الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيــــة الـعـلــــوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique

Par:

Guessas Mostafa

THEME

Existence globale et stabilité de la solution d'un système de Bresse avec deuxième son.

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Dr. ALLAOUI Saleh Eddine	***Pr***	***U.Laghouat***	***Président***
Mr. ABASSI Taha	***M.A.B***	***U.Laghouat***	***Examinateur***
Dr. SMAIL Brahim	***M.C.B***	***U.Laghouat***	***Examinateur***
Dr. OUCHENANE Djamel	***M.C.A***	***U.Laghouat***	***Encadreur***

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **ALLAH** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadreur, Dr. **Ouchenane Djamel** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques et ses conseils.*

*Un remerciement particulier va au chef de département Dr.**Rahmoune Abdelaziz** pour son assistance.*

*Un très grand merci aux professeurs : Dr.**Alaoui Salah Eddine**, Dr.**Ismail Brahim** et Mr.**Abbassi Taha** qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

Mon dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père pour leurs confiances et leurs encouragements.

A mes soeurs et mes frères pour leurs douceurs et leurs gentillesses.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis ...

ملخص

في هذا العمل، تمت دراسة الوجود و الوحدانية و الاستقرار الأسي لنظام أحادي البعد من نوع بريس، حيث إنتقال الحرارة معطى بقانون كاتانيو الذي يؤثر على معادلة الدوران الزاوي، وقد تم إثبات الوجود والوحدانية وكذا إستقرار الحل اعتمادا على معايير معينة من النظام.

كلمات مفتاحية : نظام بريس، التناقص الأسي، قانون كاتانيو، إنتقال الحرارة، الطرف الثاني.

Abstract

In this work, we study the well-posedness and the asymptotic stability of a one-dimensional Bresse system, where the heat conduction is given by Cattaneo's law effective in the shear angle displacements. We establish the well-posedness of the system and prove that the system is exponentially stable depending on the parameters of the system.

Key-words : Bresse systems. Exponential decay. Cattaneo'law. Thermoelasticity. Second sound.

Résumé

Dans ce travail, on a étudié l'existence et l'unicité depuis la stabilité asymptotique d'un système unidimensionnel de Bresse, où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo agissant sur l'équation concernant la rotation angulaire. On a établi l'existence et l'unicité de la solution du système et on a prouvé que le système est exponentiellement stable en fonction de certains paramètres du système.

Mots clés : Système de Bresse. Décroissance exponentielle. Loi de Cattaneo. Système Thermoélastique. Deuxième son.

Table des matières

Notations

X	Espace de Banach.
H	Espace de Hilbert.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
H^1, H_0^1, H^2	Espace de Sobolev.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions tests.
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω.
$\mathcal{A}$	Opérateur.
$\mathcal{A}^*$	Adjoint d'un opérateur $\mathcal{A}$.
$D(\mathcal{A})$	Domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$.
$\overline{D(\mathcal{A})}$	Adhérence de l'ensemble $D(\mathcal{A})$.
$\rho(\mathcal{A})$	L'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$.
$\sigma(\mathcal{A})$	Le spectre de $\mathcal{A}$.
$R(., \mathcal{A})$	Application résolvante de $\mathcal{A}$.
$r(S(t))$	Le rayons spectrale de $S(t)$.
p.p.	Presque partout.

Introduction générale

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou chimiques est modélisée par des équations aux dérivées partielles (EDP).

Dans ce mémoire on va donner une démonstration du théorème (Gearhat 1978, Prüss 1984, Greiner 1985)[6] qui lie la stabilité d'un système à l'étude de l'ensemble résolvant du générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, puis on applique le théorème de Hauang sur l'étude de la stabilité d'un systéme en vesco-élasticité linéaire.

Notons qu'à une solution non triviale d'un système en EDP, il s'associé une énergie non nulle, si cette énergie est dissipative (la dérivée par rapport au temps est négative), le système va maintenir le repos après une certain période du temps, on dit, alors que le système est stable.

Ce mémoire se divise en trois chapitres constituées de :

— **Premier chapitre :** Ce chapitre est consacré aux définitions, et théorèmes importants (quelques espaces fonctionnels, topologies faible, quelques inégalités utiles, Rappel sur les opérateurs, semi-groupe fortement continu, théorème de Lax-Milgram et Lumer-Philips, Résolution du problème d'évolution) que nous utiliserons dans la suit.

— **Deuxième chapitre :** Dans ce chapitre nous présentons quelques théorèmes concernant la stabilité exponentielle d'un semi-groupe fortement continu, avec la démonstration.

— **Troisième chapitre :** On a étudié l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle d'un système de Bresse avec deuxième son.

Chapitre 1

préliminaire

1.1 Quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$.*

1.1.2 Les espaces L^p

Définition 1.2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ au sens de Lebesgue, on définit*

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable et} \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Muni de la norme suivante

$$\|f\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable.}\ \exists\ c > 0, \\ \textit{tel que}\ |f(x)| \leq c \ \ \text{p.p sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

Muni de cette norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{Inf}\{c; |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.1. (Fischer-Riesz)
$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et si $1 < p < \infty$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.

Remarque 1.1. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f g dx, \quad f, g \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2. [26] *Pour $1 < p < +\infty$, $L^P(\Omega)$ est un espace réflexif.*

1.1.3 Les espaces $L^p(0, T, X)$

Définition 1.3. *Soit X un espace de Banach et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, notant $L^p(0, T, X)$ l'espace des fonctions mesurables, $f :]0, T[\to X$, tel que*

$$\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < +\infty.$$

On note aussi la norme sur cet espace par :

$$\|f\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(0, T, X) = \left\{ f \, : (0, T) \to X; \ \textit{mesurable et} \quad \|f\|_{L^\infty(0,T,X)} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t \in]0,T[} \quad \mathrm{ess} \|f(t)\|_X.$$

Théorème 1.3. *L'espace normé $L^p(0, T, X)$ est complet, pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 1.1. *Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T, X)$ dans $L^p(0, T, Y)$.*

1.1.4 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4. [5] *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \quad \exists g \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \quad \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note g par u' est on l'appelle dérivée faible de u.

Proposition 1.2. *L'espace $W^{1,p}$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach (ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$).
L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.
La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de H^1.

1.1.5 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.5. [5] *Étant donnés un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), u' \in W^{m-1,p}(\Omega) \right\}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

On vérifie aisément que pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$ on peut considérer les dérivées successives $u' = g_1$, $(u')' = g_2$... jusqu'à l'ordre m ; on les note Du, D^2u...$D^m u$. L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.1.6 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.6. [5] *Étant donné* $1 \leq p < \infty$*, on désigne par* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $C_0^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$*. On note* $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$*.*

Remarque 1.2. *Si* Ω *est borné* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *sera muni de la norme* $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \|D_i u\|_{L^2}$*, c'est une norme équivalente à celle induite par* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

Théorème 1.4. [5] *Soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, alors* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *si est seulement si* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$*, où* $\partial\Omega$ *est la frontière de* Ω*.*

1.2 Topologies faible $\sigma(X, X')$

Soient X un espace de Banach, X' son dual topologique et $f \in X'$. On désigne par $\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle .$$

On rappelle que : $\langle f, x \rangle := f(x)$. Lorsque f décrit X', on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. *La topologie faible sur* X *qui est notée* $\sigma(X, X')$ *est la topologie la moins fine sur* X *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_f)_{f \in X'}$*.*

Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément $x \in X$ comme suit :
Etant donné un point $x \in X$ on obtient une base de voisinages de x pour la topologie $\sigma(X, X')$ en considérant les ensembles de la forme $\underset{finie}{\cap} \varphi_f^{-1}(V_f)$, où V_f un voisinage de $\varphi_f(x)$ dans $\mathbb{R}$. (i. e. $V_f =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $a = \langle f, x \rangle$.)

Définition 1.8. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de vecteurs d'un espace de Hilbert* X *converge faiblement vers* $u \in X$*, et on note* $u_n \rightharpoonup u$*, si*

$$\lim_{n \to \infty} \langle v, u_n \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{pour tout } v \in X.$$

Remarque 1.3. *1. La limite faible quand elle existe est unique car si $\langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle$ pour tout $v \in X$, on a pour $v = u_1 - u_2$*

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2\rangle = 0$$

donc $u_1 = u_2$. (On peut prendre $v \in X$, car X est un espace de Hilbert, donc $X = X'$(théorème de Riesz)).

2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in X$ pour la norme (on dit alors qu'elle converge fortement vers u) alors $u_n \rightharpoonup u$. En effet, on a*

$$|\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\|\|v\|.$$

Ce qui implique que $\langle u_n - u, v\rangle \longrightarrow 0$ quand, $n \longrightarrow \infty$.

3. *Si X est de dimension finie alors la convergence faible implique la convergence forte. Il suffit de considérer la base $e_1, ..., e_n$ et d'observer que $\langle u, e_i\rangle = u_i$ pour $u \in X$ ce qui montre que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte.*

Proposition 1.3. *Soient X et Z des espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite qui converge faiblement vers u et $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ (opérateur linéaire continu de X dans Z). Alors la suit $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $A(u)$.*

Théorème 1.5. [3] *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Hilbert X. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

Théorème 1.6. [3] *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert X est bornée.*

Proposition 1.4. [5] *Soit (x_n) une suite de X. On a*

(i) $[x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(X, X')] \Leftrightarrow [f(x_n) \longrightarrow f(x), \forall f \in X']$.

(ii) Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq$ $\lim\inf\|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans X, (i.e.$\|f_n - f\|_{X'} \longrightarrow 0$).

Définition 1.9. *Soit X un espace normé, et soit $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ son dual topologique. Alors la topologie faible étoile sur X' notée $\sigma(X', X)$ est la topologie initiale associée au système $(\mathbb{R}, \theta, \psi_u)_{u\in X}$ où θ désigne la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et $\psi_u : X' \longrightarrow \mathbb{R}$ et définie par $\psi_u(l) = l(u)$. C'est donc la moins fine des topologies sur X rendant continues toutes les fonctionnelles $\psi_u, u \in X$.*

Proposition 1.5. [5] *Soit* (f_n) *une suite de* X'. *On a*

(i) $[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)] \Leftrightarrow [f_n(x) \longrightarrow f(x),\ \forall x \in X]$.

(ii) Si $f_n \longrightarrow f$ *fortement, alors* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(X', X'')$.
Si $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(X', X'')$, *alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$.

(iii) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$ *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$ *et si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement dans* X, *alors* $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

1.3 Quelques inégalités utiles

1.3.1 Inégalités de Young, Hölder

Définition 1.10. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *on désigne par* q *l'exposant conjugué si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions.

Définition 1.11. *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrable. Le produit de convolution des fonctions* f *et* g *est la fonction :*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.7. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *. Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *la fonction* $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n$ *et on définit*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

En outre $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et on a :*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Théorème 1.8. (Inégalité de Young)
On suppose $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. *Alors* $(f * g) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposition 1.6. [5] **(Inégalité de Hölder)**
Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $f.g \in L^1(\Omega)$ *et,*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Preuve.
1. Si $p = 1$ et $p' = \infty$, la conclusion est évidente.
2. Si $1 < p < \infty$: d'après l'inégalité de Young, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad \text{p.p} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{1}{p}\|f(x)\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g(x)\|_{p'}^{p'}.$$

On remplace f par λf $(\lambda > 0)$ il vient :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'}\|g\|_{p'}^{p'}. \tag{1.1}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1}\|g\|_{p'}^{p'/p}$. De manière à minimiser le membre à droite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

□

Corollaire 1.1. (Inégalité de Hölder généralisée)
Soient $f_1, f_2, ...f_k$ *des fonctions telles que* $f_i \in L^{pi}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, *avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f_1 f_2 ... f_k \in L^p(\Omega)$ *et*

$$\|f_1 f_2 ... f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} ... \|f_k\|_{p_k}.$$

Lemme 1.1. [30] **(Inégalités de Cauchy-Schwarz)**
Soit E *un espace préhilbertien. Tout produit scalaire satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leqslant \|x_1\| \|x_2\|, \, \forall x_1, x_2 \in E.$$

Le signe d'égalité est réalisé si et seulement si x_1 *et* x_2 *sont dépendants.*

1.3.2 Inégalités intégrales

On donne ici quelques inégalités intégrales. Ces inégalité jouent un rôle important dans les mathématiques appliquées et sont également très utiles.

Lemme 1.2. [26] *Soient* $1 \leq p \leq r \leq q$, *tel que* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{1-a}{q}$, *et* $0 \leq a \leq 1$. *Alors*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^{a} \|u\|_{L^q}^{1-a}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Notre étude est basée sur certaines inégalités algébriques connues, on veut ici rappeler quelques une d'entre elles.

Lemme 1.3. (**Inégalité de Poincaré**)
Soit Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* p *un réel supérieur ou égal à* 1. *Alors il existe une constante positive* C *telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 1.4. (Inégalité de Young)
Pour tous a, $b \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

où δ *est une constante positive.*

Lemme 1.5. [26]**(Inégalité de Young)**
Pour tous a, $b \geq 0$, *l'inégalité suivante est toujours satisfaite*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1.4 Rappel sur les opérateurs

Définition 1.12. *Une application* $T : H \longrightarrow H$, *où* H *est un espace de Hilbert, est dit opérateur linéaire si et seulement si* T *satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *Pour tous* $x, y \in H$
$$T(x+y) = Tx + Ty.$$

2. *Pour tous* $\forall\lambda \in \mathbb{C}$
$$T(\lambda x) = \lambda.Tx \quad x \in H.$$

Définition 1.13. *L'opérateur T définit sur un espace de Hilbert est dit borné s'il existe $C > 0$ tel que*
$$\|Tx\|_H \leq C\|x\|_H \quad \forall x \in H.$$

Remarque 1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ la norme de T est donnée par :*
$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{\|Tx\|_H, x \in H, \|x\|_H = 1\}.$$

1.4.1 Opérateur maximal monotone

Définition 1.14. *Soit A un opérateur non linéaire et $\lambda > 0$.*
A est dit monotone si
$$\forall v, u \in D(A), \quad (\mathcal{A}v - \mathcal{A}u, v - u) \geq 0.$$

Proposition 1.7. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur de H Les propriétés suivantes sont équivalents*

1. *$\mathcal{A}$ est maximal monotone.*
2. *$(I + \lambda A)^{-1}$ est de contraction pour tout $\lambda \geq 0$.*
3. *$\mathcal{A}$ est monotone et il existe λ positif tel que $(I + \lambda\mathcal{A})$ est surjectif.*

1.4.2 Opérateur fermé

Définition 1.15. *On dit que l'opérateur $\mathcal{A}$ est fermé si toute suite x_n d'éléments de $D(\mathcal{A})$ converge vers x telle que la suite $\mathcal{A}(x_n)$ soit convergente vers y alors, on a :*
$$x \in D(A) \ \ et \ \ y = \mathcal{A}x$$

1.4.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.16. [20] *Un opérateur linéaire non borné dans H est un couple $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ où $D(\mathcal{A})$ un sous-espace vectoriel de H et $\mathcal{A}$ est une application linéaire de $D(\mathcal{A})$ dans H. Le sous-espace $D(\mathcal{A})$ est le domaine de $\mathcal{A}$*

Définition 1.17. [20] *Un opérateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si et seulement si*
$$\forall v \in D(\mathcal{A}), \quad \langle \mathcal{A}v, v\rangle \leq 0.$$
Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par
$$\forall v \in D(\mathcal{A}), \quad \mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}v, v\rangle \leq 0.$$

Définition 1.18. [20] *Un opérateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$, linéaire non borné dans H est m-dissipatif si :*

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq 0, \qquad \forall v \in D(\mathcal{A}),$$

1. $\mathcal{A}$ est dissipatif.
2. $\mathrm{Im}(I - \mathcal{A}) = H$ *i.e.*

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \quad \text{tel que} \quad u - \mathcal{A}u = f.$$

1.5 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.19. (**Semi – groupe fortement continu**)
Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continue si

1. $S(0) = I$,
2. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2); \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$, (*Propriété de semi-groupe*).
3. *Pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue en t sur $[0, +\infty)$.*
   Ce type de semi groupe sera simplement appelé un C_0-semi-groupe.

Définition 1.20. *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit :*

1. *Uniformément continu si*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

2. *Fortement continu ou de classe C_0 si*

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \qquad \forall x \in X.$$

3. *Semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de classe C_0 et*

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.5. *Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu, alors*

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\| = 0.$$

Définition 1.21. (Générateur infinitésimal)
Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in H : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \qquad \text{existe} \right\},$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}_t x = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; \qquad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.8. [17] *Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|S(t)\|_{L(H)} \leq Me^{\omega t}; \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Définition 1.22. [6] *Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors*

$$T(\mathcal{A}) := \sup \{\text{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

est appelée la borne spectrale de $\mathcal{A}$.
Pour le générateur $\mathcal{A}$ d'un semi-groupe fortement continu $\tau = (S(t))_{t\geq 0}$, la borne spectrale $T(\mathcal{A})$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \omega_0(\tau) = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R}, \qquad \exists M_\omega \geq 1 : \quad \|S(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0 \right\}.$$

Définition 1.23. [6] *Pour la borne spéctrale $T(\mathcal{A})$ de générateur $\mathcal{A}$ et pour la borne de croissance ω_0 du semi-groupe génère $(S(t))_{t\geq 0}$, on a*

$$\begin{aligned} -\infty \leq T(\mathcal{A}) \leq \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \log(r(S(t_0))) < \infty, \end{aligned}$$

Théorème 1.9. [6] *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et on prend deux constante $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Pour le générateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ de $(S(t))_{t\geq 0}$ les assertion suivantes sont vérifiées :

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\mathrm{R}(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s) x ds,$$

existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et $\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A}) = \mathrm{R}(\lambda)$.

2. *Si* $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, *alors* $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, *et le résolvant* $\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A})$ *est donné par l'intégrale dans* (1).
3. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, *on a*

$$\| (\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A}))^n \| \leq \left(\frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} \right)^n$$

Corollaire 1.2. [19] *Soit* $\mathcal{A}$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $S(t)$ *satisfaisant*

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}. \tag{1.3}$$

Soit $\eta > \max(0, \omega)$. *Si* $x \in D(\mathcal{A}^2)$, *alors*

$$S(t)x = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \int_{\eta - in}^{\eta + in} e^{\lambda t} \mathrm{R}_\lambda(\mathcal{A}) x d\lambda.$$

Et pour tout $\delta > 0$, *l'intégrale converge uniformément en* t *pour* $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$.

Preuve.
Voir [19] page 29. □

Proposition 1.9. *Pour tout* $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ *on a :*

$$d(\lambda, \sigma(\mathcal{A})) = \frac{1}{r(\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A}))} \geq \frac{1}{\|\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A})\|}.$$

Preuve.
Voir [13] . □

Remarque 1.6. [19] *Soit* $\mathcal{A}$ *le générateur infitésimal d'un semi-groupe de contraction* $S(t)$. *L'ensemble résolvant de* $\mathcal{A}$ *contient toujours le demi-plan ouvert droit, i.e,*$\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$ *et pour* λ

$$\|\mathrm{R}(\lambda, \lambda)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}.$$

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.24. [5] *Une forme bilinéaire* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *est*

1. *Continue, s'il existe une constante* C *telle que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.10. (Lax-Milgram)[5]
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors, pour tout $\varphi \in H^*$ il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \quad \forall u \in H.$$

1.7 Théorème de Lumer-phillips

Définition 1.25. *Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, et soit X^* l'espace dual du X, posons :*

$$F(x) = \left\{ x^* \in X^*,\ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}.$$

Définition 1.26. *Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est dissipatif si pour tout $x \in D(\mathcal{A}) \subset X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que*

$$\mathrm{Re} \langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0.$$

Proposition 1.10. *Un opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \longrightarrow X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})x\| \geq \lambda \|x\| \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.11. *Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur dissipatif s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que*

$$\mathrm{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\mathrm{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X.$$

Théorème 1.11. (Lumer-phillips) [5]
Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire et $D(\mathcal{A})$ dense dans X.

1. *Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ est surjectif, alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.*

2. *Si $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et $\mathcal{A}$ est dissipatif.*

Théorème 1.12. [16] *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire de domaine $D(\mathcal{A})$ dense dans un espace de Hilbert H. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et $0 \in \rho(\mathcal{A})$. l'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$, alors est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction dans H.*

Preuve.
Voir [16] page 3. □

1.8 Résolution du problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Théorème 1.13. (Hille-Yosida) [5]
Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(\mathcal{A}))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0, \qquad [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0 \quad \textit{donnée initiale.} \end{cases} \tag{1.4}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textit{et} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.7. *L'intérêt principal du théorème Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.4) on se ramené à vérifier que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda\mathcal{A}u = f$.*

Chapitre 2

Stabilité exponentielle

2.1 Stabilité pour les semi-groupes

Définition 2.1. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *Un* C_0 *semi-groupe on dit que* $(S(t))_{t\geq 0}$ *exponentiellement stable s'il existe deux constantes* $\omega > 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}; \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.2. [6] *Le* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit :*

1. *Uniformément exponentiellement stable s'il existe* $\omega > 0$ *tel que :*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\omega t}\|S(t)\| = 0.$$

2. *Uniformément stable si :*

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)\| = 0.$$

3. *Fortement stable si :*

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

4. *Faiblement stable si :*

$$\lim_{t\to+\infty} \langle S(t)x, x'\rangle = 0, \quad \textit{et} \quad \forall x \in X \quad x' \in X'.$$

Proposition 2.1. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *Un* C_0 *semi-groupe, les assertions suivante sont équivalentes :*

1. $\omega_0 < 0$, $(i.e)$, $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable.*
2. $\lim_{t\to+\infty} \|S(t)\| = 0.$

3. $\|S(t_0)\| < 1$ *pour certain* $t_0 > 0$.

4. $\tau(S(t_1)) < 1$ *pour certain* $t_1 > 0$.

Preuve.
Voire [6]. □

Proposition 2.2. [6] *Pour un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable.*

2. *$(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable.*

3. *Il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\omega t}\|S(t)x\| = 0; \quad \forall x \in X.$$

Preuve.
Il est clair que, (1) implique (2) et (3).

((2) $\Rightarrow$ (1)) D'après le définition 1.23

$$e^{\omega_0 t} = r(S(t)) \leq \|S(t)\| \quad \forall t \geq 0,$$

car $\quad \omega_0 = \inf_{t\geq 0} \frac{1}{t}\log\|S(t)\|$. Alors

$$\omega_0 \geq \frac{1}{t}\log\|S(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$

donc

$$e^{\omega_0 t} \leq \|S(t)\|; \quad \forall t \geq 0,$$

donc (2) implique $\omega_0 \leq 0$

$$\omega_0 := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to 0} e^{-\omega t}\|S(t)\| = 0\right\},$$

donc $\exists\ \omega$ tel que $\omega_0 < \omega < 0$, tel que $\lim\limits_{t\to 0} e^{-\omega t}\|S(t)\| = 0$. On choisit $\eta = -\omega$ alors

$$\lim_{t\to 0} e^{\eta t}\|S(t)\| = 0.$$

On obtient alors (1).
((3) $\Rightarrow$ (1)) Si (3) est vérifiée, alors $(e^{\eta t}S(t))_{t\geq 0}$ est fortement donc uniformément bornée, alors $\exists\beta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \|e^{\eta t}S(t)\| \leq \beta &\implies e^{\eta t}\|S(t)\| \leq \beta \\ &\implies e^{\frac{\eta}{2}t}\|S(t)\| \leq \beta e^{-\frac{\eta}{2}t} \end{aligned}$$

qui implique $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{\eta}{2}t}\|S(t)\| = 0$. Donc (1). □

Proposition 2.3. *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de générateur* $\mathcal{A}$*, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable si et seulement si*

$$\omega_0 < 0.$$

2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 2.1. [16] *Soit* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors* $S(t)$ *est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\sup\{Re\ \lambda,\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0, \tag{2.1}$$

et

$$\sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty. \tag{2.2}$$

Théorème 2.2. [16] *Soit* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors* $S(t)$ *est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{2.3}$$

et

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty. \tag{2.4}$$

Dans la suite, on donne la preuve de l'équivalence de ces deux théorème à condition que $S(t) = e^{\mathcal{A}}$ est un C_0-semi-groupe des contractions sur espace de Hilbert.

Preuve.
D'abord, nous prouvons que (2.1) et (2.2) impliquent (2.3) et (2.4) Supposons que

$$\sup\{\text{Re}\ (\lambda); \lambda \in (\mathcal{A})\} < 0,$$

alors $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, si Re $\lambda \geq 0$ on a $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$. par suite $i\mathbb{R} \subset (\mathcal{A})$, donc (2.1) entraîne (2.3).
Si

$$\sup_{\text{Re}(\lambda)>0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty.$$

Alors

$$\|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{\text{Re}(\lambda)\geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \quad \forall k \geq |\beta|.$$

Donc

$$\sup_{k\geq|\beta|} \|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{\text{Re}(\lambda)\geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty,$$

ce qui implique que

$$\inf_{|\beta|}\left(\sup_{k\geq|\beta|}\|(ikI-\mathcal{A})^{-1}\|\right)<\infty.$$

On a

$$\overline{\lim_{|\beta|\longrightarrow\infty}}\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|<\infty.$$

Alors (2.2) entraîne (2.4).
Ensuite, montrer que (2.3) et (2.4) implique (2.1) et (2.2) à condition que $\|S(t)\|\leq 1$. D'après la remarque 1.6 l'ensemble résolvant de $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contient le demi-plan ouvert droit, i.e

$$\{\lambda:\mathrm{Re}\lambda>0\}\subseteq\rho(\mathcal{A}),$$

avec

$$\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|\leq\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}.$$

Ceci implique que pour tout $\delta_0<0$ donné, quand Re $\lambda>|\delta_0|$, nous avons

$$\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|\leq\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}<\frac{1}{|\delta_0|}.$$

Alors

$$\sup_{\mathrm{Re}\geq|\delta_0|}\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|<\frac{1}{|\delta_0|}. \tag{2.5}$$

Puis, montrons qu'il existe $\sigma_0<0$ avec $|\sigma_0|$ étant suffisamment petite tel que

$$\sigma(\mathcal{A})\subseteq\{\lambda,\,\mathrm{Re}\lambda\leq\sigma_0\}.$$

On pose $\lambda=u+iv$,

$$\lambda I-\mathcal{A}=uI+ivI-\mathcal{A}=(ivI-\mathcal{A})\left(u(ivI-\mathcal{A})^{-1}+I\right).$$

D'après (2.3) $ivI-\mathcal{A}$ est inversible et pour $|u|$ suffisamment petit,

$$u(ivI-\mathcal{A})^{-1}+I$$

est inversible.
Ainsi (2.3) implique

$$\sigma(\mathcal{A})\subseteq\{\lambda,\,\mathrm{Re}\;\lambda\leq\sigma_0<0\},$$

avec $|\sigma_0|$ suffisamment petit, par conséquent

$$\sigma_0(\mathcal{A})\subseteq\sup\{\mathrm{Re}\;\lambda,\,\lambda\in\sigma(\mathcal{A})\leq\sigma_0<0\},$$

et pour Re $\lambda \leq |\delta_0| \leq |\sigma_0|$, $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M$ car d'après (2.4)

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \|(ivI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M,$$

et on choisit $|u| \leq \dfrac{1}{2M}$ d'abord, on a

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| &= \|(ivI - \mathcal{A})^{-1}(u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\ &\leq \|(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|\|(u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\ &\leq M\|(u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\|, \end{aligned} \tag{2.6}$$

avec

$$|u| \leq \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2\|(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|}.$$

Alors

$$\|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq |u| \ \|(ivI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{2M} M < 1.$$

Donc $u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I$ est inversible et l'inverse est donnée par

$$(u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (u(ivI - \mathcal{A})^{-1})^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\|(u(ivI - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (u(ivI - \mathcal{A})^{-1})^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|(u(ivI - \mathcal{A})^{-1})^n\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\right\|^n \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Comme $\|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\| < 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|} = \frac{1}{1 - \|u(ivI - \mathcal{A})^{-1}\|}.$$

Donc

$$\left\|(u(ivI-\mathcal{A})^{-1}+I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|u(ivI-\mathcal{A})^{-1}\|}.$$

Comme $\|(ivI-\mathcal{A})^{-1}\| \leq M$, et $|u| \leq \frac{1}{2M}$. On obtient

$$\left\|(u(ivI-\mathcal{A})^{-1}+I)^{-1}\right\| \leq 2. \tag{2.7}$$

On somme (2.6) et (2.7), on obtient

$$\left\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq 2M.$$

En combinant ceci avec (2.5) , on obtient (2.2). □

Théorème 2.3. (**Gearhart 1978**, **Prüss 1984**, **Greiner 1985**) [6]
Un semi-groupe fortement continu $\tau = (S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément exponentiellement stable si et seulement si le demi-plan $\{\lambda \in \mathcal{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ est contenu dans l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ du générateur $\mathcal{A}$ avec le résolvant satisfaisant

$$M := \sup_{\mathrm{Re}\lambda>0} \|\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})\| < \infty. \tag{2.8}$$

Preuve.
Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément exponentiellement stable alors d'après la proposition 2.3 $\omega_0 < 0$ et comme

$$\omega_0 = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \quad \text{il existe} \quad M_\omega \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \|S(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0\right\},$$

alors $\exists\ \omega$: tel que

$$\omega_0 < \omega < 0,$$

d'après le théorème 1.9 (3) on a

$$\|\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega} \qquad \forall \mathrm{Re}\lambda > \omega$$

donc

$$\sup_{\mathrm{Re}\lambda>0} \|\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})\| \leq \sup_{\mathrm{Re}\lambda>0} \frac{M}{Re\lambda-\omega} \leq \frac{M}{-\omega}$$

donc l'estimation (2.8) .
Supposons que $\exists i\lambda_0 \in i\mathbb{R} : i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A})$, alors pour ε assez petit $\varepsilon + i\lambda_0 \in \rho(A)$

$$d\left(\varepsilon + i\lambda_0, \sigma(\mathcal{A})\right) \leq \varepsilon$$

d'après le proposition 1.9 on a

$$\|\mathrm{R}\,(\varepsilon + i\lambda_0, \mathcal{A})\,\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ alors $\|\mathrm{R}\,(\varepsilon + i\lambda_0, \mathcal{A})\,\| \longrightarrow +\infty$ et $\mathrm{Re}(\varepsilon + i\lambda_0) = \varepsilon > 0$, ce que contredit le fait que $\sup\limits_{\mathrm{Re}\lambda > 0} \|\mathrm{R}(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \dfrac{M}{\omega}$ donc $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $i\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A})$, par conséquent $i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, alors $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, donc l'estimation (2.8) s'étend par continuité à $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$.
En suite, nous prenons $\omega > |\omega_0| + 1$ et considérons le semi-groupe définit par :

$$(S_{-\omega}(t))_{t\geq 0} \quad \text{avec} \quad S_{-\omega}(t) := e^{-\omega t} S(t).$$

Alors, d'après (1.3) dans le théorème théorème 1.9. et pour $x \in H$, $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{R}\,(\omega + is, \mathcal{A})\, x = \mathrm{R}(is, \mathcal{A} - \omega)x = \int_0^{+\infty} e^{-ist} S_{-\omega}(t) x dt.$$

Utilisant la transformée de Fourier

$$F : L^2(\mathbb{R}, H) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, H)$$

nous obtenons

$$\mathrm{R}\,(\omega + is, \mathcal{A})\, x = F(S_{-\omega}(.)x)(s)$$

où on fait une extension de $S_{-\omega}(.)$ sur $\mathbb{R}$

$$S_{-\omega}(t) = \begin{cases} e^{-\omega t} S(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

et puisque $S_{-\omega}(t)_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.
Comme

$$\omega_0 := \inf \Big\{ \omega \in \mathbb{R} \quad \text{il existe} \quad M_\omega \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0 \Big\},$$

donc $\omega_0 \leq \alpha_\varepsilon < \omega_0 + \varepsilon$, on peut choisir $\alpha_\varepsilon = \omega_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \|S_{-\omega}(t)\| = \|e^{-\omega t} S(t)\| &\leq M_\varepsilon e^{-(\omega - \alpha)t} \\ &\leq M_\varepsilon e^{-(\omega - \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2})t} \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}\omega > |\omega_0| + 1 &\Rightarrow \omega > \omega_0 + 1\\ &\Rightarrow \omega - \omega_0 > 1\\ &\Rightarrow -(\omega - \omega_0) < -1\\ &\Rightarrow -(\omega - \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

donc $\|S_{-\omega}(t)\| \leq M_\varepsilon e^{-(1-\frac{\varepsilon}{2})t}$, pour $\varepsilon < 2$ $(S_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable. Nous avons $S_{-\omega}(.)x \in L^2(\mathbb{R}, H)$, car :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|S_{-\omega}(t)x\|^2 dt &= \int_0^{+\infty} \|S_{-\omega}(t)x\|^2 dt\\ &= \|x\|^2 \int_0^{+\infty} \|S_{-\omega}(t)\|^2 dt,\end{aligned}$$

puisque $(S_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable alors, il existe une constante positive α et $M \geq 1$ telle que :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \|S_{-\omega}(t)x\|^2 dt &\leq \|x\|^2 \int_0^{+\infty} M^2 e^{-2\alpha t}\\ &\leq \frac{1}{2}\|x\|^2 M^2.\end{aligned}$$

C'est à ce point que nous utilisons l'hypothèse que H est un espace de Hilbert pour conclure, d'après le théorème (Plancherel) , que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathrm{R}\,(\omega + is, \mathcal{A})\, x\|^2 ds = 2\pi \int_0^{+\infty} \|S_{-\omega}\,(t)\,x\|^2 dt \leq L^2.\|x\|^2$$

pour une certaine constante $L > 0$ et pour $x \in H$.
D'après l'équation résolvante nous avons

$$\begin{aligned}&((\omega + is)I - \mathcal{A})^{-1} + \omega\,(isI - \mathcal{A})^{-1}\,((\omega + is)I - \mathcal{A})^{-1}\\ =\ &(is - \mathcal{A})^{-1}\left((is - \mathcal{A})\,((\omega + is)I - \mathcal{A})^{-1} + \omega\,((\omega + is)I - \mathcal{A})^{-1}\right)\\ =\ &(is - \mathcal{A})^{-1}\,((is - \mathcal{A}) + \omega I)\,((\omega + is)I - \mathcal{A})^{-1}\\ =\ &(is - \mathcal{A})^{-1}\,((is + \omega)I - \mathcal{A})\,((is + \omega)I - \mathcal{A})^{-1}\\ =\ &(is - \mathcal{A})^{-1}\end{aligned}$$

on a

$$\mathrm{R}(is,\mathcal{A}) = \mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A}) + \omega\mathrm{R}(is,\mathcal{A})\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})$$

Pour tout s $\in \mathbb{R}$ et d'après (2.8) on obtient

$$\|\mathrm{R}(is,\mathcal{A})\| \leq M$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{R}(is,\mathcal{A})x\| &= \|\left(\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A}) + \omega\mathrm{R}(is,\mathcal{A})\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})\right)x\| \\
&= \|\left(I+\omega\mathrm{R}(is,\mathcal{A})\right)\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})\,x\| \\
&\leq \left(\|I\| + \|\omega\mathrm{R}(is,\mathcal{A})\|\right)\|\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})x\| \\
&\leq (1+M\omega)\,\|\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})x\|
\end{aligned}$$

pour tout les $s \in \mathbb{R}$ et tout $x \in H$.
En combinant ces faits, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathrm{R}\left(is,\mathcal{A}\right)x\|^2 ds &\leq (1+M\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})x\|^2 ds \\
&\leq (1+M\omega)^2 .L^2.\|x\|^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

pour tout $x \in H$.
Comme $\|S\| = \|S^*\|$ pour chaque $S \in \mathcal{L}(H)$, par symétrie l'estimation est vraie pour le résolvant du générateur $\mathcal{A}^*$ du semi-groupe adjoint $(S(t)^*)_{t\geq 0}$ i.e,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathrm{R}\left(is,\mathcal{A}^*\right)y\|^2 ds \leq (1+M\omega)^2 .L^2.\|y\|^2 \tag{2.10}$$

pour tout $y \in H$.
Ensuite, nous utilisons la formule d'inversion du corolaire 1.2 on conclut que

$$\begin{aligned}
(tS(t)x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\omega+is)t}\left(\mathrm{R}(\omega+is,\mathcal{A})^2x,y\right)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}\left(\mathrm{R}(is,\mathcal{A})x,\mathrm{R}(-is,\mathcal{A}^*)y\right)ds
\end{aligned}$$

pour tous $x \in D(\mathcal{A}^2)$ et $y \in H$. Pour la deuxième égalité, nous avons utilisé le théorème de (Cauchy), qui est applicable puisque $\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})$ est uniformément borné pour $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ et donc

$$\|\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})x\| = \frac{1}{|\lambda|}\|\mathrm{R}(\lambda,\mathcal{A})\mathcal{A}x + x\| \leq \frac{1}{|\lambda|}(M\|\mathcal{A}x\| + \|x\|).$$

Avec, (2.9) , (2.10), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz cela donne

$$\begin{aligned}
(tS(t)x, y) &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathrm{R}(is,\mathcal{A})x\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathrm{R}(is,\mathcal{A}^*)x\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{(1+M\omega)^2 .L^2}{2\pi}\|x\|.\|y\|
\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in D(\mathcal{A}^2)$. Comme $D(\mathcal{A}^2)$ est dense dans H, cela implique

$$\begin{aligned}
\|tS(t)\| &= \sup\left\{|(tS(t)x,\, y)| : x,\, y \in D(\mathcal{A}^2),\ \|x\| = \|y\| = 1\right\} \\
&\leq \frac{(1+M\omega)^2 .L^2}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Par suite $\|S(t)\| \leq \dfrac{(1+M\omega)^2 .L^2}{2\pi}$.
Donc

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\|S(t)\| = 0$$

et par suite $S(t)$ est uniformément exponentiellement stable d'après la proposition 2.1. $\square$

Chapitre 3

Existence globale et stabilité de la solution d'un système de Bresse avec deuxième son.

3.1 Introduction

Le système de Bresse tient compte des déformations de arc d'un cercle soumis aux déplacements longitudinal et vertical et l'angle de rotation d'un filament, notés par w, φ et ψ, respectivement. Le système est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = F_1 & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = F_3 & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

où F_1, F_2 et F_3 désignent les forces extérieures exercées sur l'objet et les coefficients ρ_i, k, k_0, l et b sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Le système de Bresse (3.1) est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes et il a été initialement introduit par Bresse [4]. Lorsque $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, alors (3.1) est purement conservatif. Autrement dit, en prenant en compte les conditions aux bords, son énergie associée définie par la fonctionnelle

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2\right] dx,$$

satisfait $E'(t) = 0$. Par conséquent, l'identité donnée par $E(t) = E(0)$ reste vraie pour tout $t \geq 0$. Cette identité est appelée la propriété de conservation de l'énergie. En outre, Si $l \equiv 0$, alors les deux premières équation de système de Bresse se réduisent au système de Timoshenko bien connu.

Santos et Alemeida júnior [24] ont considéré (3.1) lorsque $F_1 = \gamma_1\varphi_t$, $F_2 = \gamma_2\psi_t$ et $F_3 = \gamma_3 w_t$, avec les conditions initiales et les conditions aux bords de type Dirichlet, et ils ont montré que le système est exponentiellement stable sans imposer aucune condition sur les coefficients. Le même résultat a été obtenu par Soriano et al [28] lorsque $F_1 = a(x)g_1(\varphi_t)$, $F_2 = g_2(\psi_t)$ et $F_3 = \gamma(x)g_3(w_t)$ où $a, \gamma \in L^\infty(0, L)$ et les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont continues et monotones. Un résultat similaire a également été établi par Guesmia et Kafini [10] lorsque

$$F_1 = -\int_0^{+\infty} g_1(s)\varphi_{xx}(x, t-s)ds,$$

$$F_2 = -\int_0^{+\infty} g_2(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds$$

et

$$F_3 = -\int_0^{+\infty} g_3(s)w_{xx}(x, t-s)ds$$

où g_i sont des fonctions différentiables décroissantes satisfaisant quelques hypothèses. Précisément, ils ont établi l'existence et l'unicité de la solution et la stabilité asymptotique de ce système, mais sons imposer aucune condition sur les coefficients. Lorsque $F_1 = F_3 = 0$ et $F_2 = \gamma\psi_t$ avec $\gamma > 0$, Alabau Boussouira et al [1] a montré que le système est exponentiellement stable à condition de

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{et} \quad k = k_0; \tag{3.2}$$

dans le cas contraire le système n'est pas exponentielle stabilité. Dans ce cas, en utilisant la condition aux limites de type Dirichlet, ils ont montré que les solutions décroissante polynomiale vers zéro avec des taux $t^{\frac{-1}{6+\varepsilon}}$ ou $t^{\frac{-1}{3+\varepsilon}}$ pour ε un petit nombre. Le résultat a ensuite été amélioré par Fatori et Monteiro [7].

Concernant le système thermoélastique de Bresse, Liu et Rao [15] considéré

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta_1 = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_{1x} = 0, \\ \rho_3\theta_t - \theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \rho_3\theta_{1t} - \theta_{1xx} + \gamma(w_{tx} - l\varphi_t) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans $(0, L) \times (0, \infty)$, avec des conditions initiales et au bord, et a prouvé un résultat de stabilité exponentielle à condition que (3.2) vérifié. Dans le cas contraire, seule une décroissance de type polynôme est établi, Fatori et Muñoz Rivera [8] considéré (3.3) sans θ_1 et la dernière équation dans (3.3).

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta_1 = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_{1x} = 0, \\ \rho_3\theta_t - \theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0, \end{cases}$$

et obtenu un résultat similaire comme dans [15]. Nous renvoyons le lecteur à [2], [11], [18], [22], [23], [25], [27], [29] et [30] pour d'autres résultats sur le système de Bresse.

Dans le système (3.3) l'équation de la chaleur est régie par la loi de la conduction thermique de Fourier, ce qui indique que le flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. Par ailleurs, il est bien connu que le modèle en utilisant la loi de Fourier classique conduit au paradoxe physique de vitesse infinie de la propagation de la chaleur. En d'autres termes, toute perturbation thermique à un point sera instantanément transféré aux autres parties du corps. Pour surmonter ce paradoxe physique, mais en gardant l'essentiel d'un processus de conduction de la chaleur, de nombreuses théories ont ensuite vu le jour. L'un d'eux est l'avènement des effets du deuxième son qui se posent lorsque la chaleur est transportée par un processus de propagation des ondes au lieu de la diffusion habituelle. La théorie suggère de remplacer la loi classique de Fourier

$$q + \gamma\theta_x = 0,$$

où q est le flux de chaleur et γ est le coefficient de conductivité thermique, par une loi de conduction thermique modifiée dite loi de Cattaneo

$$\tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0,$$

ici, le paramétré $\tau > 0$ représente le temps de relaxation qui décrit le décalage de la réponse du flux de chaleur au gradient de température. Le système de chaleur obtenu est de type hyperbolique et donc, automatiquement, élimine le paradoxe de vitesses infinies.

Dans ce travail, on considère le système de Bresse suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{xt} = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{dans } (0,\infty), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\ q(x,0) = q_0(x) & \text{dans } (0,\infty), \\ w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x) & \text{dans } (0,\infty), \\ \varphi(0,t) = \psi_x(0,t) = w_x(0,t) = \theta(0,t) = 0 & \forall t \geq 0, \\ \varphi_x(1,t) = \psi(1,t) = w(1,t) = q(1,t) = 0 & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

On va prouver l'existence et l'unicité de la solution et la stabilité exponentielle sous la condition suivante :

$$\xi = \left(1 - \frac{\tau k \rho_3}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{\gamma^2\tau}{b}. \tag{3.6}$$

Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous utilisons la méthode de semi-groupe pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du système. Dans la section 3, nous utilisons la méthode d'énergie pour établir la stabilité exponentielle.

3.2 Existence et unicité

Dans cette section, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du système (3.4) et (3.5) en utilisant la méthode de semi-groupe. En pose $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, w, \omega, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t,\ v = \psi_t$, et $\omega = w_t$, le système (3.4) et (3.5) peut êtres écrits sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \mathcal{A}\Phi(t) = 0, & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0)^T, & \end{cases} \tag{3.7}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -u \\ -\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \dfrac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ -v \\ -\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \dfrac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ -\omega \\ -\dfrac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x + \dfrac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \\ \dfrac{1}{\rho_3}q_x + \dfrac{\gamma}{\rho_3}u_x \\ \dfrac{\beta}{\tau}q + \dfrac{1}{\tau}\theta_x \end{pmatrix}.$$

On considérer les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} H^1_*(0,1) &= \left\{ f \in H^1(0,1) : f(0) = 0 \right\}, \\ \tilde{H}^1_\star(0,1) &= \left\{ f \in H^1(0,1) : f(1) = 0 \right\}, \\ H^2_*(0,1) &= H^2(0,1) \cap H^1_*(0,1), \\ \tilde{H}^2_\star(0,1) &= H^2(0,1) \cap \tilde{H}^1_\star(0,1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H^1_*(0,1) \times L^2(0,1) \times \tilde{H}^1_\star(0,1) \times L^2(0,1) \\ &\quad \times \tilde{H}^1_\star(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1). \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{H}$ est muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi, \tilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})dx \\ &+k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})dx + \rho_1\int_0^1 u\tilde{u}dx + b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx \\ &+\rho_2\int_0^1 v\tilde{v}dx + \rho_1\int_0^1 \omega\tilde{\omega}dx + \rho_3\int_0^1 \theta\tilde{\theta}dx + \tau\int_0^1 q\tilde{q}dx.\end{aligned}$$

Alors, le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi \in \mathcal{H} | \varphi \in H_*^2(0,1); \psi, w \in \tilde{H}_\star^2(0,1); u, \theta \in H_*^1(0,1); \\ v, \omega, q \in \tilde{H}_\star^1(0,1); \varphi_x(1) = 0, w_x(0) = \psi_x(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

Maintenant, pour montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone. A cet effet, on a besoin deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone et satisfait, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$,*

$$\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = \beta\int_0^1 q^2 dx \geq 0. \tag{3.8}$$

Preuve.
Pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$, en utilisant le produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= -k\int_0^1 (u_x + v + l\omega)(\varphi_x + \psi + lw)dx \\ &-k_0\int_0^1 (\omega_x - lu)(w_x - l\varphi)dx - b\int_0^1 v_x\psi_x dx \\ &+\rho_1\int_0^1 \left(-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \right) udx \\ &+\rho_2\int_0^1 \left(-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \right) vdx \\ &+\rho_1\int_0^1 \left(-\frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \right) \omega dx \\ &+\rho_3\int_0^1 \left(\frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\gamma}{\rho_3}u_x \right) \theta dx + \tau\int_0^1 \left(\frac{\beta}{\tau}q + \frac{1}{\tau}\theta_x \right) qdx.\end{aligned}$$

Après la simplification et grâce à la formule d'intégration par parties, on obtient (3.8). $\square$

Lemme 3.2. *L'opérateur $I+\mathcal{A}$ est surjectif.*

Preuve.
Soit $G=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8)^T\in\mathcal{H}$, il existe $\Phi\in D(\mathcal{A})$ vérifiant

$$\Phi+\mathcal{A}\Phi=G, \tag{3.9}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} -u+\varphi=g_1 \quad \in H^1_\star(0,1) \\ -k\left(\varphi_x+\psi+lw\right)_x-k_0l(w_x-l\varphi)+\rho_1u=\rho_1g_2 \quad \in L^2(0,1) \\ -v+\psi=g_3 \quad \in \tilde{H}^1_\star(0,1) \\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\gamma\theta_x+\rho_2v=\rho_2g_4 \quad \in L^2(0,1) \\ -\omega+w=g_5 \quad \in \tilde{H}^1_\star(0,1) \\ -k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_1\omega=\rho_1g_6 \quad \in L^2(0,1) \\ q_x+\gamma v_x+\rho_3\theta=\rho_3g_7 \quad \in L^2(0,1) \\ (\beta+\tau)q+\theta_x=\tau g_8 \quad \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{3.10}$$

A partir de $(3.10)_8$, on trouve

$$\theta=\tau\int_0^x g_8(y)dy-(\beta+\tau)\int_0^x q(y)dy, \tag{3.11}$$

et $\theta(0,t)=0$. on remplace $u=\varphi-g_1,\ v=\psi-g_3,\ \omega=w-g_5$, et (3.11) dans $(3.10)_2$, $(3.10)_4$, $(3.10)_6$, et $(3.10)_7$ respectivement, on trouve

$$\begin{cases} -k\left(\varphi_x+\psi+lw\right)_x-k_0l(w_x-l\varphi)+\rho_1\varphi=h_1 \quad \in L^2(0,1) \\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)-\gamma(\beta+\tau)q+\rho_2\psi=h_2 \quad \in L^2(0,1) \\ -k_0(w_x-l\varphi)_x+kl(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_1w=h_3 \quad \in L^2(0,1) \\ -q_x+\rho_3(\beta+\tau)\displaystyle\int_0^x q(y)dy-\gamma\psi_x=h_4 \quad \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$\begin{cases} h_1 &=& \rho_1(g_1+g_2) \\ h_2 &=& \rho_2(g_3+g_4)-\tau\gamma g_8 \\ h_3 &=& \rho_1(g_5+g_6) \\ h_4 &=& -\gamma g_{3x}-\rho_3\left(g_7-\tau\displaystyle\int_0^x g_8(y)dy\right). \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour résoudre le système (3.12) nous considérons

$$B\left((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})\right)=F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}), \tag{3.14}$$

tels que la forme bilinéaire

$$B:\left[H^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times L^2(0,1)\right]^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

définie par :

$$\begin{aligned}
B\left((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})\right) \;=\;& k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\left(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}\right)dx+(\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{q}dx\\
&+b\int_0^1\psi_x\tilde{\psi}_xdx+\rho_2\int_0^1\psi\tilde{\psi}dx-\gamma(\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{\psi}dx\\
&+\rho_1\int_0^1\varphi\tilde{\varphi}dx+\gamma(\beta+\tau)\int_0^1\psi\tilde{q}dx\\
&+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})dx+\rho_1\int_0^x w\tilde{w}dx\\
&+\rho_3(\beta+\tau)^2\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\int_0^x\tilde{q}(y)dy\right)dx
\end{aligned}$$

et la forme linéaire

$$F:\left[H^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times L^2(0,1)\right]\longrightarrow\mathbb{R}$$

définie par :

$$F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})=\int_0^1 h_1\tilde{\varphi}dx+\int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx+\int_0^1 h_3\tilde{w}dx+(\beta+\tau)\int_0^1 h_4\int_0^x\tilde{q}(y)dydx.$$

On pose

$$V=H^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times\tilde{H}^1_\star(0,1)\times L^2(0,1)$$

muni de la norme

$$\|(\varphi,\psi,w,q)\|^2_V=\|(\varphi_x+\psi+lw)\|^2_2+\|w_x-l\varphi\|^2_2+\|\psi_x\|^2_2+\|q\|^2_2$$

comme

$$\int_0^1\left(\varphi_x^2+\psi_x^2+w_x^2\right)dx\le c\int_0^1\left((\varphi_x+\psi+lw)^2+(w_x-l\varphi)^2+\psi_x^2\right)dx, \tag{3.15}$$

Pour l assez petit, les formes B et F sont bornées. De plus pour certain $c > 0$, on a

$$\begin{aligned} B\left((\varphi,\psi,w,q),(\varphi,\psi,w,q)\right) &= k\int_0^1\left(\varphi_x+\psi+lw\right)^2dx+(\beta+\tau)\int_0^1 q^2dx+b\int_0^1\psi_x^2dx \\ &+\rho_1\int_0^1\varphi^2dx+\rho_2\int_0^1\psi^2dx+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx \\ &+\rho_3(\beta+\tau)^2\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\right)^2dx+\rho_1\int_0^x w^2dx \\ &\geq c\|(\varphi,\psi,w,q)\|_V^2. \end{aligned}$$

Donc B est coercive et continue, et que F est continue. Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le système (3.12) admet une solution unique

$$\varphi\in H_\star^1(0,1),\quad \psi\in\tilde H_\star^1(0,1),\quad w\in\tilde H_\star^1(0,1),\quad q\in L^2(0,1).$$

En remplaçant φ dans $(3.10)_1$, ψ dans$(3.10)_3$ et w dans $(3.10)_5$, q dans $(3.10)_8$, on obtient

$$u\in H_\star^1(0,1),\quad v\in\tilde H_\star^1(0,1),\quad \omega\in\tilde H_\star^1(0,1),\quad \theta\in H_\star^1(0,1).$$

En outre, si $(\tilde\psi,\tilde w,\tilde q)\equiv(0,0,0)\in\tilde H_\star^1(0,1)\times\tilde H_\star^1(0,1)\times L^2(0,1)$, alors (3.14) se réduit à

$$k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\tilde\varphi_xdx-k_0l\int_0^1(w_x-l\varphi)\tilde\varphi dx+\rho_1\int_0^1\varphi\tilde\varphi dx=\int_0^1 h_1\tilde\varphi dx,\quad(3.16)$$

Pour tout $\tilde\varphi\in H_\star^1(0,1)$, ceci implique que

$$-k\varphi_{xx}=k\psi_x+l(k+k_0)w_x-(k_0l^2+\rho_1)\varphi+h_1\in L^2(0,1).\qquad(3.17)$$

Par conséquent, par la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il en résulte que

$$\varphi\in H_\star^2(0,1).$$

Par ailleurs, (3.16) est également vrai pour tout $\phi\in C^1([0,1]),\phi(0)=0$ dans $H_\star^1(0,1)$. Par conséquent, pour tous $\phi\in C^1([0,1]),\phi(0)=0$, on a

$$k\int_0^1\varphi_x\phi_xdx-\int_0^1\left(k\psi_x+l(k+k)w_x-(k_0l^2+\rho_1)\varphi+h_1\right)\phi dx=0.$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\varphi_x(1)\phi(1)=0,\quad\forall\phi\in C^1([0,1]),\qquad\phi(0)=0.$$

D'ou

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De même, on obtient

$$\begin{cases} -b\psi_{xx} &= -k\varphi_x - (k+\rho_2)\psi - \gamma(\beta+\tau)\displaystyle\int_0^1 q\tilde{\varphi}dx - lkw + h_2 \quad \in L^2(0,1) \\ -kw_{xx} &= -l(k+k_0)\varphi_x - lk\psi + (\rho_1 + l^2k_0)w + h_3 \quad \in L^2(0,1) \\ -q_x &= -\rho_3(\beta+\tau)\displaystyle\int_0^x q(y)dy + \gamma\psi_x + h_4 \quad \in L^2(0,1), \end{cases}$$

donc, on a

$$\psi, w \in \tilde{H}^2_\star(0,1), \quad q \in \tilde{H}^1_\star(0,1), \quad w_x(0) = \psi_x(0) = 0.$$

On peut appliqués les résultats des régularités des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique $\Phi \in D(\mathcal{A})$ tel que (3.9) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximale. $\square$

Finalement, en utilisant le Lemme 3.1 et le Lemme 3.2, on conclut que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone. Ainsi, par le théorème de Lumer-Phillips, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.1. *Pour tout $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ il existe une solution unique $\Phi \in C([0,+\infty[,\mathcal{H})$ du problème* (3.4) *et* (3.5). *De plus, si $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, alors*

$$\Phi \in C([0,+\infty[, D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,+\infty[,\mathcal{H}).$$

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle de l'énergie de la solution du système (3.4) et (3.5) et en utilisant la méthode d'énergie. On besoin de plusieurs lemmes suivant :

Lemme 3.3. *Soit $(\varphi,\psi,w,\theta,q)$ la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors la fonctionnelle d'énergie définie par :*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau q^2\right] dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left[k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2\right] dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Satisfait

$$E'(t) = -\beta\int_0^1 q^2 dx \le 0, \qquad \forall t \ge 0. \tag{3.19}$$

Preuve.
En multipliant l'équation $(3.4)_1$ par φ_t et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi_{tt} dx - k \int_0^1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw)_x dx - lk_0 \int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi) dx = 0.$$

Et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on déduit que

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1 \varphi_{xt}(\varphi_x + \psi + lw)dx - lk_0 \int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx = 0. \quad (3.20)$$

En multipliant l'équation $(3.4)_2$ par ψ_t et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi_{tt} dx - b\int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + lw)dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0,$$

puis, en intégrant par parties avec les conditions au bord impliquent

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + lw)dx + \gamma\int_0^1 \psi_t\theta_x dx = 0. \quad (3.21)$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(3.4)_3$ par w_t et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^1 w_t w_{tt} dx - k_0 \int_0^1 w_t(w_x - l\varphi)_x dx + lk\int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)dx = 0,$$

en utilisant encore l'intégration par parties avec les conditions au bord, on trouve

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 w_t^2 dx - k_0\int_0^1 w_{xt}(w_x - l\varphi)dx + lk\int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)dx = 0. \quad (3.22)$$

En multipliant l'équation $(3.4)_4$ par θ et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\rho_3 \int_0^1 \theta\theta_t dx + \int_0^1 \theta q_x dx + \gamma\int_0^1 \theta\psi_{xt} dx = 0,$$

la formule d'intégration par parties et les conditions au bord, on déduit que

$$\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta q_x dx - \gamma\int_0^1 \theta_x\psi_t dx = 0. \quad (3.23)$$

De même, en multipliant l'équation $(3.4)_5$ par q et en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\tau\int_0^1 qq_t dx + \beta\int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q\theta_x dx = 0,$$

et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord, on trouve

$$\int_0^1 q\theta_x dx = \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx. \tag{3.24}$$

En remplaçant (3.24) dans (3.23), on obtient

$$\gamma\int_0^1 \theta_x\psi_t dx = \frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx, \tag{3.25}$$

puis, on remplace la dernière égalité dans (3.21), on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+lw)dx\\ &+\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx = 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Finalement, en additionnant (3.20), (3.22) et (3.26), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi_t(\varphi_x+\psi+lw)dx\\ &+\frac{\rho_3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 q^2 dx + \beta\int_0^1 q^2 dx\\ &+\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 w_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx k_0\int_0^1 (w_x-l\varphi)_t(w_x-l\varphi)dx\\ &+k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)_t(\varphi_x+\psi+lw)dx = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) = -\beta\int_0^1 q^2 dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau q^2\right] dx\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^1 \left[k(\varphi_x+\psi+lw)^2 + k_0(w_x-l\varphi)^2\right] dx.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_1(t) := \tau\rho_3\int_0^1 \theta\int_0^x q(y)dydx$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, *l'estimation*

$$F_1'(t) \le -\frac{\rho_3}{2}\int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_1\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 q^2 dx. \tag{3.27}$$

Preuve.
En prenant la dérivée de F_1, en utilisant les équations quatrième et cinquième de (3.4) et en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \tau\gamma \int_0^1 q\psi_t dx + \tau \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad -\beta\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(y)dydx. \end{aligned}$$

En appliquant alors l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwarz, avec $\varepsilon_1 > 0$ pour obtenir (3.27). $\square$

Lemme 3.5. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5)*. Alors la fonctionnelle*

$$F_2(t) := -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(y)dydx$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_2,\ \varepsilon_3 > 0$*, l'estimation*

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ &\quad +\varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Preuve.
En calculant la dérivée de F_2, puis en exploitant les équations deuxième et quatrième de (3.4), et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q\psi_t dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta\psi_x dx \\ &\quad +\frac{k\rho_3}{\gamma} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) \int_0^x \theta(y)dydx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwarz, on obtient (3.28). $\square$

Lemme 3.6. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5)*. Alors la fonctionnelle*

$$F_3(t) := -\rho_1 \int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx$$

vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad +c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Preuve.
En calculant la dérivée de F_3, et en utilisant (3.4) et (3.5), on trouve

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ & -k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et de Poincaré, on obtient (3.29). □

Lemme 3.7. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_4(t) := \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx$$

vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} F_4'(t) &\leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Preuve.
En prenant la dérivée de F_4 et en utilisant l'équation deuxième de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} F_4'(t) &= -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + lw) dx \\ & + \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et de Poincaré, on obtient l'estimation (3.30). □

Lemme 3.8. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors la fonctionnelle*

$$F_5(t) := -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw) dx$$

vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} F_5'(t) &\leq -lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 w_t^2 dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Preuve.
En calculant la dérivée de F_5 et en utilisant les équations première et troisième de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} F_5'(t) &= -lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx - l\rho_1\int_0^1 w_t^2dx + l\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2dx \\ &\quad +lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx - \rho_1\int_0^1 \psi_t w_t dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve (3.31). □

Lemme 3.9. *Soit* $(\varphi,\psi,w,\theta,q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors, sous la condition* $k=k_0$, *la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_6(t) &:= -\rho_1\int_0^1(w_x-l\varphi)\int_0^x w_t(y)dydx \\ &\quad -\rho_1\int_0^1 \varphi_t\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)(y)dydx \end{aligned}$$

vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} F_6'(t) &\leq -\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\varphi_t^2dx - k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx + \rho_1\int_0^1 w_t^2dx \\ &\quad +k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx + \frac{\rho_1}{2}\int_0^1\psi_t^2dx. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Preuve.
En calculant la dérivée de F_6, en utilisant les équations première et troisième de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} F_6'(t) &= -\rho_1\int_0^1\varphi_t^2dx - k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx + \rho_1\int_0^1 w_t^2dx \\ &\quad +k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)^2dx - \rho_1\int_0^1\varphi_t\int_0^x\psi_t(y)dydx \\ &\quad +l(k-k_0)\int_0^1(w_x-l\varphi)\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)(y)dydx. \end{aligned} \tag{3.33}$$

En utilisant l'intégration par parties et les conditions aux bord de (3.5), et l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwarz, avec $k=k_0$, donne (3.32). □

Lemme 3.10. *Soit* $(\varphi,\psi,w,\theta,q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *Alors sous* *la condition $k = k_0$, la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_7(t) &:= \rho_2 \int_0^1 \psi_t \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx \\ &+ \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta \varphi_t dx - \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &- \frac{bl^2 \rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_t \psi dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_t \psi dx \end{aligned}$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} F_7'(t) &\leq -\frac{k}{2} \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + lw\right)^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 w_t^2 dx + \frac{2b^2 l^2}{k} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &+ \varepsilon_5 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^1 q^2 dx \\ &+ c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b}{\gamma\tau} \xi \int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Preuve.
On dérive F_7, on obtient

$$\begin{aligned} F_7'(t) &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t \left(\varphi_{xt} + \psi_t + lw_t\right) dx \\ &+ \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_x dx - \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\ &+ \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx - \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q_t \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &- \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 q \left(\varphi_{xt} + \psi_t + lw_t\right) dx - \frac{bl^2 \rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &- \frac{bl^2 \rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi_{tt} \psi dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_{tt} \psi dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_t \psi_t dx. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Maintenant, on prend les termes de côté droit de (3.35), et en utilisant les équations (3.4) et (3.5) et l'intégration par partie

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx &= -k \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + lw\right)^2 dx \\ &- \gamma \int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &- b \int_0^1 \psi_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_x dx, \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}\psi_x dx &= k\int_0^1 \psi_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right)_x dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^1 \psi_x \left(w_x - l\varphi\right) dx,\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\rho_3 \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx = \int_0^1 q\varphi_{xt} dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx, \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx &= -\frac{k}{\rho_1}\int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad + \frac{lk_0}{\rho_1}\int_0^1 \theta\left(w_x - l\varphi\right) dx,\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}-\int_0^1 q_t \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx &= \frac{\beta}{\tau}\int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\tau}\int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx,\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}-\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}\psi dx &= b\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \psi\left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad - \gamma\int_0^1 \theta\psi_x dx,\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^1 w_{tt}\psi dx &= -k_0 \int_0^1 \psi_x \left(w_x - l\varphi\right) dx \\ &\quad - kl\int_0^1 \psi\left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx.\end{aligned} \tag{3.42}$$

En remplace (3.36) - (3.42) à (3.35), et on utilise (3.6) on obtient

$$\begin{aligned}F_7'(t) &= -k\int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + lw\right)^2 dx + \left(\rho_2 - \frac{bl^2\rho_2}{k_0}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \left(l\rho_2 + \frac{bl\rho_1}{k_0}\right)\int_0^1 \psi_t w_t dx + \frac{b\xi}{\tau\gamma}\int_0^1 \theta_x\left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx \\ &\quad - \frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\psi_t dx - \frac{bl}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 qw_t dx \\ &\quad + \frac{blk_0\rho_3}{\gamma\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta\left(w_x - l\varphi\right) dx - \frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \theta\psi_x dx \\ &\quad + \frac{b\beta}{\tau\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q\left(\varphi_x + \psi + lw\right) dx + \frac{b^2 l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + bl\left(\frac{k_0}{k} - 1\right)\int_0^1 \psi_x\left(w_x - l\varphi\right) dx.\end{aligned} \tag{3.43}$$

En utilisant l'inégalité de Young et $k = k_0$. on trouve (3.34).

$\square$

Théorème 3.2. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q)$ *la solution du problème* (3.4) *et* (3.5). *On suppose que* $\xi = 0$ *et* $k = k_0$. *Alors, pour* l *assez petit, la fonctionnelle d'énergie* (3.18) *satisfait,*

$$E(t) \leq c_0 e^{-c_1 t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.44}$$

où c_0 *et* c_1 *sont des constantes positives.*

Preuve.
Pour $N, N_i > 0$, On définit la fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + \sum_{i=1}^{7} N_i F_i(t). \tag{3.45}$$

Calculs directs, à l'aide de (3.19), (3.32) et (3.34) et en définissant

$$N_3 = N_6 = 2l, \quad N_4 = \frac{9bl^2}{k} N_7, \quad N_5 = 2$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\; & -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - [l\rho_1 - \varepsilon_4 N_7] \int_0^1 w_t^2 dx - [2lk - \varepsilon_5 N_7] \\
& \times \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_3}{2} N_1 - cN_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right)\right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[\frac{5b^2 l^2}{2k} N_7 - \varepsilon_3 N_2 - c\right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_2}{2} N_2 - \varepsilon_1 N_1 - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) - c\right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \left[k \left(\frac{1}{2} - 9l^2\right) N_7 - \varepsilon_2 N_2 - c\right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\
& - \left[\beta N - cN_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - cN_2 - cN_7 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)\right] \int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

D'autre part, en fixant

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_2 N_2}{4N_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{7kN_7}{16N_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{9b^2 l^2 N_7}{4kN_2}, \quad \varepsilon_4 = \frac{l\rho_1}{2N_7}, \quad \varepsilon_5 = \frac{lk}{N_7},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 w_t^2 dx - lk \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_3}{2} N_1 - cN_2 \left(1 + \frac{N_2}{N_7} \right) - cN_7 \left(1 + N_7 \right) \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
& - \left[\frac{b^2 l^2}{4k} N_7 - c \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_2}{4} N_2 - cN_7 (1 + N_7) - c \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \left[k \left(\frac{1}{4} - 3l \right) \left(\frac{1}{4} + 3l \right) N_7 - c \right] \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi + lw \right)^2 dx \\
& - \left[\beta N - cN_1 \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right) - cN_2 - cN_7 \left(1 + N_7 \right) \right] \int_0^1 q^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A ce point, étant donné que l est assez petit pour un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\frac{1}{4} - 3l > 0$, on choisit N_7 assez grand tel que

$$\alpha_0 := \frac{b^2 l^2}{4k} N_7 - c > 0,$$

et

$$\alpha_1 := k \left(\frac{1}{4} - 3l \right) \left(\frac{1}{4} + 3l \right) N_7 - c > 0.$$

En plus, on prend N_2 assez grand tel que

$$\alpha_2 := \frac{\rho_2}{4} N_2 - cN_7 (1 + N_7) - c > 0.$$

Aussi, on prend N_1 assez grand tel que

$$\alpha_3 := \frac{\rho_3}{2} N_1 - cN_2 \left(1 + \frac{N_2}{N_7} \right) - cN_7 (1 + N_7) > 0.$$

D'autre part, l'exploitation (3.18) et (3.45), ainsi que les inégalités de Young, de Poincaré et de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$(N - c) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c) E(t). \tag{3.48}$$

On choisit N assez grand tel que

$$\alpha_4 := \beta N - cN_1 \left(1 + \frac{N_1}{N_2} \right) - cN_2 - cN_7 \left(1 + N_7 \right) > 0.$$

et

$$\alpha_5 := N - c > 0.$$

par conséquent, (3.47) et (3.48), respectivement, deviennent

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \quad \leq \quad & -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 w_t^2 dx - lk \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& -\alpha_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \alpha_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \alpha_0 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& -\alpha_1 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \alpha_4 \int_0^1 q^2 dx
\end{aligned} \tag{3.49}$$

et

$$\alpha_5 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_6 E(t), \tag{3.50}$$

où $\alpha_6 = N + c$.
Utilisant (3.18), l'inégalité (3.49) devient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.51}$$

pour certains $c_2 > 0$.
Une combinaison de (3.50) et (3.51) donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_1 \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.52}$$

où $c_1 = \dfrac{c_2}{\alpha_6}$. Une intégration simple de (3.52) sur $(0, t)$ on trouve

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-c_1 t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.53}$$

Finalement, en combinant (3.50) et (3.53), nous obtenons (3.44). $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire. On a étudié l'existence et l'unicité de solution d'un système unidimensionnel de Bresse, on obtient la stabilité exponentielle et on utilise la méthode d'énergie.

Bibliographie

[1] Alabau-Boussouira, F., Muñoz Rivera, J.E., Almeida Júnior, D.S. : Stability to weak dissipative Bresse system. J. Math. Anal. Appl. 374(2), 481–498 (2011)

[2] Alves, M.O., Fatori, L.H., Silva, J., Monteiro, R.N. : Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system. Math. Meth. Appl. Sci. 38(5), 898–908 (2015)

[3] D. Azé, Elements d'analyse convexe et variationnelle, ellipses, Paris 1999.

[4] Bresse, J. : Cours de Mecanique Appliquee par M. Bresse Rsistance des Matriaux et Stabilit des Constructions. Mallet-Bachelier, Paris (1859)

[5] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[6] K. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995

[7] Fatori, L.H., Monteiro, R.N. : The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system. Appl. Math. Lett. 25(3), 600–604 (2012)

[8] Fatori, L.H., Munoz Rivera, J.E. : Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. IMA J. Appl. Math. 75(6), 881–904 (2010)

[9] Gearhart, L. : Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. Trans. AMS 236, 385–394 (1978)

[10] Guesmia, A., Kafini, M. : Bresse system with infinite memories. Math. Methods Appl. Sci. 38(11), 2389–2402 (2015)

[11] Han, Z., Xu, G. : Spectral analysis and stability of thermoelastic Bresse system with second sound and boundary viscoelastic damping. Math. Methods Appl. Sci. 13(4), 1395–1406 (2013)

[12] Huang, F. : Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space. Ann. Diff. Eqs. 1(1), 43–56 (1985)

[13] Ioan I.Vrabie, C_0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003

[14] J. L. Lions, "quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires," Dunod, Gaulthier-Villars, Paris (1969).

[15] Liu, Z., Rao, B. : Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. Z. Angew. Math. Phys. 60(1), 54–69 (2008)

[16] Liu, Z., Zheng, S. : Semigroups Associated with Dissipative Systems, vol. 398. Chapman Hall/CRC, London (1999)

[17] S. LUBKIN, C_0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[18] D.Ouchenane, A stability result of a Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, Georgian Mathematical Journal, 2014.

[19] Pazy, A. : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York (1983)

[20] J. Pierre Raymond, Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.

[21] Prüss, J. : On the spectrum of C_0 -semigroups. Trans. AMS 284, 847–857 (1984)

[22] Said-Houari, B., Hamadouche, T. : The Cauchy problem of the Bresse system in thermoelasticity of type III. Appl. Anal. (2015). doi : 10.1080/00036811.2015.1089237

[23] Said-Houari, B., Hamadouche, T. : The asymptotic behavior of the Bresse–Cattaneo system. Commun. Contemp. Math. 18, 1550045 (2015)

[24] Santos, M.L., Almeida Júnior, D.S. : Numerical exponential decay to dissipative Bresse system. J. Appl. Math. 2010, 1–17 (2010)

[25] Santos, M.L., Soufyane, A., Almeida Júnior, D.S. : Asymptotic behavior to Bresse system with past history. Q. Appl. Math. 73(1), 23–54 (2015)

[26] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equation," By the American Mathematical Society, (1997)

[27] Soriano, J., Rivera, J.M., Fatori, L. : Bresse system with indefinite damping. J. Math. Anal. Appl. 387(1), 284–290 (2012)

[28] Soriano, J.A., Charles, W., Schulz, R. : Asymptotic stability for Bresse systems. J. Math. Anal. Appl. 412, 369–380 (2014)

[29] Soufyane, A., Said-Houari, B. : The effect of the wave speeds and the fractional damping terms on the decay rate of the Bresse system. Evol. Equ. Control Theory 3(4), 713–738 (2014)

[30] W. Walter, "Ordinary Differential Equations," Springer-Verlage, New York, Inc, (1998).

[31] Wehbe, A., Youssef, W. : Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks. J. Math. Phys. 51(10), 103523 (2010)