REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES

DEPERTEMENT DE MATHS ET INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en

Mathématiques, Option : Mathématiques

Thème

Les applications ouvertes et ses applications

Proposé et Encadré par :
Pf: Mokhtari Abd-el-Kader

Présenté par :
- Allali Amel.
- Guermit Madiha.
- Ben Saïdane Mebarka

N° d'ordre:……… 2013-PFE/DGI

Remerciements :

Nos vifs remerciements A notre cher et dynamique professeur Mokhtari Abdelkader, pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Aussi que, et plus particulièrement tous les enseignants Mrs : Smail Brahim, Chettih Ali, Ouinten Youcef, le professeur Benyattou Ben Abderrahmane, le professeur Belabbaci Youcef.

Nos remerciements vont également à : Mr. Messelmi ainsi qu'à tout le personnel de la bibliothèque qui ont mis à notre disposition tous les livres disponibles.

Sans oublier tout le personnel, les étudiants du département de maths et informatique.

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participés de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail

A ma chère mère Nacera :

Tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A mon cher père aissa :

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

A mon très cher mari Belkacem :

La lumière de mon chemin, je te remercie de ta patience, tu m'as aidé toujours pour avancer. Et mon petit Ishak mon fils.

A ma deuxième mère: ma belle-mère Fatima.

A ma très chère sœur bien aimé Fatima, son mari Ahmed et leurs filles Nouha, Malek :

En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour toi.

A mes très chères âmes-sœurs : Loubna, Halima et Zhairo qui m'ont apporté un soutien moral et encourageant.

A mes cher frères : Mustapha, M'hamed, Mahmoud, aimad-eddine : Mes anges gardiens et mes fidèles compagnons.

A mes chère belles sœurs : oum-essad, Noura et Amina.

J'attache mes trinômes Madiha et Mbarka et tous mes camarades.

Merci d'être toujours près de moi.

Amel.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail premièrement à mon Dieu qui m'a donné la force et la vitalité afin d'avoir pour réaliser mes rêves et l'obtention de ce diplôme.

Je dédie à mon seul ; puis à mes chers parents et leurs tendresses, leurs encouragements durant mes études.

A mes sœurs, à Mes frères.

Dans ce travail j'attache une importance à monsieur Mokhtarie Abdelkader, à mes trinômes Amel et Nadiha, à mes amies et toutes enseignants de primaire, CEM, Lycée, et Université.

A ceux qui m'aiment, je dédie ce travail.

Mebarka.

Dédicace :

Je dédie ce modeste travail de mémoire :

Premièrement à mes parents qui n'ont jamais cessé de m'aider et m'encourager dans la poursuite de mes études.

Ma sœur Fatima Zohra, mes frères, ma grande famille Guermit et Laidi.

Dans ce travail j'attache mes trinômes Amel et Mebarka et mes amies de primaires, CEM, Lycée, et université.

Finalement à ceux qui m'aiment, je dédie ce travail.

Madiha.

Table des matières :

Introduction :

Ce mémoire présente le théorème de l'application ouverte et le théorème du graphe fermé et ses applications.

Il se décompose en quatre chapitres.

Dans le premier : nous allons présenter des rappels concernant quelques notions de la topologie.

Dans le second chapitre : nous allons présenter le principe des applications et le théorème de l'application ouverte, aussi avec ses applications.

Dans le troisième chapitre : le théorème du graphe fermé et ses applications

Le dernier chapitre : nous allons présenter des exemples et des contres exemples sur les deux théorèmes.

En fin la conclusion générale.

Les espaces normés :

1- Espace normé :

Un espace vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé ou simplement un espace normé, le réel $\|\upsilon\|$ est appelé la norme du vecteur υ.

On appelle norme sur E une application :

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \|x\|$$

Vérifiant :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E.$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E.$

2- Espace métrique :

Un ensemble M d'éléments $x, y, \ldots$ s'appelle espace métrique s'il y a une règle qui permet de faire correspondre à deux points quelconque x, y un nombre $d(x, y)$ (distance de x à y) et satisfait aux conditions suivantes :

- $d(x, y) > 0$ **Pour** $x \neq y$; $d(x, x) = 0$ **Pour tout** x.
- $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y$ **(symétrie de la distance).**
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. $\forall x, y, z$ **(Inégalité de triangle).**

3- Espace métrique complet :

Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X converge vers un point $p \in X$.

***<u>Suite de Cauchy :</u> soit $(\mathcal{U}_n)$ une suite de V. On dit que $(\mathcal{U}_n)$ est une suite de Cauchy si :**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \ \forall n > p \geq N, \|\mathcal{U}_{n+p} - \mathcal{U}_n\| \leq \varepsilon.$$

4- Espace de Banach :

Un espace vectoriel normé est dit complet pour la norme $\| . \|_v$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme) un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

5- Ensemble ouvert :

Un ensemble $\mathcal{U}$ dans un espace métrique M s'appelle ensemble ouvert ou domaine si tout point x_0 de l'ensemble $\mathcal{U}$ est son point intérieur c'est-à-dire il existe une boule ouverte (dont le rayon peut dépendre de x_0) centrée en x_0 et contenue dans $\mathcal{U}$

Ainsi, une boule ouverte centrée en x_1

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} : \mathbf{d}\ )(\mathbf{x}, x_1) < \mathbf{r}.$$

6- Ensemble fermé :

Un ensemble F□ M est dit fermé s'il contient tous ses points d'accumulations.

7- voisinage :

Toute boule de centre x_0 s'appelle voisinage de ce point.

Un point x_0 s'appelle point intérieur d'un ensemble E □ M s'il existe un voisinage inclus dans E.

Applications :

1-Application injective :

On dit qu'une application f : A $\longrightarrow$ B est injective si ceux éléments distincts de A ont des images distincts, c'est-à-dire si : $f(\alpha) = f(\alpha') \Rightarrow \alpha = \alpha'$.

2-Application surjective :

On dit qu'une application f : A $\longrightarrow$ B est surjective si tout b $\in$ B est l'image d'un élément a $\in$ A , c'est-à-dire si : b $\in$ B $\Rightarrow$ $\exists$ a $\in$ A tel que $f(a) = b$.

3-Application bijective :

On dit qu'une application f : A $\longrightarrow$ B est bijective si elle est injective et surjective.

4-Application inverse :

On dit que f^{-1} application réciproque (inverse) de f est de B dans A si f a la fois injective et surjective.

5-Application continue et isomorphe :

Une application injective de l'espace X sur tout l'espace Υ et qui conserve les opérations linéaires s'appelle isomorphisme.

6-fonction holomorphe :

Une fonction f : $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe si, en chaque point z_0 de Ω les taux d'accroissement

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Admet une limite lorsque z tend vers z_0 , dans ce cas on note $f'(z_0)$, cette limite lorsque $\Omega = \mathbb{C}$ la fonction est dite entière.

7-Opérateur linéaire :

Une application A :X $\longrightarrow$ Υ d'un espace vectoriel X dans un espace vectoriel Υ (sur le même corps $\mathcal{K}$) s'appelle opérateur linéaire si les conditions :

$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$ sont satisfaites pour tous x_1 et x_2 de l'espace X quels que soient les nombres α_1 et α_2 du corps $\mathcal{K}$.

8-Opérateur linéaire continue :

Un opérateur linéaire A d'un espace normé X dans un espace normé Y est dit continu pour $x = x_0 \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0 \text{ tel que } \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon .$$

9-Opérateur linéaire continue et borné :

Un opérateur linéaire A d'un espace X dans un espace Y est dit borné s'il est borné sur la boule unité de l'espace X, de sorte que

$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\| \leq c$ Avec une constante fixe c.

Dans ce cas, la quantité : $\|A\| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax|$.

S'appelle norme de l'opérateur A.

Pour tout vecteur $x \in X$, on a $|\frac{x}{|x|}|=1$, d'où $|A\frac{x}{|x|}| \leq \|A\|$ et par conséquent

$|Ax| \leq \|A\| \, |x|$.

Si un opérateur linéaire A est borné, il est continue en tout point x_0 de l'espace X .

Théorème de Baire :

Si un espace métrique complet M est mis sous la forme d’une somme dénombrable de ses sous-ensembles fermés A_1, A_1,…, alors :

L’un au moins de ces sous-ensembles contient une boule de l’espace M.

Théorème de Banach :

Soient X et Y deux espaces de Banach et T$\in$ L_a(X, Y) une application bijective.

Alors on a T$\in$ L(X, Y) et T^{-1} $\in$ L(X, Y) ou bien T□L(X, Y) et T^{-1} $\notin$ L(X, Y),

C’est-à-dire les opérateurs T et T^{-1} sont en même temps continus ou discontinus.

Applications ouvertes et ses applications :

1-Définition :

Soient X et Y deux espaces normés (ou métrique).

L'application f ϵ F(X, Y) est une application ouverte si l'image de toute ensemble ouvert de X est un ensemble ouvert de Y.

Evidemment, si f^{-1} existe et est continue sur Y, elle est une application ouverte.

D'autre part, chaque fonction holomorphe non constante sur un ouvert Ω ϵ ℂ est une application ouverte indépendamment si elle est injective ou non.

Le même résultat est vrai pour un opérateur T ϵ **L(X, Y) qui est surjectif.**

2-Principe de l'application ouverte :

***si X et Y sont deux espaces de Banach, on peut caractériser les opérateurs linéaires continus par leurs graphes.**

De plus, si T ϵ L(X, Y) est surjectif, T est aussi une application ouverte.

Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur T ϵ L(X, Y) est régulier,

Si :

a) T(X) = Y.

b) T^{-1} existe sur Y et T^{-1} ϵ L(X, Y).

**** soient X et Y deux espaces de Banach si T ϵ L(X, Y) et Y = Tx alors T est un opérateur ouvert.**

Preuve :

Puisque X, Y sont des espaces normés et puisque T est linéaire, il suffit démontrer que T $(B_x(0.1))$ contient une boule $B_y(0.\rho)$, $\rho > 0$;

En d’autres mots,

Nous montrons qu’il existe un $\rho > 0$, tel que Y,

$\| y \| < \rho$ est l’image d’un x, $\| x \| < 1$.

Notons d’abord que X = $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} n B_X(0.1)$

Et

Montrons que Y = $\bigcup \overline{nT(B_X(0.1))}$.

En effet pour y ϵ Y, nous avons un x ϵ X tel que

Y = Tx , T est surjectif.

Si $\| x \| < K \in \mathbb{N}$, y ϵ $T(KB_x(0.1)) = K\,T(B_x(0.1))$.

Y étant un espace de Banach, appliquant le théorème de Baire d’après qui il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\overline{T(n_0 B_X(0.1))} = n_0 \overline{T(B_X(0.1))}$$

Contient un ensemble ouvert non vide U.

Puisque T est linéaire

$T(B_x(0.1))$ et $\overline{T(B_X(0.1))}$ sont convexes et $-U \subset n_0$

$\overline{T(B_X(0.1))}$ implique que l’ensemble U_1 = ½ (U-u) $\subset n_0\overline{T(B_X(0.1))}$.

Notons que U_1 est ouvert et 0 ϵ U_1,

C’est-à-dire

U_1 est un voisinage de l’origine,

Donc

il existe un $\rho' > 0$ tel que :

$$B_x(0.\rho') \ \square \ n_0 \overline{T(B_x(0.1))}$$

Et en posons $\rho_1 < \rho'/_{n_0}$, nous avons :

$$B_y(0.\rho_1) \ \square \ \overline{T(B_x(0.1))}$$

Ce qui équivaut $\rho = \rho_1/_2$ à :

$$B_y(0.\rho) \ \square \ \overline{T\left(B_x\left(0.\frac{1}{2}\right)\right)}$$

Il ne reste à montre que

$$\overline{T\left(B_x\left(0.\frac{1}{2}\right)\right)} \subset \mathrm{T}\ (B_x(0.1))$$

Et le théorème est établi.

Fixons y ϵ $\overline{T\left(B_x\left(0.\frac{1}{2}\right)\right)}$.

Il existe donc un x_1,

$$\square\, x_1 \,\square \leq \frac{1}{2}\,,$$

tel que

$$\square\, Tx_1 - y \,\square < \frac{\rho}{2}\,.$$

Donc :

$$y_1 = Tx_1 - y \ \epsilon \ B_y(0.\rho/2) \ \square \ \overline{T\left(B_x\left(0.\frac{1}{4}\right)\right)}\ .$$

D’après le même argument, il existe argument, il existe un x_2,

$$\| x_2 \| \leq \frac{1}{4} ,$$

tel que :

$$\| Tx_2 - y_1 \| = \| Tx_2 + Tx_1 - y \| < 2^{-2}\rho$$

Et

$$y_2 = Tx_2 + Tx_1 - y \in B_y(0.2^{-2}\rho) \subset \overline{T(B_X(0.2^{-3}))} .$$

Nous continuons de cette façon et nous obtenons une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$

Telle que :

a) $\| x_n \| < 2^{-n}$.

b) $\| T(\sum_{k=1}^{n} x_k) - y \| < 2^{-n}\rho$

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ **;** $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Cauchy et X un espace de Banach, la suite $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge vers un élément x, $\| x \| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$.

Puisque T est continu, nous obtenons de b) ci-haut que Tx = Y.

3-Théorème sur l’application ouverte (Banach) :

Soit A un opérateur linéaire continu appliquant d’une façon bijectif un espace normé et complet X sur un espace normé et complet Y.

Alors l’opérateur A transforme tout ensemble ouvert G $\subset$ X en un ensemble ouvert f(G) $\subset$ Y.

Preuve :

Désignons par V_r la boule $\{x\colon\ |x| < r\}$.

Nous allons d’abord démontrer que la fermeture de l’ensemble A(V_1) dans Y.

Par l’hypothèse, on a :

$$Y = A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(V_n).$$

D’autre plus, Y =$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(V_n)}$.

en vertu du théorème de Baire.

Il existe un numéro n=N tel que l’ensemble $\overline{A(V_N)}$ contienne une boule

$$\{y\colon\ |y - y_0| < \varepsilon\}$$

Comme l’ensemble $\overline{A(V_N)}$ est évidemment équilibré, il contient également la boule

$$\{y\colon\ |y + y_0| < \varepsilon\}$$

De plus, l’ensemble $\overline{A(V_N)}$ est convexe (puisqu’un opérateur linéaire transforme un ensemble convexe en un ensemble convexe, et la fermeture d’un ensemble convexe est convexe) et contient donc la boule

$$w_c = \{y\colon\ |y| < \varepsilon\}$$

Incluse dans l’enveloppe convexe de deux boules mentionnées.

Pour la raison d’homothétie, il est clair que, quel que soit $\rho > 0$, on a l’inclusion

$$w_\rho \subset \overline{A(V_{N\rho})}$$

En particulier, on a $w_{\varepsilon/N} \subset \overline{A(V_1)}$ ce qu'il nous fallait.

Montrons à présent que $A(V_1)$ lui-même (et non seulement sa fermeture) contient la boule

$$w_{\varepsilon/(2N)} \subset \overline{A(V_{1/2})}$$

Il est possible de choisir un point $y_1 \epsilon\, A(V_{1/2})$ ont proche que l'on veut du point y.

Par exemple, on peut le choisir de façon à avoir

$$|y - y_1| < \varepsilon/(4N)$$

Vu que $w_{\varepsilon/(4N)} \subset \overline{A(V_{1/4})}$,

on peut trouver de même un point $y_2 \epsilon\, A(V_{1/4})$

tel que

$$|y - y_1 - y_2| < \varepsilon/(8N)$$

En continuant le procède on construit, pour tout n= 1, 2, … un point $y_n \epsilon\, A(V_{1/2^n})$

Tel que :

$$|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_n| < \varepsilon/(2^{n+1}N)$$

Par construction, on a :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Or :

$$y_n = Ax_n$$

Ou :

$$x_n \epsilon V_{1/2^n}$$

De sorte que

$$\|x_n\| < 1/2^n$$

L'espace X étant complet, la série $x_1, x_2, \dots$ converge ;

Soit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Comme l'opérateur A est continu,

$$Ax = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

De plus :

$$\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Par conséquent, la boule $w_{\varepsilon/(2N)}$ est continue dans l'image de la boule V_1, ce qu'on affirmait.

Toujours pour la raison d'homothétie, on a

$$w_\rho \, \square \, A\left(V_{\varepsilon\rho/(2N)}\right)$$

Pour tout $\rho > 0$.

En particulier, il résulte de $\|x - x_0\| < \delta$, que :

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| < \delta_{\varepsilon/(2N)}.$$

De sorte que l'image A(U) de la boule

$$U = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$$

Contient la boule

$$\{y : \|y - Ax_0\| < \delta_{\varepsilon/(2N)}\}$$

Il en découle que l'image de tout ensemble ouvert G □ X est un ensemble ouvert dans Y.

4-Conséquences des applications :

a) **Si A est une application continue et isomorphe d'un espace normé et complet X sur un espace normé et Y,**
Alors
L'application inverse A^{-1} est elle aussi continue.

Preuve :

Dans ce cas, l'opérateur inverse A^{-1} est définit d'une façon univoque et est évidement linéaire de même que A.

En vertu du théorème procède, l'image réciproque par l'opérateur A^{-1} de tout ensemble ouvert $G \subset X$ est l'ensemble ouvert $AG \subset Y$.

En particulier, l'image réciproque de la boule

$$\{x\colon \|x\| < \varepsilon\}$$

Contient une boule

$$\{y\colon \|y\| < \delta\}$$

Ce qui signifie la continuité de l'application A^{-1}.

b) **Si un espace vectoriel L est complet par rapport à chacune des deux normes**

$\|x\|_1$ et $\|x\|_2$, alors l'existence d'une constante c_1 telle que :

$$\|x\|_2 \geq c_1 \|x\|_1 \quad \text{pour tout } x \in L$$

Implique l'existence d'une constante c_2 telle que :

$$\|x\|_1 \geq c_2 \|x\|_2 \quad \text{pour tout } x \in L$$

Preuve :

Considérons l'application identique A de l'espace normé X que l'on obtient en munissant L de la norme $\|x\|_2$ sur l'espace normé Y que l'on obtient en munissant L de la norme $\|x\|_1$.

En raison de l'inégalité :

$$\| \boldsymbol{x} \|_2 \geq \ \boldsymbol{c_1} \ \| \boldsymbol{x} \|_{\boldsymbol{1}},$$

cette application est continue.

Par hypothèse et selon l'application inverse est continue elle aussi.

5-applications :

a) Supposons qu'un espace complet X soit mis sous forme de somme directe de deux sous-espaces fermés X_1 *et* X_2 , de sorte que pour tout vecteur x ϵ X, on a une représentation unique :

$$x = x_1 + x_2 , \quad x_1 \epsilon X_1, \quad x_2 \epsilon X_2 .$$

L'opérateur p_1 qui à tout vecteur x fait correspondre sa composante x_1 s'appelle projecteur (ou projection) sur le sous-espace X_1 ; d'une manière analogue.

L'opérateur p_2 qui à tout vecteur x fait correspondre sa composante x_2 s'appelle projecteur (ou projection) sur le sous-espace X_2.

Ces opérateurs sont évidemment linéaire, mais il n'est point évident qu'ils soient continus.

Nous verrons que les opérateurs p_1 et p_2 sont continus en supposant l'espace X complet, les sous espaces X_1 et X_2 fermés, et on utilisant le théorème sur l'application ouverte.

b) Soient X un espace complet, somme directe de deux sous espaces fermés X_1 et X_2, et $p_1$et p_2 les projecteurs correspondants.

Soit A_1 un opérateur linéaire continu dans X_2.

Définissons dans l'espace X :

L'opérateur A d'après la formule

$$Ax \equiv A (x_1 + x_2) = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

L'opérateur A est évidemment linéaire.

L'opérateur A est continu dans l'espace X .

En effet :

$$\begin{aligned} Ax &= A_1 x_1 + A_2 x_2 \\ &= A_1\, p_1 x + A_2 p_2\, x \end{aligned}$$

Et, les opérateurs p_1 et p_2 étant bornés dans X nous avons :

$$\| Ax \| \leq \| A_1 \| . \| p_1 \| . \| x \| + \| A_2 \| . \| p_2 \| . \| x \| = c \ \| x \|$$

Ce qu'il nous fallait.

c) Soient X et Y deux espaces de Banach et T ϵ L_a(X, Y) une application bijective.

Alors on a :

$$T \in L(X, Y) \Rightarrow T^{-1} \in L(Y, X)$$

Ou bien :

$$T \notin L(X, Y) \Rightarrow T^{-1} \notin L(Y, X)$$

C’est-à-dire :

Les opérateurs T et T^{-1} sont en même temps continus ou discontinus.

Preuve :

Notons d’abord que T^{-1} existe et $T^{-1} \in L_a(Y, X)$.

Supposons que $T \in L(X, Y)$, T est ouvert et puisque T est aussi injectif, T^{-1}

Existe et est continu sur Y.

D’autre part, si $T^{-1} \in L(Y, X)$ on a le même raisonnement que $T \in L(X, Y)$.

Le graphe fermé :

1-Définition :

Soient X et Y deux espaces linéaires sur le même corps K et Tϵ L_a(X, Y) alors :

Le graphe de l'opérateur linéaire T est l'ensemble

$$G = \{(x, Tx) \mid x \epsilon X\} \subset X \times Y.$$

2-Principe du théorème du graphe fermé :

Le théorème du graphe fermé est une autre façon de vérifier si un opérateur linéaire donné est continu.

Ce résultat caractérise les opérateurs linéaires bornés en termes de graphe.

3-Théorème du graphe fermé :

Soient X et Y deux espaces de Banach et Tϵ L_a(X, Y)

Alors :

T ϵ L(X, Y) si et seulement si T est un opérateur avec un graphe fermé.

Preuve :

Supposons que le graphe G de T est fermé;

Alors :

X, Y et G sont des espaces de Banach.

Les projections :

$$P_X : G \longrightarrow X \quad \text{et} \quad P_y : G \longrightarrow Y$$

donné par :

$$P_X(x, Tx) = x \quad \text{et} \quad P_y(Tx, x) = Tx$$

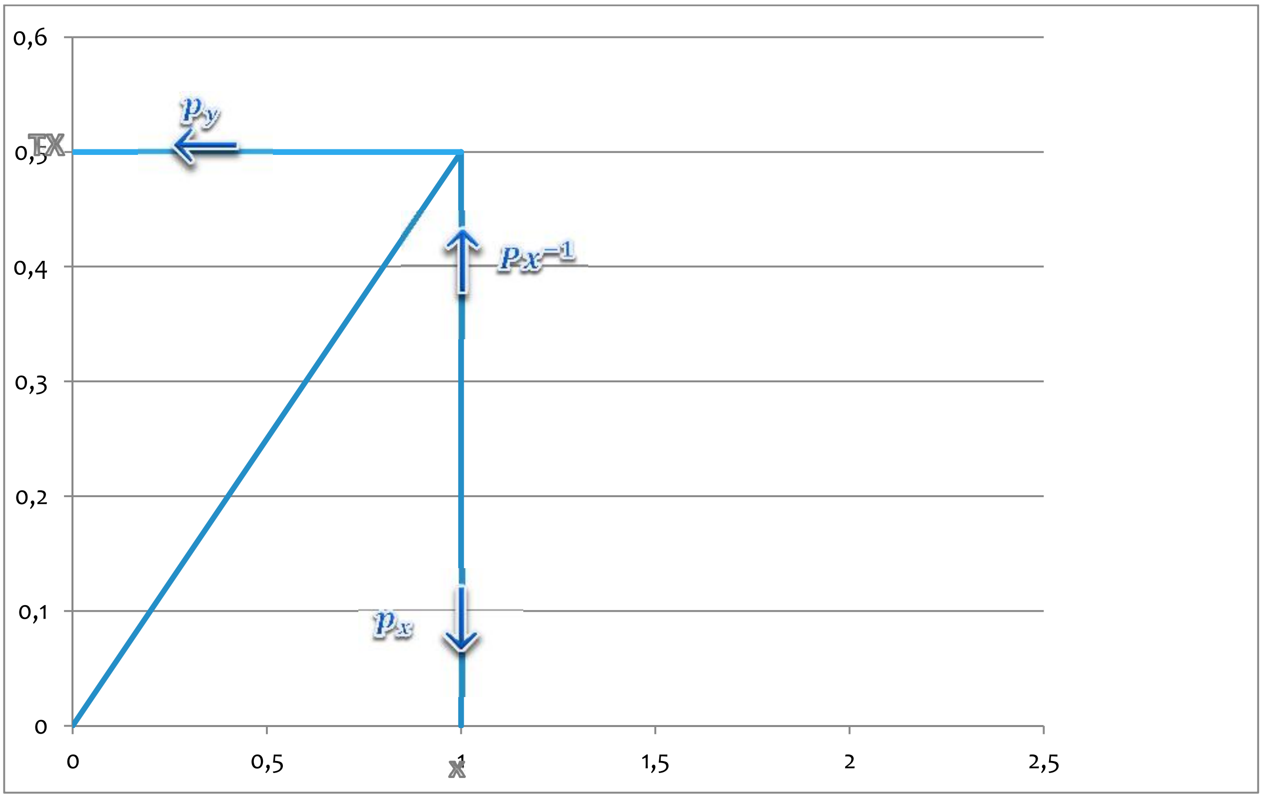
Sont des opérateurs linéaires et continus.

Puisque $P_X G = X$ et P_X est injectif,

L'opérateur P_x^{-1} est continu sur X,

ce qui entraine que

$T = P_y \circ P_x^{-1}$ est un opérateur linéaire continu. (Voir la figure)



4- Les applications du graphe fermé :

- **Le graphe G d'un opérateur linéaire est un sous espace linéaire normé de l'espace X×Y.**
  De plus si T est un opérateur linéaire avec un graphe fermé, alors :
  G peut être interprété comme un espace de Banach.
  En particulier c'est le cas si T ∊ L(X, Y) .
- **Si une suite A_1 , A_2,… d'opérateurs linéaires continus d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y est tel que :**
  Pour tout x ∊ X, les vecteurs $y_n = A_n x$ ont une limite y ∊ Y,
  Alors :
  L'application A : $\{x \rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n x\}$ est un opérateur linéaire continu de X dans Y.

Preuve :

Soient x_1 et x_1 deux vecteurs quelconques de l'espace X, α_1 et α_2 des constantes arbitraire.

En posant à la limite pour x⟶ +∞ dans l'égalité

$$A_n\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

On obtient,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

de sorte que l'application A est linéaire.

La suite des vecteurs $A_n x$ étant convergente donc bornée pour tout x∊ X, on voit d'après les normes des opérateurs A_n sont bornées $\| A_n \| \leq$ c, par conséquent, nous avons :

$$| A_n x | \leq \| A_n \| \leq c \quad \text{pour tout } x, \; |x| \leq 1$$

Donc

$$|Ax| = \lim_{n\to\infty} | A_n x | \leq c,$$

ainsi l'opérateur A est borné dans la boule unité donc continu, ce qu'il fallait démontrer.

Nous donnons maintenant un théorème équivalent du théorème de Banach qui est très utile.

5-Le théorème du graphe fermé est l'équivalent du théorème de Banach :

$$\boxed{\text{Théorème du graphe fermé} \Leftrightarrow \text{Théorème de Banach}}$$

(□) **Évident.**

(□) **Si T ϵ L (X, Y) est une bijection**

Alors :

$\mathbf{T^{-1}}$ **est un opérateur linéaire avec un graphe fermé**

En effet :

Si $\quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} y_0 \quad$ **et** $\quad T^{-1}y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x_0$

Et puisque T est continue, nous avons :

$$T(T^{-1}y_n) = y_n \quad \text{et} \quad Tx_0 = x_0$$

C'est-à-dire :

$$x_0 = T^{-1}y_n$$

Il y a des opérateurs linéaires avec un graphe fermé qui ne sont pas continus.

6-Variante de la preuve du graphe fermé :

Notons G le graphe et P_X , P_y les projections naturelles de X×Y sur X et Y, en peut alors voir u comme la composée :

$$X \longrightarrow G \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow (x, u(x)) \longrightarrow u(x)$$

La deuxième application est la restriction $P_y/_G$ de P_y au graphe ; elle est continue.

D'autre part, $P_x/_G$ est une bijection de G sur X, continue.

Si G est fermé dans le Banach X×Y, c'est lui-même un Banach.

D'après { le théorème de l'application ouverte, ou des isomorphismes de Banach}, l'application $(P_x/_G)^{-1}$ est continue de X sur G, et u= $(P_y/_G)^{-1}$ est continue.

Exemple (l'application ouverte) :

En plus de la norme initiale $\|x\| \equiv \|x\|_1$ introduisons dans l'espace X la norme

$$\|x\|_2 = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1$$

Il est évident que $\|x\|_2$ vérifie les axiomes de la norme.

Nous avons aussi

$$\|x\|_1 \leq \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 = \|x\|_2 .$$

Montrons que l'espace X est complet par rapport à la norme $\|x\|_2$.

Soit $\{x^{(n)}\}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|x\|_2$; il résulte de l'égalité :

$$\|x^{(n)} - x^{(n)}\|_2 = \| x^{(n)}{}_1 - x^{(n)}{}_1\|_1 + \| x^{(n)}{}_2 - x^{(m)}{}_2\|_1$$

que les suites $\{x^{(n)}{}_1\}$ et $\{x^{(n)}{}_2\}$ sont de Cauchy pour la norme $\|x\|_1$.

L'espace X étant complet, il existe les limites :

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}{}_1 ,$$

$$x_2 = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}{}_2$$

Les sous espaces X_1 et X_2 étant fermés, on a $x_1 \epsilon X_1$ et $x_2 \epsilon X_2$ .Posons

$$x = x_1 + x_2,$$

nous avons :

$$\|x - x^{(n)}\|_2 = \|x_1 - x^{(n)}{}_1\|_1 + \|x_2 - x^{(m)}{}_2\|_1 \longrightarrow 0$$

De sorte que x est la limite de la suite $\{x^{(n)}\}$ pour la norme $\|x\|_2$, ce qui démontre que X est complet par rapport à la norme $\|x\|_2$.

En appliquant (4-2) on voit que les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont équivalente,

En particulier, $\exists$ c telle que l'inégalité :

$$\|x\|_2 = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_1 \leq c \|x\|_1 = c \|x\|$$

A lieu pour tout x ϵ X. mais alors on a aussi :

$$\|P_1 x\| = \|x_1\|_1 \leq c\,\|x\|$$

$$\|P_1 x\| = \|x_1\|_1 \leq c\,\|x\|$$

Ce qui démontre la continuité des opérateurs P_1 et P_2.

Les contres exemples(l'application ouverte) :

*** Soit y = $f(x)$ une fonction définie sur un ensemble X à valeurs dans un ensemble Y.**

Tous les points y = $f(x)$, ou x parcourt un sous-ensemble Q $\subset$ X, forment l'image du sous-ensemble Q qui se note $f(\mathbf{Q})$.

L'ensemble de tous les points x $\in$ X pour lesquels y = $f(x)$ appartient à un sous-ensemble F $\subset$ Y s'appelle image réciproque du sous-ensemble F et se note f^{-1}(F).

Si X et Y sont des espaces métriques et y = $f(x)$ une fonction continue, alors l'image réciproque f^{-1}(G) de tout sous-ensemble ouvert G $\subset$ Y est un sous-ensemble ouvert dans X.

Cependant l'image $f(\mathbf{G})$ d'un ensemble ouvert G $\subset$ X n'est pas forcément un ensemble dans Y.

<u>Par exemple :</u>

Si x est la droite $-\infty < x < +\infty$

Et :

y la droite $-\infty < y < +\infty$,

La fonction y = $f(x)$ étant constante, alors l'image de tout ensemble ouvert (et, en générale, de tout ensemble G $\subset$ X) se réduit à un seul point y qui ne constitue pas un ensemble ouvert dans Y.

Si l'on renforçait l'hypothèse en exigeant que la fonction $f(x)$ applique l'espace X sur Y alors :

On considèrerait la fonction continue valant

$(x-1)^3$ **Pour** $x \geq 1$,

$(x+1)^3$ **Pour** $x \leq -1$,

0 **pour** $|x| < 1$.

Cette fonction qui applique l'axe X tout entier sur l'axe Y transforme l'ensemble ouvert $\{ \ |x| < 1\}$ toujours en un seul point y=0.

Supposons que la fonction continue y = $f(x)$ applique d'une façon bijective l'espace X dans l'espace Y.

Choisissons pour X l'espace $D_1(a, b)$ des fonctions $x(t)$ continument dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ muni de sa métrique naturelle et pour Y le sous-ensemble de l'espace $R^s(a, b)$ de toutes les fonctions continues sur $[a, b]$ (toujours avec sa métrique naturelle) qui est fermé des fonctions continument dérivables ;

Formée ce sous-ensemble comme espace métrique.

Considérons l'application y = $f(x)$ qui fait correspondre toute fonction

$x = x(t) \quad \epsilon \ D_1(a, b)$ **à elle-même :**

$y = y(t) \ \equiv \ x(t) \ \epsilon \ R^s(a, b).$

Cette application est continue car

la convergence $x_n \ \longrightarrow \ x(t)$ **dans** $D_1(a, b)$

implique bien étendu,

La convergence $y_n(t) = x_n(t) \ \longrightarrow \ y(t) \ \equiv \ x(t)$ **dans** $R^s(a, b)$.

L'application y = $f(x)$ est évidemment bijective.

Néanmoins, l'image d'un ensemble ouvert dans X, par exemple de la boule unité ouverte V dans $D_1(a, b)$, n'est pas ouverte dans Y, parce que toute voisinage d'un point

$$y_0(t) \ \epsilon \ f(\mathrm{V})$$

Définie par l'inéquation

$$max \ |y(t) - y_0(t)| < \varepsilon$$

contient des fonctions à dérivée indéfiniment grande.

**** Soient i l'injection canonique de X = l^2 dans l^∞, et Y = $i(X)$ muni de la norme induite par l^∞.**

Alors i est continue bijective de X sur Y, mais i^{-1} n'est pas continue :

Il n'existe aucune constante c telle que :

$$\left(\sum_n |u_n|^2\right)^{1/2} \leq c \ \sup_n |u_n| \qquad \textbf{Pour toute } (u_n) \in L^2.$$

Ici X est complet mais non Y.

Exemple (graphe fermé) :

Soit X = Y , l'espace des polynômes sur C muni de la norme $\| \; \|_{|z| \leq 1}$.

Evidemment X et Y ne sont pas des espaces de Banach.

Définissons $T \in L_a(X)$ par :

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$$

Supposons que $\{P_n \in X \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ converge en norme vers un $p \in X$.

Et

$$\{TP_n \in X \,;\, n \in \mathbb{N}\} \text{ converge en norme vers } q \in X.$$

Alors

$$q = Tp$$

D'autre part ; T n'est pas continu.

En effet $\| z^n \| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $\| Tz^n \| = n$.

Conclusion :

La finalité de ce travail est l'étude des applications ouvertes et ses applications ainsi que le théorème du graphe fermé.

Nous avons démontré le théorème des applications ouvertes qui montre que l'image d'un ouvert est un ouvert, et son inverse est également un opérateur linéaire continu, et on a démontré aussi le théorème du graphe fermé.

Ce résultat est une conséquence directe du théorème de Banach.

Bibliographie :

1- **Analyse Mathématique : fonction d'une variable**

Tome 1

Par : G.CHILOV.

2- **Analyse Mathématique : fonction d'une variable**

Tome 2

Par : G.CHILOV

3- **Introduction à l'analyse fonctionnelle**

Par : Walter Hengartner

Marcel Lambert

Corina Reischer