الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

Domain : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques

Par: Graa Yamina

THEME

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DE TYPE ELLIPTIQUE

Proposé par : Mr Belabbaci Youcef

Année Universitaire 2014/2015

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier dieu, notre créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.

Nous tenons à remercier Mr : Belabbaci Youcef notre promoteur pour son grand soutien et ses conseils considérables.

Nous remercions également tous les professeurs du département de mathématique et Informatique.

Que toute personne ayant participé de près ou le loin à la réalisateur de ce travail accepte nos grands et sincères remerciements.

Dédicace

Je dédie mon travail à :

Mon père et ma mère pour leurs soutien et encouragements

Mes sœurs   Soumia et Kaouthar

Mes frères   Ibrahim et Mansour

La première joie dans la famille Abd Elmalek

Tout Ma famille

Mes chères amies que j'ai partage mes belle Souvenir : Nadjoua, Amina, Nariman, Meriem Ahlem.

Et toute personne qui m'a encouragé de loin et de prés.

Toutes mes collègues et tout les étudions de promo 2014 - 2015

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (qu'on notera EDP) constituent la généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Elles modélisent de très nombreux phénomènes physiques, chimiques.

Nous considérons ici des EDP du second ordre quasi-linéaire à $\boldsymbol{n}$ variables indépendants. On constate qu’il est commode de classer les EDP du second ordre en trois types hyperbolique, parabolique et elliptique.

Pour résoudre les EDP de type elliptique on a utilisé différentes méthodes.

- Théorie des fonctions harmoniques et théorie de la fonction potentiel.

- Solution élémentaire de laplacien (approche des distributions).

- On a étudié les problèmes de Dirichlet et de Neumann.

I- Classification des équations de second ordre :

Définition : Les équations aux dérivées partielles quasi-linéaires de second ordre a ***n*** variables indépendants, peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, u_{x_i x_j} + F\left(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}\right) = 0$$

Ou $A_{ij} = A_{ji}$ et A_{ij} est des fonctions de variables $(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^2 sur un $D \subset \mathbb{R}^n$.

La fonction $u(x_1, \dots, x_n)$ est continue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}$, ainsi que ses dérivées.

I.1- Cas de deux variables :

Soit dans le domaine D, l'équation :

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0 \qquad (1)$$

qui est quasi-linéaire de second ordre a deux variables *(x, y)*
ou *A, B, C* est fonction de *(x, y)* de classe $C^2 sur\ \mathbb{R}^2$
avec *F* est une fonction linéaire par rapport à x, y, u, u_x, u_y.
dans la géomètre analytique, l'équation d'une section canonique de la forme suivante :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0$$

ou *A, B, C* sont des constantes.

Cette équation quadratique représente les formes suivant :

- Si $\Delta = B^2 - AC > 0$ est un hyperbolique.
- Si $\Delta = B^2 - AC = 0$ est un parabolique.
- Si $\Delta = B^2 - AC < 0$ est un elliptique.

La classification de l'équation (1) est basé sur la possibilité se réduire de cette équation par une transformation coordonnés à une forme canonique.

Soit transformation suivant :

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \eta = \psi(x, y) \qquad (2)$$

Admettons (2) est ré solvable aux alentours du point $(x, y) \in D$, ce qui signifie que :

$$\begin{vmatrix} \xi x & \xi y \\ \eta x & \eta y \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\xi \eta_x \quad ; \quad u_y = u_\eta \xi_y + u_\eta \eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\xi^2}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta^2}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \qquad (3)$$
$$u_{yy} = u_{\xi^2}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta^2}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$
$$u_{xy} = u_{\xi^2}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta^2}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

En remplaçant les dérivées (3) dans (1) on obtient :

$$A^* u_{\xi\xi} + 2B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + F^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \qquad (4)$$

Avec :

$$A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$
$$B^* = A\xi_y\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_x\eta_y \qquad (5)$$
$$C^* = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

On peut calcul :

$$\Delta_1 = B^{*2} - A^*C^* = (B^2 - AC)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2$$

Donc, si A, B, C sont continus aux alentours du point (x, y), alors que la transformation n'est pas dégénérée, donc les signes des discriminants Δ et Δ_1 aux alentours correspondant aux points (x, y) et (ξ, η) sont les mêmes et par conséquent le type d'équation est conservé.

Forme canonique :

On suppose que le coefficient A, B et C dans l'équation (1) sont non nuls, et on pose dans l'équation (4) : $A^* = C^* = 0$

Alors :

$$A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$
$$C^* = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

(Les doux équations sont de même type.)

c.à.d. que les fonctions ξ, η soient des solution de

$$A\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (6)$$

En divisant sur $\omega_y{}^2$, on trouve:

$$A\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right) + C = 0$$

Ou sur la courbe $\omega = cst$ alors: $d\omega = \omega_x dx + \omega_y dy = 0$

Donc :

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\omega_x}{\omega_y}$$

En obtient :

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \qquad (7)$$

Alors : si $A \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A} \qquad (8)$$

Suivant le signe de discriminant Δ on distingue :

1- Type hyperbolique :

$\Delta = B^2 - AC > 0$. L'équation caractiristique sont des equation réelles et les courbes et données par :

$$\varphi(x,y) = c \quad ; \quad \psi(x,y) = c$$

Est posons les nouvelle variables indépendantes suivants :

$$\xi = \varphi(x,y) \quad ; \quad \eta = \psi(x,y)$$

Alors, on peut écrire les caractéristiques de l'équation (1) sous la forme :

$$2B^* u_{\xi\eta} + F^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

Ou

$$u_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \qquad (9)$$

qui est la première forme canonique de l'équation hyperbolique.

Si on pose :

$$\alpha = \xi + \eta \quad ; \quad \beta = \xi - \eta$$

Alors, l'équation (9) sous la deuxième forme canonique de l'équation hyperbolique s'écrit :

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + G(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta) \qquad (10)$$

Exemple :

$$u_{xx} + (2\cos x)u_{xy} - (\sin x)^2 u_{yy} + (\sin x)u_y = 0 \ \ldots\ldots\ldots (*)$$

$$A = 1 \ ; \ B = \cos x \ ; \ C = \sin^2 x$$

$$\Delta = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 > 0$$

Le type d'équation est hyperbolique.

La forme canonique :

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)^2 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y + \sin x \pm x = C$$

On pose :

$$\xi = y + \sin x - x$$
$$\eta = y + \sin x + x$$

Alors les dérivées :

$$u_x = (\cos x - 1)u_\xi + (\cos x + 1)u_\eta$$

$$u_{xx} = (\cos x - 1)^2 u_{\xi\xi} + 2(\cos^2 x - 1)u_{\xi\eta} + (\cos x + 1)^2 u_{\eta\eta} - \sin x\, u_\xi - \sin x\, u_\eta$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta \quad ; \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy} = (\cos x - 1)u_{\xi\xi} + 2\cos x\, u_{\xi\eta} + (\cos x + 1)u_{\eta\eta}$$

En remplaçant les dérivées dans (*) en obtient :

$$u_{\xi\eta} = 0$$

2- Type elliptique :

$\Delta = B^2 - AC < 0$, équation quadratique (7) admette sera famille des courbes caractéristiques conjuguée

$$\xi = \varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$$
$$\eta = \psi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y)$$

qui sera complexe et conjuguée.

Alors on a :

$$u_{\xi\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \qquad (11)$$

Où ξ et η sont des variables complexes.

Si l'on passe à de nouvelles variables

$$\alpha(x,y) = \frac{\xi+\eta}{2} \quad ; \quad \beta(x,y) = \frac{\xi-\eta}{2i}$$

Alors :

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta}$$

Et l'équation (11) s'écrit sous la forme

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + G1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0 \qquad (12)$$

Qui est la forme canonique de l'équation elliptique.

Exemple :

$$4u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (*)$$

$A = 4$; $B = 0$; $C = 1$

$\Delta = -4 \quad \Rightarrow \quad \Delta = (2i)^2$

Le type d'équation est elliptique.

La forme canonique :

$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{i}{2} \qquad \Rightarrow \quad c = 2y - ix$

On pose : $\alpha = 2y \quad ; \quad \beta = -x$

Alors les dérivées :

$$u_{xx} = u_{\beta\beta} \quad ; \quad u_{yy} = 4u_{\alpha\alpha}$$

En remplaçant les dérivées dans (*) en obtient :

$$4u_{\alpha\alpha} + 4u_{\beta\beta} = 0$$

3- Type parabolique :

$\Delta = B^2 - AC = 0$, on a une courbe caractéristique $\varphi(x,y) = C$.

On pose : $\xi = \varphi(x,y) \quad ; \quad \eta = \psi(x,y)$

où $\varphi(x,y)$les caractéristiques de l'équation (1) et $\psi(x,y)$ une fonction quelconque ne dépendant pas de $\varphi(x,y)$.

Si $A^* = B^* = C^* = 0$

A condition que les coefficients (A, B et C) ne s'annulent pas en même temps, si l'on pose A = B = 0, alors de $\Delta = 0 \Rightarrow B = 0$

Donc on a soit $A \neq 0$ soit $C \neq 0$

Si $A > 0$ aux alentours du point(x, y) alors de $\Delta = 0 \Rightarrow C = 0$ et $B = \sqrt{AC}$ alors :

$$C^* = \left(\sqrt{A}\eta_x\right)^2 + 2\sqrt{A}\eta_x\sqrt{C}\eta_y + (\sqrt{C}\eta_y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \qquad \text{Et on a : } A^* = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

On trouve :

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{\xi_x}{\xi_y}$$

$$\Rightarrow \xi_y\eta_x - \xi_x\eta_y = 0$$

Par conséquent ξ, η sont dépandentes, ce qui contreduit la condition de choix de la $\xi(x,y)$ et signifie, que $C^* \neq 0$ aux alentours du point *(x, y)*

Donc : $A^* = B^* = 0 \ , \ C^* \neq 0$

Et la transformation de (1) s'écrit :

$$u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \qquad (13)$$

Qui s'appelle la forme canonique de l'équation parabolique.

Exemple :

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0 \qquad (*)$$

$A = x^2 \ ; \ B = xy \ ; \ C = y^2$

$$\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$$

Le type d'équation est parabolique.

-La forme canonique :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = c$$

On pose :

$$\xi = \frac{y}{x} \quad ; \quad \eta = y$$

Alors les dérivées :

$$u_x = -\frac{y}{x^2}u_\xi \quad ; \quad u_y = \frac{1}{x}u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{2y}{x^2}u_\xi + \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi}$$
$$u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = \frac{-y}{x^2}u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}u_{\xi\eta} - \frac{1}{x}u_\xi$$

En remplaçant les dérivées dans (*) en obtient :

$$u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$$

I.2- Cas de 3 variables :

Soit l'équation :

$$A_{11}u_{xx} + A_{22}u_{yy} + A_{33}u_{zz} + 2A_{12}u_{xy} + 2A_{13}u_{xz} + 2A_{23}u_{yz} + F = 0 \qquad (13)$$

Où (A_{ij}) sont de fonction de *(x, y)*

au point fixé *(x, y)* soit la forme quadratique :

$$A_{11}k_1^2 + A_{22}k_2^2 + A_{33}k_3^2 + 2A_{12}k_1k_2 + 2A_{13}k_1k_3 + 2A_{23}k_2k_3 = 0 \qquad (14)$$

On peut réduire (14) à une somme de carrés d'après théorème de Lagrange :

$$\lambda_1 k'^2_1 + \lambda_2 k'^2_2 + \lambda_3 \kappa'^2_3 \qquad (15)$$

- Si les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 et\ \lambda_3$ ont même signe alors le type est elliptique.

- Si ou moins un des coefficients $\lambda_1, \lambda_2 et\ \lambda_3$ est nulle alors le type est parabolique.

- Si les coefficients $\lambda_1, \lambda_2 et\ \lambda_3$ ne sont pas de même signe alors le type est hyperbolique.

On effectue sur les variables indépendantes les transformations linéaires non-singulières.

$$\xi(x,y,z) = C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z$$

$$\eta(x,y,z) = C_{21}x + C_{22}y + C_{23}z$$

$$\zeta(x,y,z) = C_{31}x + C_{32}y + C_{33}z$$

Alors nous avons :

$$u_{x_i} = \sum_{h=1}^{3} C_{hi}U_{\xi_h} \qquad ; \qquad u_{x_i}u_{x_j} = \sum_{h,k=1}^{3} C_{hi}C_{ki}U_{\xi_h\xi_k}$$

ou C_{hj} est matrice.

En substituant dans (14) on obtient :

$$A^*_{11}u_{\xi\xi} + A^*_{22}u_{\eta\eta} + A^*_{33}u_{\zeta\zeta} + 2A^*_{12}u_{\xi\eta} + 2A^*_{13}u_{\xi\zeta} + 2A^*_{23}u_{\eta\zeta} + G = 0 \quad (16)$$

Avec :

$$A^*_{hk} = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}C_{ki}C_{ki}$$

ou la matrice (C_{hk}) est convenable et diagonalisable.

on aura en défini :

$$\alpha_1 U_{\xi\xi} + \alpha_2 U_{\eta\eta} + \alpha_3 U_{\zeta\zeta} + G = 0$$

Avec les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ égale (± 1) ou nulle.

Exemples :

Ex.1) $3u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{xz} + 2u_x - u_y + xye^z = 0$

La forme quadratique :

$$Q(k_1,k_2,k_3) = 3k_1^2 + 4k_2^2 + 5k_3^2 + 4k_1k_2 - 4k_1k_3$$

$$= \tfrac{1}{3}(3k_1 + 2k_2)^2 - \tfrac{4}{3}k_1^2 + 4k_2^2 + 5k_3^2 - 4k_1k_3$$

$$= \tfrac{1}{3}(3k_1 + 2k_2)^2 - \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{8}{3}k_2 - 2k_3\right)^2 + \tfrac{7}{2}k_3^2$$

Alors :

$$Q(k_1, k_2, k_3) \simeq \frac{1}{3}\tau^2 + \frac{3}{8}\tau^2 + \frac{7}{2}\tau^2$$

Donc le type d'équation est elliptique.

Ex.2) $u_{xx} + 2u_{yy} + 5u_{zz} + 2u_{xy} + 4u_{yz} = 0$ (*)

La forme quadratique :

$$Q(k_1, k_2, k_3) = k_1^2 + 2k_2^2 + 5k_3^2 + 2k_1k_2 - 4k_2k_3$$
$$= (k_1 + k_2)^2 + (k_2 - 2k_3)^2 + k_3^2$$

On pose : $\begin{cases} \tau_1 = k_1 + k_2 \\ \tau_2 = k_2 - 2k_3 \\ \tau_3 = k_3 \end{cases}$

Alors :

$$Q(k_1, k_2, k_3) = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$$

Où les coefficients de (τ_i) sont de même signe donc l'équation (*) est type elliptique.

Réduction de à la forme canonique :

On a :

$$\begin{cases} k_1 = \tau_1 - \tau_2 + 2\tau_3 \\ k_2 = \tau_2 - 2\tau_3 \\ k_3 = \tau_3 \end{cases}$$

Alors :

$$M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \xi = x \\ \eta = -x + y \\ \zeta = 2x - 2y + z \end{cases}$$

Les dérivées :

$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 4u_{\zeta\zeta} - 2u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\zeta} + 4u_{\xi\zeta}$ …. (a)

$u_{yy} = u_{\eta\eta} - 4u_{\eta\zeta} + 4u_{\zeta\zeta}$ …. (b)

$u_{zz} = u_{\zeta\zeta}$ …. (c)

$u_{xy} = -u_{\eta\eta} + u_{\eta\xi} - 4u_{\zeta\zeta} - 2u_{\xi\zeta} + 4u_{\zeta\eta}$ …. (d)

$u_{yz} = u_{\eta\zeta} - 2u_{\zeta\zeta}$ …. (e)

En remplaçant (a), (b), (c), (e) et (d) dans l'équation (*) est obtient :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$$

I.3- Cas de n variables :

Soit la forme générale de l'équation quasi-linéaire est :

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_i x_j} + F = 0 \qquad (16)$$

Ici A_{ij}, F sont fonctions de $x_1, \ldots, x_n$.
Au point fixe $(x_1, \ldots, x_n)$ soit la forme quadratique :

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} t_i t_j \qquad (17)$$

On peut passer, à l'aide de la transformation linéaire de (17), à la forme canonique :

$$\sum_{1}^{n} \alpha_j {\tau^2}_j$$

où L'équation (16) sera alors :

de type hyperbolique au point $(x_1, \ldots, x_n)$ si α_j ne sont pas même signe, parabolique si au moins un des coefficients $\alpha_j = 0$

et elliptique si α_j ont même signe.

II- Equation de type elliptique :

Soit $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ un domaine borné délimité par une surface régulière S (au moins par morceaux) $\overline{\boldsymbol{D}} = (\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{S})$ le domaine fermé borné délimité par $\boldsymbol{S}$.

On désigne par ***N*** la normale extérieure à S, et par Δ le laplacien

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Pour $u \; et \; v \in C^{(2)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ on a les formules de Green.

La 1er formule :

$$\int_D v\Delta\, u \; dxdydz = -\int_D (grad\; u, grad\; v) dxdydz + \int_S v \frac{\partial u}{\partial N} dS$$

$$\left(grad\; f = \begin{pmatrix} \partial f/_{\partial x} \\ \partial f/_{\partial y} \\ \partial f/_{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad N = ((\cos\gamma_1)e_1 + (\cos\gamma_2)e_2 + (\cos\gamma_3)e_3) \right)$$

1- <u>La 2éme formule :</u>

$$\int_D (v\Delta\, u - u\Delta\, v) dxdydz = \int_S (v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}) dS$$

Pour $v \equiv 1$ on obtient

$$\int_D \Delta\, u \; dxdydz = \int_S \frac{\partial u}{\partial N} dS \qquad (*)$$

En dimension 2 on a des résultats

$$\int_D (v\Delta\, u - u\Delta\, v) dxdy = \int_{C^+} (v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}) ds$$

II.1- Fonction harmonique :

- ✓ <u>Définition :</u> une fonction harmonique dans $D \subset \mathbb{R}^n$ est fonction $u \in C^2(D)$ vérifient $\Delta u = 0 \; dans \; D$

✓ Exemples des fonctions harmoniques :

Soit $\boldsymbol{D}$ un domaine borné quelconque ne contenant pas l'origine dans $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ alors :

$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ est harmonique dans $\boldsymbol{D}$ pour $n = 2$.

$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ est harmonique dans $\boldsymbol{D}$ pour $n = 3$.

Preuve :

- Pour $n = 2$

On passe en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Donnant $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ pour $u = \log r$, $r \neq 0$, $\Delta u = 0$

- Pour $n = 3$ on vérifie que.

$u(x,y,z) = \frac{1}{r}$ ou $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est harmonique dans $\boldsymbol{D}$

On pose : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

On montre que :

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

On a : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} \end{cases}$

Par suite: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3}\left(-1+3\frac{x^2}{r^2}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r^3}\left(-1+3\frac{y^2}{r^2}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r^3}\left(-1+3\frac{z^2}{r^2}\right) \end{cases}$

Donc

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(-3 + \frac{3}{r^2} r^2\right) = 0$$

- ✓ <u>Propriétés des fonctions harmoniques :</u>

1- Soit $\boldsymbol{u}$ harmonique dans $\boldsymbol{D}$ si $u|_{\partial D} = 0$ alors $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$ dans $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Preuve :

on pose $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

On obtient dans la 1er formule de Green $|grad\, u|^2 = 0$

Donc $\boldsymbol{u} = cst$ et par conséquent $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

2- Soit $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ harmoniques dans $\boldsymbol{D}$

si $u|_{\partial D} = v|_{\partial D}$ alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ dans $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Preuve :

On pose : $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$

$w|_{\partial D} = 0$ alors $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$

Donc $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$

3- Soit $\boldsymbol{u}$ harmonique dans $\boldsymbol{D}$ alors :

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

Preuve :

Dans (*) $\int_D \Delta\, u\, dxdydz = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} dS$ et $\Delta u = 0$

alors : $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} dS = 0$

4- Pour ***n=2*** (dans le plan) une fonction harmonique est le partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction analytique. Ceci découle des conditions de Cauchy –Riemann. Par conséquent $\boldsymbol{u}$ est de classe$\boldsymbol{C}^{(\infty)}$.

5- Soit $\boldsymbol{u}$ harmonique dans $\boldsymbol{D}$, soit $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\rho}) \subset \boldsymbol{D}$ la boule ouverte de centre *X* et de rayon $\boldsymbol{\rho}$.

Soit $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\partial B}$ alors :

$$u(X) = \frac{1}{A(\sigma)} \oint_\sigma u(x)\, ds$$

($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma})$: aire de $\boldsymbol{\sigma}$).

6- Pour $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, si u est harmonique des $\boldsymbol{D}$ et $u(x) \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} 0$

Alors $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{0}$.

7- Principe de maximum :

Soit u est un fonction harmonique sur $\boldsymbol{D}$ et continue sur $\overline{\boldsymbol{D}}$, alors on a :

$\forall (x,y) \in D\colon \min_S u \leq u(x,y) \leq \max_S u$

$(S = F_r(D)\,)$

II.2- Solution élémentaire E de Δ :

E vérifie $\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\delta}$

c.à.d. $\forall \varphi \in D\,, \langle \Delta u, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$

Pour ***n*= *2*:** $E_2 = \frac{1}{2\pi} \log\sqrt{x^2+y^2}$

Pour ***n*= *3***: $E_3 = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2+z^2}}}$

On vérifie directement i.e. $\Delta \boldsymbol{E_i} = \boldsymbol{\delta}$,

Pour ***n*= *2* :**

Si $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}} \neq \mathbf{0}$ alors $\log r \in \boldsymbol{C}^\infty$et donc les dérivées classiques et les dérivées au sens des distributions coïncident.

Soit $\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{D}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}})$ et donc $supp\ \varphi$ est borné, considérons $\boldsymbol{B_R}$ la boule fermé de rayon $\boldsymbol{R}$ tell que : $supp\ \varphi \subset B_R,\ \ \boldsymbol{\varepsilon} > 0$ et $D_\varepsilon = \{(x,y)\colon \varepsilon < r < R\,\}$

Donc $\Delta \log r = 0$ dans $\boldsymbol{D_\varepsilon}$ **.**

par suite :

$$\langle \Delta\ log\sqrt{x^2+y^2}\,, \varphi\rangle = \langle\ log\sqrt{x^2+y^2}\,, \Delta\ \varphi\rangle$$

$$= \int_{B_R} log\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta\ \varphi\ dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\varepsilon} log\sqrt{x^2+y^2}\ \Delta\ \varphi\ dxdy$$

Posons, dans la **2éme** formule de Green $v = \ log\sqrt{x^2+y^2},\quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D_\varepsilon}$

On obtient $\langle \Delta\ log\sqrt{x^2+y^2}\,, \varphi\rangle = 2\pi\varphi(0)$

Pour ***n*= *3*** : démonstration analogue

II.3- Représentation intégrale et potentiels :

Soit $\boldsymbol{B_\varepsilon}$ la boule fermé, du rayon $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

soit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{(\mathbf{2})}$ et $\boldsymbol{E_3}$ la solution élémentaire de Δ

$$E_3 = -\frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{4\pi r}$$

$\boldsymbol{D_S}$ le domaine $(\boldsymbol{D\backslash B_\varepsilon})$, $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{E_3} \in \boldsymbol{C^{(2)}}$ et en utilisant la **2**[éme] formule de Green :

$$\int_{D\backslash B_\varepsilon}(E_3\Delta u - u\Delta E_3)dxdydz$$
$$= -\int_S(E_3\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial E_3}{\partial N})dS + \int_{S_\varepsilon}(E_3\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial E_3}{\partial N})dS$$

$(S_\varepsilon = F_r(B_\varepsilon))$

Sur $\boldsymbol{D\backslash B_\varepsilon}$ $\Delta \boldsymbol{E_3} = \boldsymbol{0}$ **;** sur $\boldsymbol{S_\varepsilon}$ $\left(\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}\right)$

D'où

$$\int_{D\backslash B_\varepsilon} E_3\Delta u\, dxdydz = \int_S(E_3\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial E_3}{\partial N})dS + \mathrm{I}$$

Pour le calcul de

$$I = \int_{S_\varepsilon}(E_3\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial E_3}{\partial N})dS$$

Sur $\boldsymbol{S_\varepsilon}$, $(\boldsymbol{r = \varepsilon})$

Et donc

$$E_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{\partial E_3}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}(-\frac{1}{4\pi r})_{|r=\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

On sait que $(dS_r = r^2dS_1 = \varepsilon^2 dS_1$ sur $S_\varepsilon)$ et donc

$$I = \int_{S_1}(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial}{\partial N}(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}))\varepsilon^2 dS_1$$

Posons $\boldsymbol{X = \epsilon\xi}$ (ici $X = (x,y,z)$ *et* $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ ou $X \in S_\varepsilon \Rightarrow \xi \in S_1$

Alors :

$$I = \int_{S_1}(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial N}(\epsilon\xi) - u\frac{\partial}{\partial N}(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}))\varepsilon^2 dS_1$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\varepsilon\frac{\partial u}{\partial N}(\epsilon\xi)dS_1 + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}u\frac{\partial}{\partial N}(\frac{1}{r})\varepsilon^2 dS_1$$

On a $\left(\frac{\partial}{\partial N} = -\frac{\partial}{\partial r}\right)$ et donc :

$$\int_{S_1}u\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r})\varepsilon^2 dS_1 = \int_{S_1}u(\frac{1}{\varepsilon^2})\varepsilon^2 dS_1$$

D'où :

$$I = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}u(\epsilon\xi)dS_1 - \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\varepsilon\frac{\partial u}{\partial N}(\epsilon\xi)dS_1$$

On obtient finalement :

$$\int_{D\backslash B_\varepsilon}(E_3\Delta\, u - u\Delta\, E_3)dxdydz = -\int_S(E_3\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial E_3}{\partial N})dS + I$$

Fisons $\boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0}$ et tenons compte de $\Delta\, \boldsymbol{E_3} = \mathbf{0}$ on obtient :

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{D\backslash B_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Delta\, udxdyd$$
$$= \int_S(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial N} + \frac{1}{4\pi}\, u\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})dS + u(0)$$

c.à.d

$$u(0) = -\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{r}\Delta\, u\; dxdydz + \frac{1}{4\pi}\int_S (\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial N} - \; u\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r})dS$$

Fixons (x_0, y_0, z_0) des $\boldsymbol{D}$ et posons :

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0^2 + (z-z_0)^2}$$

La formule précédente s'écrit

(1) $u(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{r}\Delta\, u\; dxdydz + \frac{1}{4\pi}\int_S (\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial N} - \; u\frac{\partial}{\partial N}(\frac{1}{r}))dS$

De même pour ***n*= *2*** on obtient :

(2) $u(x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_D log\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\Delta u\; dxdy + \frac{1}{2\pi}\int_S (log\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial}{\partial N}(log\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}))dS$

II.4- Représentation intégrale d'un fonction harmonique :

Soit ***u*** harmonique. Alors $\Delta\, \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, et les (1) et (2) s'écrivent :

(1') $$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S (\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial}{\partial N}(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}))dS$$

Et

(2') $$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_S (log\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial}{\partial N}(log\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}))dS$$

Considérons les intégrales suivants :

(i) $\int_D \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0^2+(z-z_0)^2}}\; \rho(x,y,z)\; dxdydz$

(ii) $\int_S \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0^2+(z-z_0)^2}}\; \mu(x,y,z)\; dS_{(x,y,z)}$

(iii) $\int_S \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0^2+(z-z_0)^2}} \sigma(x,y,z)\, dS_{(x,y,z)}$

Pour $\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta u$, $\mu = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial N}$, $\sigma = \frac{1}{4\pi}u$

toutes ces intégrales se sont rencontrées dans (1).

(i) est appelé potentiel de volume.
(ii) est appelé potentiel de simple couche.
(iii) est appelé potentiel de double couche.

ρ,μ et σ sont appelées densités de ces potentiels.

II.5 -Propriétés des potentiels :

1- le potentiel de simple couche est harmonique dans tout domaine $\mathbf{\Omega}$ tel que $\overline{\mathbf{\Omega}} \cap \boldsymbol{S} = \emptyset$ lorsque par densité est intégrable sur $\boldsymbol{S}$.

preuve: Posons

$$v(x,y,z) = \int_S \frac{1}{r}\, \mu(x,y,z)\, dxdydz$$

Ou vérifie que $\Delta\, \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ si $(x,y,z) \notin \boldsymbol{S}$

2- même chose pour le potentiel de double couche.

3- Si $\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ est bornée et mesurable dans $\boldsymbol{D}$ alors le potentiel de volume est dans$C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.

Preuve : si $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \notin \overline{\boldsymbol{D}}$ posons $\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = 0$ (reste encore borné.)

Soit $\boldsymbol{D_1}$ un domaine contenant $\boldsymbol{D}$ et (($x,y,z) \in \mathbb{R}^3$quelconque) le potentiel

$$\varphi(x,y,z) = \int_{\boldsymbol{D}} \frac{1}{r}\, \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{\boldsymbol{D_1}} \frac{1}{r}\, \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

On montre que $\varphi \in C^{(0)}$, et aussi que $\varphi \in C^{(1)}$.

4- Si $\boldsymbol{\rho}$ est borné et mesurable dans $\boldsymbol{D}$ alors le potentiel de volume est harmonique dans$(\mathbb{R}^3 \backslash \boldsymbol{D})$.

Théorème : si $\boldsymbol{\rho} \in C^{(1)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ alors le potentiel de volume $\boldsymbol{\varphi} \in C^{(2)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ et vérifie :

$$-\Delta\,\varphi = 4\pi\rho \quad (n=3)$$

$$-\Delta\,\varphi = 2\pi\rho \quad (n=2)$$

Corollaire :

La fonction

$$u_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{D}} \frac{f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{r}\; d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

vérifie l'équation : $-\Delta\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f} \in C^{(1)}(\overline{\boldsymbol{D}})$

Conséquence : la solution générale de l'équation de Poisson $-\Delta\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ avec $\boldsymbol{f} \in C^{(1)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{w}$ où $\boldsymbol{w}$ est harmonique.

II.6- Problèmes de Dirichlet et de Neumann : (internes)

1- Problème de Dirichlet :

Trouver $\boldsymbol{u} \in C^{(2)}(\boldsymbol{D}) \cap C^{(0)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad dans\ \boldsymbol{D} \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$$

Théorème :

Le problème de Dirichlet admet, au plus, une solution.

Preuve :

Supposons le contraire et soient $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$ deux solutions Alors

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}$ vérifie : $\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans\ \boldsymbol{D} \\ u|_S = 0 \end{cases}$

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0$$

$$u|_S = u_1|_S - u_2|_S = \varphi - \varphi = 0$$

Par conséquent $u \equiv 0$

D'après la propriété (7) des fonctions harmoniques.

Problème de Dirichlet homogène: pour $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B_R}$ boule ouverte de rayon R centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^2$:

1- $$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans\ \boldsymbol{D} \\ u|_{\boldsymbol{C_R}} = \varphi(\theta) \end{cases} \qquad C_R = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 = R^2\}$$

On pose $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$

On décompose $\varphi(\theta)$ en série de Fourier

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) R^n$$

Dans le disque$\sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}} < R$,et sa somme est harmonique et, pour $r \to R$,

$$u|_{r=R} = \varphi(\theta) = a_0 + \sum_{n=1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

2- <u>la méthode de séparation de variables :</u>

L'équation(1) $-\Delta u = 0$ s'écrit en coordonnes polaires :

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

On sépare les variables et ou cherche la solution sous la forme :

$u(r, \theta) = R(r)\phi(\theta),$

On remplace après dérivation, dans l'équation (1).

On obtient :

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}{R/r} = -\frac{\phi''}{\phi} = \lambda \qquad \lambda = cst$$

D'où $\phi(\theta) = a\cos\sqrt{\lambda}\,\theta + b\sin\sqrt{\lambda}\,\theta$ de plus $\phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta)$

Donc $\sqrt{\lambda} = n$ et $\phi(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta \equiv \phi_n(\theta)$

$R(r)$ doit vérifier

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \lambda R \qquad R \neq 0$$

On cherche $R(r)$ pour la forme $R(r) = r^\alpha$

On obtient à $R(r) = \alpha_1 r^n + \beta_1 r^{-n}$

On montre que $\beta_1 = 0$ et donc $R(r) = \alpha_1 r^n$

D'où

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= \alpha r^n (a\cos n\theta + b\sin n\theta) \\ &\equiv r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \end{aligned}$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right)$$

Est aussi la condition $u(r,\theta) = \varphi(\theta)$ donner

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) R^n$$

On obtient que la solution formelle est

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Ici $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \frac{a_n}{R^n}$, $B_n = \frac{b_n}{R^n}$

Sous certaines conditions on montre que la solution formelle est la solution du problème de Dirichlet.

3- <u>Formule de Poisson :</u>

On remplace dans (***I***) les coefficients de Fourier a_n, b_n par leurs valeurs. On obtient :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(w)[1 + 2 \sum_{n=0} \frac{r^n}{R^n} \cos n(w-\theta)]dw$$

Posons $\xi = Re^{iw}$ alors :

$$\sum_{n=0} \frac{r^n}{R^n} \cos n(w-\theta) = R + \sum_{n=0} \frac{Z^n}{\xi^n} = Re\frac{z}{\xi - z}$$

Et donc

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(w)\, Re(\frac{\xi + z}{\xi - z})dw$$

Alors :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(w) \frac{R^2 - r^2}{|\xi - z|^2} dw$$

On peut voir que :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(w) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rrcos(w-\theta)} dw$$

Exemples :

1- Le problème de Dirichlet : $\begin{cases} -\Delta u = 0 & dans\ D \\ u|_{C_R} = A\cos\theta \end{cases}$ $\quad D = B_R$

$$\varphi(\theta) = A\cos\theta \quad \Rightarrow \begin{cases} a = A \\ b = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Donc : $\quad u(r,\theta) = \frac{r}{R} A\cos\theta$

2- $\begin{cases} \Delta u = 1 & dans\ D = B_R \\ u|_{C_R} = 0 \end{cases}$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4}(r^2 - R^2)$$

2- Problème de Neumann :

Trouver $\boldsymbol{u} \in C^{(2)}(\boldsymbol{D}) \cap C^{(0)}(\overline{\boldsymbol{D}})$ tell que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad dans\ \boldsymbol{D} \\ \frac{\partial u}{\partial N}|_S = \psi(x) \end{cases}$$

<u>Théorèmes :</u>

<u>Th.1</u>- Deux solution du problème de Neumann ne différent que par une constante.

<u>Th.2</u>- Si *u* est une solution du problème de Neumann alors :

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial N}\, ds + \int_D f\, dxdydz = 0$$

<u>Preuve :</u>

1- Soit $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$ deux solutions alors $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}$ alors :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial N}|_S = 0 \end{cases}$$

posons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ dans La 1er formule de Green. On obtient :

$$0 = -\int_D (grad\, u)^2 dxdydz + \int_S u\frac{\partial u}{\partial N} dS == -\int_D (grad\, u)^2 dxdydz$$

Donc $grad\, u = 0$ d'où $u = cst$

2- On prend $v \equiv 1$ dans La 2$^{\text{éme}}$ formule de Green. On obtient :

$$\int_D \Delta u \, dxdydz = \int_S \frac{\partial u}{\partial N} dS$$

i.e.

$$-\int_D f \, dxdydz = \int_S \frac{\partial u}{\partial N} dS$$

Problème de Neumann homogène: pour le domaine $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B_R}$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial N}|_S = \psi(\theta) \end{cases}$$

On décompose $\psi(\theta)$ en série de Fourier

$$\psi(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

les coefficients de Fourier

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{\boldsymbol{C_R}} \psi(\theta) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int_{\boldsymbol{C_R}} \frac{\partial u}{\partial N} ds = 0$$

(D’après le Th.2 de pb de Neumann)

Donc :

$$\psi(\theta) = \sum_{n=0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Sur $\boldsymbol{C_R}$ $\quad \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial N}} = -\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial r}}|_{\boldsymbol{r=R}}$, d’où :

$$u(x,y) = c + \sum_{n=0} \frac{R^n}{nR^{n-1}} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

la solution du problème de Neumann dans $\boldsymbol{D}$

<u>la méthode de séparation de variables :</u>

Considérons le problème de Neumann, en coordonnes polaires (r, θ)

Par séparation des variables $u(r,\theta) = v(r)w(\theta)$, on obtient :

$$\frac{r^2v'' + rv'}{v} = -\frac{w''}{w} = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r^2v'' + rv' - \lambda v = 0 \\ w'' + \lambda w = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w(\theta) = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ v(r) = r^n \end{cases}$$

Donc

$$u(r,\theta) = c + \sum_{n=0} r^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Il faut donc maintenant traiter la condition aux limites, c'est à dire :

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) nR^{n-1}$$

On décompose $\varphi(\theta)$ en série de Fourier

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

donc :

$$u(x,y) = c + \sum_{n=1} \frac{r^n}{nR^{n-1}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié l'équation elliptique.

Pour résoudre ce type d'équation. On a utilisé la fonction harmonique et la formule de green pour vérifier la solution élémentaire de laplacien.

On a utilisé la fonction potentiel, applique les propriétés de cette fonction et étudié le problème de Dirichlet et problème de Neumann par différentes méthodes

Bibliographie

[1] Claude Zuily, Eléments de distribution et d'équations aux dérivées partielles, Dunod, 2002.

[2] Clude Bardos et Thiery Paul, Equations aux dérivées partielles, masson, paris, 1983.

[3] Courant R. Hilbert R, methods of mathematical physics, John Wiley et sons ,new York, 1989.

[4] Malik Hamode, Mathématique pour la physique, Ellipse, 2001

[6] P. Tauvel, analyse complexe pour la licence 3, Dunod, 2006.

[7] S.colombo, LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES EN PHYSIQUE ET ON MECANIQUE DES MILIEUX, masson, paris, 1976.