



République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Amar Telidji – Laghouat
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité énergétique

Par

SOUICI Mohamed

Analyse des écoulements compressibles turbulents interactions onde de choc / couche limite

Soutenu publiquement le :01/07/2018

devant le jury :

- M. AHMED BENCHATTI, Pr., U. A. T. Laghouat, Président.
- M. SAID BOUABDALLAH, Pr., U. A. T. Laghouat, Examineur.
- M. ABDELKADER DJILALI HAMMOU, MCA, U. A. T. Laghouat, Examineur.
- M. SAHRAOUI KHERRIS, MCA, U. TISEMSSILT, Examineur.
- M. KOUIDER RAHMANI, MCA, U. Z. A. Djelfa, Examineur.
- M. MOKHTAR AOUISSI, Pr., U. A. T. Laghouat, Directeur de thèse.

Année universitaire 2017/2018

Table des matières

Liste des Figures	I
Liste des Tables	IV
Remerciements	V
ملخص	VI
Résumé	VII
Abstract	VIII
Nomenclature	IX
Introduction générale	
1 Généralités	01
1.1 Phénomène de la turbulence	01
1.2 Caractéristiques du phénomène	04
1.3 Deux approches de la turbulence	05
2 Problématique	05
Chapitre 1 Equations instantanées de Navier - Stokes	
1.1 Introduction	07
1.2 Equations instantanées de Navier - Stokes	07
1.3 Approche statistique, équations du mouvement moyen	10
1.4 Equations de Navier-Stokes moyennées	15
1.4.1 Conservation de la masse	15
1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement	15
1.4.3 Conservation de l'énergie	17
1.4.4 Equation d'état	20
1.5 Fermeture du système d'équations	22
1.5.1 Fermeture de Boussinesq	22
1.5.2 Synthèse des équations finales	22
1.6 Modèle de la turbulence retenu	23
Chapitre 2 Les écoulements décollés dans les tuyères	
2.1 Généralités sur les tuyères	25
2.1.1 Rappels sur les tuyères	25

2.1.2	Fonctionnement d'une tuyère en régime supersonique	27
2.1.3	Principaux paramètres de performance	30
2.2	Analyse théorique des écoulements décollés	32
2.3	Décollement dans les tuyères convergentes-divergentes	33
2.3.1	Décollement libre	33
2.3.2	Décollement restreint	34
2.4	Critères de décollement	35
2.5	Etat de l'art	36

Chapitre 3 Modélisation Mathématique

3.1	Introduction	40
3.2	Méthode des volumes finis	40
3.3	Géométrie	48
3.4	Transformations des domaines	49
3.5	Maillage	50
3.6	Paramètres numériques	51
3.6.1	Conditions aux limites	51
3.6.2	Conditions initiales	52
3.7	Modélisation Mathématique	52

Chapitre 4 Résultats et interprétations

4.1	Introduction	54
4.2	Résultats obtenus	54
4.2.1	Profil de la tuyère (30°-15°)	55
a)	Pour une pression initiale $P_0=4$ bar	55
b)	Pour une pression initiale $P_0=10$ bar	70
4.2.2	Effet de l'augmentation de la pression génératrice P_0	83
4.3	Discussion	84
4.3.1	Influence de la pression initiale	85
4.4	Validation des résultats	85

	Conclusion générale et perspectives	87
--	--	----

	Références Bibliographiques	89
--	------------------------------------	----

Annexes

	Annexe A	95
	Annexe B	100
	Annexe C	103

Liste des figures

Introduction générale

Figure (1-1) Tuyère supersonique à échelle réduite au banc d'essai.	02
Figure (1-2) Banc d'essai de la NASA Marshall Space Flight Center Huntsville, Alabama, Etats-Unis.	02
Figure (1-3) Turbine à vapeur supersonique.	02
Figure (1-4) Entrées d'air supersonique.	03
Figure (1-5) Soufflerie supersonique S8ch du Centre Onera de Meudon.	03

Chapitre 2 Les écoulements décollés dans les tuyères

Figure (2-1) Ecoulement unidimensionnel dans une tuyère convergente – divergente.	25
Figure (2-2) Principes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente.	28
Figure (2-3) Régimes de tuyère en fonctionnement supersonique.	30
Figure (2-4) : Processus du décollement sur une plaque plane.	32
Figure (2-5) : Représentation schématique du décollement libre.	34
Figure (2-6) Représentation schématique du décollement restreint.	35
Figure (2-7) Tuyère en présence de décollement.	36
Figure (2-8) Montage expérimental de la tuyère DLR-TIC (avec parois transparentes).	37

Chapitre 3 Modélisation Mathématique

Figure (3-1) Présentation d'un point d'intégration pris dans un volume de contrôle	43
Figure (3.2) Dessin de tuyère étudiée.	48
Figure (3-3) Domaines transformés.	49
Figure (3-4) Maillage du domaine de calcul.	50
Figure (3-5) Maillage raffiné près de la paroi.	50
Figure (3-6) Conditions aux limites.	51

Chapitre 4 Résultats et interprétations

Figure (4-1) Courbes de convergence.	55
Figures (4-2a, 2b) Contours de la pression (Pa).	56

Liste des Figures

Figures (4-3a, 3b) Contours de la température (K).	58
Figures (4-4a, 4b) Contours de la masse volumique (kg/m^3).	59
Figures (4-5a, 5b) Contours de l'énergie cinétique turbulente (m^2/s^2).	60
Figures (4-6a, 6b) Contours de la vitesse U (m/s^2).	61
Figures (4-7a, 7b) Contours de la vitesse V (m/s^2).	62
Figure (4-8) Iso-valeurs de la masse volumique (kg/m^3).	63
Figure (4-9) Iso-valeurs de la vitesse (m/s).	63
Figure (4-10) Iso-valeurs de la température (K).	64
Figure (4-11) Iso-valeurs de la pression (Pa).	64
Figure (4-12a) Iso-valeurs du nombre de Mach.	65
Figure (4-12b) Variation du nombre de Mach.	66
Figure (4-13) Variation de la vitesse (m/s).	66
Figure (4-14) Variation du champ de la vitesse (m/s).	67
Figure (4-15) Variation du champ de l'énergie cinétique (m^2/s^2).	67
Figure (4-16a) Variation de la pression (pascal).	68
Figure (4-16b) Champ des vitesses (zone décollée).	69
Figure (4-17) Variation de la température (K).	70
Figure (4-18) Courbes de convergence.	71
Figures (4-19a, 19b) Contours de la pression tridimensionnelle (Pa).	72
Figures (4-20a, 20b) Contours de la température tridimensionnelle (Pa).	73
Figures (4-21a, 21b) Contours de la masse volumique (kg/m^3).	74
Figures (4-22a, 22b) Contours de la vitesse U (m/s^2).	75
Figures (4-23a, 23b) Contours de la vitesse V (m/s^2).	76
Figure (4-24) Iso-valeurs de la pression (Pa).	76
Figure (4-25) Iso-valeurs de la température (K).	77
Figure (4-26) Iso-valeurs de nombre de la masse volumique (kg/m^3).	77
Figure (4-27) Iso-valeurs de nombre de Mach (Pa).	78
Figure (4-28) Variation du champ de l'énergie cinétique (m^2/s^2).	78
Figure (4-29) Variation du champ de la pression.	79
Figure (4-30a) Variation de la pression (Pa).	79
Figure (4-30b) Champ des vitesses dans la zone près des lèvres de la tuyère.	80
Figure (4-31) Variation de la température (K).	80
Figure (4-32) Variation de la vitesse U (m/s).	81

Liste des Figures

Figure (4-33) Variation du nombre de Mach.	81
Figures (4-34a, 34b) Strioscopique numérique.	82
Figure (4-35) Effet de l'augmentation de la pression génératrice P_0 sur la topologie de l'écoulement.	83
Figures (4-36a, 36b) Variations de la pression à la paroi pour le profil de la tuyère (30° - 15°).	86

Liste des Tables

Introduction générale

Tableau (1-1) Les Caractéristiques de Vulcain2. 04

Chapitre 1 Équations instantanées de Navier – Stokes

Tableau (1-1) Constantes du modèle de Menter. 26

Chapitre 2 Les écoulements décollés dans les tuyères

Tableau (2–1) Variation de vitesse, pression et masse volumique dans la 29
tuyère en régime subsonique ou supersonique.

Chapitre 3 Modélisation Mathématique

Tableau (3-.1) Dimensions la tuyère étudiée. 49

Tableaux (3-2, a, b) Données du travail. 52

Remerciements

Ce projet a été réalisé au Laboratoire de Mécanique en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en sciences, spécialité «machines Thermiques, applications risques environnementaux», au sein du département de mécanique de l'université de Laghouat. Je remercie en premier lieu «Dieu » pour m'avoir donné la chance et la force à arriver à ce niveau d'études.

*Je tiens à remercier particulièrement le professeur **Aouissi Mokhtar**, directeur de thèse pour sa disponibilité ces judicieux conseils et la rigueur scientifique qu'ils m'ont transmis ainsi que pour ces qualités humaines.*

*Je remercie **les membres de jury** pour avoir accepté d'évaluer mon travail. Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail.*

ملخص

لقد أثبتت الدراسات التجريبية للسريان الفوق صوتي للغازات القابلة للانضغاط في الفوهات المتقاربة-المتباعدة عن وجود و تفاعل للعديد من الظواهر الفيزيائية : السريان الفوق صوتي، الموجات الارتجاجية، انقلاع الطبقة الحدية، السريان المعاكس... الخ. هذه الظواهر المعقدة جدا يمكن أن تؤثر بشكل كبير على مردودية الفوهات.

هذا العمل يتعلق بالمحاكاة العددية للتدفق سائل قابل للانضغاط و مضطرب هو الهواء (يفترض أن يكون مثاليا) في خرطوم متنا ضر، وذلك باستعمال الحل العددي لمعادلات نفيير ستوكس بواسطة تقنية حجوم المتناهية(طريقة ماك كورماك)، من أجل دراسة تأثير التغير في الضغط الابتدائي على خصائص تدفق مثل سرع الضغط ودرجة الحرارة ... الخ ، وتظهر هذه النتائج وفقا لمعالم وملامح لحقول التدفقات لبعض المتغيرات و رسم بعض المنحنيات على محور الخرطوم وبالقرب من جداره، و نموذج الاضطراب المستخدم هو $(k - \omega)$ مانتتر.

كلمات البحث: الطبقات الحدية ، مكورماك، السوائل القابلة للانضغاط، موجات الصدمة، محاكاة العددية، فوهة متقاربة متباعدة، الاضطراب.

Résumé

Les phénomènes spontanés sur les écoulements compressibles turbulents, dans les tuyères de type de Laval, ont prouvé l'existence de l'interaction de plusieurs événements physiques : décollement de la couche limite, l'écoulement de retour, ondes de choc, couche de mélange turbulente. Ces phénomènes très complexes peuvent influencer sur les performances et la fiabilité des tuyères propulsives.

Cette étude porte sur la simulation numérique d'un écoulement turbulent d'un fluide compressible (air) supposé parfait dans une tuyère axisymétrique.

Le système d'équations qui régit le phénomène est un système non linéaire décrit par les équations de Navier -Stokes et résolu à l'aide de la méthode des volumes finis, en utilisant le schéma de MacCormack pour la discrétisation des termes figurants dans les différentes équations de ce modèle. Le modèle de turbulence utilisé est celui à deux équations de transport, de type $(k - \omega)$ SST (Shear-Stress-Transport) de Menter.

L'objectif principal de cette étude est d'analyser l'influence de la variation de la pression d'entrée sur les caractéristiques de l'écoulement telles que la vitesse, la pression et la température etc. Les calculs numériques obtenus ont permis de retrouver les différents phénomènes observés expérimentalement.

Mots clés: Couche limite, McCormack, Fluide compressible, Ondes de choc, Simulation numérique, Tuyère convergente-divergente, Turbulence.

Abstract

Spontaneous phenomena of turbulent compressible flows in Laval nozzles have proved the existence and interaction of several physical phenomena: boundary layer separation, reversed flow, shock waves, viscous and turbulent mixing layer. These highly complex phenomena can significantly affect the performance and reliability of propulsive nozzles.

This work focuses on the numerical simulation of turbulent compressible flow in an axisymmetric nozzle, where the test gas is air, assumed to be ideal.

The system of equations governing this flow is solved using the finite volume method, MacCormack scheme is used for discretization in the mathematical model. The turbulence model used is that of two transport equations, $(k - \omega)$ SST (Shear-Stress-Transport) of Menter. This numerical simulation is carried out using a commercial code.

The main objective of this study is to investigate the effect of the initial pressure on variables as flow velocity, pressure, temperature ... etc. The obtained results showed that the various phenomena observed experimentally can be detected numerically.

Key-words: Boundary layer, McCormack, Compressible flow, Shock waves, Numerical simulation, Convergent-divergent nozzle, Turbulence.

Nomenclature

Symboles grecs:

ρ	Masse volumique, [Kg/ m ³].
μ	Viscosité dynamique, [Kg/m.s].
μ_t	Viscosité dynamique turbulente, [Kg/m.s].
ε	Dissipation turbulente, [m ⁴ /s ³].
ν	Viscosité cinématique, [m ² /s].
ν_t	Viscosité cinématique turbulente, [m ² /s].
τ_w	Contrainte de frottement à la paroi, [Pa].
σ_{ij}	Tenseur de contrainte visqueuse, [Pa].
δ_{ij}	Tenseur de Kronecker.
ω	Fréquence turbulente, [1/s].
Γ	Coefficient de diffusion.

Lettres latines :

A_1	Section d'entrée, [m ²].
A_2	Section de sortie, [m ²].
A^*	Section du col, [m ²].
C_μ	Coefficients du modèle de turbulence SST Menter.
E_t	Energie totale. [J]
h	Enthalpie, [J].
h_0	Enthalpie d'arrêt, [J].
k	Energie cinétique turbulente, [m ² /s ²].
M	Nombre de Mach, sans dimension.
P	Pression statique, [Pa].
P_a	Pression ambiante, [Pa].
P_s	Pression de sortie, [Pa].
P_r	Nombre de Prandlt.
q_j	Flux de chaleur, [W/m ²].

- T Température, [K].
U_i i^{ième} composante de la vitesse, [m/s].
V_c Volume de control, [m³].

Exposants:

- \bar{f} Moyenne de Reynolds de ϕ .
 \hat{f} Fluctuation de Reynolds de ϕ .
 \tilde{f} Moyenne de Favre de ϕ .
 f'' Fluctuation de Favre de ϕ .

Introduction générale

1. Généralités :

1.1 Phénomène de la turbulence :

La turbulence est sans doute l'un des phénomènes les plus importants et les plus complexes rencontrés en mécanique des fluides, et surtout, dans les applications aéronautiques. Ses effets se font ressentir aussi bien sur une aile d'avion que dans une chambre de combustion ou sur une simple balle de tennis. Dans le cas d'une aile d'avion par exemple: le coefficient de frottement est plus élevé lorsque la couche limite est turbulente que lorsqu'elle est laminaire. Si la couche limite est laminaire, elle est moins énergétique, donc susceptible de décoller plus aisément et d'accroître la traînée. Aussi a-t-on intérêt à inventer un moyen pour faire apparaître l'état turbulent, mais le plus tard possible afin de ne pas entraîner une augmentation importante du coefficient de frottement.

Le comportement de la turbulence est généralement difficile à résoudre vu que le système d'équations qui régit le phénomène est un système non linéaire décrit par les équations de Navier-Stokes. Il est donc difficile de trouver les solutions exactes, sauf dans quelques cas très simples.

Cependant, l'évolution technologique surtout le calcul numérique appliqué à la dynamique des fluides a porté ses fruits. Ceci est visible par l'avancement spectaculaire des secteurs technologiques dans lesquels la qualité et l'originalité des solutions des problèmes d'écoulement, par exemple dans le secteur du transport (avions, voitures, bateaux, etc.) et de la production d'énergie (réacteurs, turbines, compresseurs, etc.). Dans une grande mesure, ces réussites sont dues aux échanges étroits entre la théorie, la simulation numérique et l'expérience en dynamique des fluides.

D'une part, l'expérience est indispensable pour valider les résultats théoriques, d'autre part, la théorie est nécessaire pour expliquer les résultats obtenus par l'expérience.

La simulation numérique est indépendante de l'expérience, mais elle est nécessaire pour sa validation. Les bases de la science de la dynamique des fluides ont pu être fondées et développées sur des observations expérimentales et l'approche numérique a contribué à la résolution de plusieurs problèmes très complexes et impossibles de les traiter expérimentalement.

Cette étude touche principalement les applications concernant les tuyères à échelle réduite et en pratique l'écoulement dans les tuyères utilisés est souvent turbulent (haut nombre de Reynolds). La figure 1 montre un exemple d'une tuyère à échelle réduite. Elle a fait

l'objet d'une campagne récente de mesures expérimentales dans la soufflerie supersonique du banc d'essai du laboratoire NASA (voir la figure 2) [01,02].

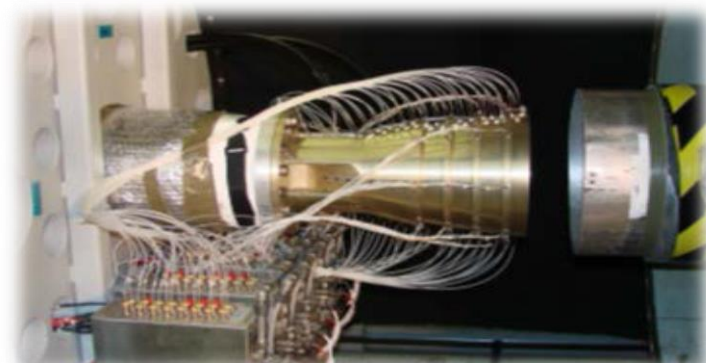


Figure (1-1) Tuyère supersonique à échelle réduite au banc d'essai [01,03].

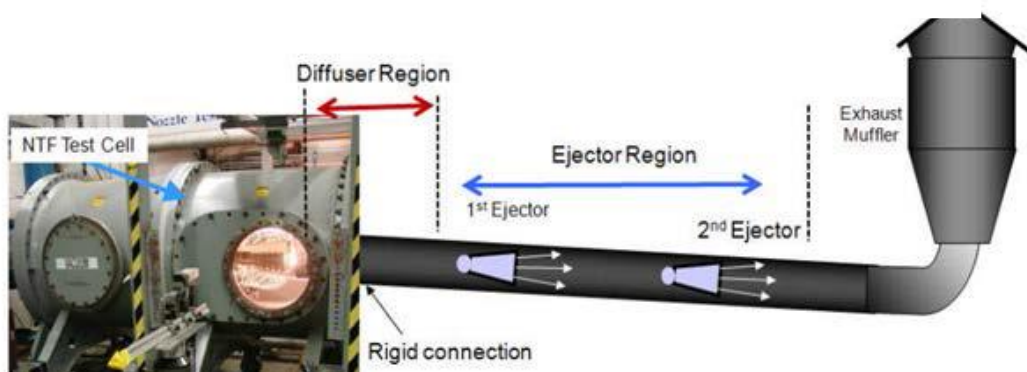


Figure (1-2) Banc d'essai de la NASA Marshall Space Flight Center Huntsville, Alabama, Etats-Unis [04,05].

Ces tuyères à échelle réduite constituent un moyen économique et très efficace pour l'étude des phénomènes physiques rencontrés dans plusieurs domaines de technique tels que les entrées d'air des avions supersoniques, les souffleries supersoniques, les tuyères des missiles, les tuyères des moteurs fusées et lanceurs spatiaux, etc. (voir les figures 3 – 5).

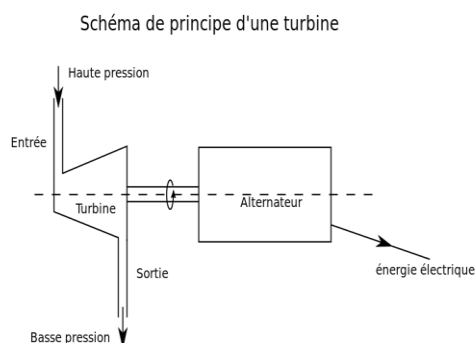


Figure (1-3) Turbine à vapeur supersonique [06].

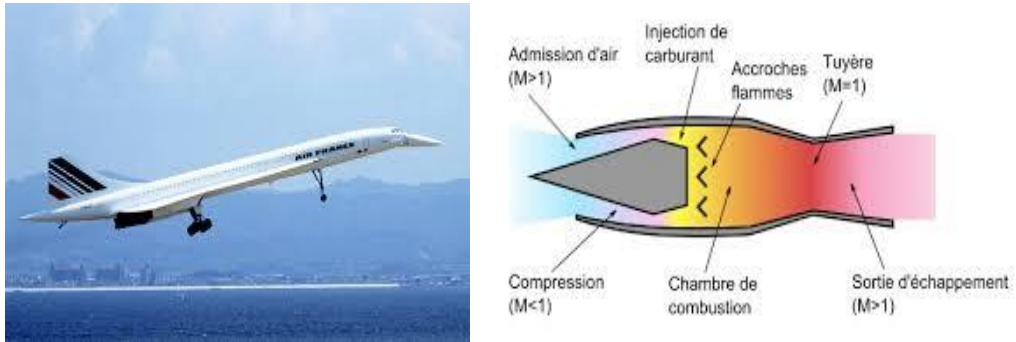


Figure (1-4) Entrées d'air supersonique [06].

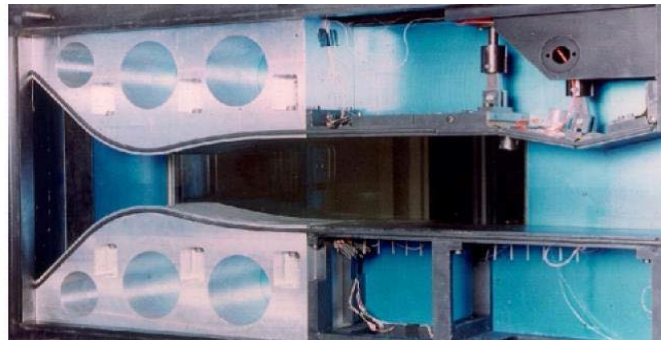


Figure (1-5) Soufflerie supersonique S8ch du Centre Onera de Meudon [07].

Tableau (1-1) Caractéristiques de Vulcain2 [08].

Caractéristiques		Utilisation	
Type moteur	Cycle ouvert générateur à gaz	Utilisation	Premier étage
Ergols	Oxygène et hydrogène liquides	Lanceur	Ariane 5
Poussée	1 350 kN (dans le vide)	Premier vol	2002
Vitesse d'éjection	4 000 m/s	Statut	En production
Pression chambre combustion	115 bars	Constructeur	
Impulsion spécifique	434 s	Pays	France
Rallumage	Non	Constructeur	Snecma,
Poussée modulable	De 90 à 105 %	Rapport poids/poussée	150
Moteur orientable	6° (hydraulique)	Rapport de section	58,5
Masse	2 040 kg	Durée de fonctionnement	450 s
Hauteur/ Diamètre	3,60 m/2,15 m	Modèle décrit	2005

1.2 Caractéristiques du phénomène de turbulence :

Les caractéristiques principales de la turbulence sont les suivantes :

- Incertitude (de mesure, de calcul).
- Grande variété des échelles spatiales (des tailles de tourbillons) dans l'écoulement.
- Caractère aléatoire, désordonné, chaotique, fluctuant, redistribution des fluctuations dans l'espace. exemple bien connu de la météorologie qui n'est pas prévisible à plus de quelques jours, car on ne connaît jamais suffisamment précisément l'état initial). Les cyclones par exemple se déclenchent à quelques dixièmes de degrés de température près. Ceci est valable aussi bien en calcul qu'en essai.
- Augmentation du mélange : forte diffusion des quantités transportées (exemple : le lait et le café, la température dans un fluide, la fumée, la quantité de mouvement, etc.)
- Très large gamme de longueur d'ondes : tourbillons présents de tailles très variées (pour un avion : de quelques microns à quelques centaines de mètres, pour la turbulence atmosphérique : de quelques millimètres à quelques milliers de kilomètres)

➤ Le bruit : les écoulements turbulents sont bruyants du fait des sources acoustiques créées par les fluctuations de pression dans le fluide (l'expérience du tube de Poiseuille). Cela peut générer de l'inconfort dans certains cas (exemple le bruit des rétroviseurs extérieurs des véhicules).

Les effets de la turbulence sont parfois positifs, parfois négatifs :

a) Effets positifs : Par exemple l'augmentation de la turbulence :

- Lors de la combustion d'un mélange permet d'améliorer la combustion.
- Lors du vol d'avions, elle permet d'améliorer la portance des avions.

b) Effets négatifs : diffusion de la pollution.

1.3 Deux approches de la turbulence :

Malgré que certaines grandeurs macroscopiques sont bien reproductibles, par exemple :

- Traînée et portance d'une voiture dans une soufflerie donnée.
- Débit d'une conduite à grand nombre de Reynolds.
- Puissance d'un moteur à combustion.
- Durée de persistance du sillage d'un avion de ligne.
- Portance et traînée d'un avion.

Les scientifiques ont alors élaboré deux approches distinctes et possibles :

a) soit chercher à moyenniser directement la turbulence, à lisser le phénomène : c'est le point de vue statistique. On cherche uniquement les grandeurs moyennes, et l'énergie cinétique turbulente moyenne. C'est une vision "figée" ou "rationnelle" de la turbulence, souvent celle des numériciens.

b) soit chercher à extraire la cohérence dans la turbulence : c'est le point de vue des "structures cohérentes". On cherche alors l'évolution des structures qui persistent au milieu du chaos, celles qui vont déterminer la physique de l'écoulement. C'est une vision instationnaires, fluctuante et plus expérimentaliste de la turbulence.

2. Problématique :

Ce travail a pour objectif l'étude numérique des écoulements compressibles, supersoniques, visqueux et turbulents décollés dans les tuyères propulsives. Ces types d'écoulements complexes sont le plus souvent rencontrés dans le domaine pratique de l'industrie aéronautique et spatiale. De point de vue pratique, cette thèse a pour objectif d'essayer de prédire et de simuler le comportement réel de ces types d'écoulements.

Le manuscrit est structuré en quatre chapitres et une introduction générale.

L'introduction tient compte des généralités (concernant la turbulence et ses caractéristiques).

Dans le premier chapitre, on expose les équations instantanées de Navier – Stokes, telles que les équations mathématiques régissant l'écoulement du fluide, ainsi que le modèle de turbulences que nous utilisons dans cette présente étude qui est le type (k- ω) SST Menter.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des phénomènes physiques liés au décollement de la couche limite.

le troisième chapitre aborde la méthode de résolution numérique des équations de Navier stockes, et la discrétisation des équations selon la méthode des volumes finis, ainsi que le maillage et les conditions aux limites.

Dans le quatrième chapitre, on présente les résultats de l'étude numériques et leurs discussions, et enfin une conclusion générale avec des perspectives.

Équations instantanées de Navier – Stokes

1.1 Introduction :

La plupart majorité des écoulements rencontrés en aérodynamique sont compressible et turbulents. Leur prédiction et leur compréhension physique fine sont essentielles dans de nombreux domaines de la mécanique des fluides. Les équations qui conduisent les mouvements des fluides, qu'ils soient turbulents ou non, ont été écrites pour la première fois par Claude Navier en 1823 .Elles sont généralement appelées équations de Navier-Stokes. La turbulence est devenue une science expérimentale vers la fin du XIXe siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a dominé observer la transition du régime laminaire au régime turbulent [09,10]. Pour un tel écoulement turbulent les équations de Reynolds moyennées font apparaître un nombre d'inconnues supplémentaires ($\overline{u_i u_j}$), la fermeture du système d'équations dans ce cas est nécessaire.

1.2 Equations instantanées de Navier – Stokes :

Pour les milieux fluides internes considères comme continus, quatre variables suffisent à la description d'un écoulement compressible : la masse volumique, la quantité de mouvement u_i , selon les deux directions spatial et l'énergie massique totale E_t .

On en déduit la forme locale instantanée du système d'équations de conservation de Navier-Stokes en situation iso volume [11] :

➤ **Conservation de la masse:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = 0 \quad (1-1)$$

➤ **Conservation de la quantité de mouvement:** (les forces de gravité sont ici négligées et il n'y a pas de force magnétique ou électrique exercée sur le fluide.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho f_i \quad (1-2)$$

f_i : Les forces volumiques.

➤ **Conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E_t + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E_t + p)] = \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} u_i - \frac{\partial}{\partial x_i} q_j + \rho f_i u_i \quad (1-3)$$

Où p est la pression hydrostatique, E_t est l'énergie totale, σ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses, q_j est le flux de chaleur, ρ est la masse volumique, u_j Est la composante du vecteur vitesse suivant l'axe x_j .

δ_{ij} Est l'indice de Kronecker.

L'énergie totale par unité de masse est définie comme étant la somme de l'énergie interne e_{in} , et de l'énergie cinétique :

$$E_t = e_{in} + \frac{1}{2} u_k u_k \quad (1-4)$$

En considérant l'enthalpie massique $h = e_{in} + \frac{p}{\rho}$,

L'équation (1-3) peut, par éloigner, prendre la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E_t + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho h_t u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} u_i - \frac{\partial}{\partial x_j} q_j \quad (1-5)$$

Où h_t est l'enthalpie totale par unité de masse: $h_t = h + \frac{1}{2} u_k u_k$.

Le fluide étant considéré comme newtonien, la loi de comportement joignant le tenseur des contraintes visqueuses au tenseur des taux de déformations est donnée par la relation:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (1-6)$$

Avec $2\mu + 3\lambda = 0$, car les changements de volume se font sans viscosité (hypothèse de Stokes). Selon la loi de Fourier, le flux de chaleur par unité de surface et de temps q_j est proportionnel au gradient de température:

$$q_j = -\lambda_c \frac{\partial}{\partial x_j} T \quad (1-7)$$

Où T est la température absolue, λ_c est le coefficient de conductivité thermique. Ce coefficient peut être écrit en fonction du nombre de Prandtl, qui exprime le rapport entre les effets thermiques et les effets visqueux. Il s'écrit sous la forme :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda_c} = \gamma \frac{\mu c_v}{\lambda_c} \quad (1-8)$$

c_p Et c_v étant définis, respectivement, comme les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants. Le nombre de Prandtl, ainsi que c_p et c_v , peuvent être considérés constants. On a ainsi pour l'air:

$$c_p = 1004.64 \frac{J}{kg K}, c_v = 717.6 \frac{J}{kg K}, \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4, Pr = 0.72$$

Etant donné que $e_{in} = c_v T$, le flux de chaleur s'exprime, alors, sous la forme [10] :

$$q_l = -\gamma \frac{\mu c_v}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_l} T = -\frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_l} e_{in} \quad (1-9)$$

Pour la gamme de température utilisée dans cette étude, la loi de Sutherland [11] relie la température et la viscosité. On considérera la relation suivante [45] :

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + \frac{S}{T_0}}{1 + \frac{S}{T}}} \quad (1-10)$$

$$\text{Où } T_0 = 260.15 K, \mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-11} kg m^{-1} s^{-1} \text{ et } S = 110.4 K.$$

Les équations ci-dessus, ne donnent pas une description complète des phénomènes montrés dans un fluide compressible en mouvement, du fait que les changements de masse volumique et de pression liés aux variations de température ne sont pas pris en compte. Il est, donc, nécessaire d'introduire une relation d'état liant les grandeurs thermodynamiques entre elles. Considérant l'air comme un fluide parfait, cette équation d'état s'écrit [11] :

$$p = \rho \Re T = \rho(\gamma - 1)e_{in} \quad (1-11)$$

Avec :

$$\mathfrak{R} = 287.04 \frac{J}{kg K}, c_v = \frac{\mathfrak{R}}{\gamma - 1}, c_p = \gamma \frac{\mathfrak{R}}{\gamma - 1}, \mathfrak{R} = c_p - c_v$$

1.3 Approche statistique, équations du mouvement moyen :

Les équations de Navier-Stokes forment toujours le point de départ des simulations numériques de l'écoulement de fluide. Ces équations, écrites depuis plus d'un siècle, n'ont pu être déterminées analytiquement jusqu'à présent, sauf pour des écoulements très simplifiés [11,22]. La discrétisation, qui permet une approche numérique des solutions des équations, modifie les données du problème. Le passage d'une solution analytique continue à une situation numérique discrète introduit deux inconvénients :

➤ Les informations physiques n'existent que pour les points du maillage. La méthode de calcul est aveugle pour des changements pouvant intervenir entre les points de maillage. Les diverses méthodes se singularisent donc par une façon plus ou moins juste d'approximer les phénomènes inter-nodaux.

➤ L'hypothèse, faite sur le comportement des variables entre les points nodaux introduit des erreurs de troncature. Quand elles sont contrôlées, ces erreurs permettent au mieux de caractériser la précision de la méthode (second ordre en espace et en temps). Dans le cas contraire, elles s'amplifient et s'opposent à l'obtention d'une solution correcte.

La discrétisation a donc une propriété de filtrage. Les approches qui employant la discrétisation peuvent principalement se regrouper en trois parties :

A) Simulation numérique directe :

Les équations de Navier-Stokes sont résolues telles qu'elles se présentent sous leur forme instantanée. Comme nous l'avons signalé en introduction, cette approche est toutefois limitée à des faibles valeurs du nombre de Reynolds pour des raisons de capacité des ordinateurs [23].

b) Méthodes de macro-simulation :

Dans le but de déplacer les limitations de première approche, une hypothèse de conduite est utilisée pour les processus à petite échelle qui sont usuellement reconnus

Isotropes. D'après Kolmogorov, les Grosses structures porteuses de la plus grande partie de l'énergie turbulente, et donc déterminantes pour le comportement de fluide, ne sont pas homogènes et isotropes Les petites structures qui dissipent l'énergie reçue des grosses structures sont proches de l'isotropie et ont un caractère plus universel.

C'est pourquoi le calcul déterministe peut être restreint aux phénomènes à grandes échelles, tandis que les petites structures Sont modélisées. C'est la technique de la modélisation de sous maille couplée à la simulation des grandes structures. La solution de équations d'évolution ne correspond alors qu'aux phénomènes à grande échelle. Malgré cette amélioration, les possibilités des ordinateurs maintiennent encore des limites sévères à cette approche [33].

C) Traitement statistique:

Alors que les méthodes qui ont été citées se veulent déterministes par nature, seule une approche statistique est difficile de donner une évaluation pratique d'écoulements turbulents complexes. Pour obtenir les caractéristiques moyennes d'un écoulement turbulent, il devrait, dans le cadre d'une approche déterministe, effectuer une moyenne d'ensemble sur un certain nombre de réalisations obtenues par la résolution des équations exactes. Pour une approche statistique, au contraire, une moyenne temporelle sera faite sur les équations elles-mêmes, plutôt que sur leur solution. La solution ne transporte aucune information sur sa composante fluctuante. Mais les informations sur la turbulence sont portées par des variables propres telles que les contraintes de Reynolds [11,22].

Par l'intermédiaire des trois approches citées au-dessus, le point de vue déterministe a donné lieu à une attitude statistique. L'approche statistique peut se décrire à partir de la fonction densité de probabilité pour f , étant à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$.

$$\text{Probabilité } (a \leq f \leq b) = \int_a^b P(f)df \quad (1-12)$$

Cette définition entraîne que la probabilité devient égale à 1 si les limites a et b sont respectivement poussées à $-\infty$ et $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(f)df = 1 \quad (1-13)$$

Ainsi le moment d'ordre un de la fonction densité de probabilité donne la valeur moyenne de f .

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} fP(f)df \quad (1-14)$$

Les variations possibles de $\langle f \rangle$ dans l'espace et le temps dépendront de celles de $P(f)$. Une moyenne temporelle peut être utilisée à la place de (1-14) pourvu que la condition de l'ergodicité soit vérifiée. Il est donc nécessaire de définir des intervalles bornés en espace et en temps pour déterminer ces moyennes, car les écoulements turbulents ne sont ni complètement stationnaires ni même réellement homogènes. Ces intervalles doivent être d'une part suffisamment grands, comparés aux échelles de turbulence, et d'autre part, petits devant les variations macroscopiques de l'écoulement. On définit la moyenne temporelle de f par:

$$\bar{f} = \frac{1}{t_T} \int_0^{t_T} f(1 + \tau)d\tau \quad (1-15)$$

Où t_T est une valeur finie. Il faut donc que la durée t_T soit grande par rapport à la plus grande échelle de temps de la turbulence, de façon à ce que \bar{f} soit indépendante de t (origine de l'intervalle).

Les relations suivantes étant vérifiées pour deux variables aléatoires : f et g , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \langle f + g \rangle &= \langle f \rangle + \langle g \rangle & (a) \\ \langle f \cdot g \rangle &= \langle f \rangle \cdot \langle g \rangle \neq \langle f \cdot g \rangle & (b) \\ \left\langle \frac{df}{d\xi} \right\rangle &= \frac{d}{d\xi} \langle f \rangle ; \quad \xi \in [x_1, x_2, x_3, t] & (c) \end{aligned} \quad (1-16)$$

Boussinesq, et Reynolds, ont défriché le domaine des écoulements incompressibles en moyennant, comme ci-dessus, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Les quantités telles que la vitesse, la pression sont décomposées en une partie moyenne et une partie fluctuante. Cette méthode a été étendue aux écoulements compressibles par Tchen et Schubauer [22], Hinze. Les équations ainsi obtenues contiennent, comparativement à leurs instantanées,

De nouveaux termes qui ont la forme de corrélations doubles de vitesse ou vitesse/masse volumique. Les corrélations vitesse/vitesse sont nommées contraintes de Reynolds et représentent l'échange de quantité de mouvement dû à l'agitation turbulente.

Un premier aperçu peut être obtenu en examinant l'équation de conservation de la masse (1-1) pour un écoulement à masse volumique variable. La décomposition des quantités ρ et u_1 est effectuée comme suit :

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ u_1 &= \bar{u}_1 + u'_1\end{aligned}\tag{1-17}$$

En conséquence, on a:

$$\bar{\rho}' = 0, \quad \bar{u}'_1 = 0\tag{1-18}$$

D'où en moyennant:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\rho} \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{\rho' u'_1}) = 0\tag{1-19}$$

D'autres auteurs, tels Favre, Blackadar, Wherle et Dedebant [33,10], établissent les équations pour des écoulements turbulents compressibles en moyennant le produit de la vitesse et de la masse volumique. Plus tard Favre, étendit ce principe à toutes les variables dépendantes, excepté la masse volumique et la pression. Ce type de moyenne peut être formulé statistiquement, comme une moyenne temporelle ordinaire, en introduisant la fonction densité de probabilité jointe pour les deux variables ρ et f , $P(\rho, f)$:

$$\bar{P}(f) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^\infty \rho P(\rho, f) d\rho\tag{1-20}$$

Ainsi, moyennes pondérées par la masse, variances et corrélations d'ordres probabilité :

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} = \int f \bar{P}(f) df \\ \tilde{f}''^2 &= \frac{\overline{\rho f''^2}}{\bar{\rho}} = \int (f - \tilde{f})^2 \bar{P}(f) df\end{aligned}\tag{1-21}$$

Deux types de moyennes sont donc envisageables :

1) La moyenne temporelle conventionnelle:

$$\begin{aligned}f &= \bar{f} + f' \\ \bar{f} &= \frac{1}{t_T} \int f(t) dt, \quad \bar{f}' = 0\end{aligned}\tag{1-22}$$

2) La moyenne pondérée au sens de Favre:

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} + f'' \\ \tilde{f} &= \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}, \quad \overline{f''} = 0 \end{aligned} \quad (1-23)$$

Les relations suivantes entre la moyenne conventionnelle et celle pondérée par la masse peuvent être établies :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \bar{f} + \frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho f''} &= 0 \\ \overline{f''} &= -\frac{\overline{\rho' f''}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \\ \overline{f_1'' f_2''} &= \overline{f_1' f_2'} - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \overline{\rho' f_1' \rho' f_2'} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho' f_1' f_2'} \end{aligned} \quad (1-24)$$

En utilisant la moyenne pondérée pour la vitesse, l'équation de conservation de la masse devient:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\rho} \bar{u}_1) = 0 \quad (1-25)$$

Celle-ci a une forme semblable à celle de l'équation instantanée. L'usage des moyennes pondérées permet non seulement de conserver une forme simple pour les termes convectifs des équations de transport, mais aussi d'arriver à des écritures analogues à celles obtenues pour les équations instantanées. On peut remarquer que la notion de ligne de courant est donc conservée avec ce formalisme. Il faut aussi noter que la moyenne de Favre élimine les fluctuations de la masse volumique, mais n'enlève pas l'effet des fluctuations de celle-ci sur la turbulence. Donc, cette façon (le moyenner simplifie la formulation mathématique et maintient l'information sur l'aspect physique du problème. Néanmoins la méthode des moyennes pondérées introduit deux inconvénients :

➤ La différence entre les valeurs numériques et celles expérimentales due à

L'utilisation des moyennes pondérées La vitesse pondérée par la masse, par exemple, est bien adaptée aux comparaisons avec les mesures de fil-chaud, tandis que l'anémométrie laser est plus appropriée à la moyenne temporelle. Lorsque le nombre De Mach est inférieur à 5 et le taux de turbulence est modéré, Favre a montré que les écarts entre moyennes conventionnelles et moyennes pondérées sont négligeables.

➤ L'équation d'évolution du taux de dissipation de l'énergie turbulente e , a une forme plus complexe en moyenne pondérée qu'en moyenne conventionnelle. De ce fait, une modélisation globale de e sera envisagée.

1.4 Équations de Navier-stokes moyennées :

1.4.1 Conservation de La Masse:

La forme instantanée de l'équation de conservation de la masse est présentée dans l'expression (1-1).

La moyenne temporelle au sens de Favre produit une forme fermée qui est similaire à celle instantanée. L'équation moyennée, étant déjà écrite dans (1-25) lors de la définition de l'opérateur moyenne, elle est répétée ci-dessous [42] :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{\rho} \tilde{u}_1) = 0 \quad (1-26)$$

L'équation de continuité pour la fluctuation de masse volumique peut être identifiée en soustrayant l'équation moyennée (1-25) de celle instantanée (1-1) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho' \tilde{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1'') = 0 \quad (1-27)$$

1.4.2 Conservation de La Quantité de Mouvement :

L'équation instantanée de la quantité de mouvement est donnée par l'équation (1-2). En introduisant l'expression de (1-6), l'équation instantanée pour la composante u_i devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right) \end{aligned} \quad (1-28)$$

Cette équation est moyennée à l'aide du formalisme de Favre, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_l \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{\sigma}_{il} + \overline{\sigma_{il}'}) - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\bar{\rho} u_i'' u_l''} \end{aligned} \quad (1-24)$$

Si on soustrait cette expression moyennée de l'équation instantanée (1-28), une équation de quantité de mouvement pour la composante fluctuante de la vitesse s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho' \tilde{u}_i + \rho u_i'') \\ + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho' \tilde{u}_l \tilde{u}_i + \rho \tilde{u}_l u_i'' + \rho u_l'' \tilde{u}_i + \rho u_l'' u_i'' \\ - \overline{\rho u_l'' u_i''}) = - \frac{\partial}{\partial x_i} p' + \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{il}'' - \overline{\sigma_{il}'}) \end{aligned} \quad (1-30)$$

Le fait le plus important à propos de l'équation (1-29) est l'apparition d'un nouveau terme $-\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\rho u_l'' u_i''}$ qui n'a pas son homologue dans l'équation (1-28). Son origine est évidemment le terme de convection non-linéaire $-\frac{\partial}{\partial x_l} \rho u_l u_i$. Le terme $\overline{\rho u_l'' u_i''}$ a la dimension d'une contrainte; il est communément nommé tenseur des contraintes de Reynolds. Ce terme, moyenné au sens de Favre, est un tenseur symétrique semblable au tenseur des contraintes visqueuses d'un écoulement laminaire.

La décomposition du tenseur des contraintes visqueuses σ_{ij} , laisse apparaître non seulement une valeur moyenne de type $\overline{\sigma}_{ij}$, mais aussi un terme, à priori, non nul :

$$\overline{\sigma}_{ij}'' = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \overline{\sigma}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\sigma}_j''}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial \overline{\sigma}_k''}{\partial x_k} \quad (1-31)$$

Ce dernier peut être abandonné en supposant que tous les termes impliquant des fluctuations autres que les tensions de Reynolds sont négligeables.

En outre, quand les fluctuations de température sont fortes, une extension de la notion de décomposition au sens de Favre nous permet de présenter les variations des coefficients de transport μ , λ_c , de la chaleur spécifique c_p , et du nombre de Prandtl Pr . Comme suit :

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \tilde{\mu} + \mu'' \lambda_c(T) = \tilde{\lambda}_c + \lambda_c'' \\ c_p(T) &= \tilde{c}_p + c_p'' Pr(T) = \tilde{Pr} + Pr'' \end{aligned} \quad (1-32)$$

Dans le cadre d'écoulements à faibles effets thermiques, les fluctuations de ces grandeurs peuvent être négligées. On prendra ainsi dans cette étude :

$$\mu(T) = \tilde{\mu} + \mu'' \lambda_c(\tilde{T}) = \frac{\bar{\mu} c_p}{P_r} \quad (1-33)$$

c_p : constant P_r : constant

Finalement, l'équation de quantité de mouvement moyennée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_l \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \\ + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \right. \\ \left. - \overline{\rho u_i'' u_l''} \right) \end{aligned} \quad (1-34)$$

1.4.3 Conservation de L'énergie :

L'équation du bilan de l'énergie est donnée par l'expression (1-3). En partant, le passage à la moyenne de Favre conduit à l'équation suivante [11] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_l \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \tilde{u}_l \bar{p} + \tilde{u}_l \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\overline{\rho u_i'' e_{in}''} + \bar{p} u_i'' + \overline{p' u_i''} + \tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_i''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_i''} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{\sigma}_{il} \tilde{u}_i + \tilde{\sigma}_{il} \overline{u_i''} + \overline{\sigma_{il}''} \tilde{u}_i + \overline{\sigma_{il}'' u_i''} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{q}_l + \overline{q_l''} \right) \end{aligned} \quad (1-35)$$

On identifie certains termes :

$\frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i$: Énergie cinétique du mouvement moyen par unité de volume.

$\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''}$: Énergie cinétique des fluctuations turbulentes par unité de volume, noté $\bar{\rho} k$.

Où :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''} \quad (1-36)$$

$\overline{\rho u_i'' e_{in}''}$: Transport turbulent de la chaleur.

$\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_i''}$: Transport turbulent de l'énergie turbulente.

$\overline{\sigma_{il} u_i''} = (\tilde{\sigma}_{il} \overline{u_i''} + \overline{\sigma_{il}''})$: Diffusion moléculaire de l'énergie turbulente.

En retranchant l'expression moyennée (1-34) de l'équation instantanée (1-8), on peut écrire une équation pour la partie fluctuante de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e_{in}'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} + \frac{\partial}{\partial t} \rho' \left(\tilde{e}_{in} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \rho \tilde{u}_i \left(e_{in}'' + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \rho' \tilde{u}_i \left(\tilde{e}_{in} + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \rho u_i'' \left(\tilde{e}_{in} + e_{in}'' + \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i + \tilde{u}_i u_i'' + \frac{1}{2} u_i'' u_i'' \right) - \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_i''} + \overline{\rho u_i'' e_{in}''} + \tilde{u}_i \overline{\rho u_i'' u_i''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_i''} \right) + \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{u}_i p' + u_i'' \bar{p} + u_i'' p') - \frac{\partial}{\partial x_1} (\overline{u_i'' \bar{p}} + \overline{u_i'' p'}) = \\
 & \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\sigma}_{il} u_i'' + \sigma_{il}'' \tilde{u}_i + \sigma_{il}'' u_i'') - \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\sigma}_{il} \overline{u_i''} + \overline{\sigma_{il}'' \tilde{u}_i} + \overline{\sigma_{il}'' u_i''}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (q_i'' - \bar{q}_i'')
 \end{aligned} \tag{1-37}$$

On peut exprimer la corrélation énergie interne/vitesse, apparue dans (1-37), en fonction d'une corrélation température/vitesse :

$$\overline{\rho u_i'' e_{in}''} = c_v \overline{\rho u_i'' T''} \tag{1-38}$$

La corrélation pression/vitesse, contenue dans l'équation (1-34), peut être réécrite en fonction d'une corrélation température/vitesse en utilisant l'équation d'état (1-11).

$$\begin{aligned}
 \overline{\bar{p} u_i''} + \overline{p u_i''} &= (\gamma - 1) \overline{e_{in} u_i''} \\
 &= (\gamma - 1) \overline{e_{in}'' u_i''} = c_v (\gamma - 1) \overline{\rho T'' u_i''}
 \end{aligned} \tag{1-39}$$

En ajoutant la contribution de cette corrélation au résultat de (2-38), on obtient une Expression globale pour ces deux corrélations :

$$\overline{\rho u_i'' e_{in}''} + \overline{p u_i''} = \gamma c_v \overline{\rho u_i'' T''} \tag{1-40}$$

La corrélation entre le tenseur des contraintes visqueuses et les fluctuations de vitesse est le produit de la moyenne de Favre, car la moyenne des fluctuations de vitesse n'est pas nulle. Cette corrélation est exprimée comme :

$$\overline{\sigma_{il} u_i''} = \tilde{\sigma}_{il} \overline{u_i''} + \overline{\sigma_{il}'' u_i''} \tag{1-41}$$

Afin d'analyser les deux termes à droite, il faut exprimer la fluctuation de vitesse en fonction d'autres grandeurs. Pour cela, Vandromme cite deux approches possibles :

- 1) En première approche, la température totale est supposée constante dans les tourbillons. On exprime alors la fluctuation de température T'' , en fonction de la valeur moyenne et de la fluctuation de vitesse:

$$\begin{aligned}
 T_{tot} &= T + \frac{u_i u_i}{2c_p} = C_0 \\
 T_{tot} &= \tilde{T} + \frac{1}{2c_p} (\tilde{u}_i \tilde{u}_i + \overline{u_i'' u_i''}) \\
 T'' &= -\tilde{u}_i \frac{u_i''}{c_p} - \frac{1}{2c_p} (u_i'' u_i'' - \overline{u_i'' u_i''})
 \end{aligned} \tag{1-42}$$

Où C_0 est une constante. Supposons un écoulement unidirectionnel, on peut alors écrire :

$$T'' = -\tilde{u}_i \frac{u_i''}{c_p} \tag{1-43}$$

Selon l'hypothèse de Rubesin [36], d'un comportement poly tropique local de la turbulence:

$$\frac{p'}{\bar{p}} = n \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{n}{n-1} \frac{\rho T''}{\bar{\rho} \tilde{T}} \tag{1-43}$$

Où n est le coefficient poly tropique ,0 pour un écoulement isobare, 1 pour celui isotherme et γ pour celui isentropique). En se servant des deux équations précédentes, une relation entre les fluctuations de la masse volumique et de la vitesse peut être obtenue :

$$\rho' = -\frac{1}{(n-1)c_p \tilde{T}} \rho \tilde{u}_i u_i'' \tag{1-45}$$

A partir des expressions (1-24) et (1-45), on a donc :

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{(n-1)c_p \tilde{T}} \tilde{u}_i \overline{u_i'' u_i''} \tag{1-46}$$

La corrélation $\overline{\rho' u_i'' u_i''}$ est la contrainte de Reynolds et dès lors que l'on arrivera à l'évaluer, l'expression (1-46) ne comportera aucun terme inconnu.

2) En deuxième approche, la représentation de $\overline{u_i''}$ ne nécessite pas la supposition température totale constante. On se sert directement de la loi poly tropique (1-40) et l'on obtient l'expression suivante:

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{(n-1)\tilde{T}} \overline{u_i'' T''} \tag{1-47}$$

Dans cette relation on a fait apparaître la corrélation température/vitesse. Etant donné que l'expression (1-47) ne tient pas compte du fait que la température totale soit constante, elle peut donner des valeurs différentes de celles calculées par (1-46). La condition thermique imposée à la paroi (refroidissement ou réchauffement) rentre en jeu dans (1-47) alors que le flux thermique n'est pas rendu dans (1-46).

Ainsi, $\overline{\tilde{\sigma}_{il} u_i''}$ peut être exprimé soit à partir de (1-46) ou de (1-47). Ce terme joue un rôle négligeable pour des nombres de Mach inférieur à 5 ; nous le négligerons donc par la suite.

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\sigma}_{il} u_i''} &= \overline{\mu u_i'' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial u_k''}{\partial x_k} \right)} \\ &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial \overline{u_i'' u_i''}}{\partial x_l} + \overline{u_i'' \frac{\partial u_l''}{\partial x_i}} - \frac{2}{3} \delta_{il} \overline{u_i'' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} \right) \end{aligned} \quad (1-48)$$

Où les fluctuations de la viscosité moléculaire sont supposées négligeables. En suivant le même raisonnement que précédemment, le terme $\overline{\tilde{\sigma}_{il} u_i''}$ sera négligé pour la simple et bonne raison que ça. Contribution dans le bilan de l'énergie est faible tant que le nombre de Mach n'atteint pas le domaine hypersonique.

De la même manière que dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, seules seront conservées les corrélations impliquant les tensions de Reynolds et le flux de chaleur turbulent.

Les termes $\overline{\tilde{\sigma}_{il} u_i''}$ et $-\frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i'' u_i''}$ étant négligés, l'équation (1-35) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_l \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \tilde{u}_l \bar{\rho} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_i \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u_i'' u_i''} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\lambda_c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_l} + \gamma c_v \rho T'' \overline{u_l''} \right) \end{aligned} \quad (1-48)$$

1.4.4 Équation d'état :

L'équation d'état moyennée s'obtient à partir de l'expression (1-15). Avec la décomposition des variables d'état au sens de Favre:

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T''\end{aligned}\tag{1-49}$$

L'équation (1-11) prend la forme suivante:

$$= \bar{\rho} \Re \tilde{T} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{e}_{in}\tag{1-50}$$

On peut même écrire une expression pour la fluctuation de pression p' , en soustrayant (1-51) de (1-11) :

$$p' = \Re(\bar{\rho} \tilde{T} + \rho T'') = (\gamma - 1)(\rho' \tilde{e}_{in} + \rho e''_{in})\tag{1-51}$$

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{T''}{\bar{T}} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{\rho' T''}{\bar{\rho} \bar{T}}\tag{1-52}$$

1.5 Fermeture du système d'équations :

Le problème de base du développement des modèles de turbulence est de spécifier des conditions de fermeture qui permettent de relier les corrélations turbulentes inconnues, par relations algébriques ou différentielles, aux variables connues de l'écoulement moyen. D'une manière générale, un modèle mathématique contenant des constantes indéterminées est postulé. Ces constantes inconnues sont ensuite ajustées par confrontation à des résultats expérimentaux.

Il est nécessaire de postuler une forme du modèle mathématique devant, tout d'abord, tenir compte de la théorie physique. Les cas d'application étant très variés, le modèle doit avoir un caractère général. D'autre part, on cherchera un modèle alliant une simplicité de formulation et une bonne représentation de la physique de l'écoulement. De plus, le modèle devra être compatible avec les méthodes numériques. Toutes ces exigences sur les modèles ne seront pas remplies avec des priorités égales. Le modèle n'a pas, en pratique, la simplicité mathématique ou numérique tant qu'il a un caractère général qui prend en compte toutes les échelles de l'écoulement. En conséquence, nous aurons différentes catégories de modèles :

- les modèles à viscosité tourbillonnaire.
- les modèles des contraintes de Reynolds.

Les modèles à viscosité tourbillonnaire relient les contraintes de Reynolds au tenseur des taux de déformation moyens, par l'entremise d'un coefficient de proportionnalité appelé viscosité tourbillonnaire. Dans la deuxième classe de

fermeture, l'évolution des corrélations dans chaque direction de l'écoulement est déterminée directement et s'affranchit donc de la détermination de la viscosité tourbillonnaire.

1.5.1 Fermeture de Boussinesq :

En raison de la présence de nouveaux termes inconnus dans les équations moyennes, il est nécessaire de faire une supposition ou de trouver un modèle raisonnable pour ces termes nouveaux. Le concept généralement le plus utilisé est d'établir une analogie entre les contraintes visqueuses et turbulentes.

Suite aux travaux originaux de Reynolds, Boussinesq aperçoit une représentation de la viscosité tourbillonnaire affectant les processus de diffusion moléculaire. Un rapport linéaire entre contraintes turbulentes et tenseur des taux de déformation moyens conduit alors à l'analogie turbulent de la loi de Newton [22] :

$$-\overline{\rho u_i'' u_i''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{il} \bar{\rho} k \quad (1-53)$$

$$-\bar{\rho} \overline{u u_i'' T_l''} = \frac{\mu_t}{P_{rt}} \frac{\partial T}{\partial x_l} \quad (1-54)$$

Le terme $-\frac{2}{3} \mu_t \delta_{il} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}$ correspond à la dilatation volumique et n'existe que dans le cas d'écoulements compressibles.

Le terme $-\frac{2}{3} \delta_{il} \bar{\rho} k$ permet de vérifier que la trace du tenseur des contraintes de Reynolds

1.5.2 Synthèse des équations finales :

Nous obtenons finalement le système simplifié suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = \bar{\rho} \mathfrak{R} \bar{T} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_l = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\tilde{\sigma}_{il} + \overline{\sigma_{il}''}) - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\rho \tilde{u}_i'' \tilde{u}_l''} \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{p} \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_l \left(\tilde{e}_{in} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} + k \right) + \tilde{u}_l \bar{p} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \tilde{u}_i \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{il} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \overline{\rho u_i'' u_l''} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial x_l} \left(-\lambda_c \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_l} + \gamma c_v \overline{\rho T'' u_l''} \right) \end{array} \right. \quad (1-55)$$

Le but des turbulences turbulence à deux équations est alors de déterminer la viscosité turbulence. Pour cela, il faut écrire deux équations de transport, une pour l'énergie cinétique k et l'autre pour la dissipation ϵ ou la vorticité ω .

1.6 Modèle de la turbulence retenu :

C'est l'approche suivie par Menter pour installer au point son modèle (appelé SST-Menter) via une fonction de transfert F1. Cette fonction permet de sélectionner le modèle Wilcox $k-\omega$ dans la sous-couche visqueuse et la région logarithmique et basculer progressivement vers le modèle $k-\epsilon$ à mesure qu'on s'approche de la zone de sillage. On profite ainsi de la robustesse de ω dans la région proche paroi et de l'insensibilité de ϵ dans l'écoulement libre. La fonction de Menter F_1 [33] s'écrit :

$$F1 = \tanh(\xi_1^4) \quad (1-56)$$

Avec :

$$\xi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\underbrace{\beta^* \omega y_n}_{T_1}}, \frac{500 \bar{v}}{\underbrace{\omega y_n^2}_{T_2}} \right), \frac{4 \bar{p}}{\underbrace{CD_{k\omega} \mathcal{Y}_n^2}_{T_3}} \sigma_{\omega 2} \mathcal{K} \right] \quad (1-57)$$

Où

$$CD_{k\omega} = \max \left(2 \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (1-58)$$

Le terme T_1 , correspondant à une échelle de longueur turbulente, $\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}$ adimensionnée par la distance à la paroi, intervient principalement dans la zone logarithmique, puis

décroit a mesure qu'on sort de la couche limite. Le terme T_2 , quant à lui, tend rapidement vers 0 a mesure qu'on s'éloigne de la paroi et assure l'activation du modèle $k - \omega$ dans la sous-couche visqueuse.

Enfin, le terme T_3 consiste à prévenir une dégénérescence de la solution pour de faibles valeurs de ω dans l'écoulement externe. Le modèle de Menter repose sur le transport de deux équations, une pour l'énergie cinétique de turbulence et une autre pour la vorticité:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} k = P_k - \beta^* \bar{\rho} \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1-59)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\rho}}{Dt} \omega = & \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\bar{\mu} + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ & + 2\bar{\rho}(1 - F1)\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (1-60)$$

Si $\Phi 1$ représente les constantes du modèle de Wilcox et $\Phi 2$ les constantes du modèle ($k-\epsilon$), on définit alors les constantes mixtes du modèle de Menter [23,24] par :

$$\Phi = F1\Phi 1 + (1 - F1)\Phi 2 \quad (1-61)$$

Ou les coefficients correspondant a $\Phi 1$ et $\Phi 2$ sont regroupes dans le tableau (1-1).

Tableau (1-1) Constantes du modèle de Menter

	σ_k	σ_ω	β	β^*	k	$\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \sigma_\omega \frac{k^2}{\sqrt{\beta^*}}$
$\Phi 1$	0.85	0.5	0.075	0.09	0.41	0.553
$\Phi 2$	1.0	0.856	0.0818	0.09	0.41	0.440

Sur le plan numérique, les équations ($k - \omega$) sont r  solv  es de la même manière que celles du modèle ($k - \epsilon$), les seules différences résultent de :

- 1) l'établissement des conditions initiales et des conditions aux limites en $\omega = \frac{1}{k} \frac{\epsilon}{\beta^*}$
- 2) la modification des termes diffusifs et l'ajout des termes sources inhérents au modèle SST-Menter.

Les écoulements décollés dans les tuyères

2.1 Généralités sur les tuyères :

2.1.1 Rappels sur les tuyères :

Nous rappelons à travers ces quelques lignes les principales caractéristiques et équations régissant les écoulements monodimensionnels adiabatiques (pas d'échange de chaleur avec l'extérieur), à travers une tuyère (la vitesse étant représentée par u), ces équations sont utilisées dans le programme de calcul qu'on va utiliser, pour obtenir la solution monodimensionnelle représentant la surface des solutions initiales.

Nous prenons une tuyère de type convergente-divergente [25]. Supposons que l'écoulement à l'intérieur de celle-ci soit compressible, stationnaire, et isentropique.

Il est clair qu'il s'agit là d'un écoulement fictif mais ces hypothèses permettent d'obtenir des relations analytiques simples fournissant des résultats avec une certaine approximation. L'équation de continuité, de quantité de mouvement et celle de conservation de l'énergie conduisent en l'absence de frottement à la paroi aux relations suivantes:

Le volume en $A_1 = U_1 A_1 \Delta t$

Le volume en $A_2 = U_2 A_2 \Delta t$

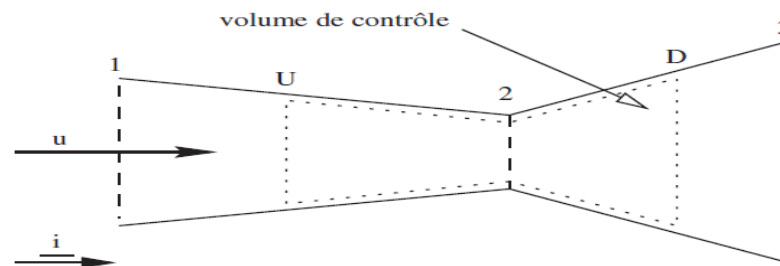


Figure (2-1) Ecoulement unidimensionnel dans une tuyère convergente – divergente [26].

La masse entrante en A_1 est $\rho U_1 A_1 \Delta t$

La masse sortante en A_2 est $\rho U_2 A_2 \Delta t$

Ce qui revient à dire que :

$$\rho U A = cste \quad (2-1)$$

$$A(P + \rho U^2) = cste \quad (2.2)$$

$$h + \frac{U^2}{2} = cste \quad (2-3)$$

La relation (2-1) traduit la conservation du débit massique à l'intérieur de la tuyère. La relation (2-3) montre que dans le cadre des hypothèses faites ci-dessus, l'énergie totale se conserve. Ainsi lorsque $U = 0$, toute l'énergie est sous forme d'enthalpie dite enthalpie d'arrêt, égale à: $h_0 = h + v^2/2$

$$h_0 = h + U^2/2 \tag{2-4}$$

Inversement, on peut supposer que l'écoulement soit accéléré de façon à atteindre un état fictif où toute l'énergie serait sous forme cinétique ceci correspondrait alors à une vitesse maximale U_{max} telle que:

$$U_{max}^2/2 = h + U^2/2 = h_0 \tag{2-5}$$

La relation (2-5) montre que la vitesse de l'écoulement à l'intérieur d'une tuyère admet toujours une limite. En différenciant les relations (2-1) et (2-3), on aboutit à l'équation d'Hugoniot.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{A} &= \frac{dU}{U} [M^2 - 1] = -\frac{d\rho}{\rho} \left[M^2 - 1/M^2 \right] \\ &= -\frac{dP}{\rho U^2} [M^2 - 1] \end{aligned} \tag{2-6}$$

Où (U/a) désigne le nombre de mach (a étant la célérité du son) [27].

La relation (2-6) permet de préciser les variations de la vitesse (de la pression volumique) selon que le gaz s'écoule dans le convergent ou dans le divergent en régime supersonique (voir tableau (2-1)).

Tableau (2-1) Variation de vitesse, pression et masse volumique dans la tuyère en régime subsonique ou supersonique [28].

	Écoulement subsonique ($M < 1$)	Écoulement supersonique ($M > 1$)
Convergent	$dU > 0, dP < 0$	$dU < 0, dP > 0$
Divergent	$dU < 0, dP > 0$	$dU > 0, dP < 0$

Elle montre également que lorsque l'écoulement est sonique ($M = 1$) on a $\frac{dA}{A} = 0$, si

On écarte Les solutions $A = cste$ et, on en déduit que si $M = 1$ dans l'écoulement cela se produit où l'aire est minimale, c'est à dire au col, remarquons que la réciproque n'est pas forcément vraie. Une autre relation intéressante Est celle donnant le nombre de mach dans une section de la tuyère [29].

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma + 1}{2}} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2-7)$$

Ou A^* est l'aire au col. Cette relation montre que le nombre de mach dépend uniquement du rapport d'aire $\frac{A}{A^*}$ et de γ et par conséquent est indépendant des grandeurs réservoir.

Les Variations de P, T et ρ peuvent être obtenues à partir des équations [33]:

$$\frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\gamma}{(\gamma - 1)}} \quad (2-8)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \quad (2-9)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{(\gamma - 1)}} \quad (2-10)$$

2.1.2 Fonctionnement d'une tuyère en régime supersonique :

Les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente peuvent être décrits par la théorie monodimensionnelle des gaz calorifiquement parfaits et non visqueux [35]. Cette approche permet de comprendre la formation d'une onde de choc dans une tuyère. La différence entre la pression génératrice amont p_i et la pression aval p_a dans la tuyère, présentée sur la figure (2-2), permet de créer un écoulement. Le premier régime d'écoulement est subsonique dans toute la tuyère. Si on diminue p_a , le débit massique augmente progressivement jusqu'à atteindre une valeur limite quand l'écoulement au col est sonique. Le débit est alors bloqué et la pression en aval tend vers p_{asup} . Si la pression aval est en dessous de p_{pasup} , le col reste bloqué, l'écoulement dans le divergent de la tuyère passant en supersonique.

L'écoulement est supersonique dans toute la tuyère si $p_a = p_{a\text{inf}}$ (tuyère entièrement amorcée). Si la pression aval est comprise entre $p_{a\text{sup}}$ et $p_{a\text{inf}}$, l'adaptation se fait au travers d'une onde de choc droite, positionnée en X_{choc} , ce qui se traduit par un saut dans l'évolution de p/p_i .

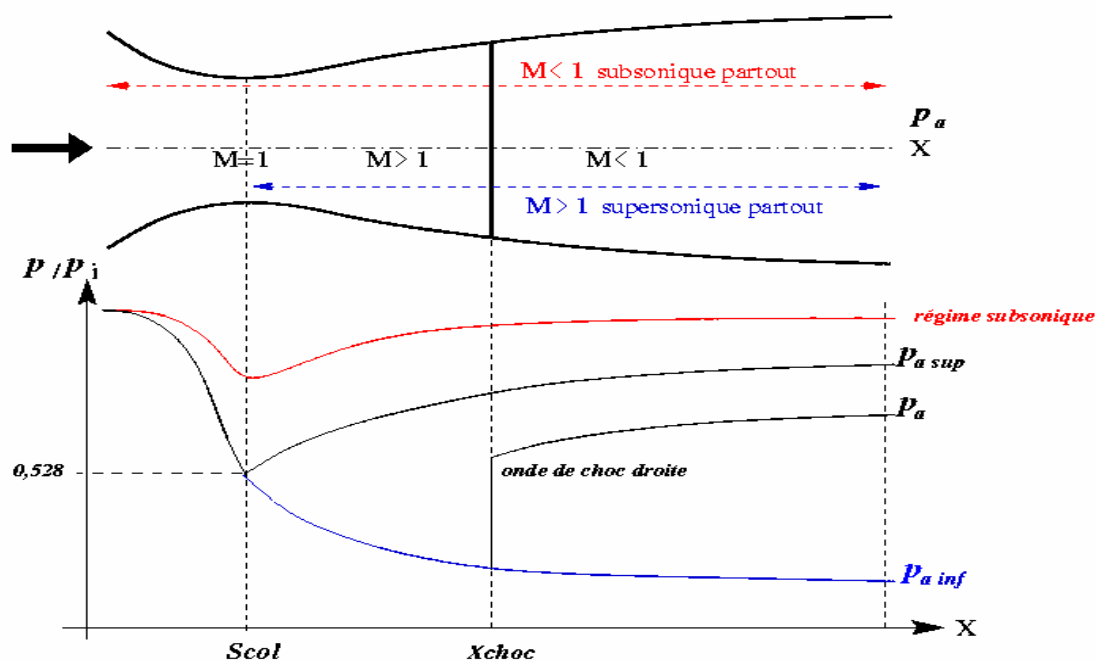


Figure (2-2) Principes de fonctionnement d'une tuyère convergente-divergente [32].

Les effets visqueux rendent plus complexes les caractéristiques des régimes d'écoulement qui viennent d'être décrits. On note p_E la pression à la lèvre de la tuyère et p_a la pression ambiante. Suivant la valeur de la pression ambiante, plusieurs régimes de fonctionnement en supersonique sont possibles :

- Si $p_E = p_a$ (voir figure (2-3)), nous sommes dans le cas où le régime de la tuyère est adapté à la pression ambiante. C'est le régime où la poussée est optimale.
- Si $p_E > p_a$, la tuyère est en régime de sousdétente (voir figure(2-3)). Pour atteindre le niveau de pression en sortie de tuyère p_E , un faisceau d'ondes de détente centrées à la lèvre se forme permettant d'ajuster la pression de p_a à p_E . Si la tuyère est de révolution, un choc de focalisation se crée dans le jet en aval de la sortie de la tuyère.

➤ Si $p_a < p_E$, la couche limite en sortie de tuyère est soumise à un gradient de pression adverse qui a pour conséquence de l'épaissir. Des ondes de compression se forment alors à la lèvre de la tuyère pour former un choc qui, dans un premier temps, ne fait pas décoller la couche limite (voir Figure (2-3)). Si la pression ambiante p_a continue d'augmenter, l'écoulement est modifié comme le montre le schéma de la figure (2-3). Le point D figure le point de décollement à partir duquel se forment des ondes de compression se focalisant en un choc oblique de décollement qui dévie l'écoulement. En aval du point D, la confluence entre la couche limite turbulente décollée et l'écoulement à faible vitesse provenant de l'aval (encore appelé écoulement d'«eau-morte») produit une couche de mélange visqueuse et turbulente. La figure (2-5) montre les effets du décollement sur la répartition de la pression pariétale. La courbe en pointillés représente l'évolution de la pression pariétale pour le régime adapté. En régime sur détendu sans décollement, la pression augmente dans la zone de la lèvre de la tuyère pour atteindre la pression atmosphérique. Dans le cas du régime sur détendu avec décollement, une augmentation de pression est suivie par une évolution asymptotique vers la pression dans la zone d'eau-morte proche de la pression ambiante p_a . Dans un régime de fonctionnement très sur détendu avec décollement, l'évolution de la pression pariétale modifie la poussée de la tuyère. C'est la raison pour laquelle la connaissance de la position du point de décollement D et du saut de pression au travers du choc est importante pour évaluer ses performances. Pour un rapport de pression donné, il est encore difficile de prévoir si la sur détente provoquera un décollement et, s'il y a décollement, quelles seront la position du point de décollement et l'évolution de la pression pariétale. Cette difficulté provient de la complexité des phénomènes physiques rencontrés dans de tels écoulements, fortement compressibles et turbulents. Le paragraphe suivant fait un bilan descriptif des configurations de chocs obtenus lors d'essais en soufflerie.

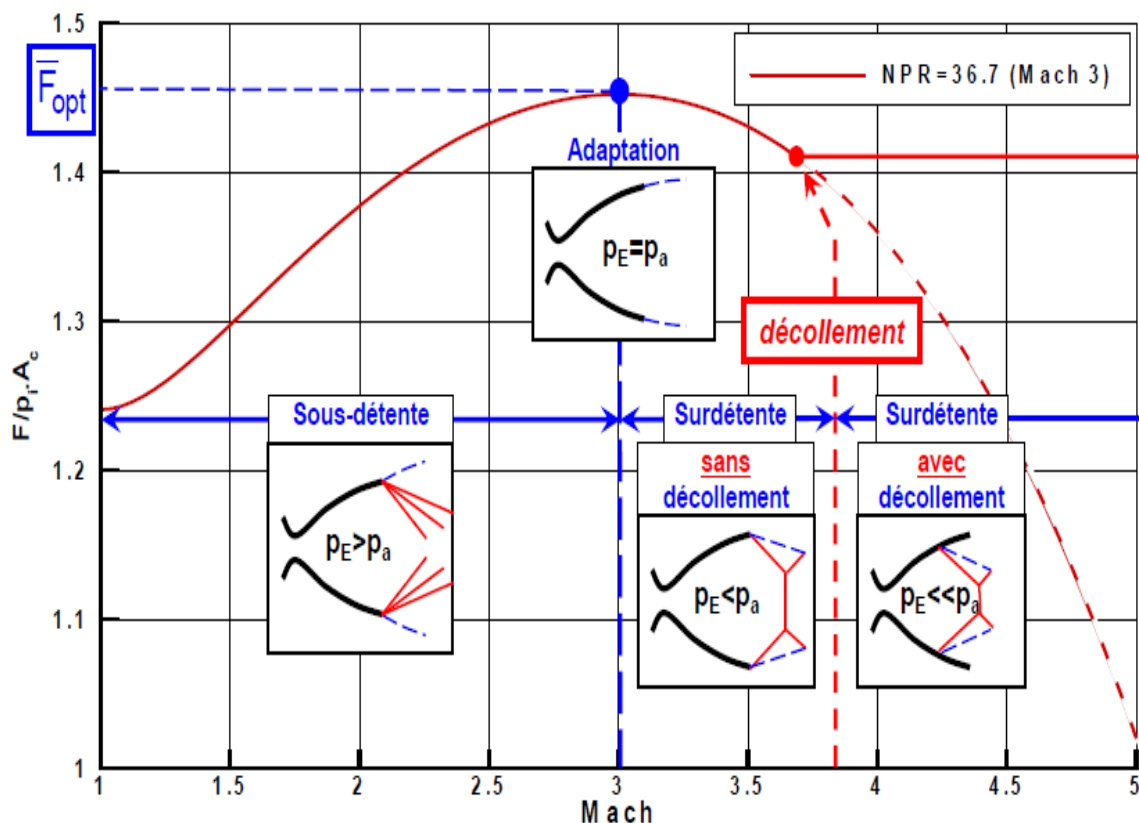


Figure (2-3) Régimes de tuyère en fonctionnement supersonique [33].

2.1.3 Principaux paramètres de performance:

➤ La poussée :

La poussée délivrée par une tuyère est fonction de la vitesse d'éjection des gaz de combustion et de la différence entre la pression à la section de sortie et de la pression ambiante. L'application de l'équation de conservation de la quantité de mouvements permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire de rayon dy :

$$dF = [\rho V_s^2 + (P_s - P_a)]2\pi y dy \quad (2-11)$$

La poussée totale est déterminée par intégration sur la section de sortie de la tuyère de l'équation précédente. Ce qui nous donne:

$$F = \pi \sum_i [\rho V_{si}^2 + (P_{si} - P_a)] [Y_{si+1}^2 - Y_{si}^2] \quad (2-12)$$

➤ Le coefficient de poussée :

Ce paramètre sans dimension s'exprime de la manière suivante:

$$C_F = F / P_t A_c \quad (2-13)$$

Le dénominateur de l'équation (2-10) est composé du produit de P_t , (pression totale à la sortie de la chambre de combustion) et de A_c (aire de la section au col). Ces deux

Paramètres représentent la chambre de combustion et l'écoulement supersonique respectivement. Ce rapport peut donc être considéré comme représentatif de la performance du contour de la section divergente supersonique.

➤ **Le coefficient de décharge :**

Les performances réelles d'une tuyère sont généralement légèrement différentes de celles déterminées sur la base de l'hypothèse d'un écoulement isentropique idéal et cela est dû principalement aux effets de la viscosité.

Le coefficient de décharge exprime cette différence et s'écrit:

$$C_d = \text{actuel} / \text{isentropique} \quad (2-14)$$

➤ **La vitesse effective :**

La vitesse effective est la vitesse de sortie de la tuyère adaptée. Elle est définie comme le rapport de la poussée au débit massique:

$$V_{eff} = F / \dot{m} \quad (2-15)$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

➤ **L'impulsion spécifique :**

L'impulsion spécifique notée I_s est définie comme le rapport de la poussée au produit du débit massique et de l'accélération de la pesanteur:

$$I_s = \frac{F}{\dot{m}g} \quad (2-16)$$

C'est un paramètre généralement utilisé pour comparer les performances des propergols utilisés pour la propulsion.

Des différents régimes de fonctionnement d'une tuyère convergente divergente CD (sur-détente, adaptation et sous-détente).

2.2 Analyse théorique des écoulements décollés :

Le phénomène de décollement est intimement lié au comportement dynamique de la couche limite. Le décollement intervient lorsque la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est-à-dire dans une situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. Dans ce cas, la vitesse de l'écoulement externe diminue et les particules fluides subissent une décélération. La décélération est encore plus importante dans la couche limite du fait des transferts de quantités de mouvement par les forces visqueuses.

Considérons un écoulement supersonique uniforme, de nombre de Mach M_0 et de Pression P_0 , décollant en un point s sur une paroi plane, (Figure (2-1)). Le processus de décollement, qui est lié à l'existence d'une couche limite, se présente de la façon suivante, Delerey [34]:

A partir d'un point o , origine de l'interaction, la couche limite commence à s'épaissir. En même temps, son profil de vitesse tend à se vider, les régions proches de la paroi étant davantage ralenties que les parties externes.

Corrélativement, des ondes de compression sont induites dans l'écoulement contigu du fluide suppose parfait. Rapidement, ces ondes se focalisent pour constituer un choc de décollement.

Le décollement se produit en un point s où le profil de vitesse $u(y)$ de la couche limite est tel qu'à la paroi $\tau = 0$. En ce point de décollement, il y a annulation du frottement pariétal.

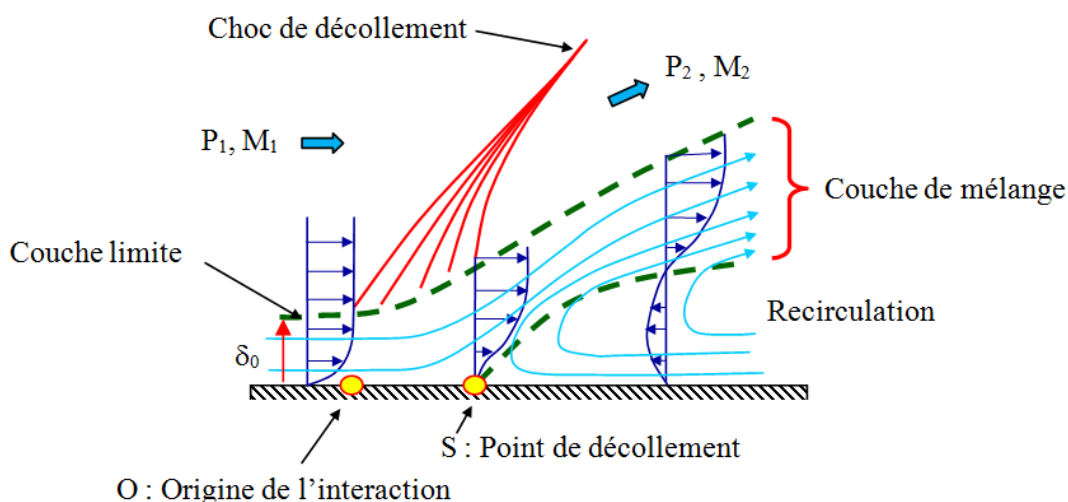


Figure (2-4) Processus du décollement sur une plaque plane [34].

En aval de s , les profils $u(y)$ comportent, près de la paroi, un courant de retour ou la vitesse est à contre-courant de l'écoulement principal. Ce reflux est dû à l'action antagoniste du champ de pression qui refoule, vers l'amont, le fluide à faible énergie de la portion interne de la couche limite. Dans cette région dite « décollée » le frottement pariétal est négatif, sa valeur absolue étant toutefois plus faible.

2.3 Décollement dans les tuyères convergentes-divergentes :

Lors du régime de fonctionnement en sur-détente, il y a un décollement de la couche limite qui se passe à l'intérieur de la tuyère en raison de la contre pression P_a qui règne à la sortie de la tuyère. Ce décollement est caractérisé principalement par une large augmentation de la pression pariétale. L'évolution de la pression pariétale modifie la poussée de la tuyère. C'est la raison pour laquelle la connaissance de la position du point de décollement s et du saut de pression atteint est importante. Pour un régime à un rapport de pression donné il est encore difficile de prévoir si ce régime provoquera un décollement et, s'il y a décollement, quelles seront la position du point de décollement et l'évolution de la pression pariétale. Cette difficulté provient de la complexité des phénomènes physiques rencontrés dans de tels écoulements, fortement compressibles et turbulents.

L'expérience montre qu'il y a au moins deux types différents de décollements à l'intérieur de la tuyère : le décollement libre et le décollement restreint.

2.3.1 Décollement libre :

On appelle un décollement libre (Free Shock Separation FSS) le décollement qui apparaît lorsque la couche limite de l'écoulement décolle en amont de la sortie de la tuyère sous l'effet du gradient de pression adverse et que l'écoulement débouche librement de la tuyère. La configuration de décollement libre peut apparaître dans toutes les tuyères, idéale tronquée ou optimisée à contour parabolique, en régime de sur-détente.

Ce décollement se produit quand l'écoulement est entièrement séparé de la paroi.

Pendant que la sur-détente se développe, le point de décollement se déplace plus loin en amont dans la tuyère, (Figure (2-5)).

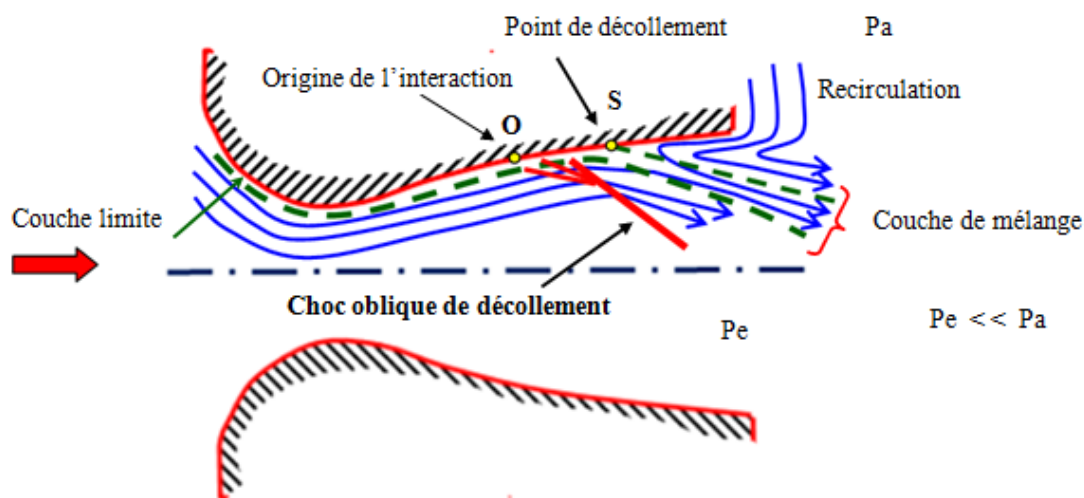


Figure (2-5) Représentation schématique du décollement libre, d'après Mouronval [35].

En étudiant la répartition de la pression, on constate que l'écoulement est divisé en trois régions. D'abord une première région, en amont du point x_0 , où la couche limite est fixée à la paroi, on a le même comportement qu'en régime d'adaptation. Dans la deuxième région, la pression croit de la pression minimum P_0 à la pression plateau P_p . Cette région est considérée comme une région d'interaction. La couche limite commence à s'épaissir au point x_0 , mais elle ne se sépare pas de la paroi jusqu'à ce que la force de frottement pariétal soit nulle au point de décollement x_s . La troisième région est une région de recirculation de l'écoulement qui est entièrement séparé de la paroi.

Il en ressort que le décollement libre fait intervenir deux mécanismes bien distincts. Le premier étant associé au décollement du jet à la paroi alors que le second est lié à l'écoulement ambiant aspiré dans la zone de recirculation.

2.3.2 Décollement restreint :

Un deuxième régime de décollement, autre que le décollement libre, peut apparaître lorsque le recollement de la couche limite intervient sur le divergent juste après le décollement. Ce régime est appelé décollement restreint (Restricted Shock Separation RSS) (Figure (2-6)).

Pour ce régime n'ayant lieu qu'à certains rapports de pression, la couche limite

Décolle puis recolle rapidement sur la paroi de la tuyère. L'évolution de la pression pariétale en aval du décollement est marquée par une succession de détente et de ré-compression, la pression pariétale dépassant parfois la pression ambiante. Ce phénomène est attribué au recollement de l'écoulement décollé. En effet, celui-ci induit des ondes de compression et de détente dans le jet supersonique.

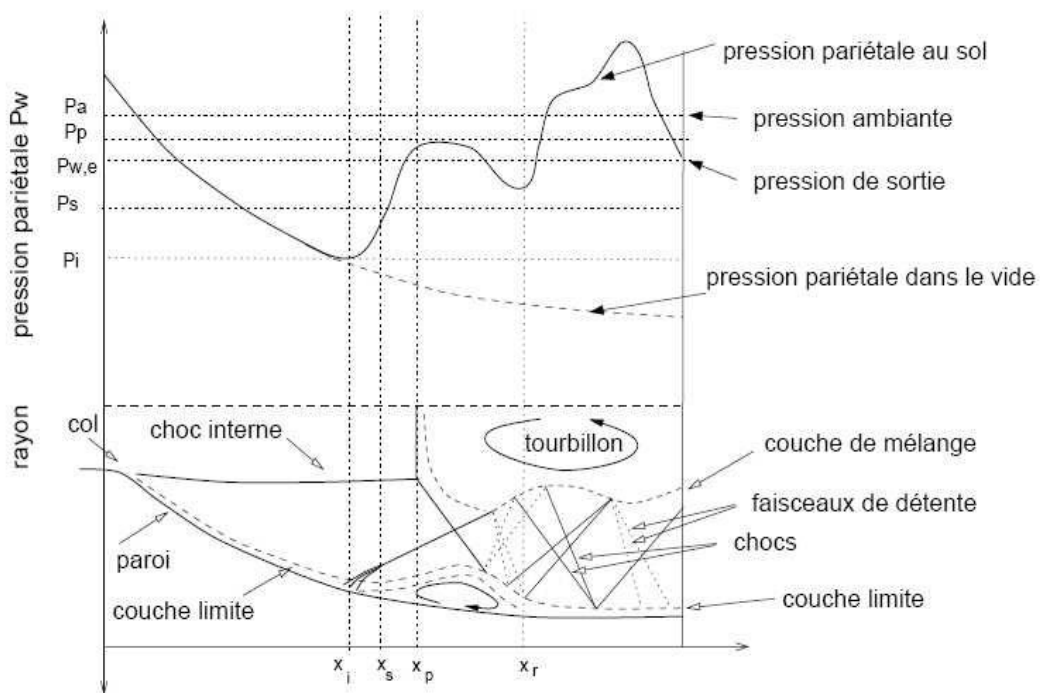


Figure (2-6) Représentation schématique du décollement restreint, d'après Mouronval [35].

2.4 Critères de décollement :

Des nombreuses expériences ont été réalisées pour déterminer des critères permettant d'évaluer la position du décollement et la pression plateau. Pour une tuyère sur-détendue, la position du point de décollement libre influence généralement sur la poussée. Ces critères fournissent en général le saut de la pression plateau P_p en fonction des conditions à l'origine de l'interaction ($P_0, M_0...$). Le critère de décollement permet alors de déterminer les conditions à l'origine de l'interaction et donc la position de cette dernière. On va étudier dans ce qui suit quelques critères de décollement qui sont les plus utilisés dans le cas des écoulements turbulents dans les tuyères convergent-divergent et qui sont fonction du rapport P_0/P_p .

2.5 Etat de l'art :

La recherche est liée directement à l'évolution de l'ensemble de savoirs théoriques et pratiques de nature scientifique dans un domaine technique, et c'est ce qui pousse les chercheurs à avancer dans des cas très compliqués et d'actualité susceptibles d'être traités à l'aide d'un outil informatique très puissant et avec des moyens expérimentaux les plus sophistiqués et les plus performants. Des travaux de recherches sont faits dans ce domaine.

Abdallah Hadjadj. (1997) étudié essentiellement les phénomènes impliqués dans aéronautique spatiale. Ils ont traité par simulations numériques des écoulements dans les tuyères des moteurs de fusées, les écoulements d'arrière-corps, et les écoulements dans les entrées d'air supersoniques et ce dans le but de comprendre les différents facteurs qui gouvernent ces écoulements.

Dans une tuyère de moteur fusée, le décollement de jet constitue un sujet important réactualisé par l'étude des nouveaux lanceurs (fig. 2-7). Ce phénomène apparaît notamment dans les phases transitoires de démarrage et d'arrêt d'un moteur, mais également dans des régimes stabilisés. Il présente un caractère instable et provoque des charges latérales néfastes en particulier dans le divergent. Ce phénomène fait apparaître une couche de mélange entre le jet supersonique et l'air entraîné. Cette couche de mélange est issue du décollement de la couche limite qui s'est développée le long de la tuyère [10].

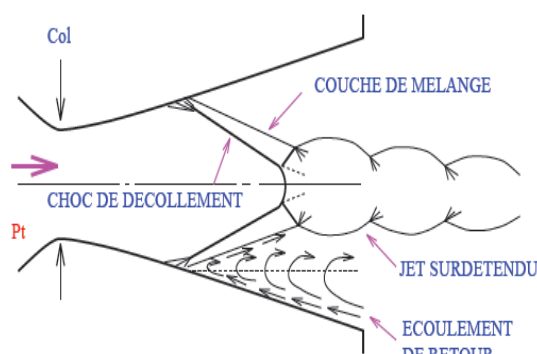


Figure (2-7) Tuyère en présence de décollement.

Cyril Pilinski (2002) ont étudié le problème du décollement en tuyère supersonique ; les auteurs de cette étude ont constaté que d'un point de vue prédictif, la correction

SST de Menter donne dans l'ensemble de bons résultats, que ce soit pour les décollements suivis d'un recollement (cf. LEA-TOC) ou non (cf. LEA-TIC) [38].

M.Y. Bouzid et R. dizene (2005) ont présenté une étude dont objectif est l'étude du comportement des écoulements fortement turbulents où le nombre de Reynolds a une valeur de $1.36 \cdot 10^5$ dans les conditions amont qui sont $P_0=120$ bar et $T_0=300^\circ\text{K}$., à l'aide de leur examen par simulation numérique bidimensionnelle de ces écoulements turbulents de gaz compressibles à travers une tuyère supersonique convergente-divergente, en utilisant quatre modèles de turbulence intégrés au système des équations de Navier-Stokes moyennées par la méthode statistique de Favre. Le traitement des conditions aux limites est fait en utilisant des équations caractéristiques.

Les résultats obtenus montrent une variation progressive de la viscosité turbulente de l'axe de symétrie vers la paroi. Le modèle à deux équations montre la présence d'un pic de valeur au voisinage de la paroi, suivi d'un palier plat [50].

Yohann Perrot et al. (2006) a étudié le décollement dans une tuyère a section variable avec la simulation numérique d'arrière-corps 2D, et traite les aspects instationnaires dans le cadre de la simulation de l'interaction d'une onde de choc avec une couche limite turbulente ; puis il compare ces résultats avec l'expérience faite sur la tuyère supersonique (DLR-TIC) et les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience [51].

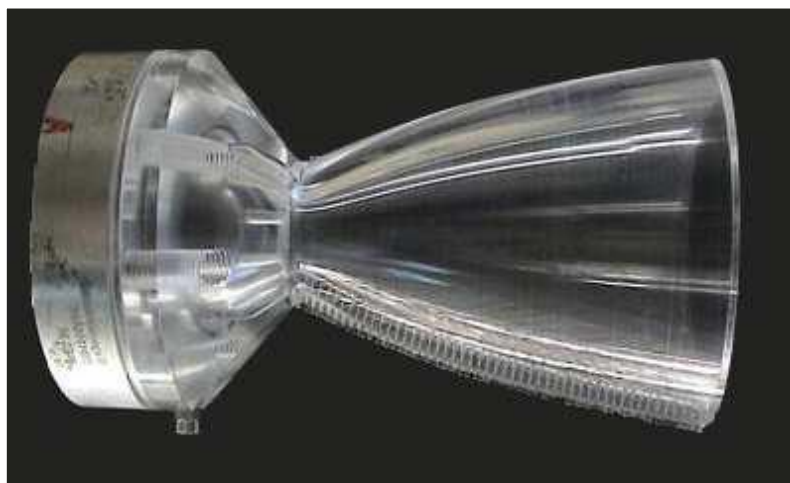


Figure (2-8) Montage expérimental de la tuyère DLR-TIC (avec parois transparentes).

Said Aboudi et al. (2007) ont analysé l'écoulement d'un fluide compressible visqueux, laminaire et axisymétrique dans une tuyère soumise à diverses conditions aux limites thermiques. L'algorithme numérique développé est basé sur un schéma aux différences explicite de type Mac Cormack avec décomposition de l'opérateur bidimensionnel. Les résultats obtenus montrent l'influence des conditions thermiques pariétales sur la structure de l'écoulement que ce soit dans le convergent sur les épaisseurs de la couche limite thermique ou dans le divergent. Dans cette dernière zone, les conditions thermiques influent d'une manière significative sur les profils de température dans les zones où les effets visqueux sont importants [13].

Abderrahmane Nebbache et al. (2007), par opposition aux travaux de Gerard (1999), Pilinski (2004), Nguyen (2002) et Nebbache (2006) concernant les écoulements en tuyère du LEA (Laboratoire d'Etudes en Aérodynamiques de Poitiers) où le fluide de l'écoulement est de l'air froid, les auteurs cette fois-ci ont présenté une étude qui utilise comme gaz d'essai de l'azote dans le but d'éviter le phénomène de la liquéfaction de l'oxygène lors de la détente ; comme le fluide utilisé dans les tuyères du LEA étant de l'air non chauffé, à la température d'arrêt de 270K, cette température est considérée comme étant froide. La détente de ce gaz froid dans la première partie du divergent entraîne l'abaissement de la température statique à moins 40 K.

La combinaison de cette basse température et la pression d'arrêt supérieure à 30 Bar, favorise la liquéfaction de l'oxygène de l'air. Ce phénomène de condensation de l'oxygène change l'écoulement de gaz pur en écoulement diphasique : liquide-gaz. Au-delà du rapport de pressions $P_c/P_a = 50$, la liquéfaction de l'oxygène devient importante. Comme le code de calcul utilisé est monophasique, les simulations numériques de cet écoulement, pour des rapports de pressions supérieurs au seuil de condensation de l'oxygène, deviennent erronées d'où l'utilisation de l'azote évite ce désagrément et permet donc de tester au mieux le code de calcul et le modèle de turbulence choisi [44].

P. Gnemmi et al. (2010) ont mené des expériences dans les souffleries à choc à haute énergie de l'ISL, ils ont été effectués pour qualifier l'écoulement hypersonique d'une tuyère pour un nombre de Mach de 8,0 (2500 m/s). La validation consiste à mesurer le champ de vitesse à la sortie de la tuyère pour ce nombre de Mach en utilisant la

vélocimétrie par images de particules (PIV). L'ensemencement de l'écoulement a été réalisé à l'aide de microparticules d'Al₂O₃. L'écoulement a été illuminé par deux très fines nappes laser successives et à chaque impulsion laser la lumière réfléchiée par les particules est enregistrée par une caméra CCD pour obtenir une image de particules. La paire d'images de particules séparées de quelques centaines de nanosecondes est analysée par une méthode d'inter-corrélation des images pour déterminer le déplacement le plus probable des particules dans l'écoulement. Finalement, le champ de vitesse 2D complet est mesuré et des profils de la composante horizontale de la vitesse sont comparés à des mesures de pression par tubes Pitot par l'intermédiaire d'un calcul 1D ; ce calcul permet de déterminer les conditions d'arrêt et statiques de l'écoulement d'une tuyère connectée à un tube à choc [46].

Mahfoudi El-Ahcene a traité comme objectif principal d'une thèse de doctorat (2014) la simulation numérique sur la tuyère du moteur Vulcain2 et la tuyère convergente divergente LEA-TIC et ce afin de comprendre et à prédire numériquement les phénomènes physiques rencontrés dans ces types d'écoulements et le recensement des difficultés réellement rencontrées lors de la simulation des écoulements compressibles turbulents dans les tuyères supersoniques [11].

Dans une autre thèse de doctorat, **GOUIDMI (2015)** a présenté une étude numérique a mis en évidence le phénomène de l'interaction onde de choc/couche limite laminaire dans les conditions d'écoulement stationnaire compressible et bidimensionnel. On a apporté plus de détails concernant l'effet du nombre de Mach amont sur la zone d'interaction (caractéristiques structurales). Nos résultats sont conformes à ceux trouvées expérimentalement et numériquement d'où la fiabilité de nos simulations [45].

Modélisation Mathématique

3.1 Introduction:

Au cours de ces vingt dernières années, l'évolution rapide des capacités des calculateurs, a enregistré des progrès notables dans la compréhension de nombreux phénomènes physiques plus en plus complexes pour lesquels des solutions analytiques ne peuvent être trouvés. Ces types de problèmes sont généralement modélisés par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Pour obtenir une solution numérique, ces problèmes doivent être discrétisés en transformant les équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires.

Par une méthode de discrétisation avant de les résoudre par des méthodes directes ou itératives. Les trois grandes méthodes de discrétisation utilisées dans les codes de calcul sont: les volumes finis, les différences finies et les éléments finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies.
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis.
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

Dans la présente étude, on utilisera un maillage structuré et la méthode des volumes finis qui se distingue par sa fiabilité quant aux résultats, son adaptation au problème physique, sa garantie pour la conservation de masse et de quantité de mouvement et de tout scalaire transportable sur chaque volume de contrôle et dans tout le domaine de calcul, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.

3.2 Méthode des volumes finis:

La méthode des volumes finis, a été développée par Spalding et Patankard [36] sa grande simplicité de mise en œuvre a fait qu'elle a connu un essor fulgurant depuis les années 1970-1980, elle est à l'origine de la majorité des codes de calculs.

La méthode des volumes finis est caractérisée par son avantage à satisfaire la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans tout le domaine de calcul.

Elle facilite la linéarisation des termes non linéaires dans les équations de conservation telle que le terme source par exemple.

Elle consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôles puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement ...) sur ces petits volumes. L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs ; en bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

La discrétisation spatiale n'est pas suffisante lorsqu'il s'agit d'un écoulement non permanent. Une discrétisation temporelle, par une division du temps de simulation en différents pas de temps dt , s'avère Nécessaire pour procéder ensuite à une intégration de chaque équation de conservation pour chaque pas de temps. Pour un écoulement bidimensionnel et une modélisation de type $(k - \epsilon)$, le système d'équations décrit dans sous la forme [10] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial F_v(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_v(U)}{\partial y} + S_0(U) \quad (3-1)$$

Où x, y sont deux directions d'espace et t la variable temporelle. Le vecteur inconnu

U a pour forme :

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{e}_t \\ \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\epsilon^* \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

Pour les vecteurs des flux eulérien et visqueux F et F_v dans la direction x on a :

$$F = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + p^* \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ (\bar{\rho}\tilde{e}_t + p^*)\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}k \\ \bar{\rho}\tilde{u}\epsilon^* \end{pmatrix} F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{xx}\tilde{u} + \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{v} - \bar{q}_x \\ \tilde{\sigma}_{kx} \\ \tilde{\sigma}_{\epsilon x} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

Pour les vecteurs des flux eulérien et visqueux G et G_v dans la direction y :

$$G = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + p^* \\ (\bar{\rho}\tilde{e}_t + p^*)\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}k \\ \bar{\rho}\tilde{v}\epsilon^* \end{pmatrix} F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{xy}\tilde{u} + \tilde{\sigma}_{yy}\tilde{v} - \bar{q}_y \\ \tilde{\sigma}_{ky} \\ \tilde{\sigma}_{\epsilon y} \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Et pour le vecteur des termes sources S_0 :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_k \\ H_\epsilon \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Avec :

$$\tilde{\sigma}_{xx} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \tilde{\sigma}_{yy} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) p^* = p + \frac{2}{3} \bar{\rho} k$$

$$\tilde{q}_x = -\gamma \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}_{in}}{\partial x} \tilde{q}_y = -\gamma \left(\frac{\bar{\mu}}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{e}_{in}}{\partial y}$$

$$\tilde{\sigma}_{kx} = \left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \tilde{\sigma}_{ky} = \left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y}$$

$$\tilde{\sigma}_{\epsilon x} = \left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon^*}{\partial x} \tilde{\sigma}_{\epsilon y} = \left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon^*}{\partial y}$$

$$H_k = P - \bar{\rho} \epsilon^* - 2\bar{\mu} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, H_\epsilon = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P - c_{\epsilon 2} \rho f_\epsilon \frac{\epsilon \epsilon^*}{k} + 2\bar{\nu} \mu_t \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2$$

Dans le cas du modèle de Baldwin-Lomax, $p^* = \bar{p}$. Le théorème de Green permet d'intégrer l'équation (3-6) sur un petit volume \mathcal{V} :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial F_v(U)}{\partial x} + \frac{\partial G_v(U)}{\partial y} + S_0(U) \quad (3-6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_s \vec{F} d\vec{S} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_s \vec{F}_v d\vec{S} + S_0 \quad (3-7)$$

Où \vec{dS} est le vecteur de surface, $\vec{F} = F\vec{l}_x + G\vec{l}_y$, $\vec{F}_v = F_v\vec{l}_x + G_v\vec{l}_y$. (\vec{l}_x, \vec{l}_y) est une base du repère cartésien (x, y) .

Supposons maintenant que le volume $\mathcal{V}_{i,j}$ représente un quadrilatère centré aux indices (i, j) (voir figure 3-1). Les vecteurs de surface sur chaque côté du volume de contrôle sont donnée par :

$$\vec{S}_{i+\frac{1}{2}} = (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})\vec{l}_x - (x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})\vec{l}_y = (\vec{S}_{ix}\vec{l}_x + \vec{S}_{iy}\vec{l}_y)_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\vec{S}_{i-\frac{1}{2}} = (y_{i,j+1} - y_{i,j})\vec{l}_x - (x_{i,j+1} - x_{i,j})\vec{l}_y = (\vec{S}_{ix}\vec{l}_x + \vec{S}_{iy}\vec{l}_y)_{i-\frac{1}{2}} \quad (3-8)$$

$$\vec{S}_{i+\frac{1}{2}} = -(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})\vec{l}_x - (x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})\vec{l}_y = (\vec{S}_{jx}\vec{l}_x + \vec{S}_{jy}\vec{l}_y)_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\vec{S}_{i-\frac{1}{2}} = -(y_{i+1,j} - y_{i,j})\vec{l}_x - (x_{i+1,j} - x_{i,j})\vec{l}_y = (\vec{S}_{jx}\vec{l}_x + \vec{S}_{jy}\vec{l}_y)_{i-\frac{1}{2}}$$

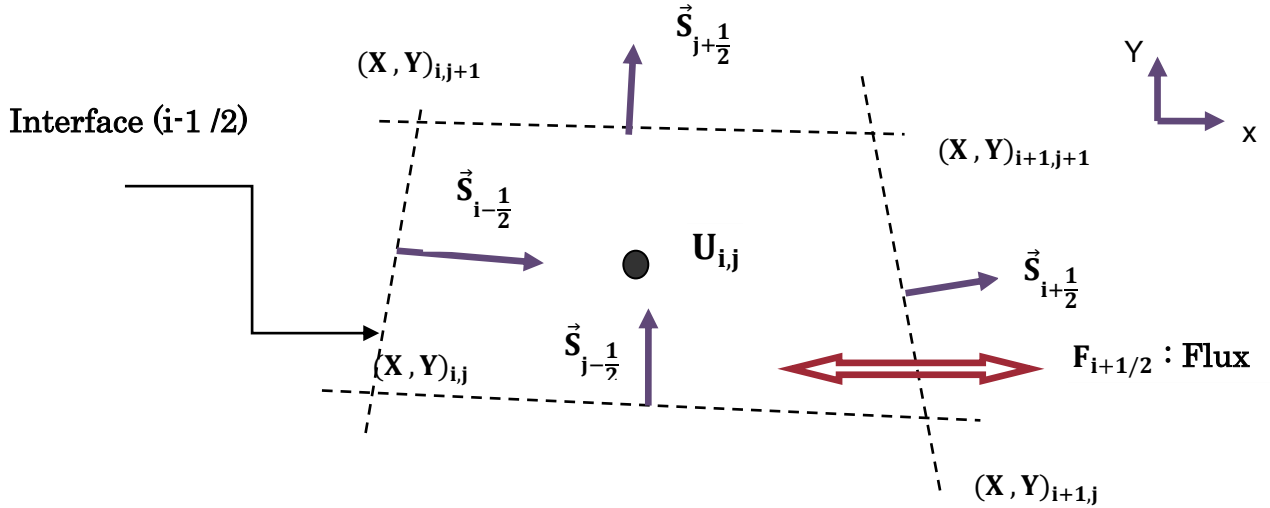


Figure (3-1) Présentation d'un point d'intégration pris dans un volume de contrôle.

$U_{i,j}$ Et $S_{0 i,j}$ représentent les valeurs moyennes dans le volume de contrôle élémentaire $V_{i,j}$. le flux moyen à travers la surface $\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$, par exemple, est noté par $\vec{F}_{i+\frac{1}{2}}$. Dans le volume de contrôle élémentaire (voir la figure (3-1)), les composantes des vecteurs de surface unitaire sont définies comme suit :

$$(S_{ixp})_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}|} \vec{l}_x \vec{S}_{i+\frac{1}{2}} \quad (S_{iyp})_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}|} \vec{l}_y \vec{S}_{i+\frac{1}{2}} \quad (3-9)$$

$$(S_{jxp})_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}|} \vec{l}_x \vec{S}_{j+\frac{1}{2}} \quad (S_{jyp})_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}|} \vec{l}_y \vec{S}_{j+\frac{1}{2}}$$

L'équation (3-7) prend donc pour expression :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (FS_{ixp} + GS_{iyp})_{i+\frac{1}{2},j} \left| \vec{S}_{i+\frac{1}{2}} \right| - \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (FS_{ixp} + GS_{iyp})_{i-\frac{1}{2},j} \left| \vec{S}_{i-\frac{1}{2}} \right| \\
 + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (FS_{jxp} + GS_{jyp})_{i,j+\frac{1}{2}} \left| \vec{S}_{j+\frac{1}{2}} \right| - \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (FS_{jxp} + GS_{jyp})_{i,j-\frac{1}{2}} \left| \vec{S}_{j-\frac{1}{2}} \right| \\
 = \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (F_v S_{ixp} + G_v S_{iyp})_{i+\frac{1}{2},j} \left| \vec{S}_{i+\frac{1}{2}} \right| - \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (F_v S_{ixp} + G_v S_{iyp})_{i-\frac{1}{2},j} \left| \vec{S}_{i-\frac{1}{2}} \right| \\
 + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (F_v S_{jxp} + G_v S_{jyp})_{i,j+\frac{1}{2}} \left| \vec{S}_{j+\frac{1}{2}} \right| - \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} (F_v S_{jxp} + G_v S_{jyp})_{i,j-\frac{1}{2}} \left| \vec{S}_{j-\frac{1}{2}} \right| + S_{0,i,j}
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

Une propriété importante de la méthode des volumes finis [11] apparaît clairement dans la Formulation (3-10), pour des systèmes conservatifs ($S_0 = 0$), la méthode des volumes finis assure identiquement la conservation du vecteur des variables conservatives sur chaque volume de contrôle élémentaire. Par ailleurs, pour des écoulements présentant des chocs, les méthodes de discrétisation conservatives assurent la détermination correcte de ces derniers (les équations étant conservatives aussi).

A partir de l'équation (3-10), on peut exprimer les flux perpendiculaires aux surfaces du volume élémentaire. Le flux eulérien, par exemple, à travers la surface $\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$ peut être noté par :

$$F_{\xi i+\frac{1}{2},j} = (FS_{ixp} + GS_{iyp})_{i+\frac{1}{2},j} \tag{3-11}$$

Nous aurons de même :

$$\begin{aligned}
 F_{\xi i-\frac{1}{2},j} &= (FS_{ixp} + GS_{iyp})_{i-\frac{1}{2},j} \\
 G_{\eta i,j+\frac{1}{2}} &= (FS_{jxp} + GS_{jyp})_{i,j+\frac{1}{2}} \\
 G_{\eta i,j-\frac{1}{2}} &= (FS_{jxp} + GS_{jyp})_{i,j-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

On notera respectivement les flux visqueux à travers les surfaces :

$\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$ et $\vec{S}_{j+\frac{1}{2}}$ par :

$$\begin{cases} F_{v\xi i+\frac{1}{2},j} = (F_v S_{ixp} + G_v S_{iyp})_{i+\frac{1}{2},j} \\ G_{v\eta i,j+\frac{1}{2}} = (F_v S_{jxp} + G_v S_{jyp})_{i,j+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{3-13}$$

A partir de ces définitions, l'expression (3-10) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\xi i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i + \frac{1}{2}} \right| - F_{\xi i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i - \frac{1}{2}} \right| \right) + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\eta i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j + \frac{1}{2}} \right| - G_{\eta i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j - \frac{1}{2}} \right| \right) = \\ & \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{v\xi i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i + \frac{1}{2}} \right| - F_{v\xi i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i - \frac{1}{2}} \right| \right) + \\ & \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{v\eta i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j + \frac{1}{2}} \right| - G_{v\eta i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j - \frac{1}{2}} \right| \right) + S_{0 i,j} \end{aligned} \quad (3-14)$$

Les flux seront évalués à l'instant $t = n + 1$. L'équation (3-14) devient donc :

$$\begin{aligned} & \Delta t \left(\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{\xi i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i + \frac{1}{2}} \right| - F_{\xi i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i - \frac{1}{2}} \right| \right)^{n+1} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{\eta i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j + \frac{1}{2}} \right| - G_{\eta i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j - \frac{1}{2}} \right| \right)^{n+1} \\ & = \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(F_{v\xi i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i + \frac{1}{2}} \right| - F_{v\xi i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{i - \frac{1}{2}} \right| \right)^{n+1} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\mathcal{V}_{i,j}} \left(G_{v\eta i + \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j + \frac{1}{2}} \right| - G_{v\eta i - \frac{1}{2}, j} \left| \vec{S}_{j - \frac{1}{2}} \right| \right)^{n+1} + \Delta t S_{0 i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (3-15)$$

Par la suite nous poserons :

$$\Delta t \left(\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} \right)^n = \delta U_{i,j}^n \quad (3-16)$$

La linéarisation en temps des flux eulériens est faite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{n+1} &= F_{\xi}^n + \left(\frac{\partial F_{\xi}}{\partial U} \right)^n \delta U^n = F_{\xi}^n + A_{\xi}^n \delta U^n \\ G_{\eta}^{n+1} &= G_{\eta}^n + \left(\frac{\partial G_{\eta}}{\partial U} \right)^n \delta U^n = G_{\eta}^n + B_{\eta}^n \delta U^n \end{aligned} \quad (3-17)$$

Où A_{ξ} et B_{η} représentent respectivement les jacobiens de F_{ξ} et G_{η} par rapport à U .

La matrice jacobienne A_{ξ} peut être diagonalisée par une transformation grâce à la matrice S_X telle que :

$$A_{\xi} = S_X^{-1} A_{\xi} S_X \quad (3-18)$$

La matrice S_X exprimée comme suit :

$$S_X = S_\xi R_\xi N_c \quad (3-19)$$

Avec :

$$N_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta - \beta u & -\beta v & \beta & -\Gamma\beta & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{\epsilon}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

Et:

$$R_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{ixp} & S_{iyp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{iyp} & S_{ixp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où $\alpha = \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$, $\beta = \gamma - 1$ et $\Gamma = 1 - \frac{2}{3\beta}$. c^* est la vitesse du son turbulente, donnée par :

$$c^{*2} = \gamma \frac{p^*}{\bar{\rho}} = \frac{\gamma}{\bar{\rho}} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \right) \quad (3-20)$$

N_c est la matrice de passage des variables conservatives U , aux variables non-conservatives V :

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \\ \bar{\rho} \tilde{\epsilon}_t \\ \bar{\rho} k \\ \bar{\rho} \epsilon^* \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ p^* \\ k \\ \epsilon^* \end{pmatrix}$$

$$\delta V = N_c \delta U$$

$$\delta U = N_c^{-1} \delta V \quad (3-21)$$

R_ξ Est la matrice de rotation du système de repère (x, y) au système de repère (ξ, η) ,
lié à la surface $\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$ (ou $\vec{S}_{i-\frac{1}{2}}$).

S_ξ Est une matrice formée par les vecteurs propres du système de Navier-Stokes relié
à cette surface.

La matrice diagonale est écrite sous forme suivante :

$$A_\xi = \begin{pmatrix} A_{\xi 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\xi 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\xi 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\xi 4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\xi 5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\xi 6} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_{\xi 1} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} \\ A_{\xi 2} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} + c^* \\ A_{\xi 3} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} \\ A_{\xi 4} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} - c^* \\ A_{\xi 5} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} \\ A_{\xi 6} = \tilde{u}S_{ixp} + \tilde{v}S_{iyp} \end{matrix}$$

De la même manière que A_ξ , on définit
la diagonalisation de la matrice jacobienne B_η est effectuée par une transformation grâce
à la matrice S_Y :

$$B_\eta = S_Y^{-1}A_\eta S_Y \quad (3-22)$$

La matrice S_Y étant exprimée comme suit :

$$S_Y = S_\eta R_\eta N_c$$

$$R_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{jyp} & -S_{jxp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{jxp} & S_{jyp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}c^* & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\rho}c^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

R_η Est la matrice de rotation du système de repère (x, y) au système de repère (ξ, η) ,
liée à la surface $\vec{S}_{i+\frac{1}{2}}$ (ou $\vec{S}_{i-\frac{1}{2}}$).

S_η Est une matrice formée par les vecteurs propres du système de Navier-Stokes relié à cette surface.

S_η^{-1} Est exprimé par $N_c^{-1} R_\eta^{-1} S_\eta^{-1}$. La matrice diagonale est ainsi écrite sous la forme suivante : récolter v

$$\begin{aligned} A_{\eta 1} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} \\ A_{\eta 2} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} \\ A_{\eta 3} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} + c^* \\ A_{\eta 4} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} - c^* \\ A_{\eta 5} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} \\ A_{\eta 6} &= \tilde{u} S_{jxp} + \tilde{v} S_{jyp} \end{aligned}$$

$$A_\eta = \begin{pmatrix} A_{\eta 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\eta 2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\eta 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\eta 4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\eta 5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\eta 6} \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

Comme F_ξ et G_η sont homogènes par rapport à U , on peut écrire :

$$F_\xi = A_\xi U G_\eta = B_\eta U$$

3.3 Géométrie:

Le domaine de calcul (voir figure 3-1) est constitué d'une frontières horizontale (AB) et (rint) constituent respectivement l'amont, l'aval du domaine et le Ryan de col (Le convergent et le divergent sont raccordés par un arc de cerclerint).

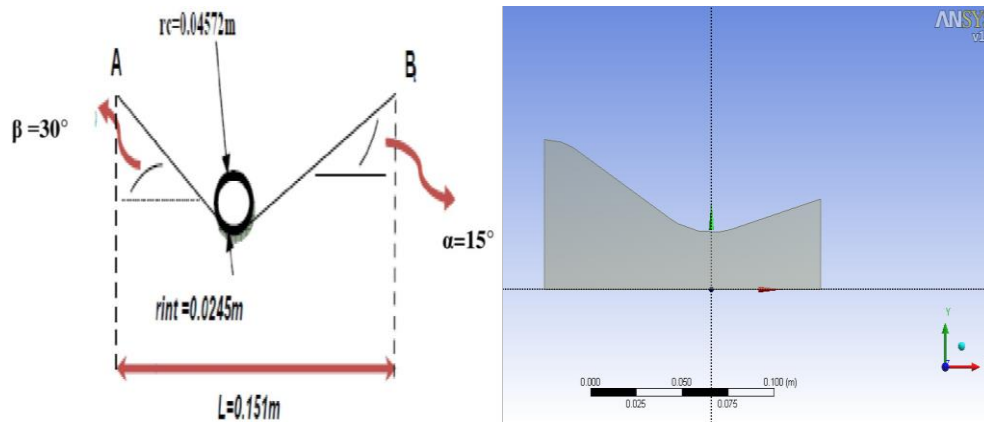


Figure (3-2) Dessin de tuyère étudiée [12].

Tableau (3-1) La dimension de tuyère étudiée [12].

L	0.15113m
r0	0.036068m
rint	0.024541m
rc	0.04572m
β	30°
α	15°

3.4 Transformations des domaines:

Les équations des bilans de conservations (masse, mouvement et énergie) écrites en coordonnées cartésiennes, sont réécrites dans un nouveau système de coordonnées à l'aide d'une transformation définie comme suit $\xi = \xi(x, y)$ - direction longitudinale et $\eta = \eta(x, y)$ - direction radiale.

$$(\xi, \eta) \rightarrow \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \text{ Et les dérivées partielles s'écrivent alors :}$$

Le maillage que nous utiliserons dans notre cas d'étude est un maillage simple. Le passage d'un domaine physique à un domaine mathématique se fait en deux étapes :

Tout d'abords, nous passerons des coordonnées (x, y, t) à un domaine (ξ, η, τ) par la transformation de la géométrie du cas étudié en une géométrie rectangulaire en appliquant les transformations qui suivent:

$$\xi = x; \eta = \frac{y}{r(x)} \text{ et } t = \tau$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}$$

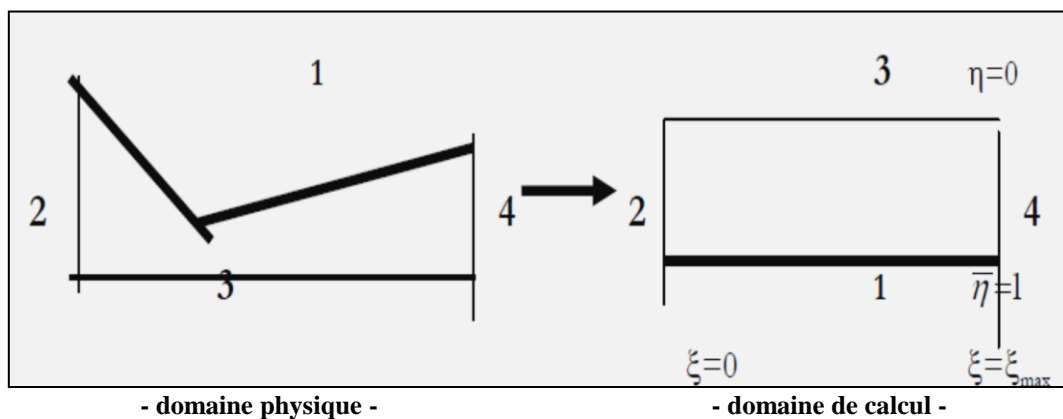


Figure (3-3) Domaines transformés.

1- la Paroi, 2- Entrée de la Tuyère 3- Axe de symétrie, 4-Sortie de la Tuyère.

3.5 Maillage :

Les maillages utilisés par code calcule sont des maillages de types structurés. L'utilisateur doit générer uniquement des mailles en quadrilatère en ce qui concerne les maillages 2D. Le maillage de 390 points en X et 120 points en Y, correspondant à ce domaine de calcul. Le maillage est raffiné, est représenté sur la figure (3-4) où, dans la direction verticale, au niveau des parois Les variations près de la paroi sont importantes, un maillage raffiné à ce niveau est utilisé (voir Fig. (3-5)).

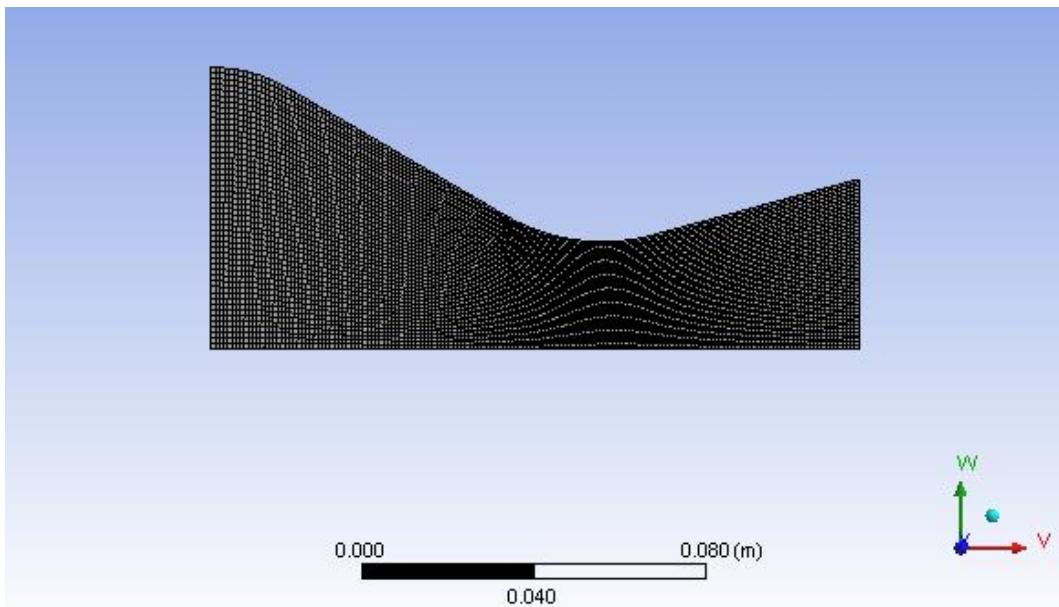


Figure (3-4) Maillage du domaine de calcul [12].

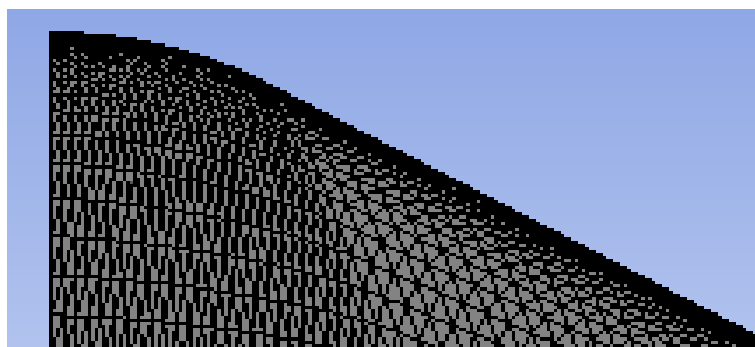


Figure (3-5) Maillage raffiné près de la paroi.

3.6 Paramètres numériques :

L'ensemble des paramètres numériques sont introduits sur l'interface graphique logiciel Matlab [56] et sont ensuite transférés dans un fichier **mc.dat** utilisable par code calculé Ansys [57].

3.6.1 Conditions aux limites:

➤ $\xi = 0$ et $\xi = \xi_{max}$:

Le gaz au repos dans un réservoir ($u = 0, v = 0$). $\eta = 0$ et $\eta = 1$:

➤ L'axe de symétrie ($\eta = 1$) est aussi un axe de symétrie. Les valeurs sont prises égales à: $\forall \xi: \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$ pour $\psi = U, T, P, \rho$ et $V = 0$

➤ Les valeurs à ($\eta = 0$) sont obtenus à partir des conditions:

- Non glissement : $U = 0; V = 0$
- Adiabaticité : $\partial T / \partial n = 0$
- couche limite approximative: $\partial P / \partial n = 0$
- variables dépendants ; i.e. $k = \varepsilon = 0$

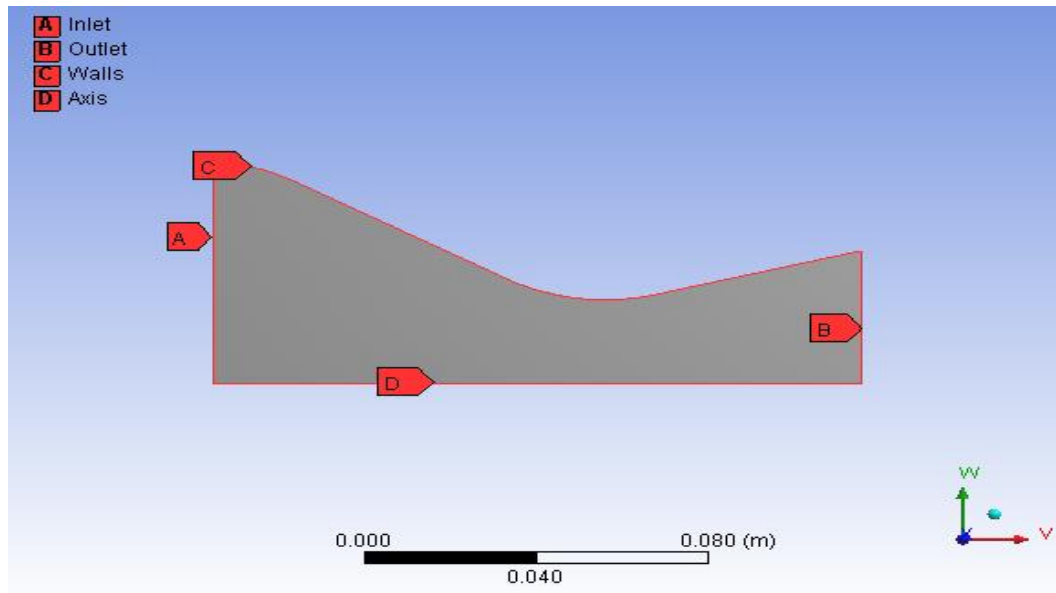


Figure (3-6) Conditions limites.

3.6.2 Conditions initiales:

A l'instant $t = 0$ et pour chaque section, les composantes longitudinales de la vitesse sont calculées en supposant que les valeurs à l'axe de symétrie sont celles données par les relations isentropiques, compte tenu de la symétrie de l'écoulement et des conditions en paroi.

3.7 Modélisation Mathématique :

➤ **Données de travail :**

Pour tous les calculs, il s'agit de simulations d'air considéré comme étant un gaz calorifique parfait, dont la viscosité suit la loi de Sutherland à la paroi.

Tableaux (3-2, a, b) Données de travail.

Dimension du domaine	2D axisymétrique
Ecoulement	Navier-Stokes turbulent
Loi de paroi	SST-Menter
Loi d'état	Gaz calorifique parfait
Phase	Monophasique

a)

Symbole	Définition	Valeur		Unité
M_0	Nombre de Mach infini amont	Entrée Subsonique		
T_0	Température génératrice	833.33		K
P_0	Pression génératrice	Exp.1	413685	Pa
		Exp.2	1034213	
ρ_0	Masse volumique	Exp.1	4.6134	Kg/m^3
		Exp.2	12.661	

b)

Remarque:

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans un domaine géométrique, les étapes suivantes sont nécessaires :

[Géométrie] Etre en possession d'une géométrie 2D du domaine fluide.

[Maillage] Discrétiser le domaine, c'est-à-dire le découper en mailles de calcul.

[Mise en données] Choisir les modèles physiques et les hypothèses adaptés au problème.

[Résolution numérique] Les équations aux dérivées partielles sont résolues par le solveur CFD après avoir discrétisée et mise sous forme algébrique. Cette résolution se fait par un algorithme itératif jusqu'à la convergence.

[Post-traitement] Visualiser et analyser les résultats Comme on le verra, un premier calcul ne sera souvent pas convenable et il faudra recommencer le processus.

Résultats et interprétations

4.1 Introduction:

Le présent travail représente une étude par simulation numérique d'un écoulement Supersonique dans la tuyère convergent divergent en utilisant le code calcul ANSYS, ANSYS est un éditeur de logiciels le numéro un mondial spécialisé en modélisation et simulation numérique, et comprend plusieurs composantes telles que: **ANSYS/Professionnel**, **ANSYS/Multiphysics**, **ANSYS/Structural**...etc. Chaque composante est destinée à l'un des domaines d'ingénierie, et son choix met automatiquement à la disposition de l'utilisateur les processus adéquats (type d'élément, conditions aux limites, tracés,...etc.). Dans notre analyse, on a utilisé **ANSYS Fluent**, qui permet de traiter la majorité des problèmes de la mécanique des fluides complexe. Il offre des outils puissants pour l'analyse en deux et trois dimensions, On trouve dans notre manuel d'aide toutes les instructions qui permettent son exploitation à travers son interface utilisateur graphique "**Graphical User Interface**" ainsi que toute la documentation nécessaire. De nombreux processus de calcul sont disponibles dans ce code et chaque processus est une sorte d'ensemble de fonctions qui effectuent une tâche spécifique. Par exemple, dans le pré-processus général "**Preprocessor**", on construit le modèle, le processus "Solution" dans lequel on applique les conditions initiales et aux limites. Le processus "**PostProcessor**" permet d'exploiter les résultats obtenus de différentes manières (courbes, contours ...etc.) [57].

4.2 Résultats obtenus:

Ce travail concerne des études numériques de l'écoulement turbulent compressible d'un gaz (air) dans une tuyère bidimensionnelle plane. La géométrie de cette tuyère convergente-divergente est symétrique et conduit à une structure de choc de décollement symétrique.

Les résultats présentés, ci-dessous, sont obtenus à partir de nombreuses simulations qui ont été exécutées avec la variation la pression initiale, afin d'analyser leurs influences sur les variables d'écoulement telles que la vitesse, la pression, la température ...etc.

On a utilisé un maillage quadrilatère pour un nombre de cellules de **20867** nœuds (**i=390** et **j=120**). Afin de comprendre les résultats obtenus, on analyse en premier lieu les résultats par une visualisation en couleur donnée par le logiciel **ANSYS** des champs des contours de la pression, de la température, de la vitesse...etc.

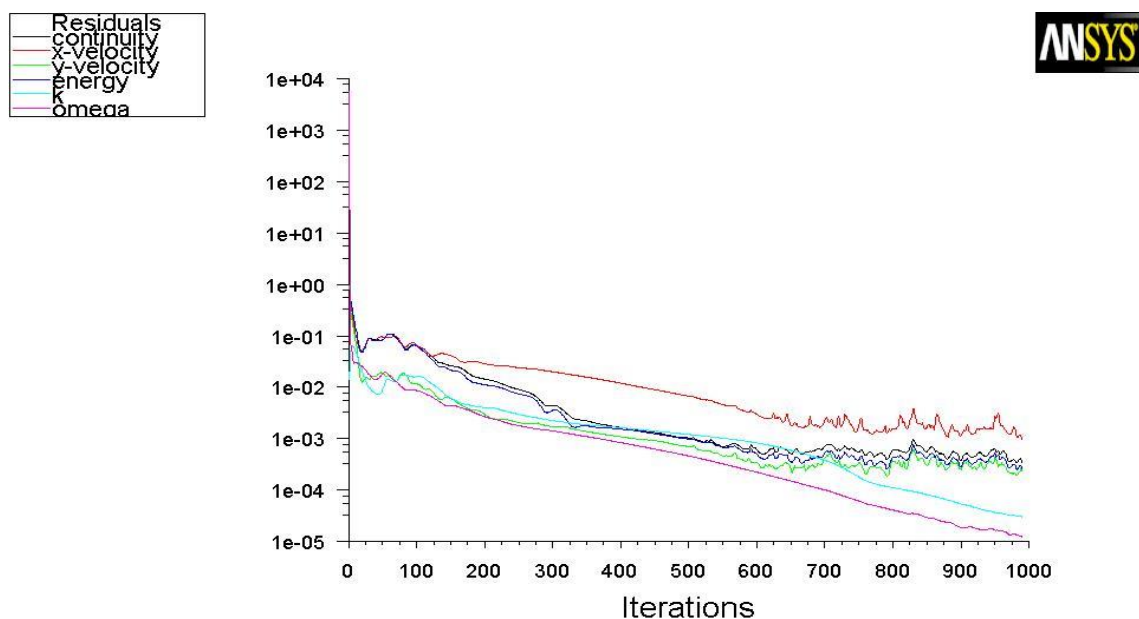
On va représenter l'évolution de ces variables pour les différentes valeurs de la pression initiale.

4.2.1 Profil de la tuyère (30°-15°)

Dans ce qui suit on va présenter quelques résultats pour la tuyère propulsive, on les résume comme suit :

Les figures (4-1,....,34) représentent les contours et les iso-valeurs de pression, température ...etc. cela pour un semi angle de divergence égale 15° et des pressions initiales de l'air $P_0 = 4.14$ bar et 10.34 bar.

a) Pour une pression initiale de $P_0 = 4.14$ bar :

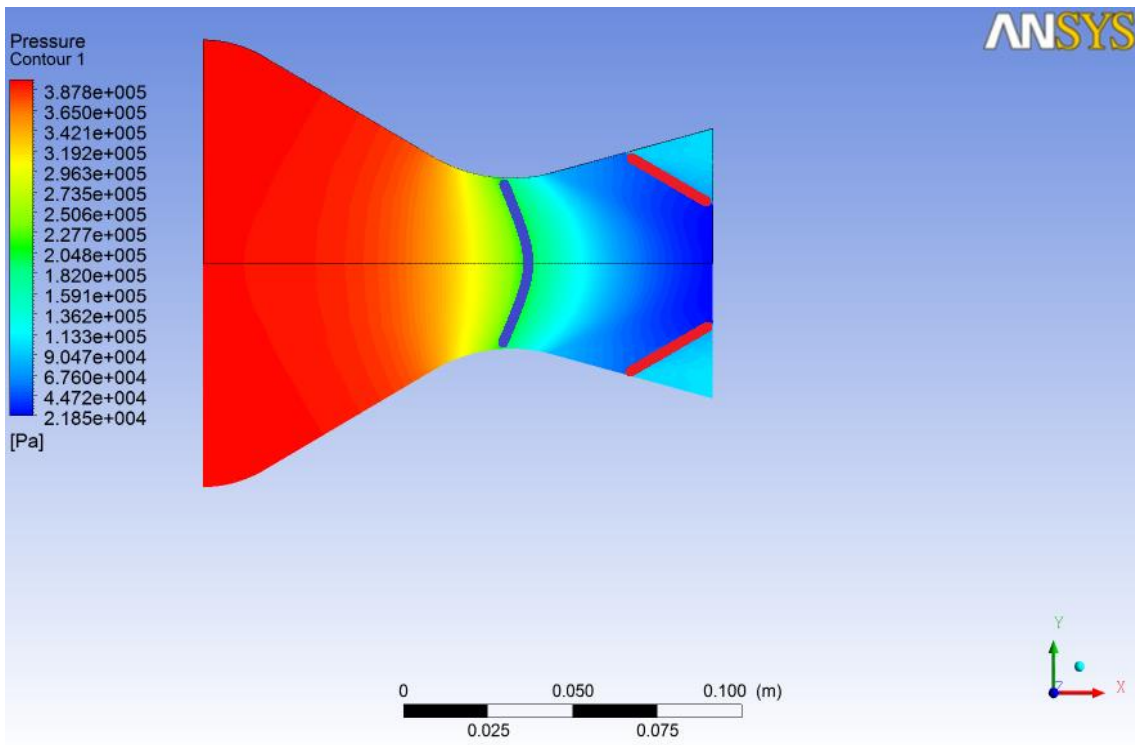


Scaled Residuals

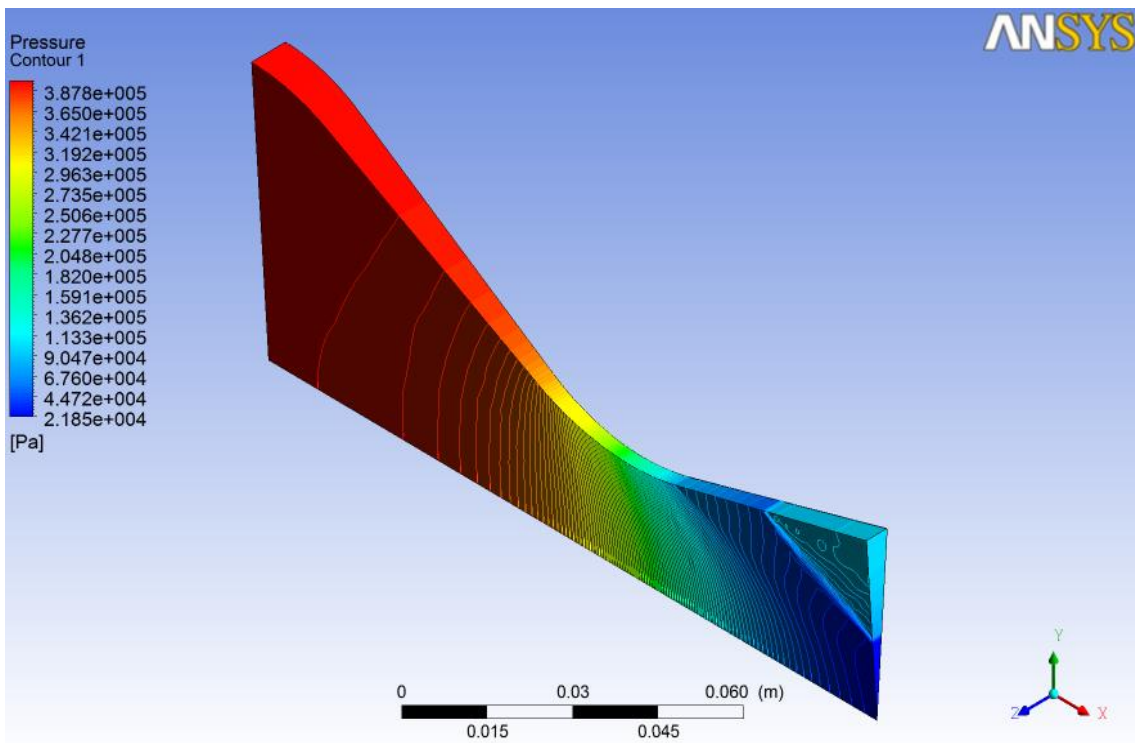
Jan 05, 2018
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

Figure (4-1) Courbes de convergence (990 solutions est convergées).

Le calcul terminé ou convergé (voir figure (4-1)), l'étape suivante consiste à analyser les résultats dans ANSYS Fluent 12. Le volet Contours permet de visualiser les champs en couleurs (voir les figures de 2 jusqu'à 7).



(2a) Deux dimensions 2D.



(2b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-2a, 2b) Contours de la pression (Pa).

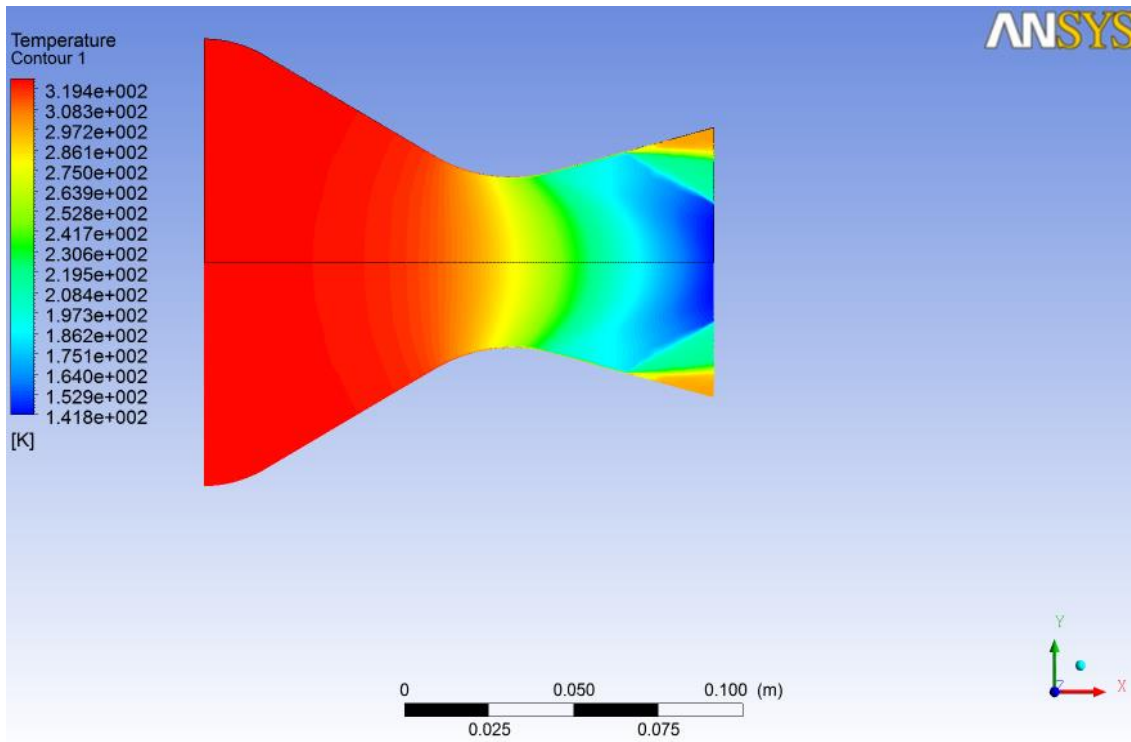
A partir de la figure (4-2a) on peut classifier les des ondes de choc :

a) choc droit au col d'une tuyère(en Blue).

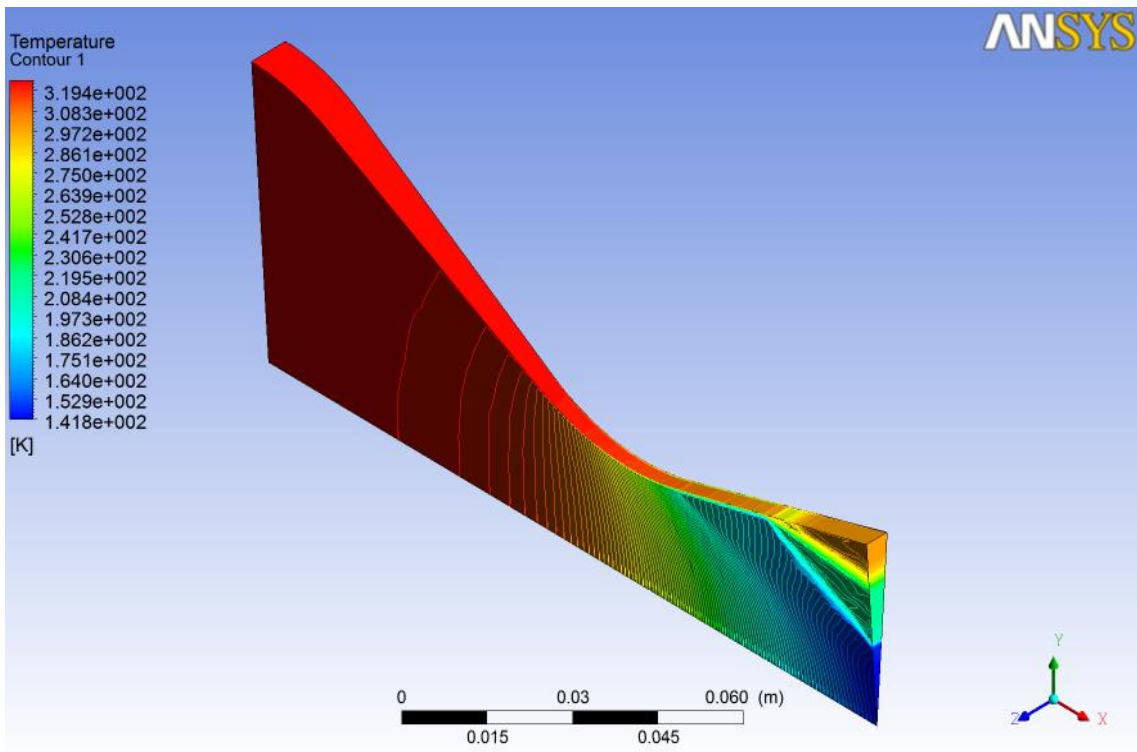
b) choc oblique dans une rampe de compression(en rouge).

En résumé il en résulte que :

- ✓ Le choc est discontinu.
- ✓ L'épaisseur du choc est très faible, de l'ordre de quelques micromètres.

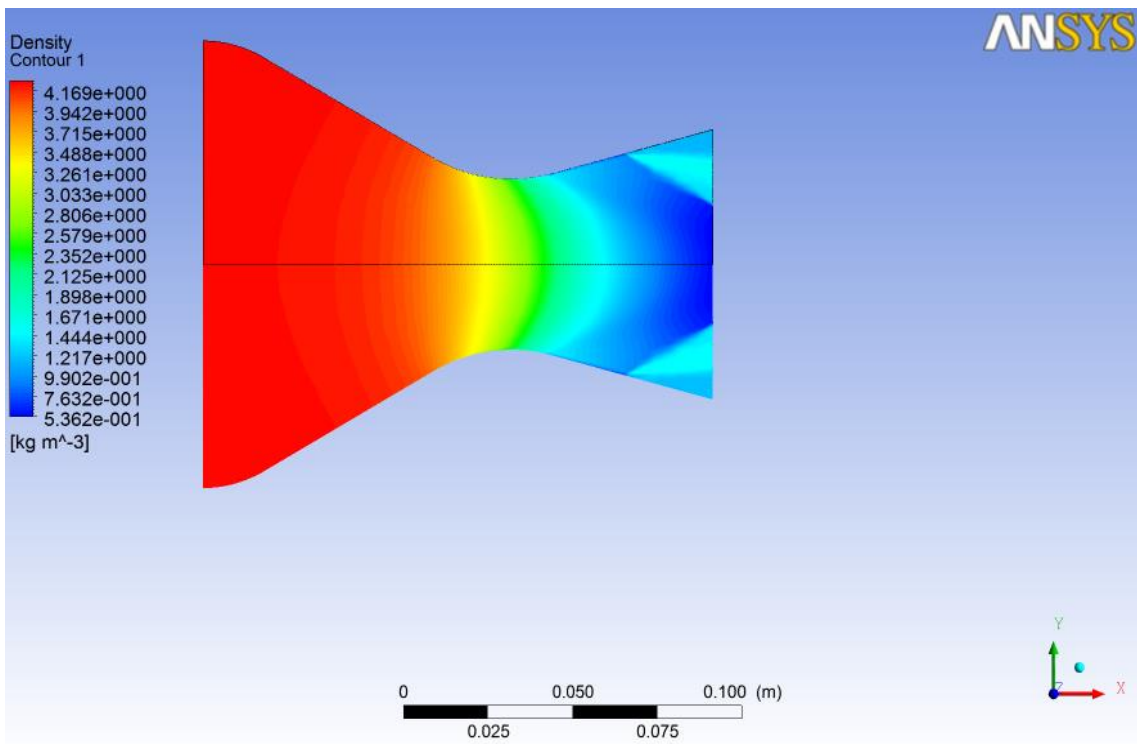


(3a) Deux dimensions 2D.

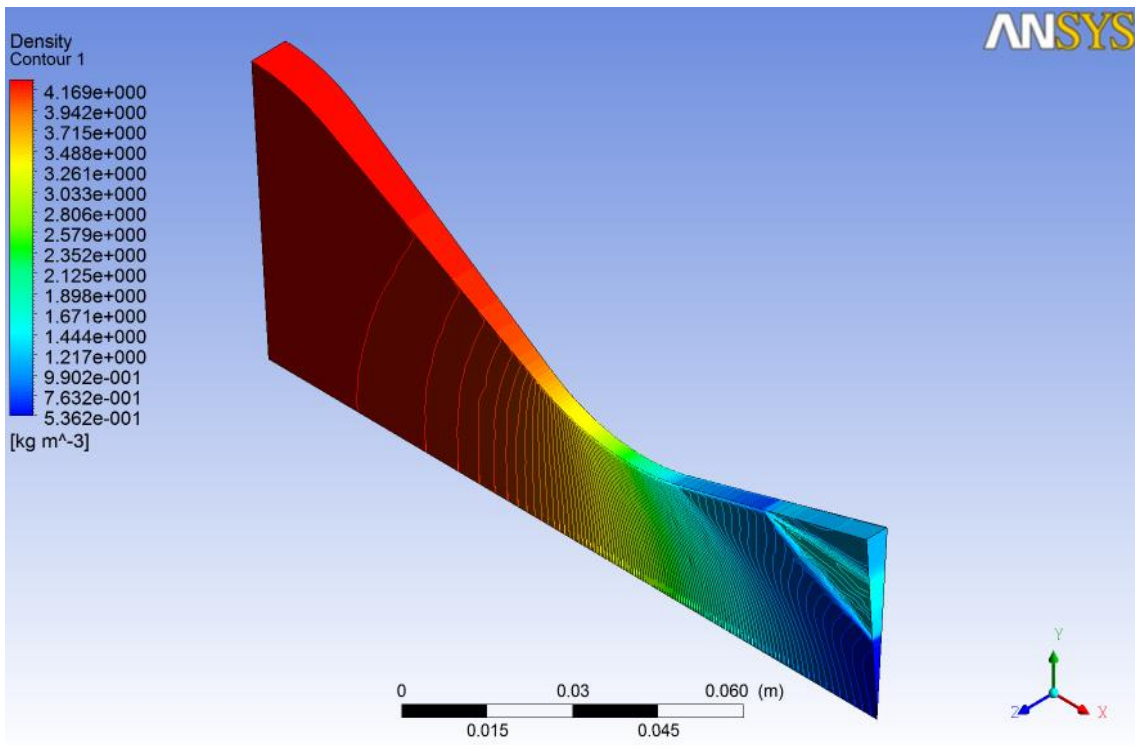


(3b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-3a, 3b) Contours de la température (K).



(4a) Deux dimensions 2D.

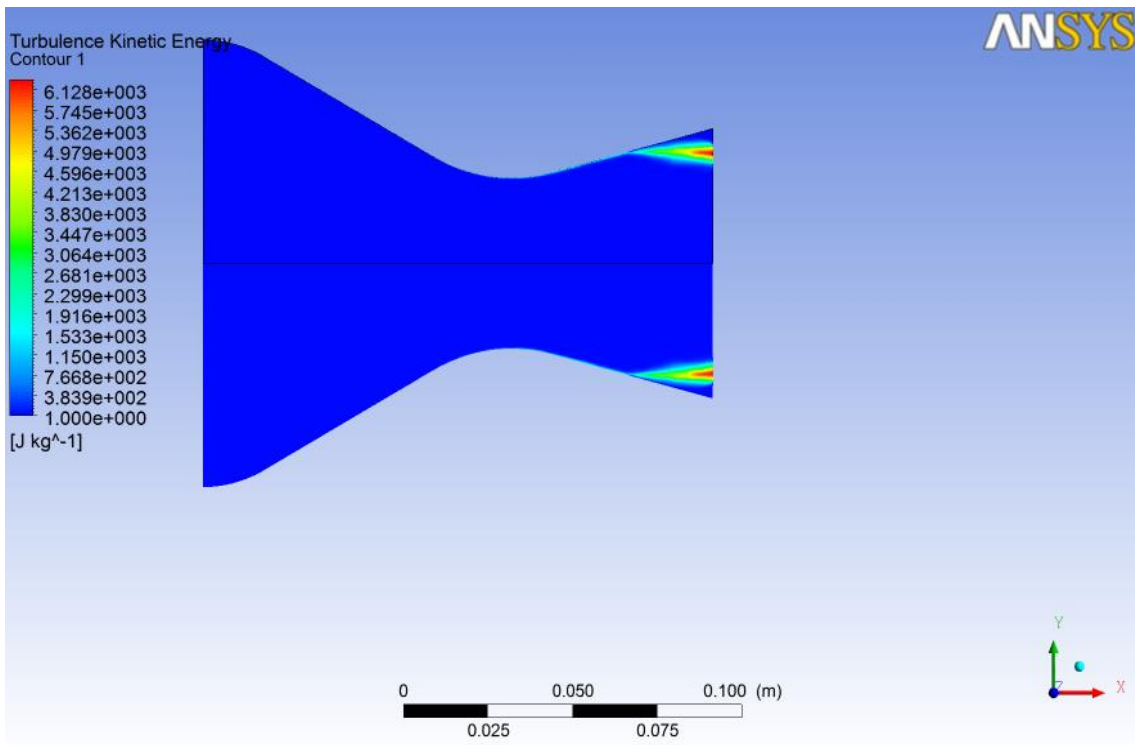


(4b) Trois dimensions 3D.

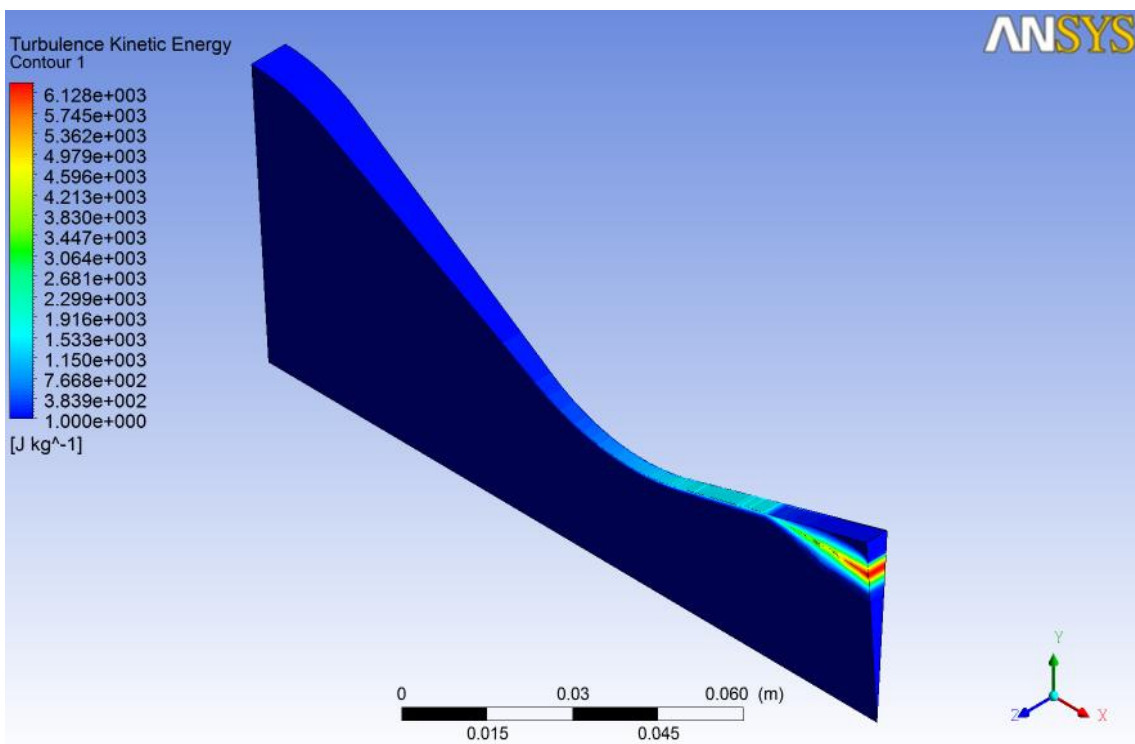
Figures (4-4a, 4b) Contours de la masse volumique (kg/m³).

Les figures (4-5a, 5b) représente la variation du champ et le profil de l'énergie cinétique turbulente dans le domaine d'étude on remarque que :

A la sortie, l'énergie cinétique turbulente est simplement dissipée par l'effet de viscosité [10], donc il y a un équilibre entre le flux convectif et le taux de dissipation visqueux dans l'équation de transport de k , puisqu'il n'y a ni mécanisme de production (pas de gradient de vitesse), ni mécanisme de diffusion (pas de gradient de k).

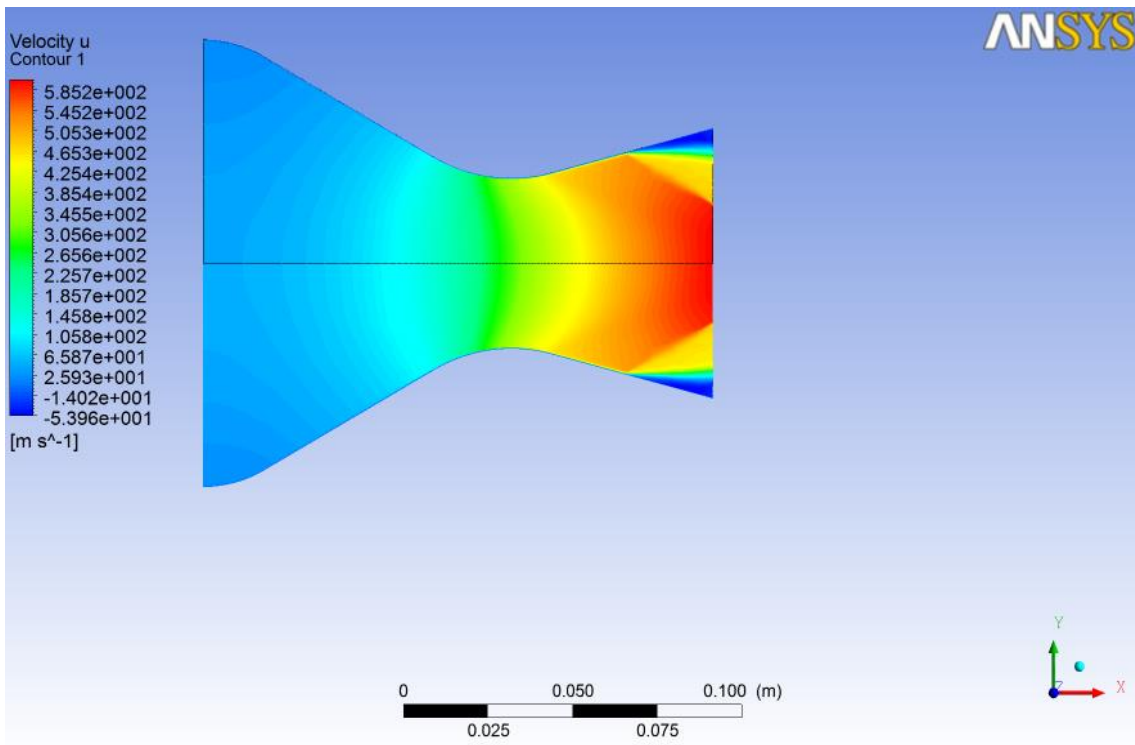


(5a) Deux dimensions 2D.

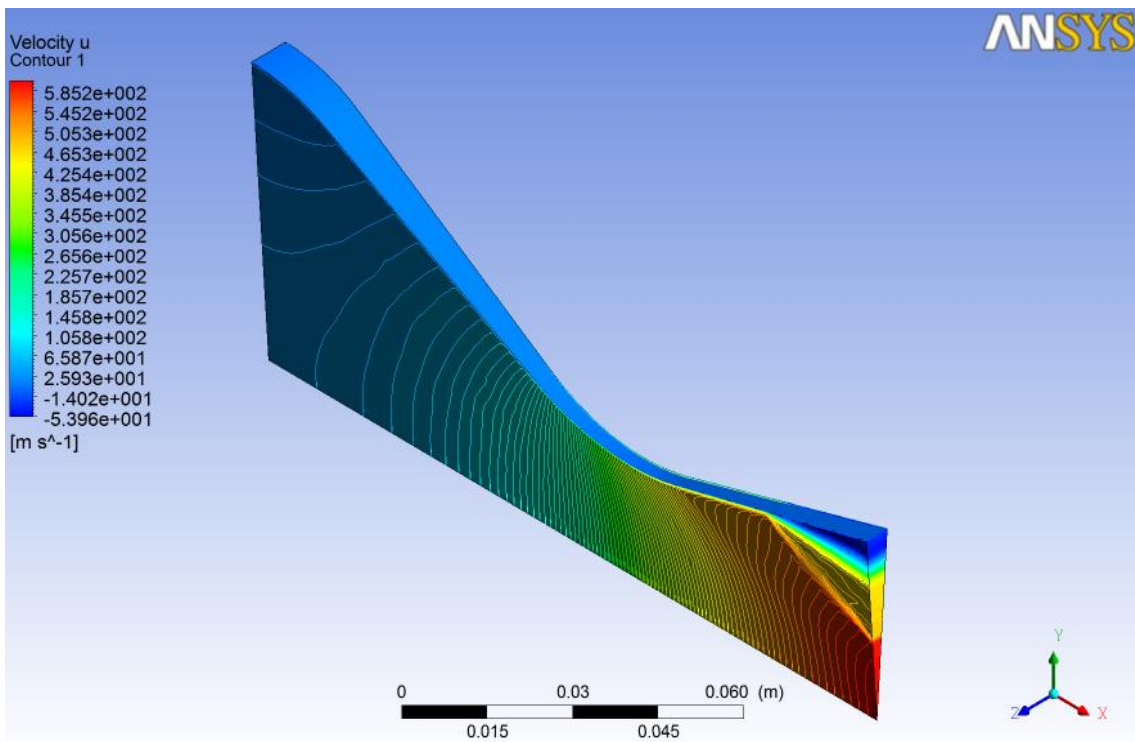


(5b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-5a, 5b) Contours de l'énergie cinétique turbulente (J/kg).

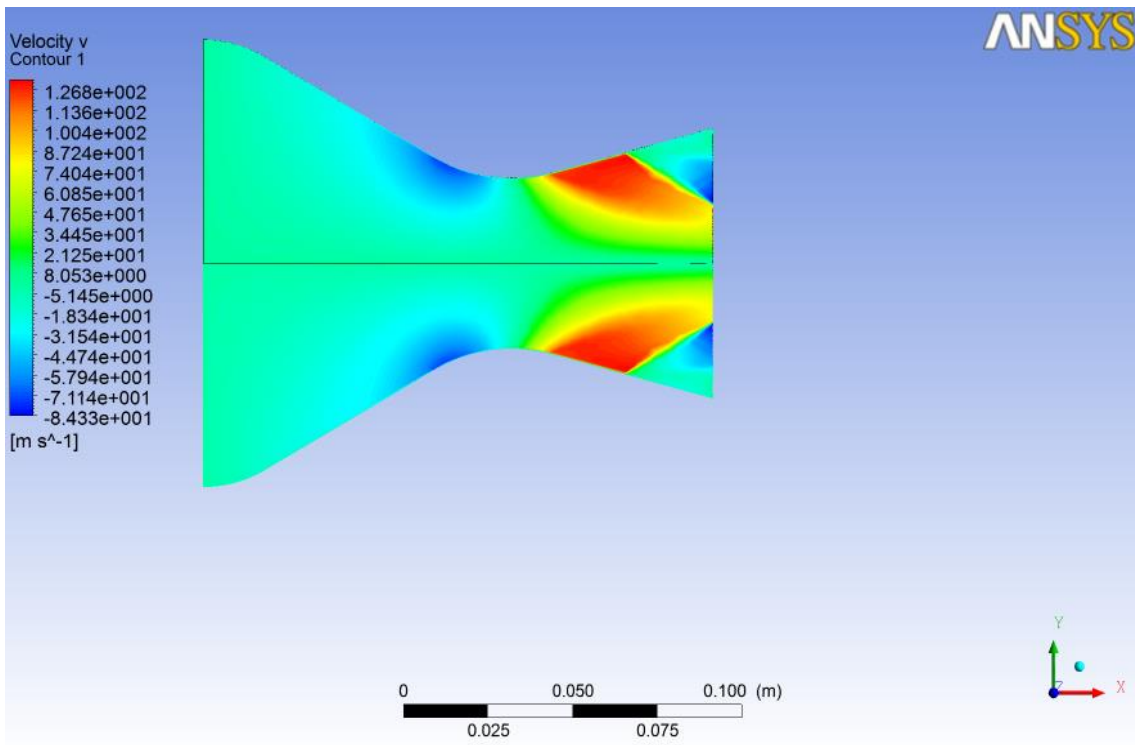


(6a) Deux dimensions 2D.

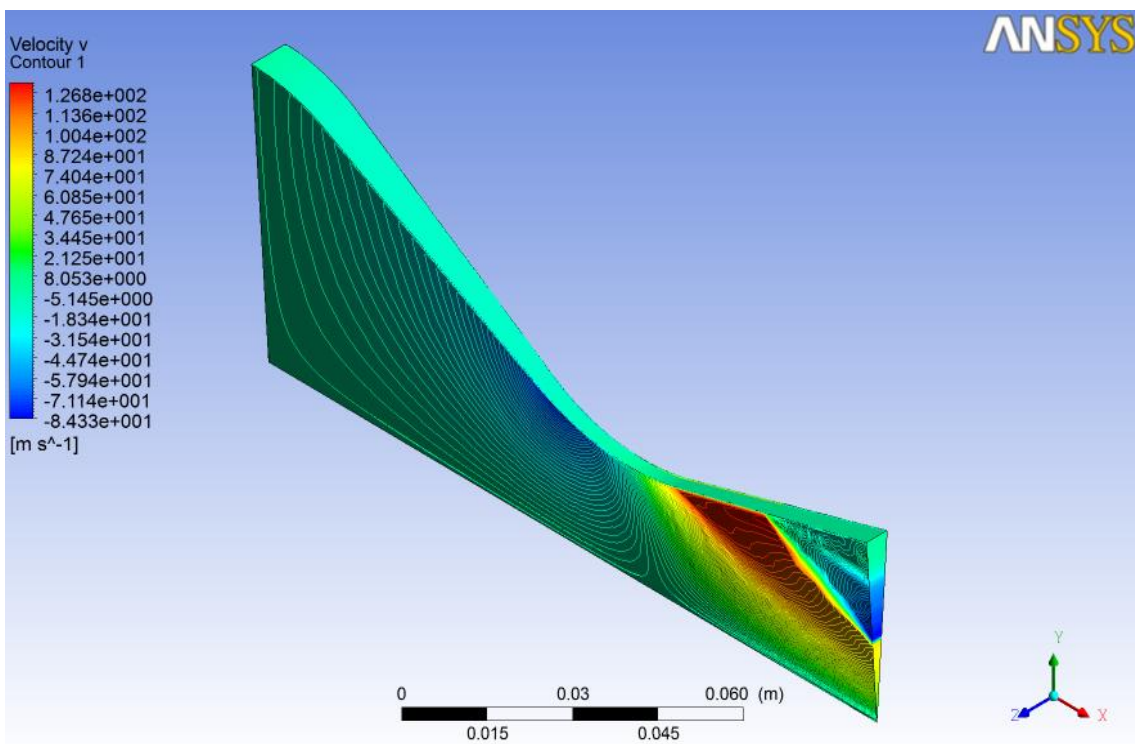


(6b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-6a, 6b) Contours de la vitesse U (m/s²).



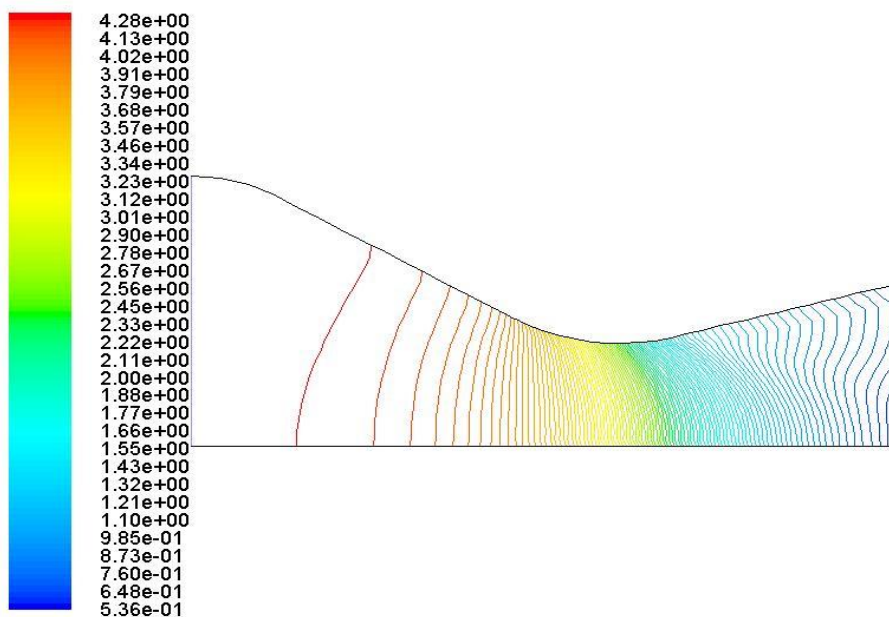
(7a) Deux dimensions 2D.



(7b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-7a, 7b) Contours de la vitesse V (m/s²).

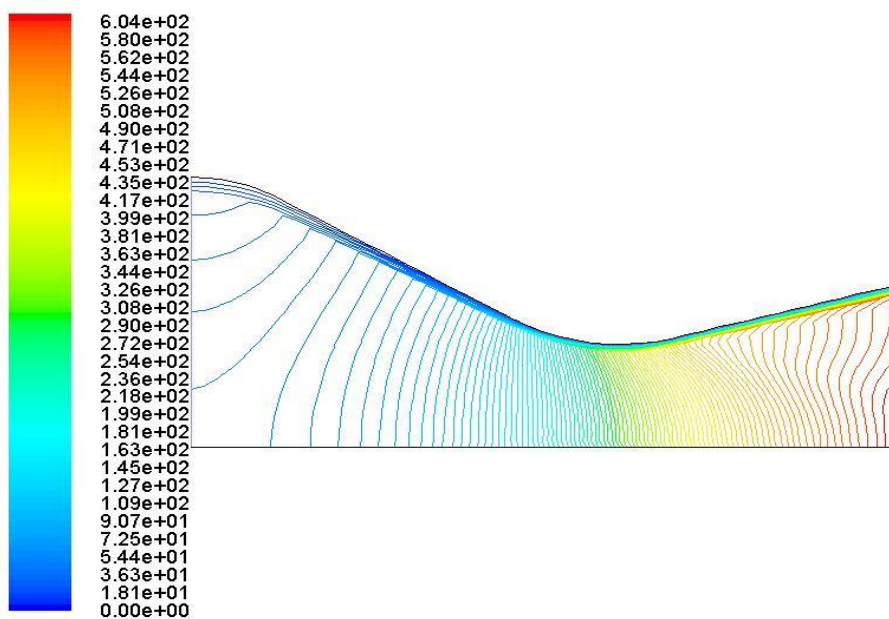
Les figures (4-8 jusqu'à 11) Représentent les iso-valeurs de nombre de Mach et la pression, la température.



Profiles of Density (kg/m3)

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

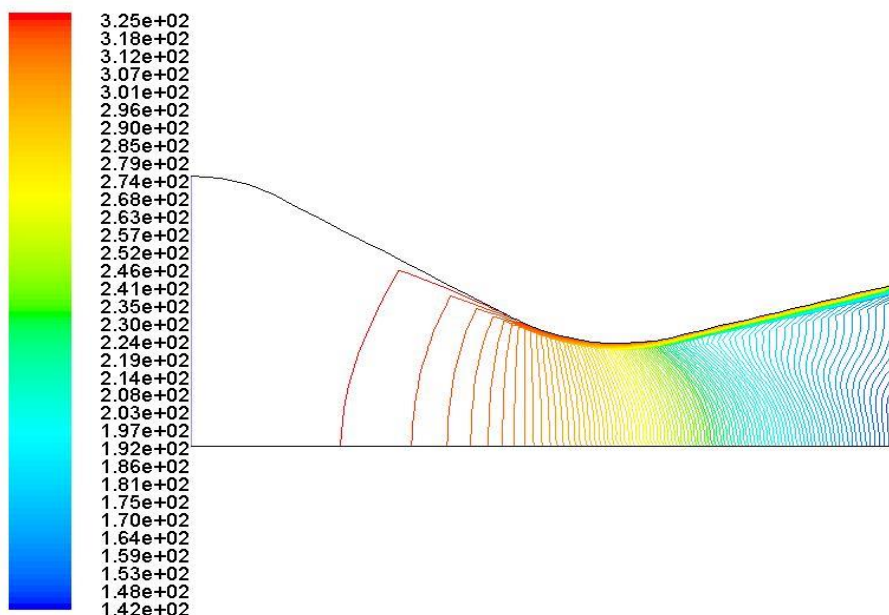
Figure (4-8) Iso-valeurs de la masse volumique (kg/m³).



Profiles of Velocity Magnitude (m/s)

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

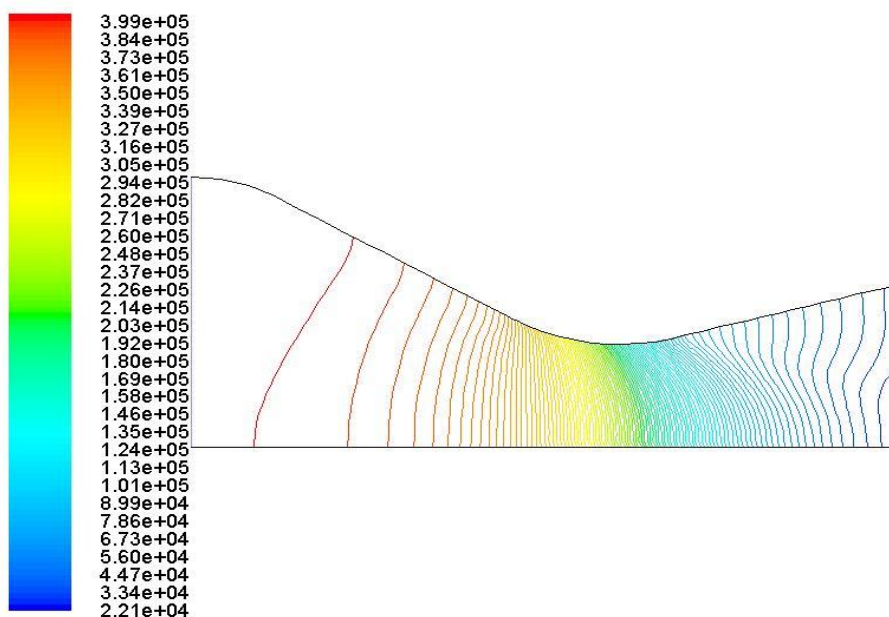
Figure (4-9) Iso-valeurs de la vitesse (m/s).



Profiles of Static Temperature (k)

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

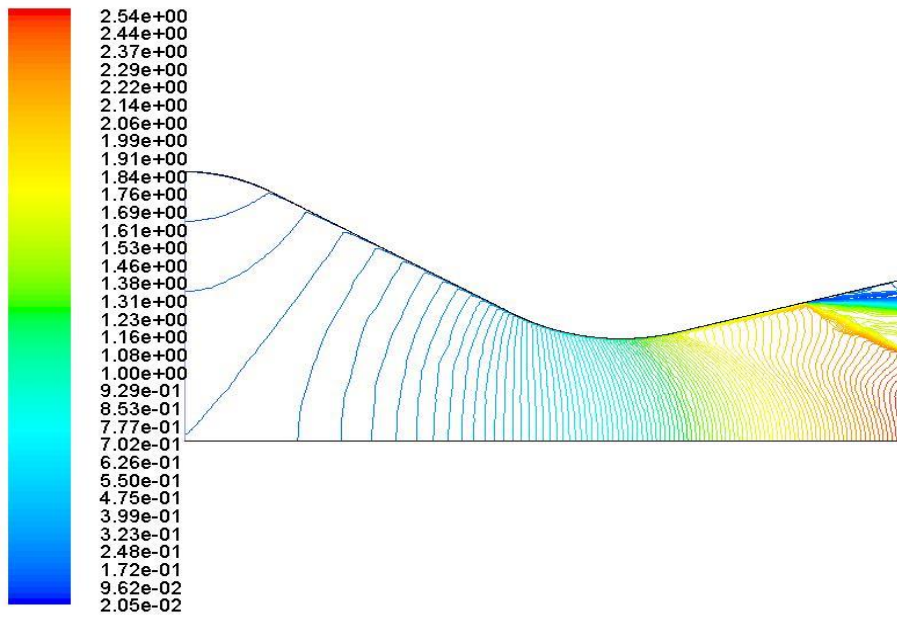
Figure (4-10) Iso-valeurs de la température (K).



Profiles of Static Pressure (pascal)

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-11) Iso-valeurs de la pression (Pa).

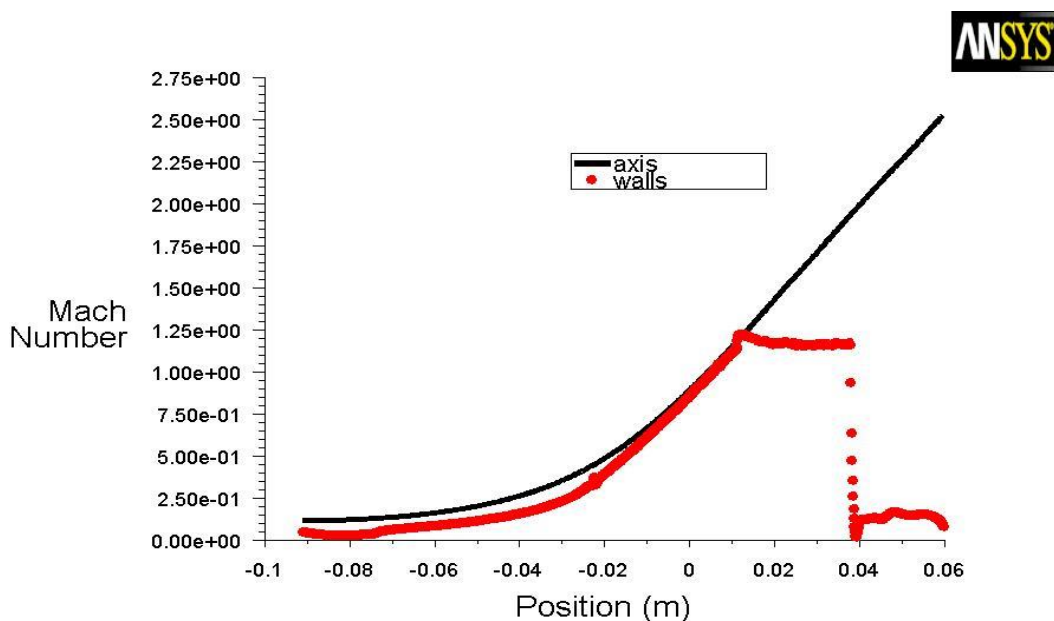


Contours of Mach Number

Dec 29, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

Figure (4-12a) Iso-valeurs du nombre de Mach.

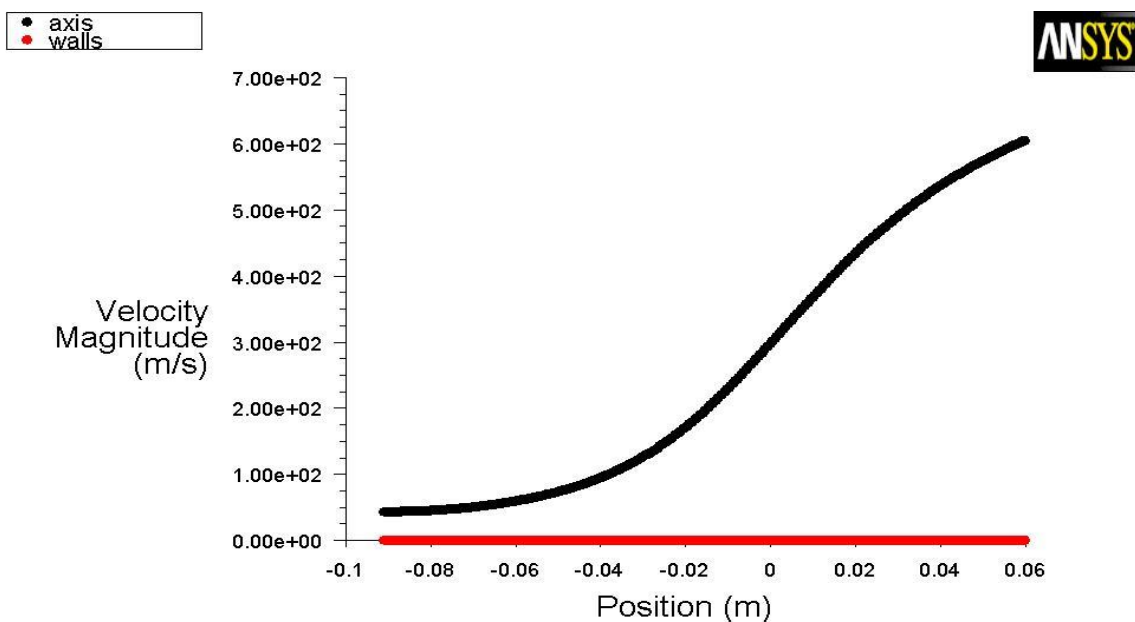
La figure (4-12b) représente la variation du nombre de Mach le long de la tuyère on Remarque que celui-ci augmente progressivement avec la distance longitudinale pour atteindre la valeur de $M=2.5$, et en niveau de la paroi il atteindrait la valeur de $M=1.25$ avec fluctuation jusqu'à la sortie de la tuyère, et l'ensemble des points qui se trouvent dans l'aire entre les deux courbes représente les fluctuations du nombre de Mach entre la paroi et l'axe de la tuyère.



Mach Number

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkqw)

Figure (4-12b) Variation du nombre de la Mach.



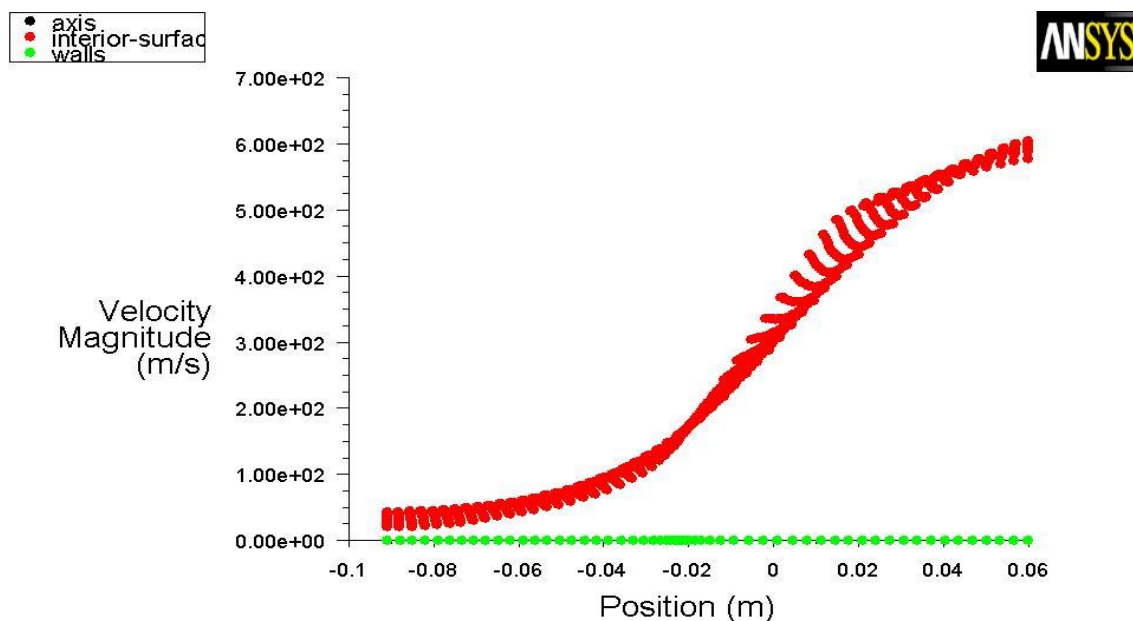
Velocity Magnitude

Dec 24, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkqw)

Figure (4-13) Variation de la vitesse (m/s).

La figure (4-13) représente la variation de vitesse sur le long de la tuyère on remarque que celui-ci augmente progressivement avec la distance longitudinale, par contre au niveau de la paroi il s'annule, et l'ensemble des points qui se trouvent dans l'aire entre

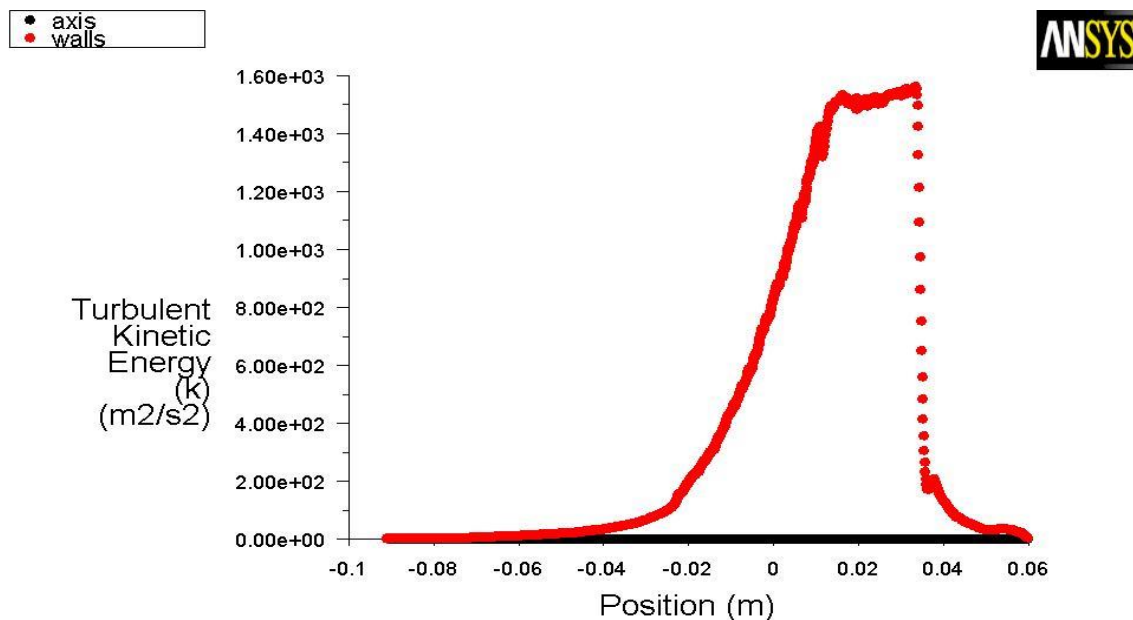
les deux courbes représente les fluctuations du nombre de vitesse entre la paroi et l'axe de la tuyère voir la figure (4-14).



Velocity Magnitude

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-14) Variation du champ de la vitesse (m/s).

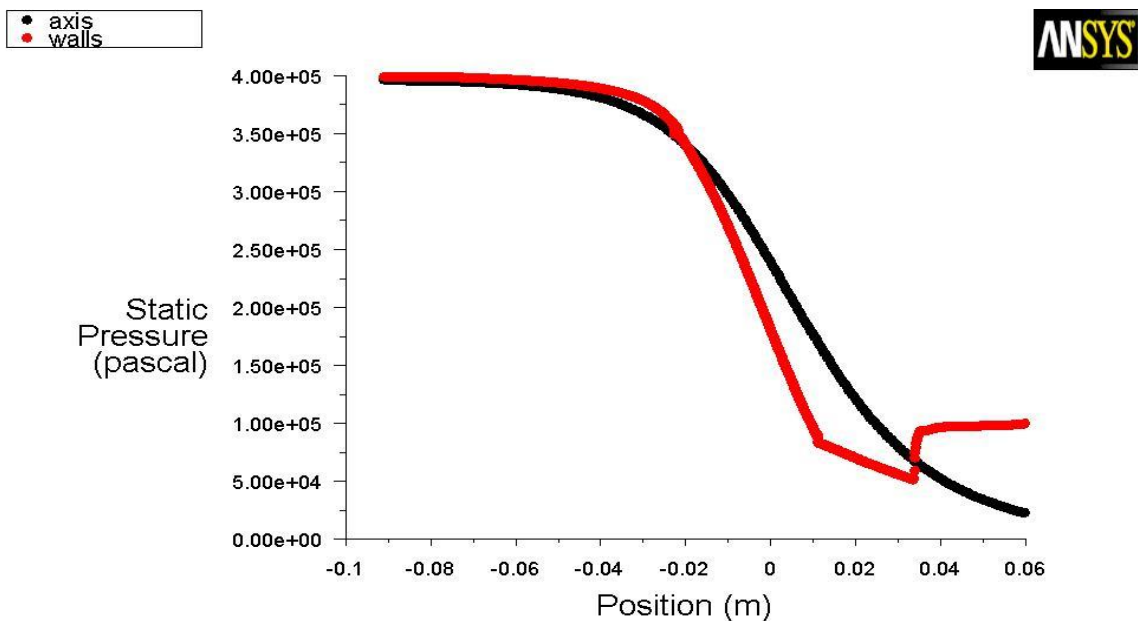


Turbulent Kinetic Energy (k)

Dec 24, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-15) Variation du champ de l'énergie cinétique (m²/s²).

La figure (4-16a) représente la variation de la pression le long de la tuyère à proximité de la paroi et au niveau de l'axe de la tuyère, on remarque que celle-ci chute progressivement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'entrée de la tuyère et une légère différence existe entre les deux zones créées par l'effet de la couche limite de l'écoulement ; le point d'inflexion de la courbe de la paroi représente le point du décollement du fluide [33] au niveau de l'abscisse $x=0.036\text{m}$.

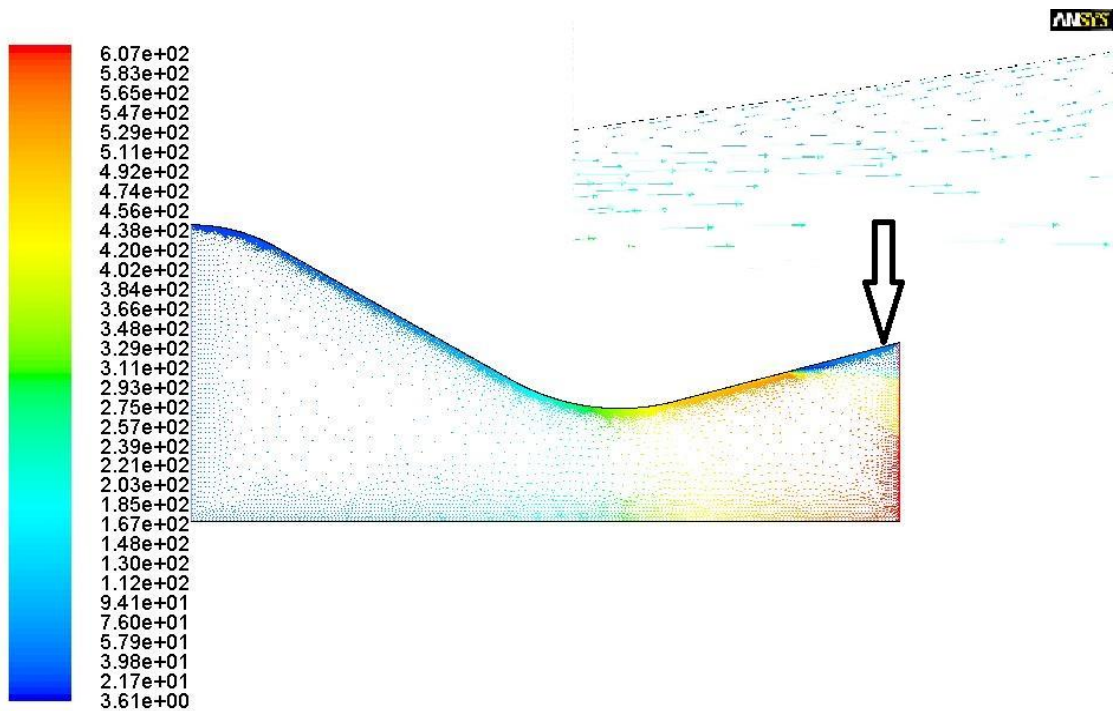


Static Pressure

Dec 24, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

Figure (4-16a) Variation de la pression (Pa).

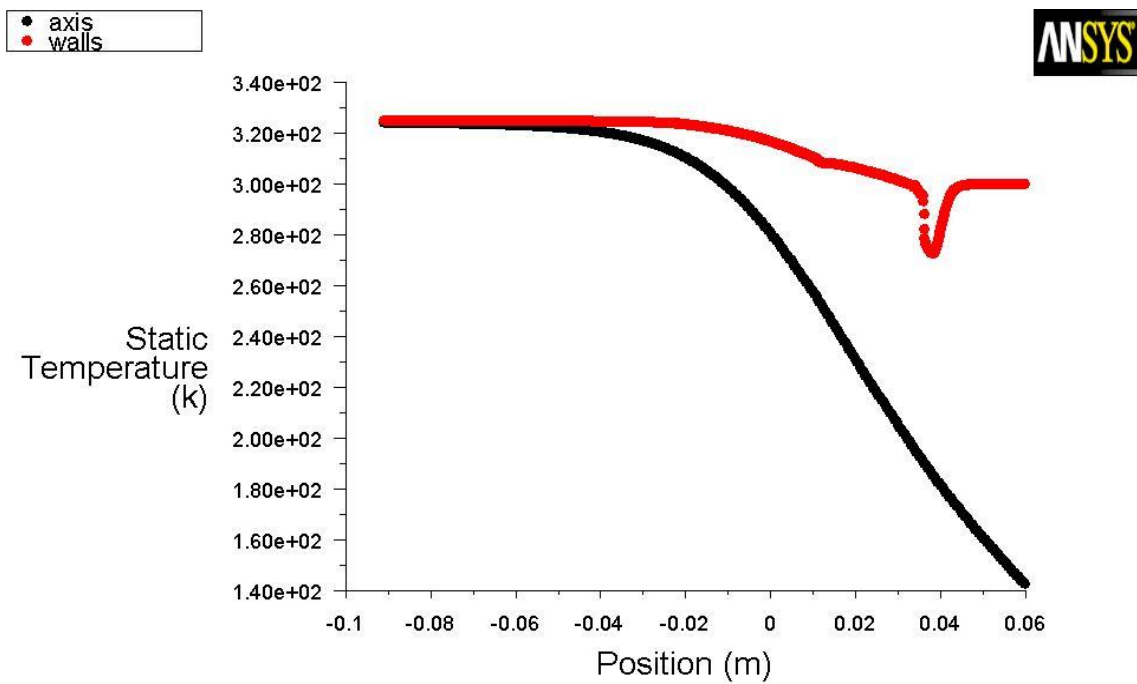
La figure (4-16b) représente le champ des vitesses dans la zone décollée à partir de Point $X=0.036\text{m}$ (la zone de recirculation).



Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkqw)

Figure (4-16b) Champ des vitesses (zone décollée).

La figure (4-17) représente la variation de la température le long de la tuyère à proximité de la paroi et au niveau de l'axe de la tuyère, on remarque que la première chute progressivement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'entrée de la tuyère par contre la seconde varie peu le long de la tuyère ; ce phénomène est causé par l'effet de la couche limite de l'écoulement.



Static Temperature

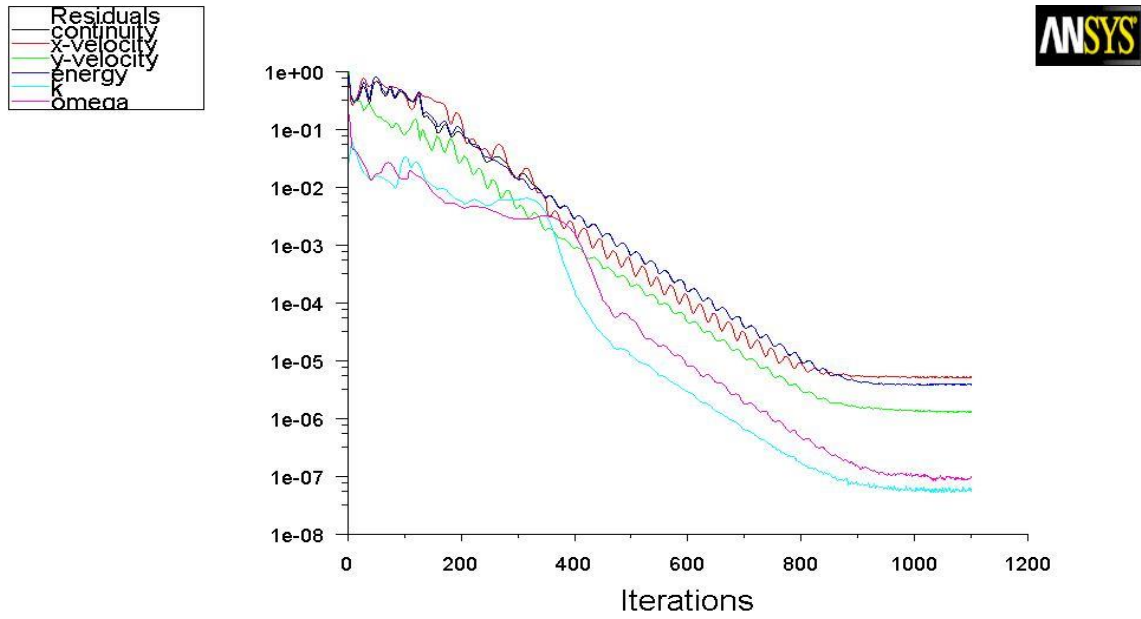
Dec 24, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkvw)

Figure (4-17) Variation de la température (k).

b) Pour une pression initiale $P_0=10.34$ bar:

Comme signalé précédemment, le modèle SST à Faire voir les meilleures performances globales en termes de précision d'un calcul, par conséquent, afin de fournir une meilleure compréhension du comportement d'écoulement turbulent à de la tuyère convergent-divergente,

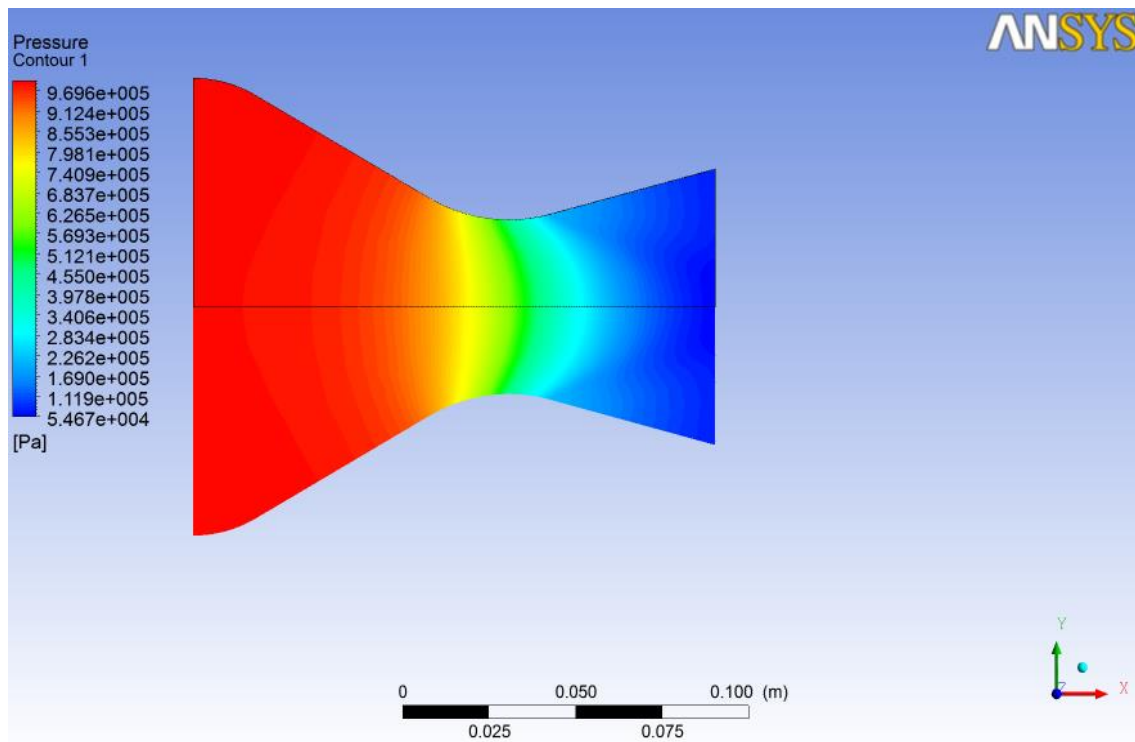
On note l'effet de l'augmentation de la pression initial P_0 sur la position du point de décollement, dans les résultats obtenus suivantes:



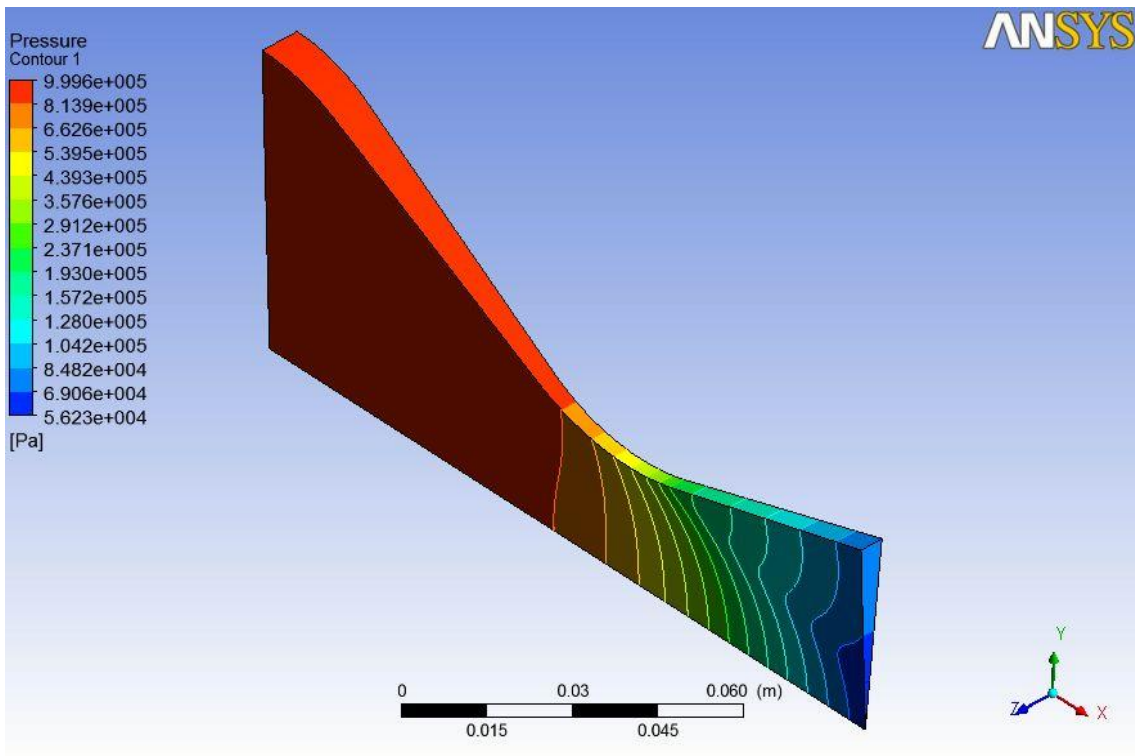
Scaled Residuals

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

Figure (4-18) Courbes de convergence (754 solutions est convergées).

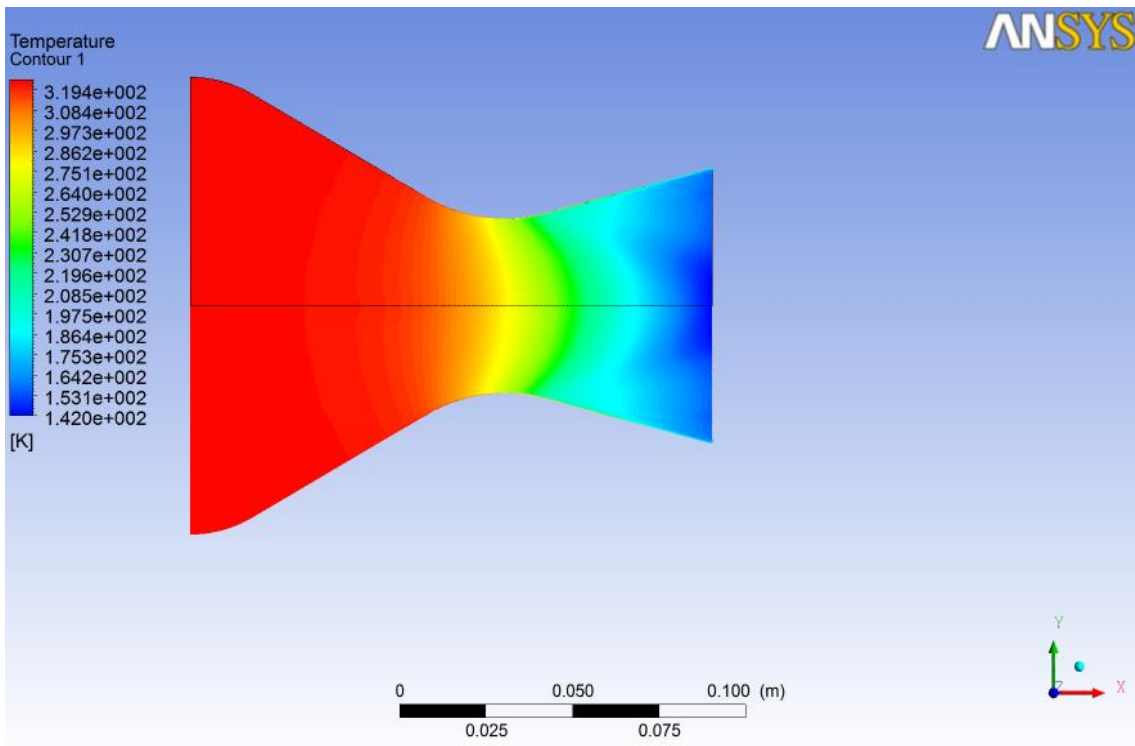


(19a) Deux dimensions 2D.

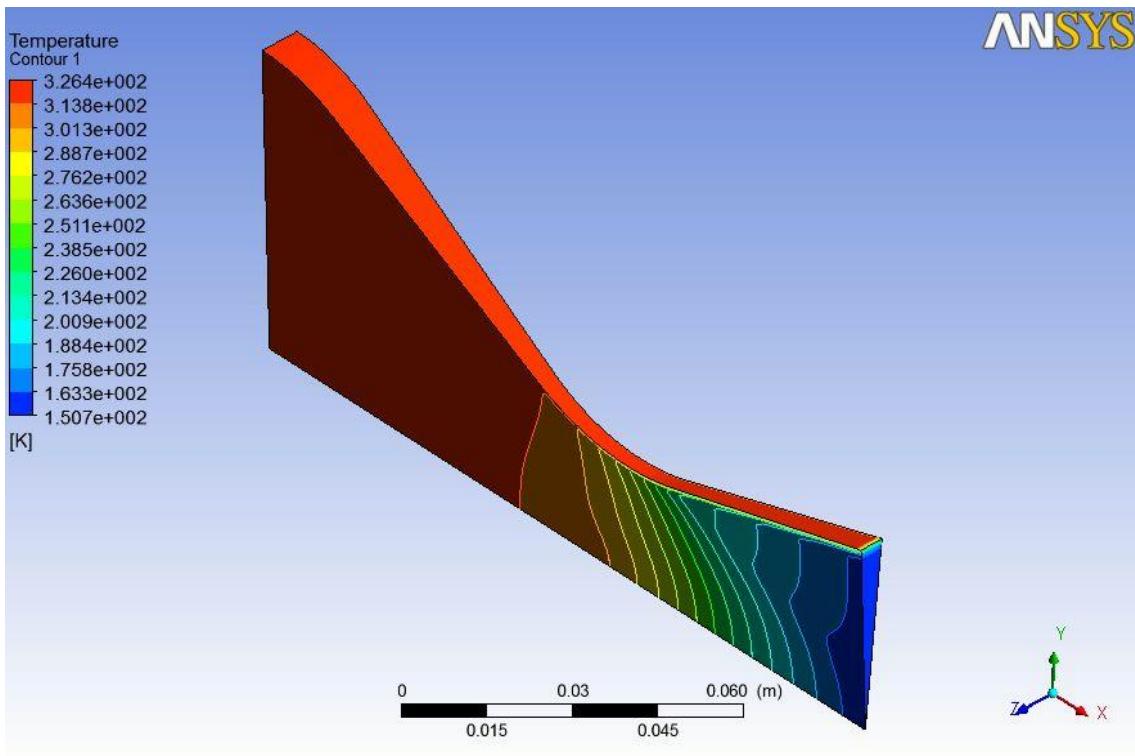


(19b) Trois dimensions 3D.

Figures (4-19a, 19b) Contours de la pression tridimensionnelle (Pa).

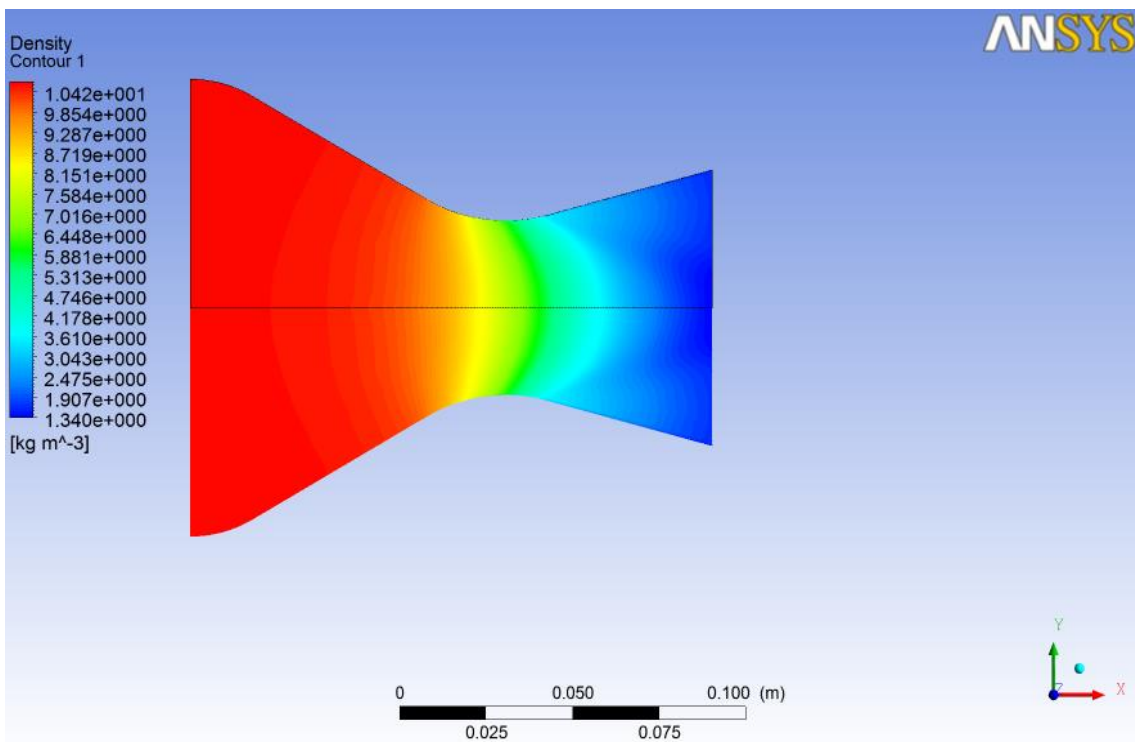


(20a) Deux dimensions 2D.

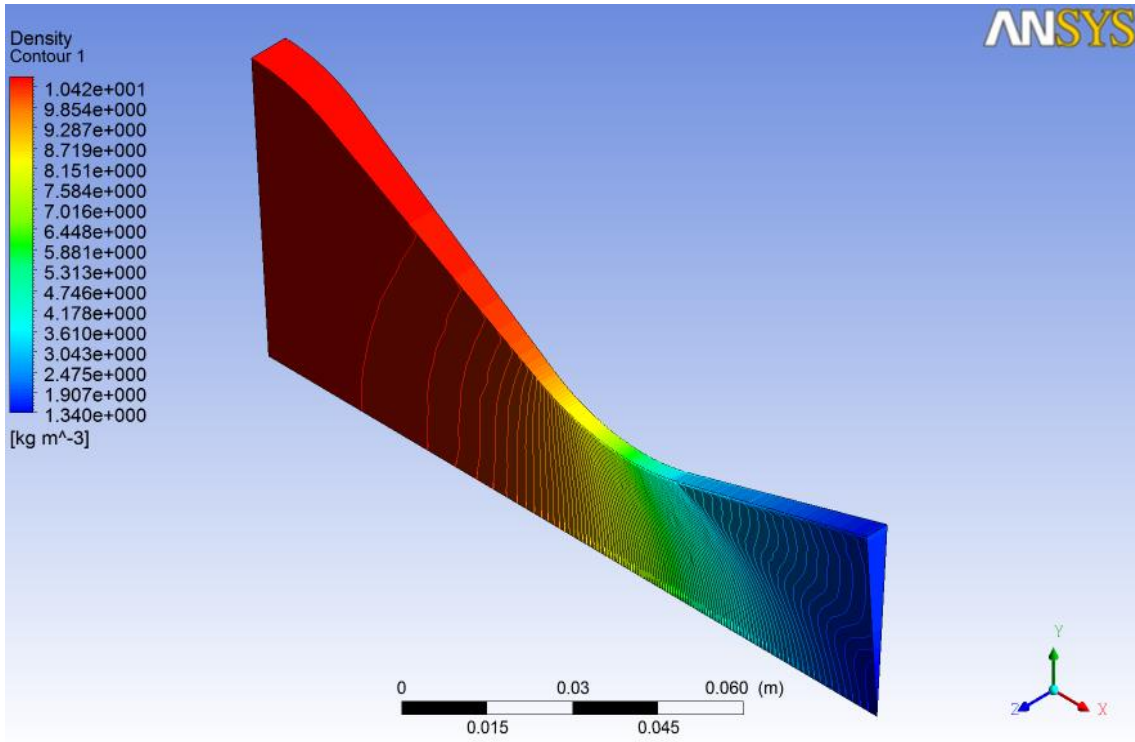


(20b) Trois dimensions 3D.

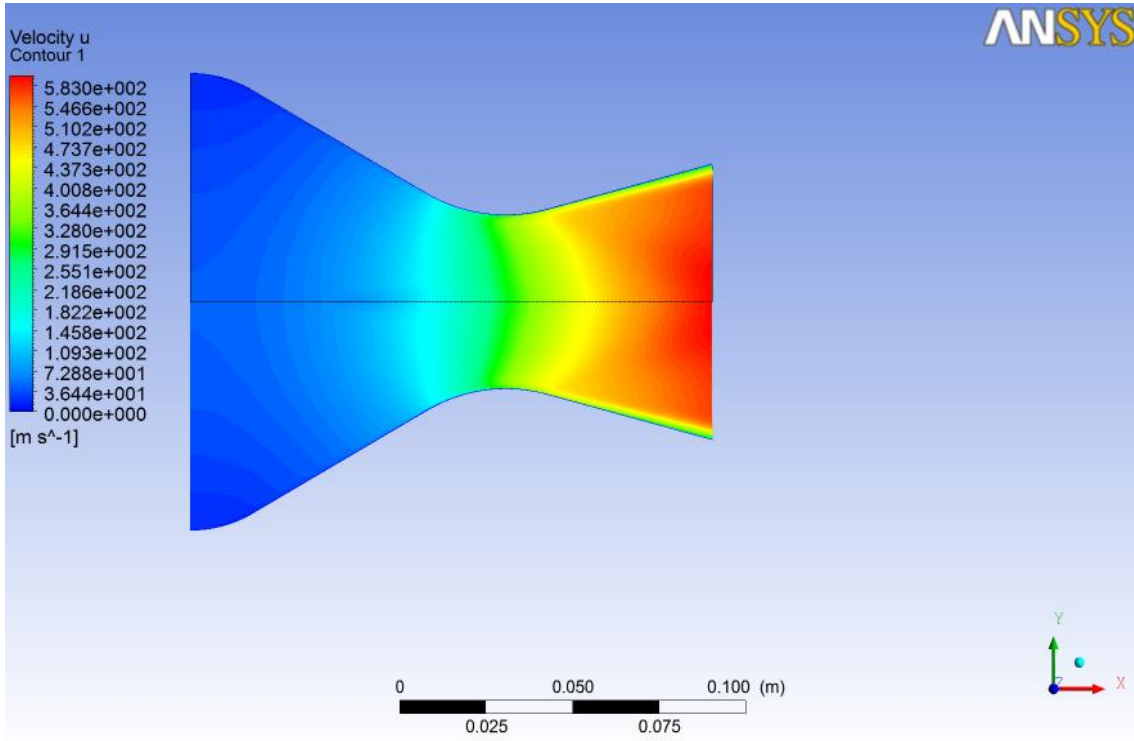
Figures (4-20a, 20b) Contours de la température tridimensionnelle (pascal).



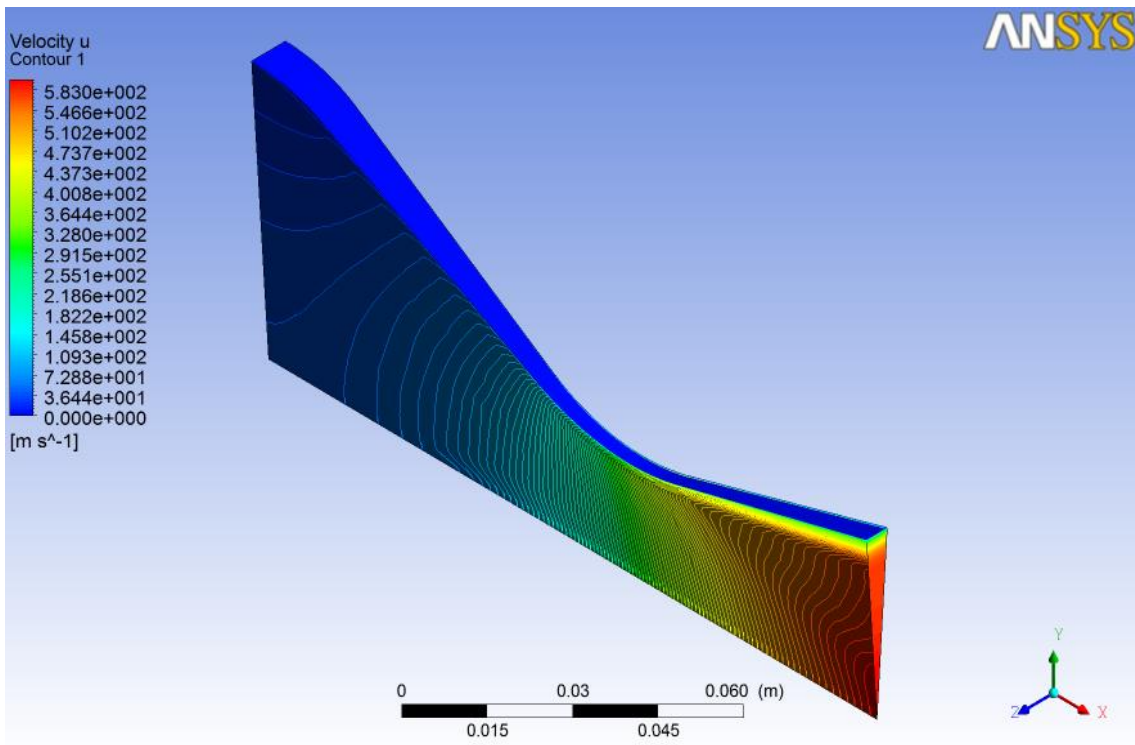
(21a) Deux dimensions 2D.



(21b) Trois dimensions 3D.
Figures (4-21a, 21b) Contours de la masse volumique (kg/m^3).

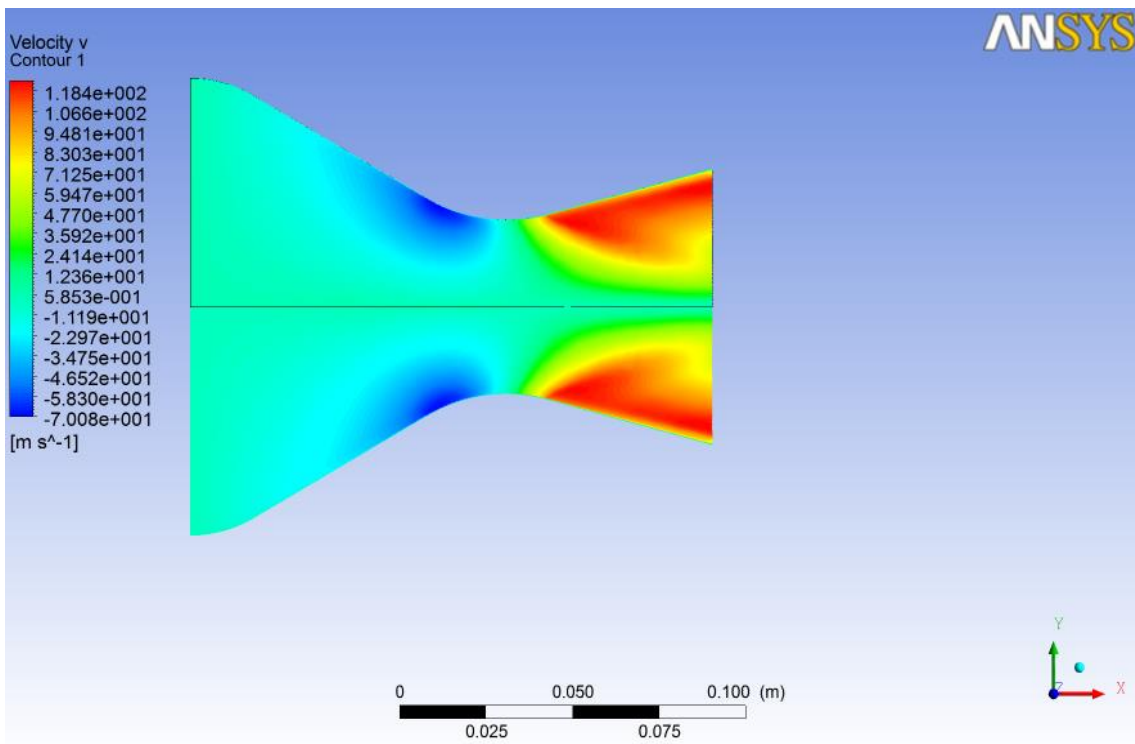


(22a) Deux dimensions 2D.

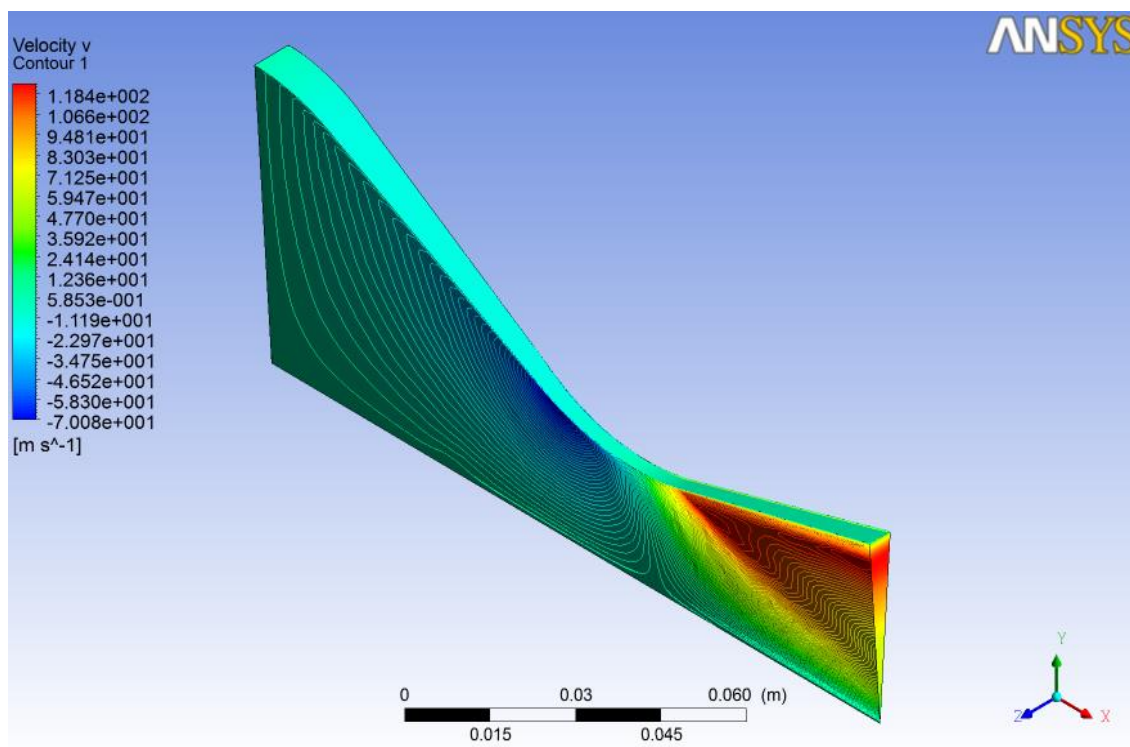


(22b) Trois dimensions 3D.

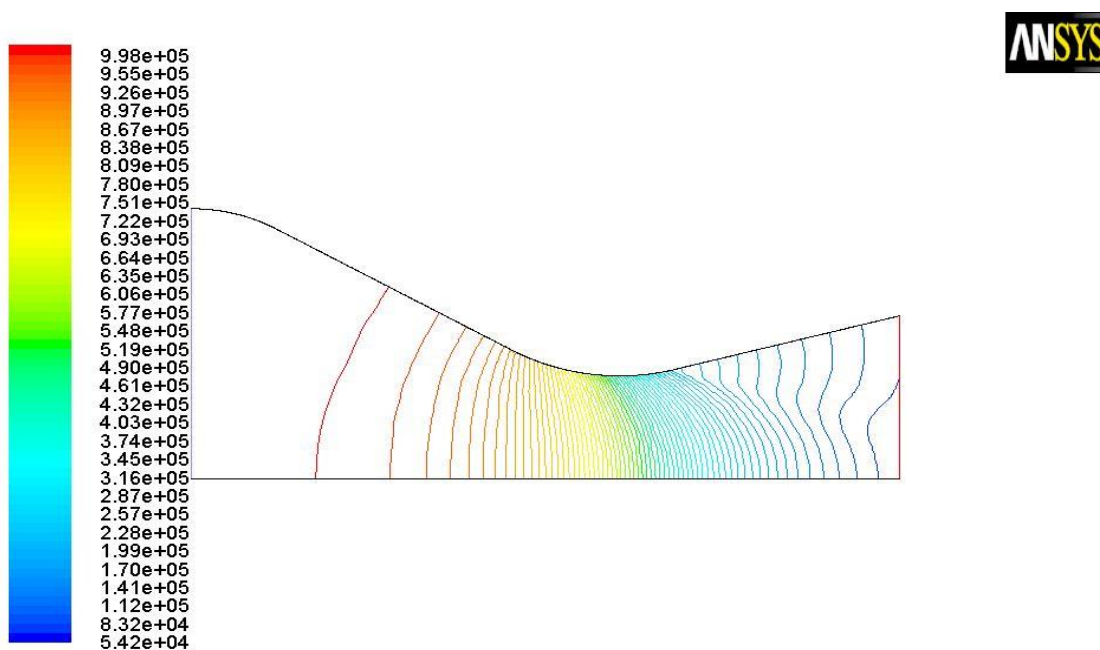
Figures (4-22a, 22b) Contours de la vitesse U (m/s²).



(23a) Deux dimensions 2D.



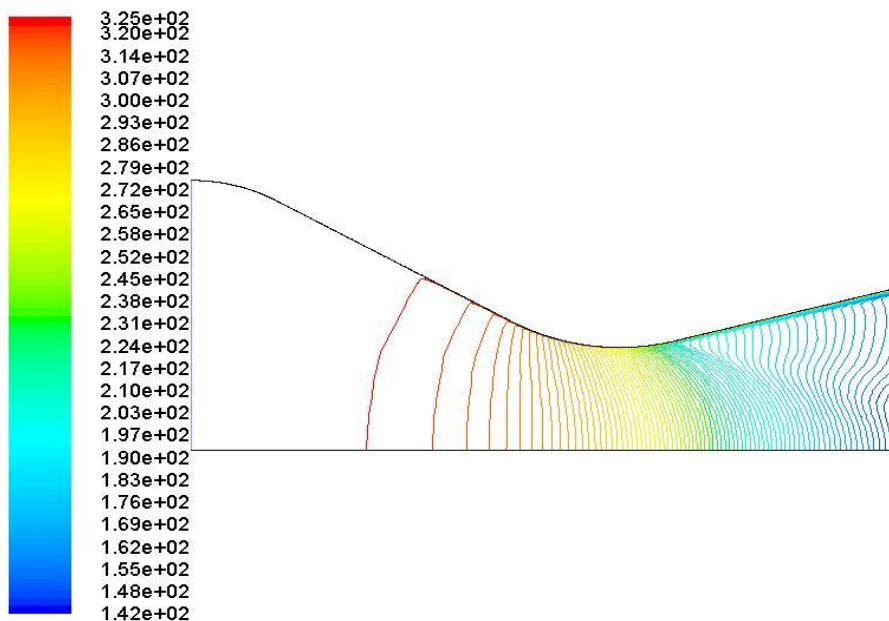
(23b) Trois dimensions 3D.
Figures (4-23a, 23b) Contours de la vitesse V (m/s²).



Contours of Static Pressure (pascal)

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

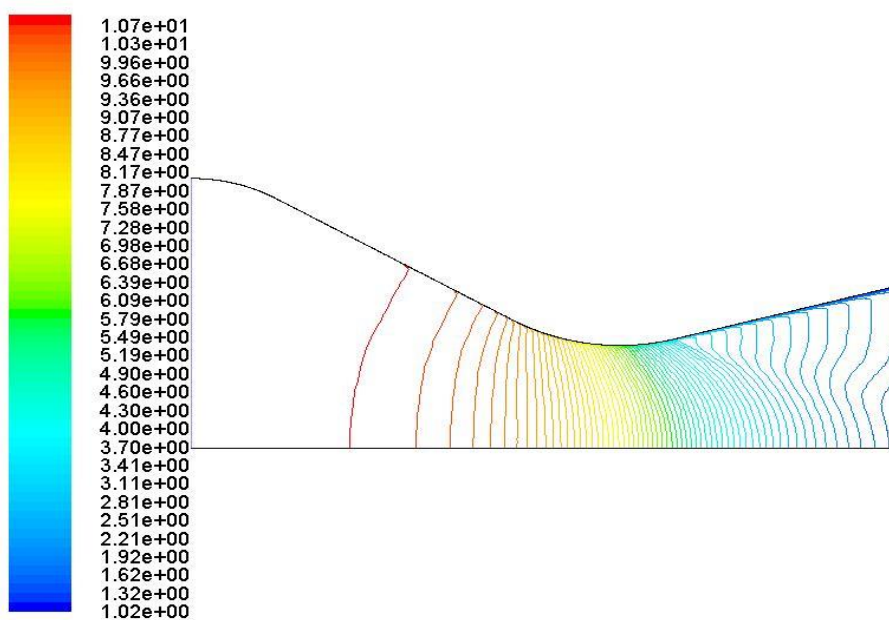
Figure (4-24) Iso-valeurs de la pression (Pa).



Contours of Static Temperature (k)

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

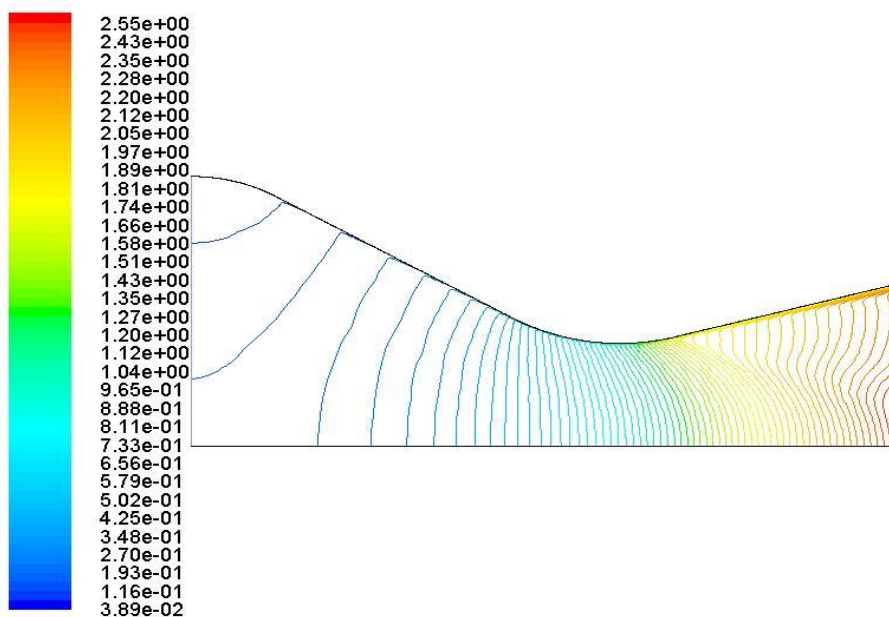
Figure (4-25) Iso-valeurs de la température (K).



Contours of Density (kg/m3)

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

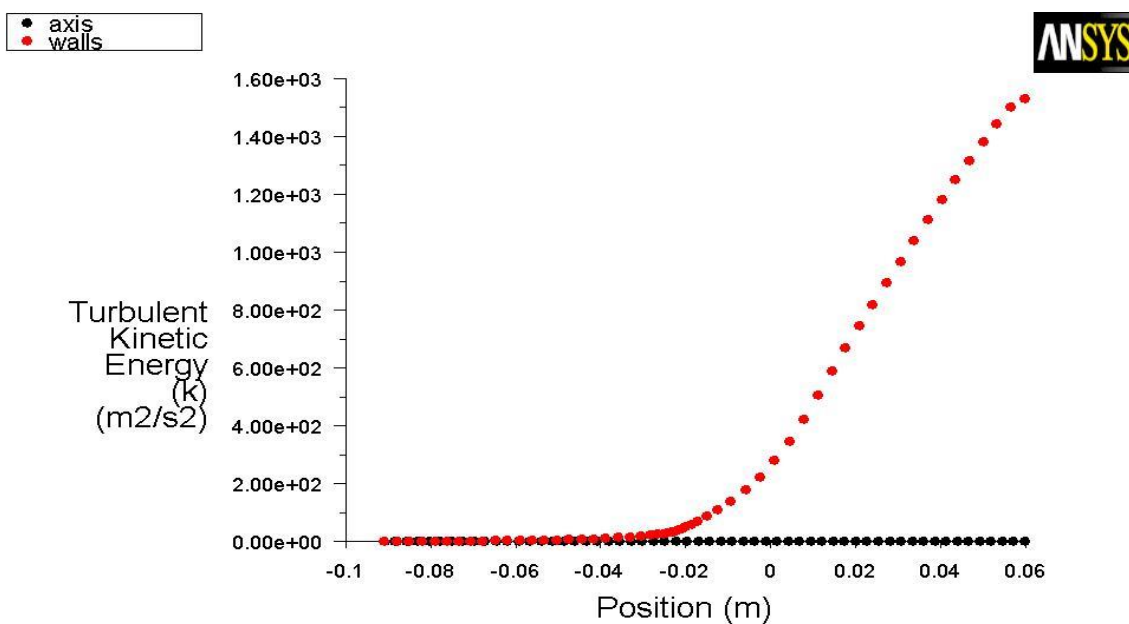
Figure (4-26) Iso-valeurs de la masse volumique (kg/m³).



Contours of Mach Number

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-27) Iso-valeurs du nombre de Mach.

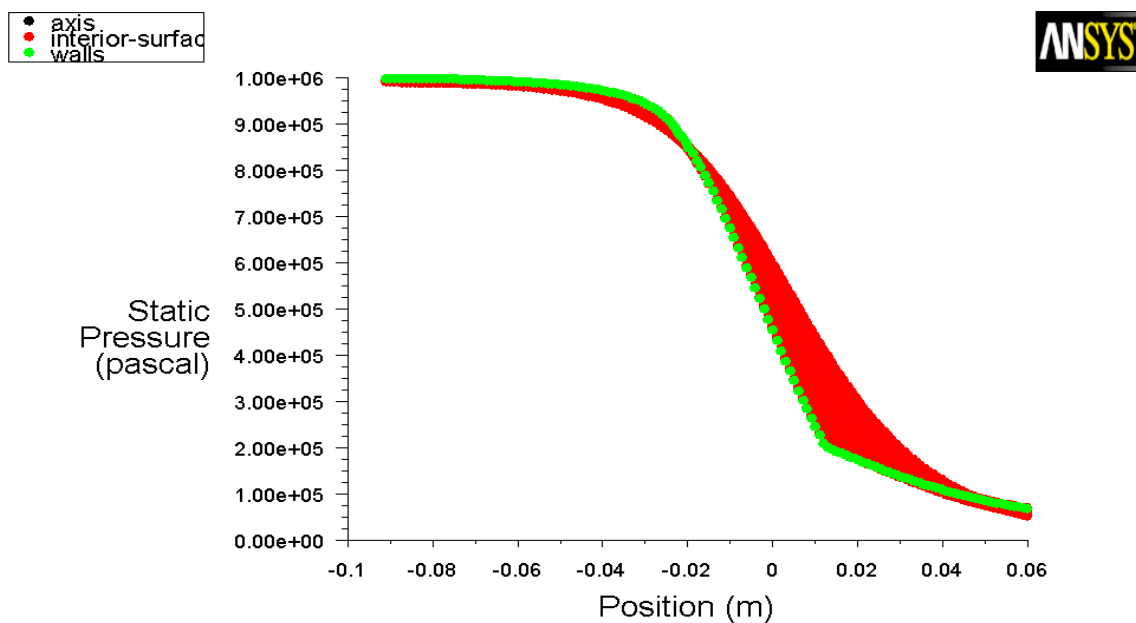


Turbulent Kinetic Energy (k)

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-28) Variation de l'énergie cinétique (m²/s²).

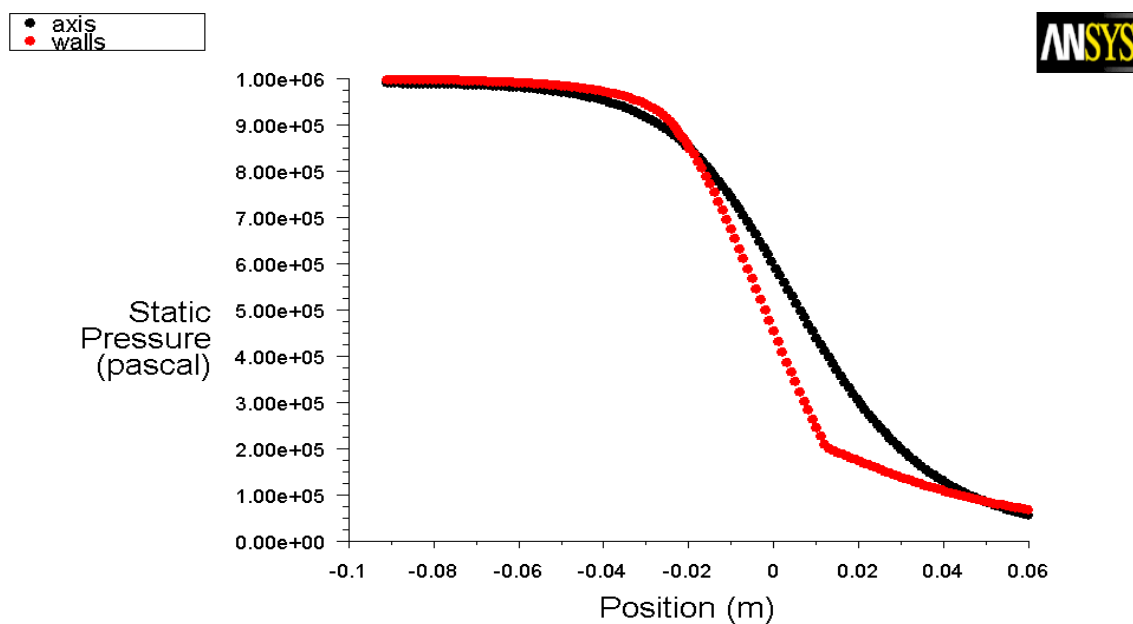
La figure (4-29) représente le champ de pression dans la zone près des lèvres de la Tuyère sans décollement, la poussée est donc à sa valeur optimale.



Static Pressure

Dec 11, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

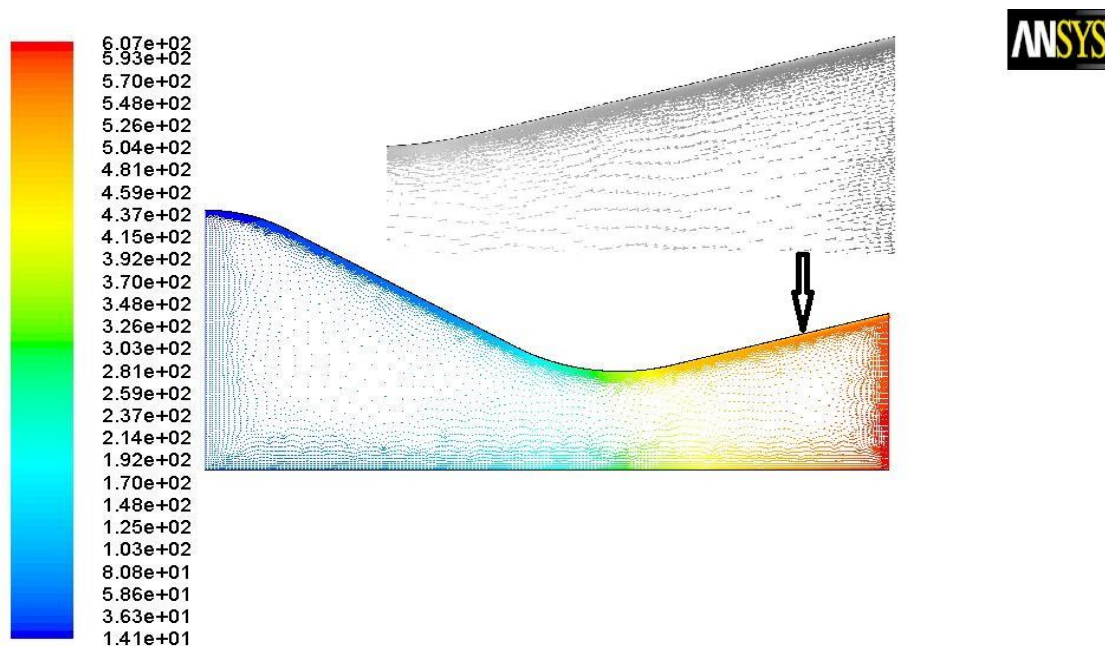
Figure (4-29) Variation du champ de la pression(Pa).



Static Pressure

Dec 11, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

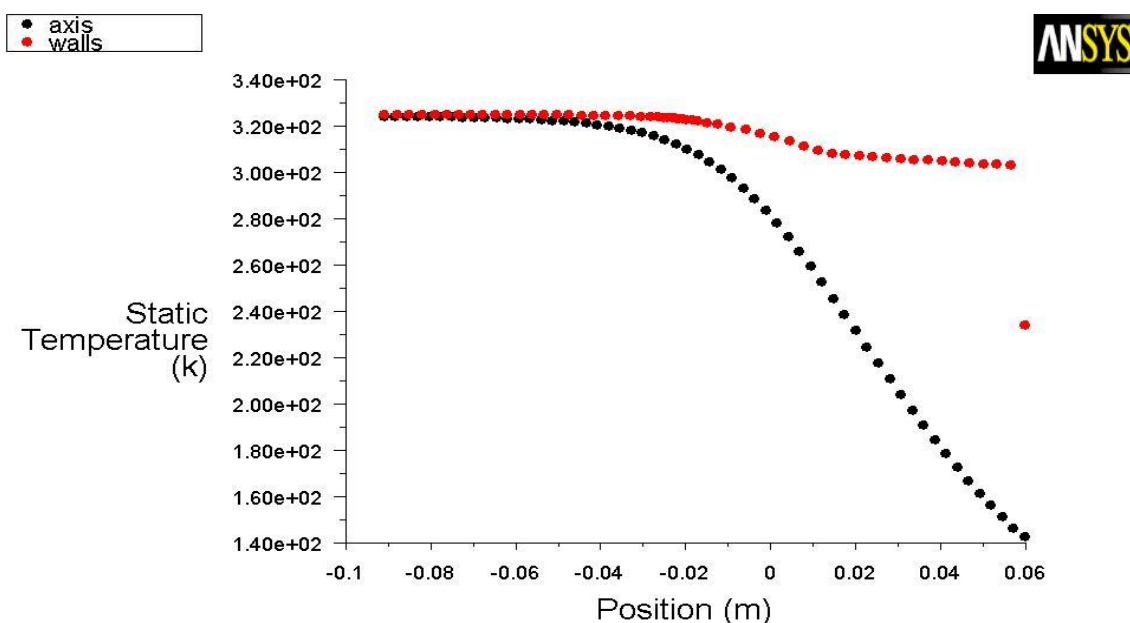
Figure (4-30a) Variation de la pression (Pa).



Velocity Vectors Colored By Velocity Magnitude (m/s) Dec 27, 2017
 ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

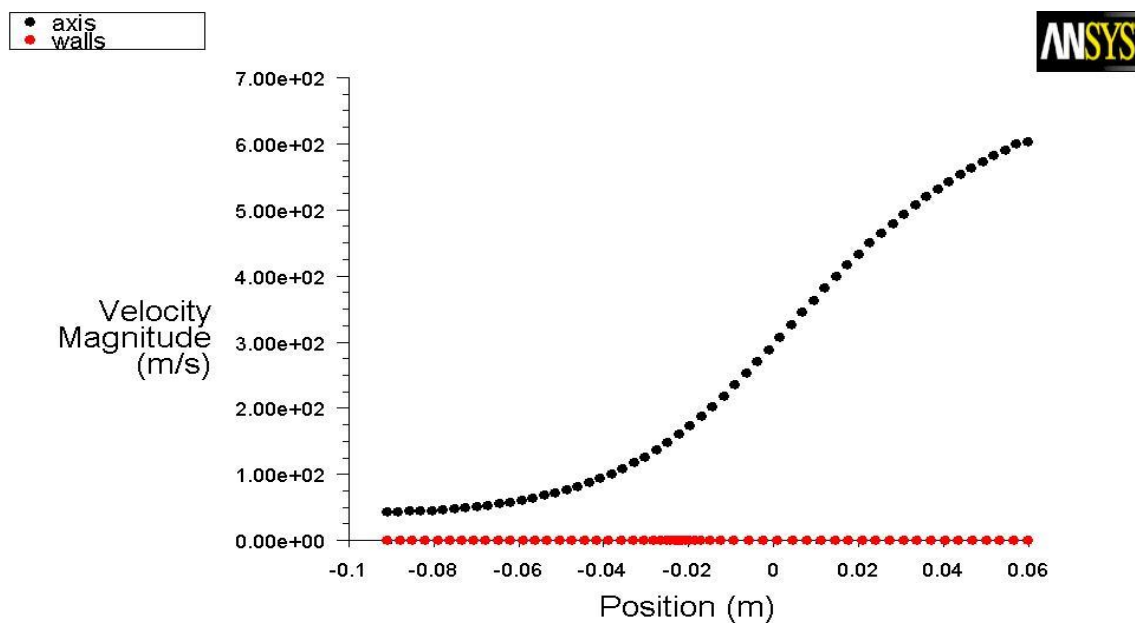
Figure (4-30b) Champ des vitesses (zone non décollée).

La figure (4-30b) représente le champ des vitesses dans la zone près des lèvres de la Tuyère sans décollement, la poussée est donc à sa valeur optimale.



Static Temperature Dec 10, 2017
 ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

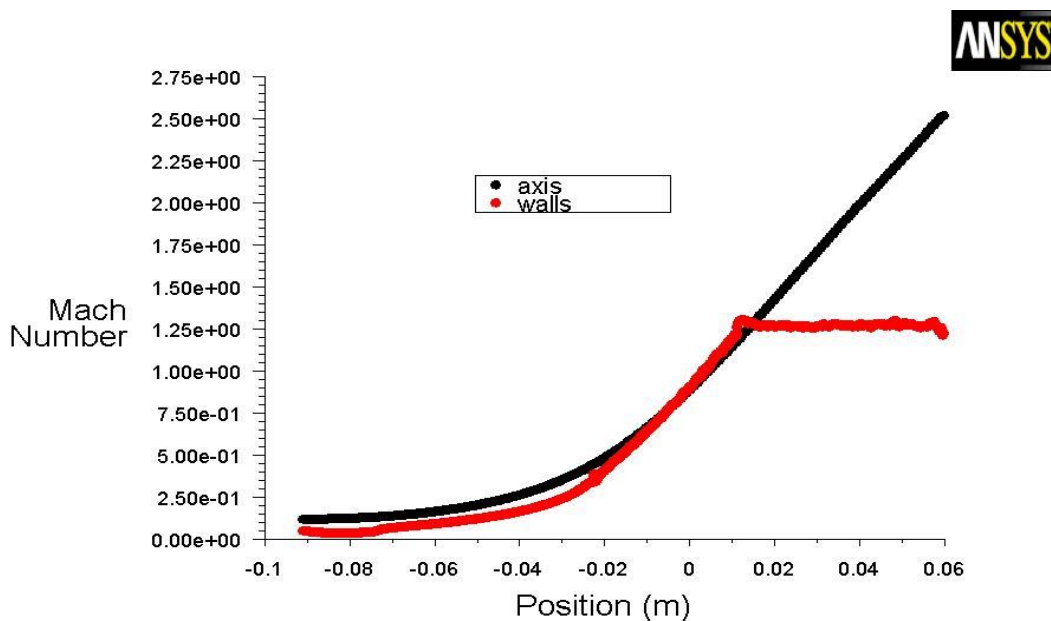
Figure (4-31) Variation de la température (k).



Velocity Magnitude

Dec 10, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

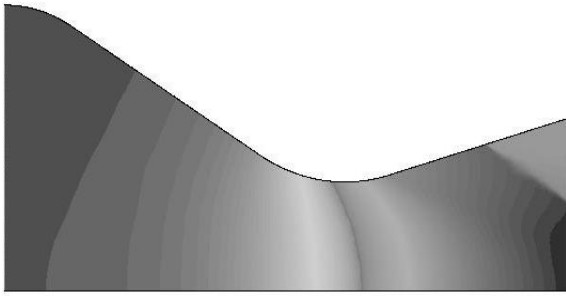
Figure (4-32) Variation de la vitesse U (m/s).



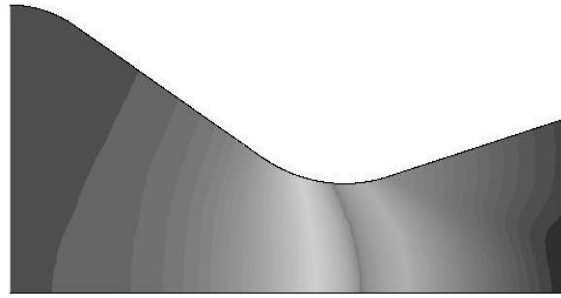
Mach Number

Dec 27, 2017
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstkww)

Figure (4-33) Variation du nombre de Mach.



(34a) $Po=4.14$ bar.



(34b) $Po=10.34$ bar

Figures (4-34a, 34b) Strioscopie numérique.

4.2.2 Effet de l'augmentation de la pression génératrice P_o :

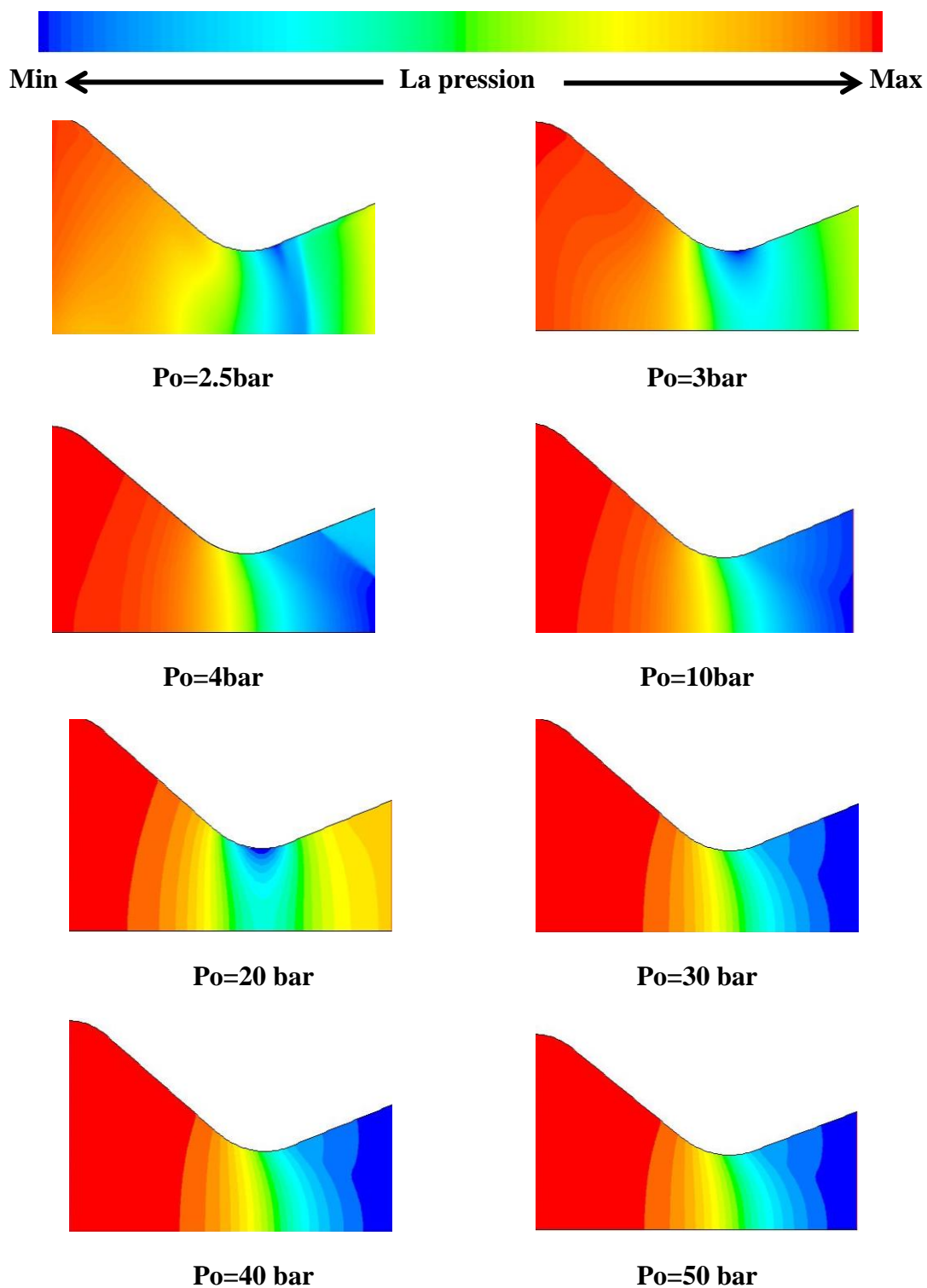


Figure (4-35) Effet de l'augmentation de la pression génératrice P_o Sur la topologie de l'écoulement.

4.3 Discussion

Le phénomène de l'interaction entre une onde de choc et une couche limite turbulente est fréquemment rencontré dans de nombreuses configurations aérodynamiques [11], internes (tuyères, entrées d'air, compresseurs) ou externes (nacelles). Les conséquences, souvent néfastes, de ces interactions ont motivé un grand nombre de recherches très diverses. Elles portent aussi bien sur des expériences effectuées en configuration réelle, sur des études menées en soufflerie dans des configurations plus simples d'interactions qui reproduisent une grande partie des phénomènes observés, ou sur la modélisation analytique ou numérique de ces phénomènes. La complexité des phénomènes mis en jeu dans ces interactions rend la précision des prédictions particulièrement difficile exemple des domaines d'application qui illustre cette complexité est l'aérodynamique des tuyères. La tuyère fonctionne alors en régime de Surdétente, qui a pour effet de générer un choc de décompression qui, détaché de la paroi, pénètre dans le divergent et provoque le Décollement des couches limites en paroi.

Le phénomène de décollement est souvent une distribution aléatoire, rendant l'écoulement symétrique et favorisant l'apparition de charges latérales. De plus, les fluctuations des valeurs et directions induites par ces décollements de paroi peuvent affecter les caractéristiques du vecteur poussé résultant, et nuire aussi aux performances globales de l'avion, la fusée ou le missile. Ces phénomènes instationnaires se produisent à basses fréquences, typiquement quelques dizaines de Hertz dans le cas des moteurs Vulcain, ils mettent en jeu des échelles qui sont susceptibles de constituer une source d'excitation aérodynamique de certains modes propres de la structure et être préjudiciables à son intégrité. Les efforts latéraux sont donc un facteur limitant lors de la conception des géométries de tuyère, puisqu'ils aboutissent en général à un choix de tuyères plus épaisses (donc plus lourdes), ou plus courtes dont le rendement sera moindre, donc à une diminution de la charge utile. Les causes exactes de l'apparition de ces charges sont à ce jour, encore mal connues. Différents types de tuyères ont fait l'objet d'études expérimentales pour caractériser l'aspect moyen de Ces décollements. Les études de Lawrence Dénoter [33], mettent en évidence, pour des géométries de tuyère assez variées (tuyères bidimensionnelles, tuyères axisymétriques), de fortes dissymétries des évolutions de pression statique pariétale pour différents régimes de fonctionnement (donc pour différentes pression initiales). L'auteur associe ces phénomènes à plusieurs modes de décollement (décollement stable et instable, décollement avec ou sans recollement..).

D'autres expériences (CNES LEACEA ,Nguyen et al Girard) effectuées pour des géométries de tuyères réelles alimentées en air, ont révélé deux types de structure de décollement en régime sudétendu: pour les faibles rapports de pression, la couche limite est affectée par un choc de recompression oblique et décollée, la réflexion du choc sur l'axe pouvant engendrer un choc droit centré sur l'axe (disque de Mach). L'évolution longitudinale de la pression de paroi augmente dans l'interaction pour atteindre la pression ambiante ; ce décollement est dit libre car, en aval de l'interaction, la zone de recirculation ne s'accroche pas. Pour des rapports de pression supérieurs à une valeur critique, la pression de paroi augmente au passage du choc, puis dépasse drastiquement la pression aval dans la zone de recirculation, pour converger en sortie vers la pression ambiante. Ce décollement, qui s'accompagne par d'autres phénomènes complexes (formation d'un choc interne, détentes, reformation de chocs de recompression, développement d'une couche de mélange), est dit restreint, car la couche limite recolle en paroi du divergent. Il a été montré expérimentalement par Nguyen et al [11].

Le passage d'un de ces régimes à l'autre provoque des fluctuations de pression sévères pour le bon fonctionnement de la tuyère, car directement corrélées à l'apparition de charges latérales significatives. Cependant, ces études ne concernent pas l'identification de l'origine des instationnarités, dont les basses fréquences mises en jeu ont plusieurs ordres de grandeurs qui sont inférieures à celles mises en jeu dans l'écoulement amont, comme la turbulence de la couche initiale par exemple. Pour mieux prédire ces phénomènes physiques, des études sont menées en soufflerie, dans des configurations plus simples qui concernent les interactions onde de choc/couche limite bidimensionnelles.

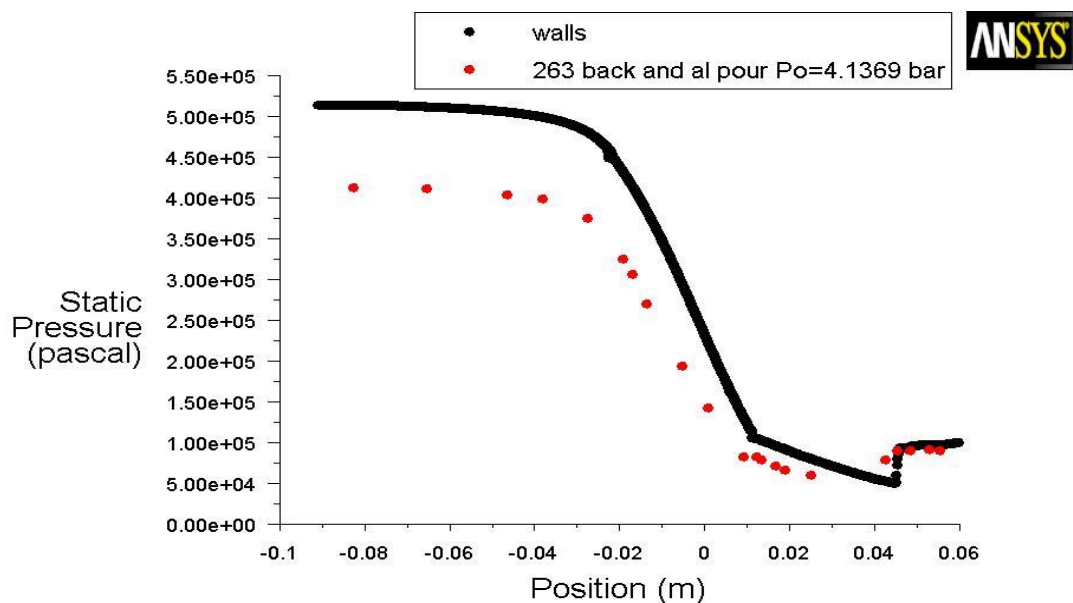
4.3.1 Influence de la pression initiale

On constate d'après les figures (4-2,21) que si l'on augmente la pression initiale de $P_0=4.14$ bar à $P_0=10.34$ bar de la tuyère, pour un même angle de divergence, le point de décollement est déplacé vers la sortie de la tuyère. Le disque de Mach commence alors à disparaître, la poussée est donc à son apogée. Dans les zones de décollement, on observe une recirculation de l'air dans le cas où $P_0=4.14$ bar.

4.4 Validation des résultats:

Dans le but de valider notre simulation numérique du phénomène, on compare les résultats expérimentaux de la référence [12,14] et les résultats numériques qu'on a

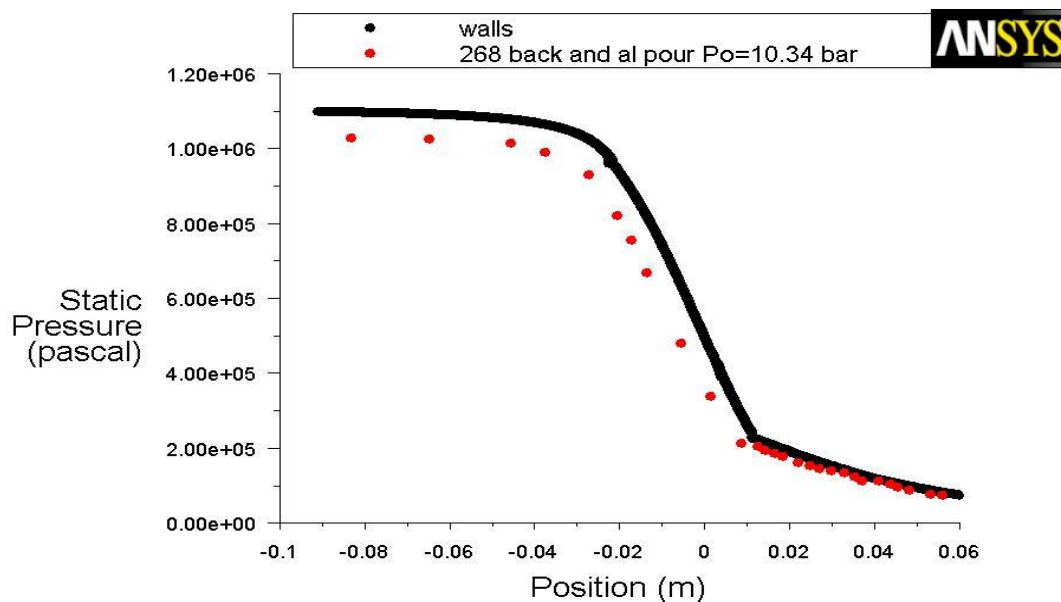
obtenus, on constate que ce qu'on a obtenu est en bonne concordance avec ceux de la référence [12,14], voir les figures (4-36a, 36b).



Static Pressure

Jan 05, 2018
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

(36a).



Static Pressure

Jan 06, 2018
ANSYS FLUENT 12.0 (axi, dbns imp, sstk)

(36b).

Figures (4-36a, 36b) Variations de la pression à la paroi pour profil de la tuyère (30°-15°).

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives:

Cette thèse de doctorat constitue une initiation à l'analyse physique et à la simulation numérique d'un écoulement non réactif d'un fluide compressible (air) dans les tuyères propulsives supersoniques.

Le code de calcul utilisé ANSYS pour la résolution du système d'équations non linéaires décrivant l'écoulement de fluide ce code de calcul utilise la technique des volumes finis, un raffinement de maillage a été appliqué pour bien capter efficacement la taille des tourbillons sur les parois des de tuyère étudiée, le modèle de turbulence utilisé est celui à deux équations de transport, de type ($k-w$) Shear- Stress-Transport de Menter.

Grâce à de nombreuses itérations, des solutions convergentes sont obtenus. Les résultats ont permis d'analyser l'effet de ce paramètre sur les champs de nombre de Mach et de vitesse, de température et de pression... etc.

Il se produit parfois dans l'écoulement isentropique des discontinuités très minces et très irréversibles, ces discontinuités sont des ondes de choc (choc droit au col de la tuyère et choc oblique dans la rampe de compression).

L'apparition du disque de Mach (choc fort) lors de l'écoulement conduit généralement à une perte de poussée ou à une dégradation de la stabilité, il occupe progressivement la totalité de la section de la tuyère et se déverse à la sortie.

Lorsque la pression initiale $P_0 < P_c$ (pression critique), et le demi-angle de la divergence est égal à 15° , on constate d'ailleurs que la position du décollement est affectée par cette variation et il se déplace vers le col de la tuyère. Par contre, si l'on augmente la pression initiale telle que $P_0 > P_c$, alors le décollement se déplace vers la lèvre de la tuyère jusqu'à ce qu'il disparaisse, ce qui est absolument souhaitable.

Donc, La zone décollée pour la tuyère étudiée est clairement illustrée par l'apparition de vitesses négatives dans la couche limite, c'est dire un écoulement dans le sens opposé de l'écoulement principal. , surtout lorsque la pression initiale est inférieure à la pression critique, ce qui pourrait être à l'origine de la dégradation des performances aérodynamiques de la tuyère, et provoque de ce fait des nuisances sonores et aussi les vibrations des structures.

Perspectives :

Pour les perspectives, Cette étude pourrait être étendue aux écoulements réactifs ou on peut étudier l'effet de la réaction et la variation de la température et de la fluctuation de la pression sur le décollement de l'écoulement et sur le matériau.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [01] Woutijn J. Baars and Charles E. Tinney and Joseph H. Ruf, Andrew M. Brown, and David M. McDaniels, Wall Pressure Unsteadiness and Side Loads in Overexpanded Rocket Nozzles, AIAA JOURNAL, Vol. 50, No. 1, January 2012, pp.01-30.
- [02] Ruf, J. H., McDaniels, D. M., and Brown, A. M., Nozzle Side Load Testing and Analysis at Marshall Space Flight Center, 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA, Paper 2009-4856, Aug. 2009.
- [03] Brian W. Donald Woutijn J. Baars and Charles E. Tinney, Acoustic characterization of subscale rocket nozzles, NASA Marshall Space Flight Center, Huntsville, AL, 35812, USA, AIAA 2012-0544, 2012.
- [04] Michel. Illig, CNES Research and Technologies Program Overview, CNES, ISIS 2008.
- [05] Ten-See Wang, Transient Three-Dimensional Startup Side Load Analysis of a Regeneratively Cooled Nozzle, Shock Waves, Vol. 19, No. 3, July 2009, pp. 251–264.
- [06] Meinhard Schobeiri, Turbomachinery flow and dynamic performance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.
- [07] A. Bourgoing, Instationnarité et dissymétrie d'un écoulement supersonique décollé dans une tuyère plane. Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, ONERA 2002.
- [08] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Vulcain_\(moteur-fusée\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Vulcain_(moteur-fusée)) . consulté le 10 juin 2018.
- [09] Guillaume Lehnasch, 2005, Contribution à l'étude numérique des jets supersoniques sous-détendus, thèse de doctorat université de Poitier.
- [10] Abdallah Hadjadj, 1997, analyse physique et simulation numérique des écoulements compressibles application aux tuyères propulseurs. Thèse de doctorat de l'université de Rouen.
- [11] Mahfoudi El-Ahcene, 2014, contribution à l'étude des profils de tuyères en écoulements supersoniques visqueux par la méthode des volumes finis, Thèse de doctorat de l'université de Constantine 1.
- [12] Souici Mohamed, Aouissi Mokhtar , Benchatti Toufik ,2017, Numerical simulation of the compressible flow in convergent-divergent nozzle, Vol. 35, No. 3, September 2017, pp. 673-677 ,DOI: 10.18280/ijht.350328.

- [13] Said abboudi, Jing DENG, Michel IMBERT, 2007, INFLUENCE DES CONDITIONS THERMIQUES PARIÉTALES SUR LE COMPORTEMENT D'UN ÉCOULEMENT DE FLUIDE COMPRESSIBLE DANS UNE TUYÈRE, publié dans "JITH 2007, Albi : France.
- [14] L. H. Back, P. F. Massier, H. L Gier. , 1964, Convective Heat Transfer in a Convergent-Divergent Nozzle, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.7, pp. 549-568.
- [15] E. Lutum, J. von Wolfersdorf, K. Semmler, J. Dittmar, B. Weigand. ,2001, An experimental investigation of film cooling on a convex surface subjected to favourable pressure gradient flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, pp. 44 939-951.
- [16] V. P. Lebedev, V. V. Lemanov, V. I. Terekhov. , 2006, Film-Cooling Efficiency in a Laval Nozzle Under Conditions of High Free Stream Turbulence, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128, pp.571-579.
- [17] L. H. Back, P. F. Massier, H. L Gier. , 1965, Comparison of Measured and Predicted Flows through Conical Supersonic Nozzles, with Emphasis on the Transonic Region, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 9, Sept, pp. 1606-1614.
- [18] R. F. Cuffel, L. H. Back and P. F. Massier. , 1968, Transonic Flow field in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature, December, *AIAA paper* Vo17, No.7, pp.1364-1366.
- [19] Anne-Sophie Mouronval, 2004, Etude numérique des phénomènes aéroélastiques en aérodynamique supersonique. Applications aux tuyères propulsives, Thèse de doctorat, INSA de Rouen.
- [20] Giulio Lorenzini, Onorio Saro.,2016,Analysis of Water Droplet Evaporation through a theoretical numerical model, *International Journal of Heat and Technology*, (Special Issue 2, October),pp. S189 - S198, DOI: <https://doi.org/10.18280/ijht34S201>
- [21] Xun Wang, Xiaorong Wang, Jinxin Zhang and Jigang Wang ,2015, NOZZLE DIAMETER INFLUENCE ON SPRAYCHARACTERISTICS IN A CONSTANT VOLUME COMBUSTION CHAMBER, *International Journal of Heat and Technology*, Vol.2 No.3, 2015, pp.9-12 <http://dx.doi.org/10.18280/mmep.020303>.
- [22] Perrot Y, 2006, Etude mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Thèse de doctorat de Institut National des Sciences Appliquées de Rouen France.
- [23] SAMUEL DUBOS, 2005, simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents supersoniques. Thèse de doctorat de L'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen, France.

- [24] Chapman D. R, Huehn D. M. and Larson H. K, Investigation of separated flow in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition, Technical Report NACA TR 1356, NACA, 1958.
- [25] Summerfield M, Foster C, and Swan W, Flow separation in over expanded supersonic exhaust nozzles. jet propulsion, Vol. 24, No. 9, page 319-321, 1954.
- [26] Zukoski E. E, Turbulent boundary-layer separation in front of a forward-facing step , AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, Oct. 1967.
- [27] Schmucker R, Status of flow separation prediction in liquid propellant rocket nozzles , NASA TM X-64890, Nov. 1973.
- [28] Back L.H., Massier P.F., Gier H.L. , 1964 , Convective heat transfer in a convergent-divergent nozzle, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.7, pp. 549-68.
- [29] Lutum E., von Wolfersdorf J., Semmler K., Dittmar J., Weigand B. ,2001, An experimental investigation of film cooling on a convex surface subjected to favourable pressure gradient flow, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.44, pp. 939-951.
- [30] Lebedev V.P., Lemanov V.V., Terekhov V.I. , 2006, Film-cooling efficiency in a Laval nozzle under conditions of high free stream turbulence, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 571-579.
- [31] Lorenzini G., Saro O. ,2016, Analysis of water droplet evaporation through a theoretical numerical model, *International Journal of Heat and Technology*, Vol. 34, Spe. 2, pp. S189 - S198. DOI: 10.18280/ijht34S201.
- [32] Alexis Bourgoing, 2002, instationnarité et dissymétrie d'un écoulement supersonique décolle dans une tuyère plan. Thèse de doctorat de l'université paris 6 spécialité mécanique des fluides.
- [33] Philippe REIJASSE, 2005, Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé. Thèse de doctorat de l'université paris VI, France.
- [34] Delery J, Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps, Technical report, Cours E.N.S.A.E, Janvier 1998.
- [35] Mouronval A. S, 2004, Etude numérique des phénomènes aéroélectriques en aérodynamique supersonique, Application aux tuyères propulsives , Thèse de doctorat de l'INSA de Rouen.
- [36] Olivier vermores, 2003, Etude numérique et modélisation de la modulation de la turbulence dans un écoulement de la nappe charge en particules. Thèse de doctorat.

- [37] Nguyen, A. T., 2003, Décollement instationnaire et charges latérales dans les tuyères propulsives. Thèse de Doctorat de l'université de Poitiers.
- [38] Cyril Pilinski, 2002, étude numérique du décollement en tuyères supersoniques, Thèse de doctorat de l'université de l'INSA Rouen, France.
- [39] Sylvie Benzoni-Gavag, 2004, livre en analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles.
- [40] Girard, S., 1999, Etude des charges latérales dans une tuyère supersonique surdétendue. Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers.
- [41] Nguyen, A. T., Girard, S., Alziary de Roquefort, T. Etude de l'écoulement dans une tuyère à contour parabolique en régime surdétendu. Rapport LEA sous commande ONERAN°6983/DA/CDES, juillet 2001.
- [42] Alain Drotz, 2007, cours Mécanique des fluides compressibles. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Laboratoire d'ingénierie numérique Lausanne.
- [43] Abderrahmane nebbache, 2009, Modélisation d'écoulement en tuyère plane et bidimensionnelle, 19^{ème} Congrès Français de Mécanique Marseille, France.
- [44] Abderrahmane nebbache, 2007, Aérodynamique d'un écoulement en tuyère idéale tronquée, 18^{ème} Congrès Français de Mécanique Grenoble, France.
- [45] GOUIDMI Hamza, 2015, Étude De L'interaction Choc/Choc Des Écoulements Dans Une Tuyère, Thèse de doctorat de Université Frères Mentouri CNE, Alger.
- [46] P. Gnemmi et al, 2010, Mesures par PIV dans un écoulement de soufflerie à choc à Mach 8.0, Conférence: 12^{ème} Congrès Francophone de Techniques Laser, At Vandœuvre-lès-Nancy, France.
- [47] Alziary de Roquefort, T. Unsteadiness and side loads in over-expanded supersonic nozzles. Proceedings of the European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, 15-18 Oct., Capua, Italy, ESA SP-487, pp. 93-107, 2001.
- [48] F. Archambeau, ENSTA 2004-2005, livre en introduction à la turbulence. Les équations de Navier-Stokes, la notion de moyenne statistique, et traiter la turbulence en écoulement monophasique.
- [49] Girard, S., Deniau, H., Nguyen, A. T., Alziary de Roquefort, T. Etude de l'écoulement dans une tuyère propulsive à contour parabolique en régime surdétendu, Note LEA, 2000.

- [50] M.Y. BOUZID et R. DIZENE, Modélisation des écoulements dans les tuyères étude comparative de modèles de turbulence, Congrès Français de Mécanique 2005.
- [51] Yohann Perrot, étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Thèse de doctorat, INSA de Rouen 2006.
- [52] Philippe REIJASSE, 2005, Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé. Thèse de doctorat de l'université paris VI.
- [53] Dr. Alain Drotz, Marc A. Habisreutinger, 2006, cours mécanique des fluides compressible (écoulement quasi-monodimensionnel stationnaire et idéal).
- [54] R. W. Mac Cormack, 1969, The effect of viscosity in hypervelocity impact catering. » AIAA hypervelocity impact conference 1969, AIAA, pp69-354.
- [55] Nguyen, A. T., Deniau, H., Girard, S., Alziary de Roquefort, T., Unsteadiness of flow separation in an over-expanded supersonic nozzle. IUTAM symposium on Unsteady separated Flows, April 8-12, Toulouse, France, 2002.
- [56] Nebbache A. and Pilinski C., Pulsatory phenomenon in à thrust optimized contour nozzle. Journal of Aerospace Science and Technology, (10), 295–308, 2006.
- [57] Renan Hilbert, 2017, modélisation numérique en mécanique des fluides. prise en main ansys/fluent.
- [58] Alziary de Roquefort, T. Low frequency fluctuations in separated turbulent compressible flows. Proceedings of the AFI Symposium, 17 Dec. 2002, Tohoku University, Japan, 2002.

Annexes

Annexe A



Numerical simulation of the compressible flow in convergent-divergent nozzle

Souici Mohamed^{1*}, Aouissi Mokhtar¹, Benchatti Toufik²

¹ Laboratoire de Mécanique, Université de Laghouat, Laghouat 03000, Algeria

² Ecole normale supérieure de Laghouat, Laghouat 03000, Algeria

Email: m.souici@lagh-univ.dz

ABSTRACT

This work concerns the numerical simulation of a non-reactive turbulent flow of a compressible fluid (air) in a convergent divergent nozzle. The numerical study of this turbulent nozzle flow has been carried out by solving the Reynolds averaged Navier-Stokes equations. We have also used the two transport equations of type (k, ω) SST (Shear-Stress-Transport) of Menter to model the turbulence. The finite volume method is used to solve the system of equations. McCormack scheme has been used. The present results are compared with experimental results of the literature. In order to study the pressure influence on the flow characteristics such as speed pressure and temperature ... etc. and particularly delamination phenomenon. These results are represented by field's contours and variable flow profiles of the axis of the nozzle and near the wall.

Keywords: CFD, Converging-diverging Nozzle, Compressible Flow 2D, Finite Volume, Shock Wave, Supersonic, Turbulence Flow.

1. INTRODUCTION

The problems of fluid dynamics are often difficult to solve because the system of equations governing the phenomenon which is strongly nonlinear system. It is difficult to find exact solutions. However, CFD (Computational Fluid Dynamics) technology especially the calculation applied to fluid dynamics change was successful; these successes are due to the close interaction between theory, numerical simulation and experimentation in fluid dynamics. On the one hand, experience is essential to test the hypotheses and the results that emerge from the theory [1]; on the other hand, the theory is needed to explain the results. Numerical simulation is independent of experience, it is necessary for the validation of experimental results.

The results are presented for nozzle flow subsonic - supersonic. Various numerical tests presented in this study relate to the influence of the variation of the geometry of the nozzle such that the angle of divergence as well as the effect of the variation of the input of the characteristic quantities of the pressure flows.

2. TURBULENCE MODELLING

As part of the fluid mechanics treatment of turbulence, the use of Reynolds decomposition applied to the solutions of the Navies-Stokes equation simplifies the problem by eliminating the fluctuations of periods and short amplitudes.

The numerical results obtained detected the different phenomena observed experimentally.

Using the finite volume method Mac Cormack is used for solving mathematical model equations.

The turbulence model used is that of the two additional transport equations k-ω SST Menter used to describe turbulence as summarized below:

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{(\mu + \sigma_k \mu_t) \partial k}{\partial x_k} \right] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\rho \omega}{Dt} = & \frac{\gamma}{v_t} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{(\mu + \sigma_k \mu_t) \partial \omega}{\partial x_k} \right] \\ & + \frac{2\rho(1-F_1)\sigma_\omega^2}{\dot{u}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

The left hand side of the Eqs. (1) and (2) is the Lagrangian derivative $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ and the turbulent stress tensor σ_{ij} is given by:

$$\tau_{ij} = \mu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3)$$

The function F_1 is designed to blend the model coefficients of the original k-ω model in boundary layer zones with the

transformed k - ω model in free shear layer and free stream zones. This function is expressed in term of local variables as:

$$F_1 = \tanh \left(\min \left(\max \left(\left[\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y'} \frac{500\nu}{y^2\omega} \right], \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CDk\omega y^2} \right) \right) \right) \quad (4)$$

where $CDk\omega$ is a cross diffusion term added in Eq. (4) According to Bradshaw's [8] assumption the eddy viscosity is defined in the following way:

$$\mu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, |\Omega|)} F_2 \quad (5)$$

where F_2 is a function that is one for the boundary-layer flows and zero for the free shear layers With:

$$|\Omega| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$$

$$F_2 = \tanh \left(ar g_2 \right)$$

$$ar g_2 = \max \left[\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y'} \frac{500\nu}{y^2\omega} \right]$$

2.1 Reliability condition in turbulence models

The two-equation turbulence models are based on the Boussinesq assumptions where the Reynolds stresses is expressed as a linear function of the mean strain tensor:

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \frac{2C_\mu \rho k^2}{\varepsilon} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{ii} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho^* \delta_{ij} \quad (6)$$

where C_μ as shown by V. P. Lebedev and al. [3] these equations can give negative values of the normal stress if S_{ij} is too large. Bradshaw [8] has noticed that in two-dimensional boundary layers submitted to a strong pressure gradient the shear stress was approximately proportional to the turbulent kinetic energy with:

$$-\overline{uv} \approx \sqrt{C_\mu k} \quad (7)$$

These two remarks led to introduction of weakly non-linear turbulence models in which the C_μ factor is allowed to vary according to:

$$C_\mu = \min \left(0.09, \frac{1}{A_0 + A_s (S^2 + A_\Omega \Omega^2)^{1/2}} \right) \quad (8)$$

With:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{\omega \beta^*} \sqrt{2 S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} S_{kk}^2} \\ S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega = \frac{1}{\omega \beta^*} \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \quad (9)$$

And $A_0 = 0, A_s = 2, A_\Omega = 0$ in this case the Bradshaw [8] coefficient (0.31) is substituted by $C_\mu^{1/2}$ in the formulation of the eddy viscosity.

3. NUMERICAL METHOD

The Navier-Stokes energy turbulence model equations are solved on a computational domain of variables ζ and η (transformed coordinates of the physical domain), by the use of finite volumes predictor-corrector. The new system of equations is solved by using MacCormack's explicit-implicit scheme [4]. This algorithm is second-order accurate in space and time. The basic discretization for the convective fluxes is modified to account for the physical properties of information propagation, as done initially by R. F. Cuffel, L. H. Back, and P. F. Massier [5]. The flux splitting is made second order accurate, but in shock regions where it is lowered to first order. The viscous terms are cantered and the axisymmetric source terms are integrated at the Centre of each control volume in both the ζ and η directional sweeps. To reach a steady-state solution with a minimum number of iterations, the explicit discretization is complemented with an implicit numerical [7] approximation which is free from stability conditions.

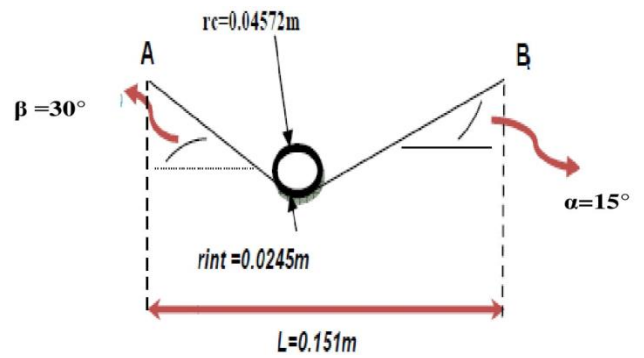


Figure 1. Nozzle geometry

4. VALIDATION

The present model is compared with the results due to Back and al. [4]. As shown in Figures 2a and 2b, static stagnation pressure ratio is in good agreement between the two works.

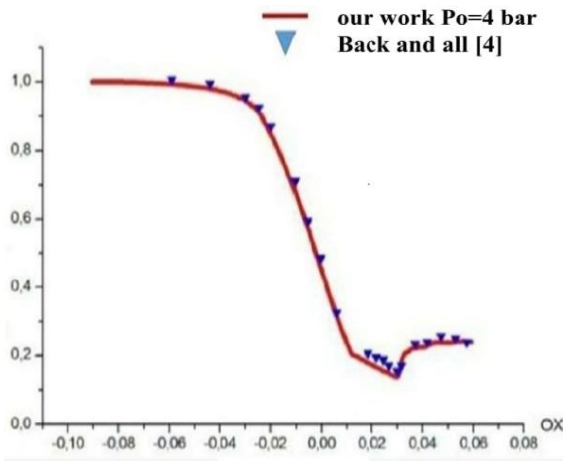


Figure 2a. Ratio of the pressure comparison between our works And that of Back and al. [4]

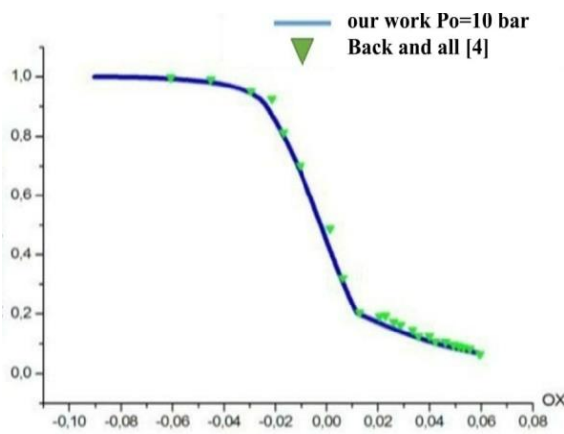


Figure 2b. Ratio of the pressure comparison between our works and that of Back and al. [4]

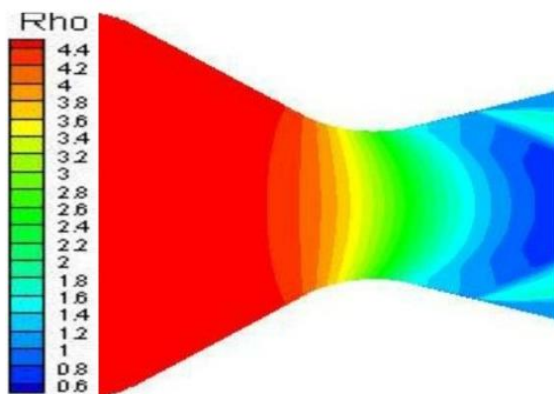


Figure 3. Contours of density (kg / m^3) ($P_o=4 \text{ bar}$)

Figure 3 shows the density profile (color change) that takes two different paths; the first surface from the entrance of the nozzle to its neck, the density in this part is almost constant at its maximum value. The second surface that begins just after the neck of the nozzle, the density undergoes a small increase and then continues to decrease until the exit of the nozzle.

The pressure drop inside the nozzle is shown schematically in Figures 4a and 4b. qualitatively this profile follows almost the same form of density profile.

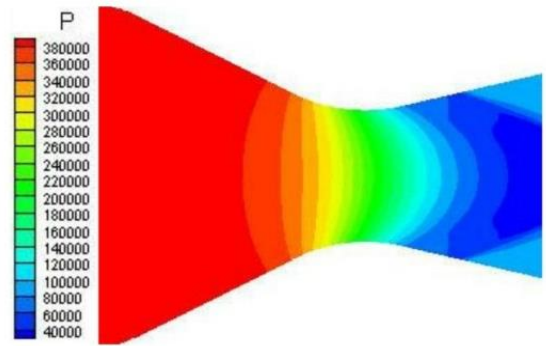


Figure 4a. Contours of Static Pressure (pa)

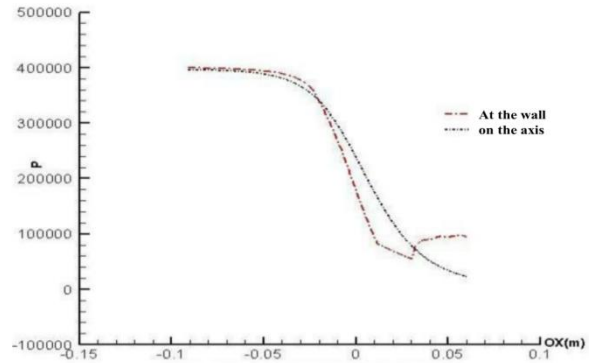


Figure 4b. Evolution of static pressure center and cell wall ($P_o=4 \text{ bar}$)

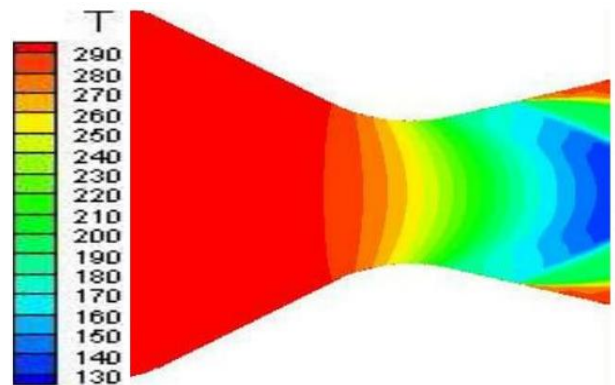


Figure 5a. Contours of temperature (K)

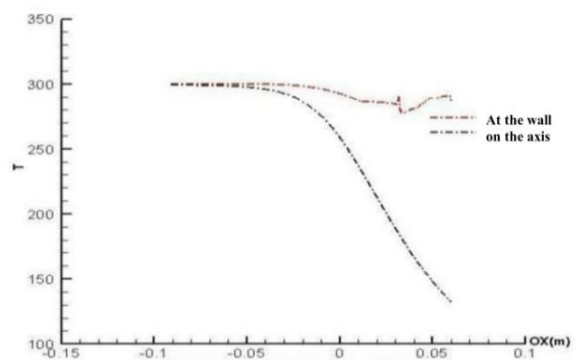


Figure 5b. Evolution of temperature center and cell wall (K) ($P_o=4 \text{ bar}$)

The temperature distribution and its evolution are shown respectively in Figs. 5a and 5b, the temperature in the middle of the nozzle is subject to a homogeneous and continuous descent until the exit.

The wall is slightly reduced with a small increase in different inputs before exiting the nozzle (shock wave), on the other hand the proportion of fixed wall distribution along the nozzle due to the friction between flow and walls.

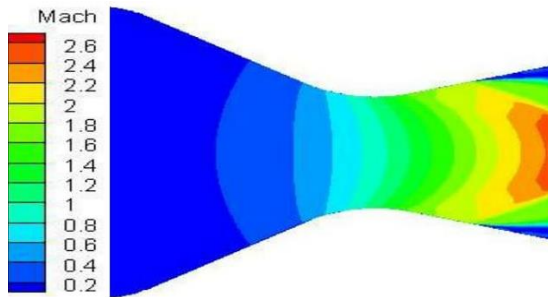


Figure 6a. Contours of Mach number

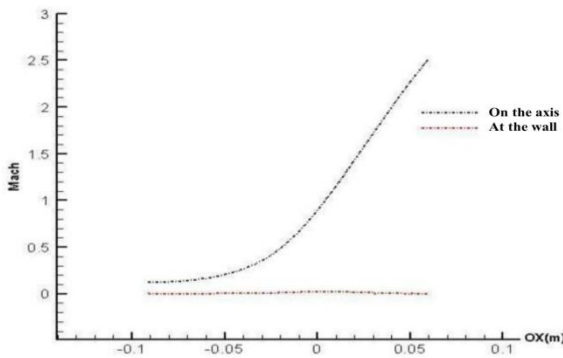


Figure 6b. Evolution of Mach number center and cell wall (Po=4 bar)

The evolution of the Mach number on the centre and the wall of the nozzle shown in Figures 6a and 6b respectively, we observe that the regime at the inlet of the nozzle remains almost constant or invariable up to axis of the nozzle. We can say that the regime is subsonic ($Ma < 1$). We can neglect the air compressibility for Mach numbers less than 0.3, because the value of the Mach number is strictly less than unity, then there is a sharp increase in the vicinity of the neck of the nozzle exactly between the first point of tangency at the convergence and the first point of tangency in the divergent. In this zone the regime becomes transonic ($0.94 < Ma < 1.2$), because there is a small decrease on the centre of the nozzle. At the entrance of the diverging zone, the value of Mach number inside the nozzle continues to increase until the exit of the nozzle in this zone, the regime is hypersonic ($Ma > 5$). The same observations for the evolution of the Mach number except in parietal disturbance in the vicinity of the neck due to friction between the fluid and the wall. The convergent-divergent profile of the nozzle accelerates the gas from subsonic speed to supersonic speed that causes the displacement.

5. CONCLUSION

This computational result examined the effects of several

parameters on the dynamic and thermal characteristics of flow through a cooled convergent-divergent nozzle. The computational results indicated the following:

For an initial pressure, P_0 , inferior to the critical pressure, P_c , the delamination position is affected by this pressure difference and moves the nozzle throat. On the other hand, if the initial pressure is greater than the critical pressure, the release moves the lip of the nozzle until its disappearance which is desirable. Therefore, the delamination, which is an undesirable, phenomenon, appears in some flows, particularly when the initial pressure is below to the critical pressure. This could be causes the degradation of nozzle aerodynamic performances and efficiency and also causes noise and structure vibrations. So, in order to avoid these disadvantages, it is important to increase the initial pressure and make an optimal choice of the nozzle outlet angle.

REFERENCES

- [1] Back L.H., Massier P.F., Gier H.L. (1964). Convective heat transfer in a convergent-divergent nozzle, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 7, pp. 549-68.
- [2] Lutum E., von Wolfersdorf J., Semmler K., Dittmar J., Weigand B. (2001). An experimental investigation of film cooling on a convex surface subjected to favourable pressure gradient flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, pp. 939-951.
- [3] Lebedev V.P., Lemanov V.V., Terekhov V.I. (2006). Film-cooling efficiency in a Laval nozzle under conditions of high free stream turbulence, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 571-579.
- [4] Back L.H., Massier P.F., Gier H.L. (1965). Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on the transonic region, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 9, pp. 1606-1614.
- [5] Cuffel R.F., Back L.H., Massier P.F. (1968). Transonic flow field in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature, December, *AIAA paper*, Vol. 17, No. 7, pp. 1364-1366.
- [6] Souici M. (2012). Étude d'un écoulement compressible dans une Tuyère convergente divergente, Laghouat university.
- [7] Lorenzini G., Saro O. (2016). Analysis of water droplet evaporation through a theoretical numerical model, *International Journal of Heat and Technology*, Vol. 34, Spe. 2, pp. S189 - S198. DOI: 10.18280/ijht34S201
- [8] Perrot Y. (2006). Etude mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen France

NOMENCLATURE

k	turbulent kinetic energy
ω	specific turbulent dissipation rate
μ	dynamic viscosity
μ_t	turbulent viscosity
ρ	density
Ω	scalar measure of the vortices tensor
Ω_{ij}	vortices tensor

γ specific heat ratio
 a_1 brdshow constant
 r radius, radial coordinate, recovery factor
 x axial coordinate
 T Temperature
 Ma Mach number
 P Pressure
 Pr_t turbulent Prandtl number
 U_i mean velocities
 u_i fluctuating velocities
 h heat transfer coefficient
 e free stream condition

Pr Prandtl number
 F_1, F_2 auxiliary functions in turbulence model
 t Time

Subscripts

0 nozzle entrance condition
 th throat position
 sep separation position
 w parameters on the wall surface
 aw adiabatic wall

Annexe B

NS

Technical Report No. 32-654

**Comparisons of Experimental with Predicted
Wall Static-Pressure Distributions
in Conical Supersonic Nozzles**

L. H. Back

P. F. Massier

H. L. Gier

OTS PRICE

XEROX \$ 1.00 FS
MICROFILM \$.50 MF

FACILITY FORM 602

N 65 11402

(ACCESSION NUMBER)

23 (PAGES)

CR-59577 (NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)

(THRU)

1 (CODE)

12 (CATEGORY)

**JET PROPULSION LABORATORY
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY
PASADENA, CALIFORNIA**

October 15, 1964

II. INSTRUMENTATION

Figure 1 is the flow and instrumentation diagram of the system to which the nozzles were attached. Stagnation pressure was measured just upstream of the approach section, the length of which could be adjusted to specified values. Changes in length were made to vary the nozzle-inlet boundary-layer thickness. These turbulent boundary-layer thicknesses were estimated from measurements described in Ref. 1. The approach section was cooled at the higher stagnation temperature of 1500°R. Stagnation temperature was determined by averaging the readings of two shielded thermocouples placed 0.25 in. upstream of the nozzle inlet. These two thermocouples, located 1 in. from the centerline, were spaced 180 deg apart circumferentially and generally read within 2% of each other. The air mass flow rate was measured with an orifice, and for the hot-flow tests, a rotometer was used to measure the mass flow rate of methanol. The accuracy of the total mass flow rate is estimated to be 1% at stagnation pressures above about 100 psia. At lower stagnation pressures, the readings are less accurate.

For the 30-15- and 45-15-deg nozzles shown in Figs. 2 and 4, the wall static-pressure taps were 0.040- and 0.020-in. diameter, respectively. The hole depth-to-diameter ratio was about 8 for the 30-15-deg nozzle and essentially infinity for the 45-15-deg nozzle. For the noz-

zles shown in Fig. 3, the tap diameter was 0.020 in. and the hole depth-to-diameter ratio was 4. These holes were as sharp-edged as they could be made by drilling and then smoothing the burrs with emery cloth. The axial location of each tap was known to 0.002 in., and the taps were spaced circumferentially and axially along each nozzle wall. The static pressures were measured either with mercury manometers or, at the higher pressures, with Heise gages which had 0.25-psia marked increments. The accuracy of the readings is dictated by the difference between the static and stagnation pressures and thus depends on location in the nozzle and on the stagnation pressure. The largest estimated error would be in the nozzle-inlet region at the lowest stagnation pressures, where an error between the actual static and stagnation pressures could have amounted to about 5%. However, in terms of the static-to-stagnation pressure ratio p/p_t , the error would be less than 0.1%. This error would be smaller yet through the throat and divergent regions, as well as at higher stagnation pressures. Considerably larger differences are found with different size taps, as discussed in Section V.

For hot-flow cooled-wall operation, wall temperatures were determined from thermocouples embedded in the wall of the 30-15-deg nozzle and from calorimetric wall heat-flux measurements with the 45-15-deg nozzle.

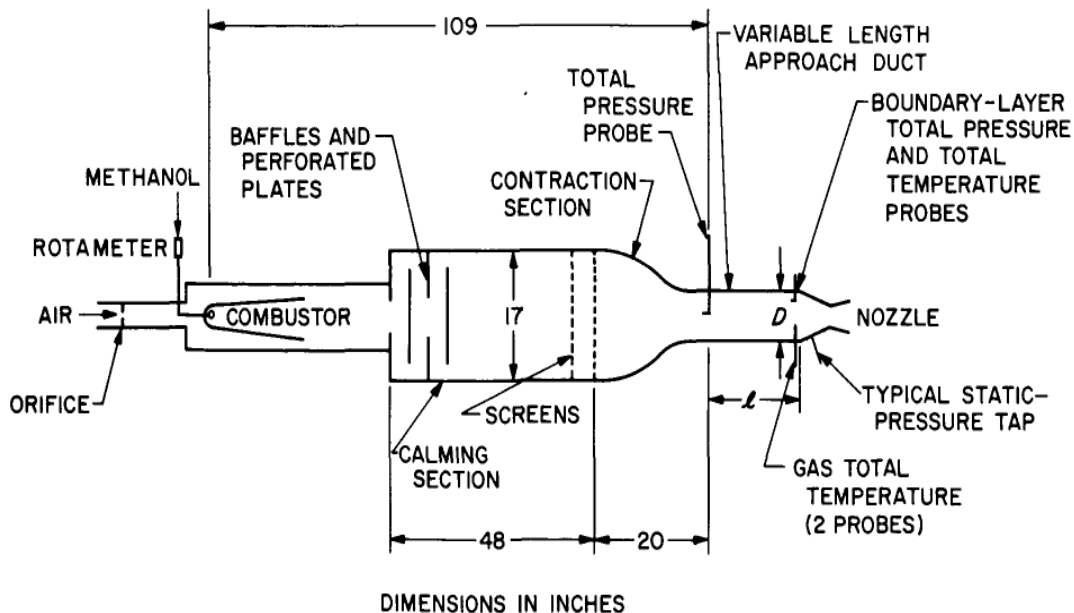


Fig. 1. Flow and instrumentation diagram

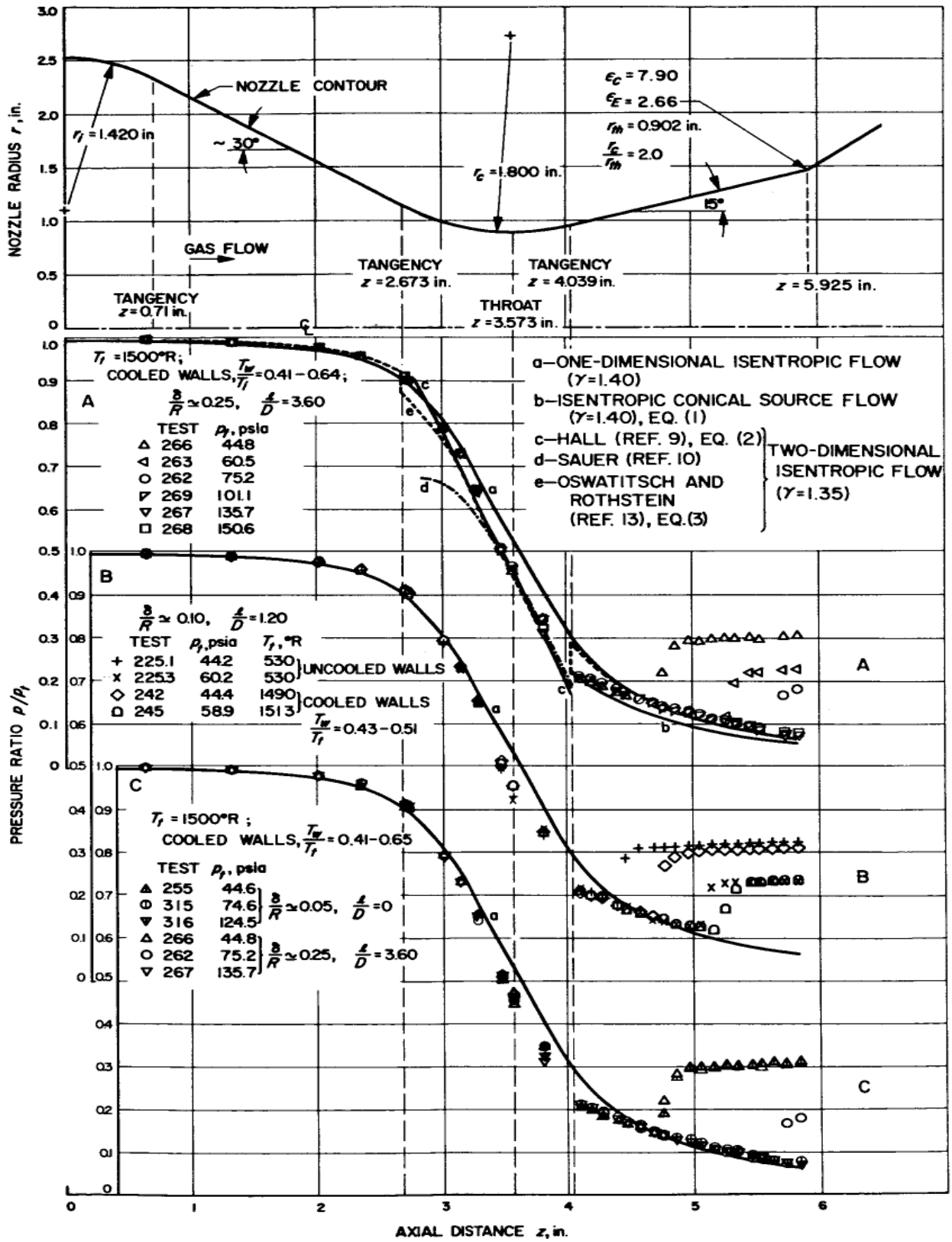


Fig. 2. Static-to-stagnation pressure ratios along the 30-15-deg nozzle

Annexe C

En utilisant le logiciel **Matlab** pour déterminer le profil de la Tuyère (30° - 15°).

Le programme:

```
%-----  
%  
%   Programme : Profile de la tuyère convergente-divergente (~ $30^\circ$ - $15^\circ$ )  
%  
%-----  
|  
%               Initialisation de la mémoire  
%-----  
clear;  
clc;  
hold on;  
format long  
axis equal  
%-----  
%               les Donnees  
%-----  
L=0.15113;  
r0=0.036068;  
rint =0.024541114387822;  
Y0=0.06450584;  
X1=0 ;  
X2=0.1511300;  
rc=0.04572;  
Dx=L/250;  
alpha=30.002258799;  
beta=15;  
Xcol=0.09113139;  
%-----  
%               Courbe 1 : Arc A-B  
%-----  
XA =-Xcol;  
YA=Y0;  
XB =r0*sind(alpha)-Xcol;  
YB =-(Y0-r0)-r0*cosd(alpha);  
XAB =XA:Dx:XB;  
YAB = -(Y0-r0)-(r0^2-(XAB+Xcol).^2).^0.5;  
YB1 = -(Y0-r0)-(r0^2-(XB+Xcol).^2).^0.5 ;  
plot(XAB,-YAB,'-kD');  
%-----  
%-----Courbe 2 : le segment B-C-----  
%-----  
XC=-rc*sind(alpha);  
B=YB- XB*tand(alpha);  
XBC = XB:Dx:XC;  
YBC = XBC*tand(alpha)+B;  
YB2 = XB*tand(alpha)+B;  
YC1 = XC*tand(alpha)+B;  
plot(XBC,-YBC,'-bD')  
%-----  
%-----Courbe 3 : l'arc C-D-----  
%-----  
XD=rc*sind(beta);  
YD =-(rint+rc)+rc*cosd(beta);  
XCD =XC:Dx:XD;  
YCD = -(rint+rc)+(rc^2-((XCD).^2)).^0.5;  
YC2 = -(rint+rc)+(rc^2-((XC).^2)).^0.5;
```

```

YD1 = -(rint+rc)+(rc^2-((XD).^2)).^0.5;
plot(XCD,-YCD, '-gD')
%-----
%-----la courbe 4: le segment E-F-----
%-----
Xf =L-Xcol;
XDE = XD:Dx:Xf;
YDE = -.022928287419473-tand(beta)*XDE;
YD2 = -.022928287419473-tand(beta)*XD;
plot(XDE,-YDE, '-rD')
%-----
%-----
%-----
XPT =[XAB XBC XCD XDE];
YPT =[YAB YBC YCD YDE];
ZPT =[0*YAB 0*YBC 0*YCD 0*YDE];
TXY = [XPT; YPT;ZPT]'
diffpoint1=(YB1-YB2)
diffpoint2=(YC1-YC2)
diffpoint3=(YD2-YD1)
axis ([-0.1 .1 -.08 .08]);
title('Profile de la tuyère');
xlabel('longueur de la tuyère x');
ylabel('diamètre de la tuyère y');
grid on;
%-----
%-----
%-----

```

L'excusions du programme donne la figure suivante:

