  prend la forme [19]

$$A \cdot B = A^\mu e_\mu \cdot B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

Où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (1.15)$$

est appelé le tenseur métrique ou simplement la métrique. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu \quad (1.16)$$

Et donc

$$A \cdot B = A^{\mu} B^{\nu} e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (1.17)$$

Pour le cas des quadri-vecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisée d'un vecteur de position espace-temps  $x$  est reliée à l'intervalle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x^{\mu} x^{\nu} e_{\mu} \cdot e_{\nu} \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

où dans le membre de droite  $x$  est la composante du quadri-vecteur le long de l'axe des  $x$ . Ainsi la norme des vecteurs de base est

$$e_{\mu} \cdot e_{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ -1 & \text{si } \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.19)$$

et le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composantes covariantes (indice inférieur) sont des projections orthogonales de  $A$  sur les vecteurs de base  $e_{\mu}$ . Par exemple,

$$e_{\mu} \cdot A \equiv A_{\mu} \quad (1.20)$$

(notez l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_{\mu} &\equiv e_{\mu} \cdot A = e_{\mu} \cdot A^{\nu} e_{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \cdot A^{\nu} \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  et son inverse  $g^{\mu\nu}$  coïncident

$$g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

puisque

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (1.22)$$

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \quad (1.23)$$

et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \quad (1.24)$$

Considérons les composantes contravariantes du quadrivecteur de position  $x$

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (1.25)$$

les composantes covariantes de ce quadrivecteur sont alors

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= (x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= g_{\mu\nu} x^{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

et donc

$$x^{\mu} = (x^0, \mathbf{x})$$

$$x_{\mu} = (x^0, -\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

Remarque 1

Toute quantité qui a la forme

$$a \cdot b = a^{\mu} b_{\mu} \quad (1.27)$$

est un invariant de Lorentz si  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de Lorentz, c'est-à-dire que le produit scalaire  $a \cdot b$  n'est pas affecté par une transformation de Lorentz et donc à la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels. [19]

Les notions d'énergie et d'impulsion sont aussi intimement liées (tout comme l'espace et le temps) en relativité restreinte. On peut y définir le quadrivecteur énergie-impulsion (composantes contravariantes),

$$p^{\mu} = (E, P_x, P_y, P_z) \quad (1.28)$$

Où  $E = \gamma m_0 c^2$  est l'énergie totale et  $p_i = \gamma m_0 v_i$  ( $i = x, y, z$  ou  $1, 2, 3$ ) sont les impulsions. L'énergie cinétique s'obtient par

$$\begin{aligned} K &= E - m_0 c^2 \\ &= (\gamma - 1)m_0 c^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

(rappelons qu'on utilise le système d'unités naturelles où  $c = 1$ ).

Par ailleurs, la grandeur de  $p$  est un invariant de Lorentz et s'écrit comme

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \\ &= (p^0)^2 - (\mathbf{p}^1)^2 - (\mathbf{p}^2)^2 - (\mathbf{p}^3)^2 \\ &= E^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= m_0^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Où  $m_0$  est la masse au repos de la particule soit un invariant de Lorentz. On a donc finalement

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \quad (1.31)$$

ou

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_0^2 \quad (1.32)$$

## 1.5 Mécanique Quantique et Postulats.

Les phénomènes de la physique quantique exhibent deux aspects fondamentaux, en Rupture avec ceux de la physique classique :

– le caractère discret de certaines quantités physiques (énergie, moment cinétique,..) lié à l'existence d'une nouvelle grandeur fondamentale, ayant les dimensions d'une action [19]

$$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{kg.m}^2/\text{s}$$

(Exemples : spectre d'énergie de "quanta"  $\hbar\omega$ ,  $\omega$  une fréquence caractéristique du système ; moment cinétique  $= \hbar \times$  générateur infinitésimal des rotations  $\Leftrightarrow$  spectre  $= \hbar \times$  entier ou demi-entier...)

– le caractère probabiliste des observations, qui force à abandonner le déterminisme de la physique classique.

Le formalisme de la Mécanique Quantique rend compte de ces phénomènes en se basant sur les postulats suivants [19]:

- les états (“purs”) d’un système sont décrits par les rayons d’un espace de Hilbert  $H$ , c’est-à-dire par les vecteurs de  $H$  à un facteur non nul près (ou encore par les vecteurs normés à une phase près). Ces vecteurs sont notés  $|\psi\rangle$ , ou encore, selon la notation de Dirac  $|\psi\rangle$  (“ket”) et leur conjugué,  $\langle\psi|$  (“bra”), avec un produit scalaire  $\langle\psi|\varphi\rangle$ . Un tel vecteur dépend du temps :  $|\psi(t)\rangle$ . Ainsi, pour une particule sans degré de liberté supplémentaire (spin etc), dans l’espace à trois dimensions, [19]

$$H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

Par opposition à un état pur, un mélange est représenté par une matrice densité...

- Les quantités physiquement observables (ou simplement “observables”) sont des opérateurs auto-adjoints sur  $H$ ,  $A = A^\dagger$

En général, l’opérateur est non borné, (cf  $A = \hat{x}$  dans  $H = L^2(\mathbb{R})$ ) et défini seulement sur un sous-ensemble  $D(A)$  dense dans  $H$ .

- Dans une mesure de  $A$ , on n’observe que les valeurs  $\alpha \in \text{Spec}(A)$ . On notera  $P_I$  le projecteur spectral sur l’intervalle  $I = [\alpha_1, \alpha_2]$ .
- La probabilité de mesurer  $\alpha \in I$  dans l’état  $|\psi\rangle$  (c’est-à-dire le pourcentage d’occurrence de la valeur  $\alpha$  parmi celles obtenues dans un grand nombre de mesures répétées sur des systèmes identiques, préparés dans le même état) est

$$P(I) = \frac{\langle\psi|P_I|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

La valeur moyenne de  $A$  est donc  $\langle A \rangle = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ .

Après mesure de la valeur  $a \in I$  pour  $A$ , il y a “réduction du paquet d’onde”

$$\psi \mapsto P_I \psi.$$

- Parmi les observables, l’opérateur hamiltonien  $H$  joue un rôle privilégié : il régit l’évolution dans le temps selon l’équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1.33)$$

## 1.6 Principe de correspondance

Ces postulats sont complétés par le “principe de correspondance” qui suggère ce que doit être l’opérateur  $A$  du formalisme quantique, étant donné son analogue classique.

Ce principe fait aussi appel à l’observation que dans le passage mécanique classique  $\rightarrow$  mécanique quantique, on passe du crochet de Poisson au commutateur [19]

$$\{f, g\} \rightarrow [\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar \{f, g\}$$

En particulier on a le commutateur canonique entre les opérateurs  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  de position et d’impulsion, soit [19]

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

(opérateurs conjugués). Noter cependant que ce principe de correspondance n’est pas sans ambiguïté : il ne dit rien sur l’ordre des opérateurs  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  à adopter pour passer d’une fonction  $f(p, q)$  à sa version quantique  $\hat{f}(\hat{q}, \hat{p})$ . On omettra l’indice “op” dans la suite chaque fois que cela ne prêterait pas à confusion.

Notons  $|q\rangle$  l’état propre de l’opérateur  $\hat{q}$  de valeur propre  $q$

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \int dq |q\rangle\langle q| = \text{Id}.$$

À la description d’un état par un vecteur normalisé  $\psi$  (à une phase près), on peut préférer celle par sa fonction d’onde  $\psi(q)$ , obtenue par produit scalaire  $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ .

L’action de  $\hat{p}$  sur  $\psi$  se traduit en un opérateur différentiel sur  $\psi(q)$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \text{ i.e. } \langle q|\hat{p}\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi(q)$$

de telle sorte que  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$  est bien vérifiée. En particulier, pour les états propres notés  $|p\rangle$  de  $\hat{p}$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

on a les fonctions d’onde  $\psi_p(q) = \langle q|p\rangle$  satisfaisant

$$\langle q|\hat{p}|p\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

d'où

$$\langle q|p \rangle = \psi_p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot q\right),$$

(avec une normalisation conventionnelle). Toutes les considérations précédentes s'étendent bien sûr à des vecteurs positions et impulsions à  $d$  dimensions euclidiennes ou minkowskiennes. Résumons donc le principe de correspondance, en notant désormais les coordonnées de positions par  $x = x^1, x^2, x^3$  ou  $(x, y, z)$

$$\text{Energie } E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{Impulsion } P^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ou en notations minkowskiennes,

$$p^\mu \mapsto i\hbar \partial^\mu = (i\partial^0, -i\nabla).$$

## 1.7 Equation de Klein-Gordon

Le principe de correspondance appliqué à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste,  $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$  conduit à l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde. Note maintenant  $\psi(x, t)$  [19]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -\hbar^2 \frac{\Delta}{2m} + V(x) \right) \psi(x, t) \quad (1.34)$$

(avec  $\Delta = \nabla^2$  le laplacien).

De la même façon, il est suggéré d'appliquer le principe de correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre,  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ , ce qui conduit à l'équation de Klein-Gordon [20]

$$\left( \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \Delta + m^2 c^2 \right) \psi(x, t) = 0 \quad (1.35)$$

$\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  : le d'Alembertien c'est le laplacien dans la géométrie minkovskienne

A partir de maintenant, nous adopterons unités telles que  $\hbar = c = 1$ , si bien que nous écrirons l'équation de Klein-Gordon libre sous la forme [19]

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad (1.36)$$

## 1.8 Couplage minimal au champ électromagnétique

On peut écrire aisément une équation de Klein-Gordon couplée au champ électromagnétique si on admet le principe de couplage minimal, qui consiste à remplacer les dérivées  $\partial_\mu$  par une dérivée covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge) [19]

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (1.37)$$

On écrira donc

$$((\partial + iqA)^\mu (\partial + iqA)_\mu + m^2) \psi = 0 \quad (1.38)$$

Si la théorie décrite par (1.36) admet bien un courant conservé dans l'évolution temporelle, à savoir [19]

$$j_\mu = \frac{i}{2m} (\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi)^* \psi) \quad (1.39)$$

Satisfaisant  $\partial^\mu \psi_\mu = 0$ , on constate que la densité  $\rho(x) = j_0$  n'est pas définie positive.

Elle ne saurait représenter la densité de probabilité de présence de la particule décrite par  $\psi$ , qu'on attend dans une théorie sensée.

Toutes ces incohérences vont être levées par l'introduction de la théorie quantique des champs, une théorie décrivant un système à nombre arbitraire de particules, dans laquelle l'objet  $\psi$  est promu du rôle de fonction d'onde à celui d'opérateur capable de créer et annihiler ces particules. C'est le changement de point de vue traditionnellement appelé [19]

Chapitre II : solution de  
l'équation de Klein-Gordon  
pour un potentiel  
coulombien

# Chapitre II : solution de l'équation de Klein-Gordon pour un potentiel coulombien

## II.1 Solutions d'équation de Klein-Gordon pour une particule libre

Considérons une particule libre, relativiste (sa vitesse à l'ordre de la vitesse de la lumière), avec un spin (0), son équation du mouvement est représentée par (1.36); cette dernière équation admet une solution sous la forme [20]:

$$\phi(x) \propto \exp\left(-\frac{i}{\hbar} P_x\right) \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p}\vec{r})\right) \quad (2.1)$$

Où  $P_x$  représente le produit scalaire de deux quadrivecteurs dans l'espace Minkowski

$$\begin{aligned} P_x &= P_\mu x^\mu \\ P_x &= P_0 x^0 + P_1 x^1 + P_2 x^2 + P_3 x^3 \\ P_x &= \frac{E}{c} Ct + p_x(-x) + p_y(-y) + p_z(-z) \\ P_x &= Et - \vec{p}\vec{r} \end{aligned}$$

Après un simple calcul, on trouve

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x) = -\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \phi(x) \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi(x) = -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} \phi(x) \quad (2.3)$$

En remplaçant les deux équations (2.2) et (2.3) dans l'équation (2.1), on trouve :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{m c}{\hbar}\right)^2\right) \phi(x) = 0 \quad (2.4)$$

Et de cela nous produisons

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \\ E &= \pm E_p = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il est clair que l'on obtient les valeurs positives et négatives de l'énergie cinétique à partir d'une seule solution et donc que la valeur d'énergie négative

ne peut pas être rejetée car elle provient de la même solution qui donne de l'énergie positive. Cette énergie négative est interprétée comme une antiparticules[20].

Le champ  $\phi(\mathbf{x})$  peut être exprimé par des transformations de Fourier comme suit

$$\phi(\mathbf{x}) = N \int d^3K a(\vec{k}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.6)$$

Où N est une constante de normalisation .en utilisant (2.2) et (2.3) , on trouve :

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial t^2} = N \int d^3K \frac{d^2 a(\vec{k}, t)}{dt^2} \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\mathbf{x}) = N \int d^3K k^2 a(\vec{k}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.8)$$

Puis en remplaçant les deux équations (2.7) et (2.8) dans l'équation de Klein-Gordon exprimée par l'équation(1.36), on trouve [20] :

$$N \int d^3K \left[ \frac{d^2 a(\vec{k}, t)}{dt^2} + k^2 a(\vec{k}, t) + m^2 a(\vec{k}, t) \right] \exp(-i\vec{k}\vec{r}) = 0 \quad (2.9)$$

La seule solution à cette équation est :

$$\frac{d^2 a(\vec{k}, t)}{dt^2} + k^2 a(\vec{k}, t) + m^2 a(\vec{k}, t) = 0 \quad (2.10)$$

En plaçant

$$k^2 + m^2 = \omega^2 \quad (2.11)$$

Ainsi, l'équation (2.10) devient comme suit

$$\frac{d^2 a(\vec{k}, t)}{dt^2} + \omega^2 a(\vec{k}, t) = 0 \quad (2.12)$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans un seconde membre, sa solution s'écrit sous la forme suivante [20] :

$$a(\vec{k}, t) = a(\vec{k}) \exp(i\omega t) + b(\vec{k}, t) \exp(-i\omega t) \quad (2.13)$$

En utilisant les équations (2.13) et (2.6), nous trouvons les transformées de Fourier comme suit

$$\phi(\mathbf{x}) = N \int d^3K [a(\vec{k}) \exp(i\omega t) + b(\vec{k}, t) \exp(-i\omega t)] \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.14)$$

On peut réécrire le Champ scalaire :

$$\phi(\mathbf{x}) = N \int d^3K \left[ a(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \right] + b(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} + \omega t] \right] \right] \quad (2.15)$$

Le champ  $\phi(x)$  qui décrit une particule scalaire est sans spin et non chargé est réel, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante [20]

$$\phi(x) = \phi(x)^* \quad (2.16)$$

A partir de la relation (2.15) et (2.16) on écrit

$$\phi(x)^* = N \int d^3K \left[ a^*(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} + \omega t] \right] + b^*(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \right] \right] \quad (2.17)$$

D'après l'équation (2.16) , En faisant une identification sur les équations (2.17) et (2.15) , on trouve :

$$\begin{cases} a(\vec{k}) = b^*(-\vec{k}) \\ a^*(\vec{k}) = b(-\vec{k}) \end{cases} \Rightarrow b(\vec{k}) = a^*(-\vec{k}) \quad (2.18)$$

Les équations (2.18) et (2.16) permettent d'écrire le champ scalaire exprimé dans la solution (2.15) comme suit

$$\phi(x) = N \int d^3K \left[ a(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \right] + a^*(-\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} + \omega t] \right] \right] \quad (2.19)$$

On remplace maintenant le vecteur d'onde  $(\vec{K})$  dans la deuxième partie de la dernière équation(2.19) par le vecteur d'onde  $(-\vec{K})$  pour trouver la formule suivante pour le champ qui décrit une particule paisible qui est nulle et non chargée[20]

$$\phi(x) = N \int d^3K \left[ a(\vec{k}) \exp \left[ +i[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \right] + a^*(\vec{k}) \exp \left[ -i[\vec{k}\vec{r} - \omega t] \right] \right] \quad (2.20)$$

$$\phi(x) = N \int d^3K \left[ a(\vec{k}) \exp(-ikx) + a^*(\vec{k}) \exp(+ikx) \right] \quad (2.21)$$

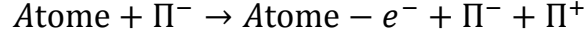
Où  $kx$  représente le produit scalaire du vecteur d'onde et le vecteur position dans l'espace quadratique, ce produit est donnée par la forme suivante :

$$kx = k_\mu x^\mu = \frac{\omega}{c} Ct - \vec{k}\vec{r} = \omega t - \vec{k}\vec{r} \quad (2.22)$$

## **II.2 Application aux atomes pioniques :**

Les atomes pioniques sont l'une des applications les plus réussies de l'équation de Klein-Gordon, où nous obtenons par le remplacement d'un électrons ou plusieurs par . La particule  $\Pi^-$  est un particule misounique avec une charge

négative et une masse  $m_{\pi}$  et un spin nulle, où nous obtenons l'atome pionique par la réaction suivante [20]:



D'où la création de la particule  $\Pi^{-}$  fait par la réaction thermonucléaire suivant



soit que l'atome pionique formé à partir du particule  $\Pi^{-}$  tournant autour d'un noyau avec la charge  $z | e |$  dans une situation semblable à l'atome semblable à des atomes hydrogèneoide. Ce système est affecté par un champ électromagnétique dérivé d'un potentiel suivant [20]

$$qA^{\mu}(x) \equiv \begin{cases} qU(t, \vec{r}) = -\frac{ze^2}{r} \\ q\vec{A}(t, \vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

après la séparation des variables  $\vec{r}$  et  $t$  Les états stables s'écrit comme suit :

$$\phi(x) = \phi(\vec{r})\exp(-iEt) \quad (2.24)$$

Nous utilisons maintenant les équations(2.24), (2.23) et (2.4), on

trouvons l'équation du mouvement du pion sous l'influence d'un champ électromagnétique externe.

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - qU\right)^2 \phi(\vec{r}) \exp(-iEt) &= \left[(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + m^2\right] \phi(\vec{r}) \exp(-iEt) \\ \Rightarrow \left[\left(E + \frac{ze^2}{r}\right)^2 + \vec{\nabla}^2 - m_{\pi}^2\right] \phi(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Comme la symétrie est sphérique, on utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  , en rappelant que L'expression dulaplacien dans les coordonnées sphériques est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le carré du moment cinétique est donnée en coordonnées sphériques par :

$$\begin{cases} \vec{L}^2 = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ \vec{L}^2 \varphi(\vec{r}) = \ell(\ell + 1) \varphi(\vec{r}) \end{cases} \quad (2.27)$$

On écrit  $\varphi(\vec{r})$  comme suit

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{R_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.28)$$

En utilisant les équations (2.28) et (2.27), l'équation(2.25) devient

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1) - Z^2 e^4}{r^2} + \frac{2EZe^2}{r} + E^2 - m_\pi^2 \right] R_l(r) = 0 \quad (2.29)$$

Dans l'atome d'hydrogène, la partie radiale  $R_l(r)$  est vérifie l'équation suivante

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m_e Z e^2}{r} + 2m_e E_{sh} \right] R_l(r) = 0 \quad (2.30)$$

Où  $E_{sh}$  représente l'énergie de l'électron quantifié dans l'atome d'hydrogène. Nous remplaçons maintenant la masse des électrons par la masse des pions dans l'équation (2.30) pour trouver

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m_\pi Z e^2}{r} + 2m_\pi E_{sh} \right] R_l(r) = 0 \quad (2.31)$$

L'équation de Schrödinger permet de trouver l'énergie quantifiée du pion mais dans le cas non relativiste, comme suit :

$$\begin{cases} E_{sh} = -\frac{m_\pi(Ze^2)^2}{2n^2} \\ n = 1,2,3 \\ \ell = 0,1,2,3 \dots (n-1) \end{cases} \quad (2.32)$$

Où  $n$  représente le nombre quantique principal et  $l$  désigne la valeur du nombre quantique orbital du moment cinétique, Pour trouver une ressemblance mathématique entre l'équation relativiste et l'équation non-relativiste, en introduire le paramètre ( $l$ ), où :

$$\beta(l)(\beta(l) + 1) = \ell(\ell + 1) - Z^2 e^4 \quad (2.33)$$

Cette équation accepte 2 solutions mathématiques

$$\beta(l) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 e^4} \quad (2.34)$$

La solution physique acceptable correspond aux valeurs positive des moment cinétique ; donc à la valeur acceptable de  $\beta(l)$  est :

$$\beta(l) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 e^4} \quad (2.35)$$

L'équation(2.29) est écrite en termes du paramètre  $\beta(l)$  ,comme suit :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\beta(l)(\beta(l)+1)}{r^2} + \frac{2EZe^2}{r} + E^2 - m^2 \Pi \right] R_l(r) = 0 \quad (2.36)$$

Afin en faire une correspondance entre l'équation(2.36) et (2.31) pour trouver l'énergie relativiste du pion  $\Pi^-$

$$\begin{cases} E_{sh} \rightarrow -\frac{E^2 - m^2 \Pi}{2m_{\Pi}} \\ l \rightarrow \beta(l) \\ e^2 \rightarrow e^2 \frac{E^2}{m_{\Pi}} \end{cases} \quad (2.37)$$

Ainsi, en utilisant la dernière équation et l'équation (2.36), pour trouver

$$\frac{E^2 - m^2 \Pi}{2m_{\Pi}} = -\frac{m_{\Pi}(Ze^2)^2 e^2 \frac{E^2}{m_{\Pi}}}{2(n + \beta(l)+1)^2} \quad (2.38)$$

Cela Permet de déduire l'énergie relativiste de la particule mésonique

$$E = \frac{m_{\Pi}}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 e^4}{(n-1-1+\beta(l)+1)^2}}} \quad (2.39)$$

Avec:  $n \rightarrow (\ell + 1 + n)$  [21]

On remplace la valeur du paramètre  $\beta(l)$  pour trouver de l'énergie du mison  $\Pi^-$ .

$$E = \frac{m_{\Pi}}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 e^4}{\left(n-1-1+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 e^4 + 1}\right)^2}}} \quad (2.40)$$

pour simplifier la dernière équation, en utilisons le développement suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{(n-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \alpha})}}} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^2}{2\lambda n^3} + \frac{\alpha^2}{4n^4} + O(\alpha^3) \quad (2.41)$$

Donc , l'énergie relativiste du pion prend la forme suivante :

$$E \approx m_{\Pi} - \frac{mZ^2e^4}{2n^2} - \frac{mZ^4e^8}{2n^3} \left[ \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] + \dots \dots, \quad (2.42)$$

Le premier terme représente l'énergie au repos et le second terme représente l'énergie obtenue par résolution de l'équation de Schrödinger ; et Le reste c'est la contribution de l'état relativiste c'est-à-dire la correction relativiste à l'énergie de l'atome, obtenue par la l'équation de Klein Gordon [20].

# Chapitre III : Géométrie Non Commutatif

# Chapitre III : Géométrie Non Commutatif

## III.1 La géométrie non-commutative:

La géométrie non-commutative traite à la fois des espaces de dimension non entière , des espaces de dimension infinie et surtout des espaces de nature “quantique” et enfin de l’espace-temps lui-même si l’on prend en compte non seulement la force électromagnétique (qui avait conduit Poincaré, Einstein et Minkowski à leur modèle de l’espace-temps) mais aussi les forces faibles et fortes qui conduisent à un modèle non commutatif de l’espace-temps. Dans la théorie générale des espaces non-commutatifs, la notion de point est remplacée par celle “ d’état ” du système qui joue un peu le rôle de “ nuage de points” et qui est de nature “ quantique ”.

### III.1.1 Espace-temps non commutatif

La mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant les relations de commutation suivantes [22]:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$
$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \tag{3.1}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

Afin de décrire un espace non commutatif, les relations de commutation ci-dessus devraient être changées comme :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$
$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \tag{3.2}$$

$$[\hat{p}_i, p_j] = 0$$

Où  $\theta_{ij}$  est une matrice antisymétrique, constante, appelée paramètres de la non commutativité.

## III.2 La quantification de Weyl et le produit de Moyal

### III.2.1 La quantification de Weyl

Pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, la technique utilisée est la quantification de Weyl.

Dans le cadre de la procédure de la quantification canonique Hermann Weyl a donné une prescription comment associer un opérateur quantique à une fonction classique des variables canoniques (variable de l'espace de phase)

Cette prescription peut également être employée pour associer un élément de  $A_x$  avec une fonction  $F(x)$  des variables classiques  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Nous utilisons les opérateurs  $\hat{x}$  ( $\hat{x}_i$  sont des coordonnées de l'espace non commutatif) pour les éléments du et des pour les variables classique de permutation associative.

On utilise la transformation de Fourier [23]:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n x e^{-ik_j x^j} f(x) \quad (3.3)$$

Nous définissons l'opérateur de la fonction  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$

$$w(f) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k e^{-ik_j \hat{x}^j} \hat{f}(k) \quad (3.4)$$

Les opérateurs obtenus en (3.4) peuvent être multipliés pour rapporter de nouveaux opérateurs. L'opérateur produit  $w(f)w(g)$  s'écrit sous la forme :

$$w(f)w(g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k d^n p e^{ik_i \hat{x}^i} e^{ik_j \hat{x}^j} \hat{f}(k) \hat{g}(p)$$

D'autre part on a

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \quad (3.5)$$

et par l'application de la formule de Baker-Hausdorff :

$$e^{\hat{a}} e^{\hat{b}} = e^{\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{b}]} \quad (3.6)$$

et la relation (3.5), on peut montrer que le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$w(f)w(g) = w(f * g) \quad (3.7)$$

### III.2.2 Le produit de Moyal (Produit star)

Le produit star est défini par :

$$f(x) * g(x) \rightarrow f(x) e^{\frac{i}{2} \vec{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \vec{\partial}_\nu} g(x) \quad (3.8)$$

la quantité  $\exp[\frac{i}{2} \vec{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \vec{\partial}_\nu]$  est appelée le facteur de phase non commutatif.

$$k \wedge q = \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu q_\nu \quad (3.9)$$

On peut développer le produit star comme suit [24] :

$$f * g = fg + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g + O(\theta^2) \quad (3.10)$$

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \left(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x)\right) \left(\mu_{\nu_1} \dots \mu_{\nu_n} g(x)\right)$$

On a quelques propriétés du produit star

1- Lorsque  $\theta = 0$  on trouve :

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) \quad (3.11)$$

on reprend le cas commutatif

2-

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k \wedge q)} \quad (3.12)$$

$$k \wedge q \equiv k^\mu q^\nu \theta_{\mu\nu}$$

3- Le produit star est associatif

$$(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h \quad (3.13)$$

4- L'intégrale du produit star de deux champs s'annulant à l'infini est non déformée. Il revient au produit normal :

$$\int d^n(f * g)(x) = \int d^n(g * f)(x) = \int d^n x f(x) g(x) \quad (3.14)$$

5- Nous avons l'invariance des fonctions par permutation en vertu de l'intégrale:

$$\int d^n(f * g * h)(x) = \int d^n((f * g) \cdot h)(x) = \int d^n(h \cdot (f * g))(x) \\ \int d^n(h * f * g)(x) \quad (3.15)$$

6- La conjugaison complexe :

$$(f * g)^{c.c} = g^{c.c} * f^{c.c} \quad (3.16)$$

7- Le produit star est non commutatif :

$$f * g \neq g * f \quad (3.17)$$

### **III.3 Reformulation des équations de Maxwell :**

Le produit de Moyal-Weyl de deux fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ [25]

$$\Phi_1(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ikx} \tilde{\Phi}_1(k) \quad (3.18)$$

$$\Phi_2(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ikx} \tilde{\Phi}_2(k) \quad (3.19)$$

Peut être défini comme suit, en premier nous associons à  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$

les opérateurs de Weyl  $w(\Phi_1)$  et  $w(\Phi_2)$  définis par :

$$w(\Phi_1) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ik\hat{X}} \tilde{\Phi}_1(k) \quad (3.20)$$

$$w(\Phi_2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ik\hat{X}} \tilde{\Phi}_2(k) \quad (3.21)$$

Avec  $\hat{X} = \hat{x}^\mu + \hat{A}^\mu(x)$ , et  $\hat{x}^\mu$  sont les variables non commutantes satisfaisant aux lois de commutations  $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$

Ensuite nous définissons le produit  $w(f)w(g)$  par :

$$w(\Phi_1) w(\Phi_2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k d^4p e^{ik\hat{X}} e^{ip\hat{X}} \tilde{\Phi}_1(k) \tilde{\Phi}_2(p) \quad (3.22)$$

Utilisons la formule de (C-B-H) Baker – Campbell – Hausdorff [25] :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{2}[(A,B),B] - \frac{1}{2}[(A,B),A] + \dots}$$

$$e^{-B} e^A e^B = e^{A + [A,B] + \dots}$$

De la formule de C-B-H; on obtient

$$e^{ik\hat{X}} e^{ip\hat{X}} = e^{ik\hat{X} + ip\hat{X} + \frac{1}{2}[ik\hat{X} + ip\hat{X}]} = e^{ik\hat{X} + ip\hat{X} - \frac{1}{2}k_\mu p_\nu [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]} \quad (3.23)$$

Le commutateur  $[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]$

peut être calculer comme suit :

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = [\hat{x}^\mu + \hat{A}^\mu(x), \hat{x}^\nu + \hat{A}^\nu(x)] \quad (3.24)$$

Où,  $A^\mu$  est le quadri potentiel, qui vérifie la relation sont (A.19)

$$[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} + i\theta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\nu - i\theta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\mu = i\theta^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (3.25)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = i\theta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\nu - i\theta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\mu = -\tilde{F}^{\nu\mu}, \tilde{F}^{\mu\nu*} = -\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (3.26)$$

est un champ antisymétrique.

Avec ce résultat l'éq (3.23) ; donne :

$$e^{ik\hat{X}} e^{ip\hat{X}} = e^{ik\hat{X}+ip\hat{X}-\frac{1}{2}k_\mu P_\nu [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]} = e^{ik\hat{X}+ip\hat{X}-\frac{1}{2}k_\mu P_\nu [i\theta^{\mu\nu}, \tilde{F}^{\mu\nu}]} \quad (3.27)$$

d.où le résultat :

$$w(\Phi_1) w(\Phi_2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k d^4P e^{ik\hat{X} + -\frac{1}{2}k_\mu P_\nu [i\theta^{\mu\nu}, \tilde{F}^{\mu\nu}]} \tilde{\Phi}_1(k) \tilde{\Phi}_2(P)$$

$$w(\Phi_1) w(\Phi_2) = w \left[ e^{\frac{1}{2}(i\theta^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu}} (\Phi_1(x) \Phi_2(y)) \right]_{x=y} = w(\Phi_1 * \Phi_2)(x)$$

Où  $w(\Phi_1 * \Phi_2)(x)$  est défini par :

$$w(\Phi_1 * \Phi_2)(x) = \left[ e^{\frac{1}{2}(i\theta^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu}} (\Phi_1(x) \Phi_2(y)) \right]_{x=y} \quad (3.28)$$

Ici nous notons l. analogie entre le champ non commutatif

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = i\theta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\nu - i\theta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \hat{A}^\mu$$

et le U(1) tenseur de courbure  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  , cela suggère que le champ non commutatif  $\hat{F}^{\mu\nu}$  peut-être défini comme :

$$\hat{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i\theta^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu - i\theta^{\nu\alpha} \partial_\alpha A^\mu \quad (3.29)$$

Si on définit la dérivée non commutative  $\hat{\partial}_\mu$  par  $\hat{\partial}_\mu = \partial_\mu + i\theta_{\mu\alpha} \partial^\alpha$  alors nous pouvons écrire  $\hat{F}^{\mu\nu}$  sous la forme :

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \hat{\partial}^\mu A^\nu - \hat{\partial}^\nu A^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i\theta^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\nu - i\theta^{\nu\alpha} \partial_\alpha A^\mu \quad (3.30)$$

On note ici que changer la dérivée  $\partial_\mu \rightarrow \hat{\partial}_\mu + i\theta_{\mu\alpha} \partial^\alpha$  , revient à modifier les générateurs du groupe de translation

$$P_\mu = -i\partial_\mu \rightarrow \hat{P}_\mu = -i\hat{\partial}_\mu + \theta_{\mu\alpha} \partial^\alpha ;$$

donc ceci revient aussi à déformer les lois de commutations

$$[x_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu} \rightarrow [x_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu} \quad (3.31)$$

Donc la non commutativité de l'espace temps entraîne la déformation des règles de quantification canonique de la mécanique quantique, ces derniers sont donc conséquences inévitables de la non commutativité de l'espace temps, cette déformation est équivalente à la déformation des générateurs de translations.[25]

Et aussi en peut fait une généralisation sur les équations de Maxwell, d'après l'équation (3.29) et les équations (A1.A2.A3.A4) du annexe A, Le tenseur  $\hat{F}^{\mu\nu}$  (eq 3.29) prendre la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{E_x}{c} = \mathcal{F}_{41} = \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha A^1 - i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha A^4 \\ \frac{E_y}{c} = \mathcal{F}_{42} = \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha A^2 - i\theta_{2\alpha} \partial^\alpha A^4 \\ \frac{E_z}{c} = \mathcal{F}_{43} = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4 + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha A^3 - i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha A^4 \end{cases} \quad (3.32)$$

Et

$$\begin{cases} B_x = \mathcal{F}_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 + i\theta_{2\alpha} \partial^\alpha A_3 - i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha A_2 \\ B_y = \mathcal{F}_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 + i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha A_1 - i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha A_3 \\ B_z = \mathcal{F}_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha A_2 - i\theta_{2\alpha} \partial^\alpha A_1 \end{cases} \quad (3.33)$$

En utilisant l'équation (A.1) et (3.32), on trouve:

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial A^1}{\partial x} \right) - i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial A^4}{\partial x} \right) \\ & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} A^i \right) - i\theta_{i\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} A^4 \right) \end{aligned}$$

En déduire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^i) - i\theta_{i\alpha} \partial^\alpha (\text{div} A^4) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.34)$$

En utilisant l'équation (A.3) et (3.32) :

$$\text{Et on utilise la relation } \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

Donc on à le membre non commutative de l'équation  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  égal à :

$$\begin{aligned} & = \vec{i} \left[ i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} A^3 - \frac{\partial}{\partial z} A^2 \right) + i \left( \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial z} - \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \right) \partial^\alpha A^4 \right] \\ & - \vec{j} \left[ i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} A^3 - \frac{\partial}{\partial z} A^1 \right) + i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial z} - \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \partial^\alpha A^4 \right] \\ & + \vec{k} \left[ i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} A^2 - \frac{\partial}{\partial y} A^1 \right) + i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial y} - \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \partial^\alpha A^4 \right] \end{aligned}$$

Finalement l'équation (3.32) est généralise à la Forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}^i) + i(\theta_{j\alpha} \wedge \vec{\nabla}) \partial^\alpha A^4 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.35)$$

Et d'après la relation (3.33) le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  sera prendre la forme suivant :

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + i(\theta_{2\alpha} - \theta_{1\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_3 + i(\theta_{1\alpha} - \theta_{3\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_2 + i(\theta_{3\alpha} - \theta_{2\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_1$$

Alors, en déduire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}^i) + i(\theta_{j\alpha} \wedge \vec{\nabla}) \partial^\alpha A^4 = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i(\theta_{2\alpha} - \theta_{1\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_3 + \\ i(\theta_{1\alpha} - \theta_{3\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_2 + i(\theta_{3\alpha} - \theta_{2\alpha}) \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A_1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

En utilisant l'équation (A.2) et (3.33) on trouve :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + i \left( \theta_{2\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} A_3 - \theta_{3\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial x} A_2 \right) \\ + i \left( \theta_{3\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial y} A_1 - i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial y} A_3 \right) \\ + i \left( \theta_{1\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial z} A_2 - \theta_{2\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial z} A_1 \right) \end{aligned}$$

En déduire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + i \left( \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x} - \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \right) \partial^\alpha A_3 + \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial z} - \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \partial^\alpha A_2 + i \left( \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial y} - \right. \\ \left. \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

En utilisant l'équation (A.4) et (3.33)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{i} \left[ i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} A_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_3 \right) - i \left( \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial y} + \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_1 \right] \\ - \vec{j} \left[ i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial z} A_3 + \frac{\partial}{\partial x} A_1 \right) - i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_2 \right] \\ + \vec{k} \left[ i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} A_1 + \frac{\partial}{\partial y} A_2 \right) - i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_3 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Et d'après la relation (3.33) le terme  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  sera prendre la forme suivant :

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^1 - i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^4 + +i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^2 - i\theta_{2\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^4 \\ + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^3 - i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^4 \end{aligned}$$

La relation prendre la forme condense

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^i - i\theta_{i\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^4 \quad (3.39)$$

En déduire :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} +$$

$$\left( \vec{1} \left[ i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} A_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_3 \right) - i \left( \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial y} + \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_1 \right] \vec{1} \left[ i\theta_{1\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial z} A_3 + \frac{\partial}{\partial x} A_1 \right) - i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \theta_{3\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_2 \right] \vec{k} \left[ i\theta_{3\alpha} \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} A_1 + \frac{\partial}{\partial y} A_2 \right) - i \left( \theta_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \theta_{2\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \right) \partial^\alpha A_3 \right] \right) = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i\theta_{4\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^i - i\theta_{i\alpha} \partial^\alpha \frac{\partial}{\partial t} A^4 \quad (3.40)$$

Les équation (3.40) ; (3.37) ; (3.36) et (3.33) représentent une généralisation sur les équation de Maxwell par l'effet de la géométre non commutative.

Chapitre IV : La correction  
relativiste dans l'espace non  
commutatif  
de l'atome d'hydrogène

# Chapitre IV : La correction relativiste dans l'espace non commutatif de l'atome d'hydrogène

## IV.1 L'équation de Klein-Gordon dans l'espace non commutative

Dans cette section, on effectue une généralisation sur le principe de correspondance dans l'espace non-commutatif, en prenant en considération la déformation de l'opérateur de dérivation, suivante

$$\partial_\mu = \partial_\mu + i\theta_{\mu\alpha} \partial^\alpha \quad (4.1)$$

On rappelle que :

$$\text{Energie } E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{Impulsion } P^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}$$

D'où, on peut dans l'espace minkowskiennes,

$$p^\mu \mapsto i\hbar \partial^\mu = (i\partial^0, -i\nabla).$$

D'après l'équation (1.4) on remarque :

$$\partial_0 = \partial_0 + i\theta_{0\alpha} \partial^\alpha$$

Et

$$\partial_i = \partial_i + i\theta_{i\alpha} \partial^\alpha$$

Et le principe de correspondance sera généralisé sous la forme

$$E = i\hbar \partial_0 - \hbar\theta_{0\alpha} \partial^\alpha \quad (4.2)$$

$$p_i = -i\hbar \partial_i + \hbar\theta_{i\alpha} \partial^\alpha \quad (4.3)$$

Si on prend plutôt à la relation ( $\hbar = c = 1$ ), l'équation du mouvement relativiste dans l'espace non-commutatif, d'après les équations (2. 4) et la

relation relativiste suivante  $E^2 - P^2 = m^2$  , dans le cas d'une particule libre , cette dernière équation s'écrit sous la forme suivante:

$$\{(i\partial_0 - \theta_{0\alpha}\partial^\alpha)^2 - (-i\partial_i + \theta_{i\alpha}\partial^\alpha)^2\}\varphi(x) = m^2\varphi(x)$$

Après , substitution suivante des quantité par leur représentation en termes d'opérateur

$$\begin{aligned} & \{[(i\hbar\partial_0 - \hbar\theta_{0\alpha}\partial^\alpha)(i\hbar\partial_0 - \hbar\theta_{0\alpha}\partial^\alpha)] \\ & \quad - [(-i\hbar\partial_i + \hbar\theta_{i\alpha}\partial^\alpha)(-i\hbar\partial_i + \hbar\theta_{i\alpha}\partial^\alpha)]\}\varphi(x) = m^2\varphi(x) \\ & \{[(i\hbar\partial_0)^2 + (\hbar^2\theta_{0\alpha}\partial^\alpha\theta^{0\beta}\partial_\beta) - 2i\hbar^2\theta_{0\alpha}\partial^\alpha\partial^0] \\ & \quad - [(i\hbar\partial_i)^2 - (\hbar^2\theta_{i\alpha}\partial^\alpha\theta^{i\beta}\partial_\beta) - (-2i\hbar^2\partial_i\theta^{i\beta}\partial_\beta)]\}\varphi(x) \\ & = m^2\varphi(x) \end{aligned}$$

Et ,

$$\begin{aligned} & [(i\partial_0)^2 - i\partial_i^2 - m^2 - 2i(\theta_{0\alpha}\partial^0\partial^\alpha - \theta_{i\alpha}\partial^i\partial^\alpha) + (\theta_{0\alpha}\theta^{0\beta}\partial^\alpha\partial_\beta - \\ & \theta_{i\alpha}\theta^{i\beta}\partial^\alpha\partial_\beta)]\varphi(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

En peut faire une substitution selon les indices En plus générale

$$\begin{aligned}
 & \{(i\partial_0)^2 - (i\partial_i)^2 - m^2 \\
 & \quad - 2i[\theta_{00}\partial^0\partial^0 + \theta_{01}\partial^0\partial^1 + \theta_{02}\partial^0\partial^2 + \theta_{03}\partial^0\partial^3 \\
 & \quad - (\theta_{10}\partial^1\partial^0 + \theta_{11}\partial^1\partial^1 + \theta_{12}\partial^1\partial^2 + \theta_{13}\partial^1\partial^3) \\
 & \quad - (\theta_{20}\partial^2\partial^0 + \theta_{21}\partial^2\partial^1 + \theta_{22}\partial^2\partial^2 + \theta_{23}\partial^2\partial^3) \\
 & \quad - (\theta_{30}\partial^3\partial^0 + \theta_{31}\partial^3\partial^1 + \theta_{32}\partial^3\partial^2 + \theta_{33}\partial^3\partial^3)] \\
 & \quad + ([\theta_{00}\theta^{00}\partial^0\partial_0 + \theta_{00}\theta^{01}\partial^0\partial_1 + \theta_{00}\theta^{02}\partial^0\partial_2 + \theta_{00}\theta^{03}\partial^0\partial_3 \\
 & \quad + \theta_{01}\theta^{00}\partial^1\partial_0 + \theta_{01}\theta^{01}\partial^1\partial_1 + \theta_{01}\theta^{02}\partial^1\partial_2 + \theta_{01}\theta^{03}\partial^1\partial_3 \\
 & \quad + \theta_{02}\theta^{00}\partial^2\partial_0 + \theta_{02}\theta^{01}\partial^2\partial_1 + \theta_{02}\theta^{02}\partial^2\partial_2 + \theta_{02}\theta^{03}\partial^2\partial_3 \\
 & \quad + \theta_{03}\theta^{00}\partial^3\partial_0 + \theta_{03}\theta^{01}\partial^3\partial_1 + \theta_{03}\theta^{02}\partial^3\partial_2 + \theta_{03}\theta^{03}\partial^3\partial_3] \\
 & \quad - [\theta_{10}\theta^{10}\partial^0\partial_0 + \theta_{10}\theta^{11}\partial^0\partial_1 + \theta_{10}\theta^{12}\partial^0\partial_2 + \theta_{10}\theta^{13}\partial^0\partial_3 \\
 & \quad + \theta_{11}\theta^{10}\partial^1\partial_0 + \theta_{11}\theta^{11}\partial^1\partial_1 + \theta_{11}\theta^{12}\partial^1\partial_2 + \theta_{11}\theta^{13}\partial^1\partial_3 \\
 & \quad + \theta_{12}\theta^{10}\partial^2\partial_0 + \theta_{12}\theta^{11}\partial^2\partial_1 + \theta_{12}\theta^{12}\partial^2\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{12}\theta^{13}\partial^2\partial_3 + \theta_{13}\theta^{10}\partial^3\partial_0 + \theta_{13}\theta^{11}\partial^3\partial_1 + \theta_{13}\theta^{12}\partial^3\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{13}\theta^{13}\partial^3\partial_3] + \theta_{20}\theta^{20}\partial^0\partial_0 + \theta_{20}\theta^{21}\partial^0\partial_1 + \theta_{20}\theta^{22}\partial^0\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{20}\theta^{23}\partial^0\partial_3 + \theta_{21}\theta^{20}\partial^1\partial_0 + \theta_{21}\theta^{21}\partial^1\partial_1 + \theta_{21}\theta^{22}\partial^1\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{21}\theta^{23}\partial^1\partial_3 + \theta_{22}\theta^{20}\partial^2\partial_0 + \theta_{22}\theta^{21}\partial^2\partial_1 + \theta_{22}\theta^{22}\partial^2\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{22}\theta^{23}\partial^2\partial_3 + \theta_{23}\theta^{20}\partial^3\partial_0 + \theta_{23}\theta^{21}\partial^3\partial_1 + \theta_{23}\theta^{22}\partial^3\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{23}\theta^{23}\partial^3\partial_3 + \theta_{30}\theta^{30}\partial^0\partial_0 + \theta_{30}\theta^{31}\partial^0\partial_1 + \theta_{30}\theta^{32}\partial^0\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{30}\theta^{33}\partial^0\partial_3 + \theta_{31}\theta^{30}\partial^1\partial_0 + \theta_{31}\theta^{31}\partial^1\partial_1 + \theta_{31}\theta^{32}\partial^1\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{31}\theta^{33}\partial^1\partial_3 + \theta_{32}\theta^{30}\partial^2\partial_0 + \theta_{32}\theta^{31}\partial^2\partial_1 + \theta_{32}\theta^{32}\partial^2\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{32}\theta^{33}\partial^2\partial_3 + \theta_{33}\theta^{30}\partial^3\partial_0 + \theta_{33}\theta^{31}\partial^3\partial_1 + \theta_{33}\theta^{32}\partial^3\partial_2 \\
 & \quad + \theta_{33}\theta^{33}\partial^3\partial_3])\varphi(x) = 0
 \end{aligned}$$

Si on choisit que les termes diagonaux de la matrice  $\theta_{\sigma\tau}$  est non nul, donc en trouve :

$$\begin{aligned}
 & [-\partial_0^2 + \partial_i^2 - m^2 + (2i\theta_{00}\partial_0^2 - 2i\theta_{11}\partial_1^2 - 2i\theta_{33}\partial_3^2) \\
 & \quad + (\theta_{00}^2\partial_0^2 - \theta_{11}^2\partial_1^2 - \theta_{22}^2\partial_2^2 - \theta_{33}^2\partial_3^2)]\varphi(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$[\partial_0^2 - \partial_i^2 + m^2 - (\theta_{00}^2\partial_0^2 - \theta_{ii}^2\partial_i^2) - 2i(\theta_{00}\partial_0^2 - \theta_{ii}\partial_i^2)]\varphi(x) = 0$$

Et avec une forme plus condensé

$$[(1 - \theta_{\mu\mu}^2 + 2i\theta_{\mu\mu})\partial_\mu\partial^\mu + m^2]\varphi = 0$$

(4.5)

## VI.2 La solution de l'équation de Klein –Gordon dans l'espace non commutatif

Dans cette section nous avons cherché une solution pour l'équation de Klein Gordon (4.5) généralisée à l'espace non commutatif, comme première étape en cherchant la déformation de la quadri-vecteur  $k$ :

$$\left[ \begin{array}{c} \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu - m^2}_{\text{équation de Klein-Gordon dans l'espace ordinaire}} - \underbrace{(\theta_{\mu\mu}^2 + 2i \theta_{\mu\mu}) \partial_\mu \partial^\mu}_{\text{effet de l'espace non commutatif sur l'équation de Klein-Gordon}} \end{array} \right] \varphi(x) = 0$$

Cette écriture est non hermitienne, donc on peut négliger le terme complexe.

Alors, l'équation devient sous la forme :

$$[\partial_\mu \partial^\mu - m^2 - \theta_{\mu\mu}^2 \partial_\mu \partial^\mu] \varphi(x) = 0 \quad (4.6)$$

En choisissons une solution pour cette équation sous la forme d'une onde plane équation (2.1)

$$\varphi(x) = A e^{-ikx}$$

En résultant

$$(1 - \theta_{\mu\mu}^2) k^2 + m^2 = 0$$

D'où :

$$k^2 = \frac{m^2}{1 - \theta_{\mu\mu}^2} \quad (4.7)$$

Nous avons connu dans le cas ordinaire relativiste que :

$$\Rightarrow k^2 = m^2 \quad (4.8)$$

On peut définir une nouvelle masse effective de sorte que l'équation (4.7) prenne la même forme que l'équation (4.8)

Donc l'équation (4.7) devient

$$k^2 = \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}} \right)^2$$

Alor : la masse effective  $m_*$  est défini par

$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}}$$

Finalement, l'équation (4.6) prendre la même forme que l'équation (4.7)

$$k^2 = m_*^2$$

On à aussi en peut l'écrire L'équation de Klein Gordon généralisé (4.6)

à la même forme que l'équation (2.4)

$$\left( \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left( \frac{m_* c}{\hbar} \right)^2 \right) \phi(x) = 0$$

Donc le membre radial de cette dernière équation s'écrit par analogie avec l'équation (2.29)

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell + 1) - e^4}{r^2} + \frac{2Ee^2}{r} + E^2 - m_*^2 \right] R_l(r) = 0$$

En fin Pour résoudre l'équation de Klein Gordon on injecte directement la valeur de la masse effective  $m_*$  dans la solution (2.42)

$$E \approx m_* - \frac{m_* e^4}{2n^2} - \frac{m_* e^8}{2n^3} \left[ \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] + \dots$$

Ou

$$E \approx \frac{m}{\sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}} - \frac{e^4 m}{2n^2 \sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}} - \frac{e^8 m}{2n^3 \sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}} \left[ \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] + \dots$$

$$E \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_{\mu\mu}^2}} \left( m - \frac{e^4 m}{2n^2} - \frac{e^8 m}{2n^3} \left[ \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] \right)$$

on a proposé une modification de l'équation de Klein Gordon de telle façon qu'on trouve une correction sur l'énergie de l'atome d'hydrogene

**Conclusion :**

### **Conclusion :**

Dans ce travail, nous avons étudié la mécanique quantique relativiste dans l'espace non commutative, nous avons focalisé notre travail sur l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel de Coulomb dans l'espace non-commutatif. Et la correction relativiste sur l'énergie, dû à la non-commutativité.

On a présenté l'unification de relativité restreinte et la mécanique quantique grâce à le principe de correspondance, nous avons présenté aussi une contribution importante à l'approche de construction de l'espace non commutative, la non commutativité entre les coordonnées d'espace et le produit star (le produit de Weyl- Moyal), et en donne une généralisation sur le principe de correspondance qui permet de reformuler la mécanique quantique relativiste dans l'espace non commutatif.

Dans ce mémoire, nous avons généralisé les équations de Maxwell à l'espace non commutative, l'équation de Klein Gordon a été réécrite dans l'espace non commutatif grâce au principe de correspondance généralisé nous avons étudié et résolu l'équation de Klein Gordon pour le potentiel de Coulomb dans un espace-temps non-commutatif et en obtention une modification non commutative sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Nous définissons une masse effective qui décrit l'équivalence entre l'équation Klein Gordon ordinaire et l'équation de Klein Gordon dans l'espace non commutative.

# Référence

## Référence :

- [1] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov Non-commutative Field Theory;  
hep-th / 0106048
- [2] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder Nucl. Phys. B 567, (2000)  
360.
- [3] L. Alvarez-Gaume, S. R. Wadia Phys. Lett. B 501, (2001) 319.
- [4] L. Alvarez-Gaume, J.L.F. Barbon Int. J. Mod. Phys.A 16, (2001) 1123.
- [5] F. Dominguez-Adame, Phys. Lett. A 136, (1989) 175.
- [6] F. Yasuk, A. Durmus, I. Boztosun, J. Math. Phys. 47, (2006) 082302.
- [7] A. Rezaei Akbarieh and H. Motavali, Mod. Phys. Lett. A 23, (2008)  
3009.
- [8] H. Motavali, Mod. Phys. Lett. A 24, (2009) 1227.
- [9] G. Chen, Mod. Phys. Lett. A 19, (2004) 2009.
- [10] J.Y. Guo, X.Z. Fang, F.X. Xu, Phys. Rev. A 66, (2002) 2105.
- [11] G. Chen, Acta Phys. Sinica 53, (2004) 680.
- [12] G. Chen, Acta Phys. Sinica 50, (2001) 1651.
- [13] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett.  
86(2001) 2716.
- [14] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman, A. Tureanu,  
Phys. Lett.B682:235-239(2009).
- [15] H. Motavalli, A. R. Akbarieh, Mod. Phys. Lett. A25:2523-2528(2010)
- [16] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, Eur. Phys. J. C 36,  
(2004) 251.
- [17] Alain COMTET. L' EQUATION DE DIRAC. Produit par le CCSd - 30  
Aug 2005
- [18] Harold Erbin. Théorie des champs classiques. <http://artlibre.org/licence/lal/>
- [19] L. Marleau .Introduction à la physique des particules .cet ouvrage été  
rédigé avec scientificwork place (SWP) et composé avec pdflatex de Miktex  
©1998-2016 L. Marleau
- [20]. عبد الحميد معيرش. النظرية الكلاسيكية للحقول الفيزيائية. ديون المطبوعات الجامعية 2015.

## Référence

---

- [21] Walter Greiner. RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS WAVE EQUATIONS.
- [22] Sheikh-Jabbari, Ihab. F. Riad and M.M. *Noncommutative QED and Anomalous Dipole*. Le centre international d'Abdus Salam pour la physique théorique StradaCostiera, 11. 34014, Trieste, Italie : arXiv.com, 30 Sep 2000. hep-th/0008132v3 .
- [23]. J.Madore, S.Schraml ,P.Schupp , J.Wess. *Gauge Theory on Noncommutative Spaces*. Université de Paris-Sud, UnivesitéMunchen : arXiv.com, 28 Jan 2000. hep-th/0001203v1.
- [24].Jonke, MarijaDimitrijevic and Larisa. *A twisted look on Kappa-Minkowski: U(1) gauge theory*. UniversitéBelgrade : arXiv.com, 20 Dec 2011. [hep-th] 1107.3475v2.
- [25]Farid, khelili. *Aspects mathématiques et physiques de la géometrie non commutative*. Universté d'Arizona : Thèse de Docteur de philosophie, 2007.
- [26].Mohamed bendaoud. Relativité Restreinte. OPU 2003

# **ANNEXES**

# 1 Rappel des lois de l'électromagnétisme.

Nous avons vu, dans la première partie de ce cours 2, que les lois de l'électromagnétisme peuvent être exprimées [26] :

- soit en fonction des champs électrique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

- soit en fonction des potentiels  $U$  et  $\vec{A}$  à partir desquels on tire  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  Maxwell a exprimé ces lois sous la forme de quatre équations qui portent son nom [26]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Où  $\vec{D}$  est le vecteur déplacement électrique,  $\vec{H}$  le champ d'excitation magnétique,  $\rho$  et  $\vec{j}$  les densités de charge et de courant. Ces vecteurs sont reliés à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{H} = \mu \vec{B}$$

$\epsilon$  est la permittivité diélectrique, et  $\mu$  la perméabilité magnétique du milieu.

Dans les conducteurs la conductivité  $\sigma$  est reliée à  $\vec{j}$  par la loi d'Ohm:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \vec{H} = \mu_0 \vec{j}$$

Où:  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$  Farad/mètre et  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Henry/mètre

En utilisant l'opérateur "Nabla"  $\vec{\nabla}$  les équations de Maxwell deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (A.1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (A.2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (A.3) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (A.4)$$

A partir de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  on tire la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (A.5)$$

Qui agit sur une particule de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$ .

Le principe de la conservation de la charge électrique est exprimé par l'équation

:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (A.6)$$

Les équation de Maxwell et l'équation de conservation de la charge électrique sont des "équation locales" c'est-à-dire qu'elle sont valables en tout point du milieu et à tout instant t .

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dérivent des potentiels de Lorentz  $\vec{A}$  et U

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad \text{Soit} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Et } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{Soit} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Les potentiels vecteur  $\vec{A}$  et scalaire U ne sont pas définis de Façon absolue par (A.7) et (A.8),on peut alors choisir un couple ( $\vec{A}$  et U) qui satisfait "jauge de Lorentz"

$$\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Après calculs (2) ,en utilisant les équation de maxwell et la jauge de Lorentz ,on obtient :

$$\Delta U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} (\text{A.10}) \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (\text{A.11})$$

Ou  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  .Ces équation ont pour solutions

$$U(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r} \left[ \rho \left( t - \frac{r}{v} \right) \right] dv \quad (\text{A.12})$$

et

$$\vec{A}(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r} \left[ \rho \left( t - \frac{r}{v} \right) \right] dv \quad (\text{A.13})$$

## LE TENSEUR CHAMP ELECTROMAGNETIQUE .

Le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  de l'espace tridimensionnel dérivent des potentiels U et  $\vec{A}$ [26]

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Ces relation peuvent être exprimées , dans un référentiel (R) ,Sous la forme :

$$\begin{aligned}
 E_x &= -c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U}{c} \right) - c \frac{\partial A_x}{c \partial t} & B_x &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\
 E_y &= -c \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{U}{c} \right) - c \frac{\partial A_y}{c \partial t} & B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial x} & (A.14) \\
 E_z &= -c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{U}{c} \right) - c \frac{\partial A_z}{c \partial t} & B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} & (A.15)
 \end{aligned}$$

Dans l'espace quadridimensionnel de MinKowski nous considérons

Un point d'univers

$$\begin{cases}
 x = x_1 \\
 y = x_2 \\
 z = x_3 \\
 ct = x_4
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 A_x = A_1 \\
 A_y = A_2 \\
 A_z = A_3 \\
 \frac{U}{c} = A_4
 \end{cases}$$

Les expressions (A.14) et (A.15) deviennent :

$$\begin{cases}
 \frac{E_x}{c} = -\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \\
 \frac{E_y}{c} = -\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \\
 \frac{E_z}{c} = -\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}
 \end{cases}
 \quad (A.16)
 \quad
 \begin{cases}
 B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\
 B_y = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\
 B_z = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}
 \end{cases}
 \quad (A.17)$$

En introduisant les composant de quadrinabla

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \text{et} \quad \partial_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} \quad (A.18)$$

Les six expression précédent peuvent être présentée sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (A.19)$$

Les  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  sont élément d'un tenseur d'ordre 2de l'espace quadrimensionnel

$$(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix}
 \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} & \mathcal{F}_{13} & \mathcal{F}_{14} \\
 \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} & \mathcal{F}_{23} & \mathcal{F}_{24} \\
 \mathcal{F}_{31} & \mathcal{F}_{32} & \mathcal{F}_{33} & \mathcal{F}_{34} \\
 \mathcal{F}_{41} & \mathcal{F}_{42} & \mathcal{F}_{43} & \mathcal{F}_{44}
 \end{bmatrix} \quad (A.20)$$

Ce tenseur est "antisymétrique" .En effet :

$$\mathcal{F}_{\mu\mu} = 0 \text{ et } \mathcal{F}_{\mu\nu} = -\mathcal{F}_{\nu\mu} \quad (A.21)$$

Avec (A.18) et (A.19) les expressions (A.16) et (A.17) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{c} &= \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 = \mathcal{F}_{41} B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \mathcal{F}_{23} \\ \frac{E_y}{c} &= \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 = \mathcal{F}_{42} B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = \mathcal{F}_{31} \\ \frac{E_z}{c} &= \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4 = \mathcal{F}_{43} B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \mathcal{F}_{12}\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

Et le tenseur (20) devient :

$$(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}\quad (\text{A.23})$$

C'est "le tenseur électromagnétique".

Les composantes des vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{E}/c$  de l'espace à trois dimensions constituent les éléments  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  de ce tenseur [26].

Ainsi les vecteurs champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  de l'espace tridimensionnel, ne sont en fait que les deux parties d'une seule et même grandeur physique de l'espace quadridimensionnel de Minkowski : le tenseur champ électromagnétique.

Le formalisme tensoriel permet de présenter les lois de l'électromagnétisme sous une forme plus compacte (voir Landau et Lifchitz : Théorie du champ /12/).

## Résumé

Dans ce travail, on a présenté une déformation de l'opérateur de la dérivation dans la géométrie non commutative qui permet de généraliser le principe de correspondance à l'espace non commutative, et on a utilisé ce nouveau principe pour décrire les équations de Maxwell et l'équation de Klein-Gordon dans un espace non commutative. et on a cherché la solution analytique de l'équation stationnaire de Klein-Gordon pour l'atome d'hydrogène dans l'espace non-commutatif.

Mots clés : M.Q.R , EQU KG , espace non commutative , le produit de Moyal solution de equ KG

## ABSTRACT

In this work, we presented a deformation of the operator of the derivation in the non commutative geometry which is allowed to generalize the correspondence principle to the non commutative space, and we will use this new principle to rewrite the Maxwell equation. and the Klein-Gordon equation in a non commutative space. and we search for the analytical solution of the stationary Klein-Gordon equation for the hydrogen atom in the non-commutative space.

Key words: R. M.Q., EQU KG, non-commutative space, the product of Moyal solution from equ KG

## ملخص

في هذا العمل ، قدمنا تعميماً لمؤثر الاشتقاق في الهندسة اللا تبادلية الذي يسمح بتعميم مبدأ التطابق على الفضاء اللا تبادلي ، وسنستخدم التعميم الجديد هذا لإعادة كتابة معادلات ماكسويل. Klein- ومعادلة كلاين جوردن في فضاء غير تبادلي . ونبحث عن الحل التحليلي لمعادلة المستقلة عن الزمن لذرة الهيدروجين في الفضاء غير التبادلي Gordon

من معادلة Moyal، الفضاء اللا تبادلي، جداء KG الكلمات المفتاحية: ميكانيك الكم النسبية، معادلة

KG