

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique.
Filière : Mathématique.
Option : Analyse Mathématique.

PAR :
Ikram Djouadi

THEME

LES OPÉRATEURS FORTEMENT P-SOMMANTS.

Devant le jury composé de :

Amar Belacel	Maître de conférence A	Président
Abdelaziz Rahmoune	Maître de conférence B	Examineur
Amar Bougoutaia	Maître de conférence B	Encadreur

Année Universitaire 2019/2020

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie mon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés et Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Dr. Amar Bougoutaia pour avoir accepté de m'encadrer dans cette étude.

Mes remerciements iront également aux membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail de recherche. A tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin , par un geste, une parole ou un conseil, je leur dis merci. Sans oublier tous nos enseignants qui nous ont assurés des études de haut niveau et qui nous permis d'acquérir des connaissances.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste mémoire

Dédicaces

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette thèse de mastre
à :*

À Mon très cher Père mohamed : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années

À Ma tendre Mère Reguia : Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

À mes adorables grands-mères : Maima Sakina et Maima Mahdjouba

À mes chers frères : Bachir , Takieddine ,Djamel , Soufiane et Mansour.

À ma chère tante : Reghioua

À mes sœurs : Amina , Dounia , Soukaina, Fatna , Merieme, Nour

À mes très chère amis : Houria , kholoud , maroua , fatiha, rania , nada

.

À tous les membres de ma promotion.

À tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

À tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Résumé :

Dans ce travail, j'ai examiné certaines des propriétés des opérateurs linéaires fortement p -sommants entre les espaces de Banach , puis j'ai suivi les étapes suivantes :

Dans le premier chapitre, quelques définitions, la présentation de propriétés et notations .

Et dans le deuxième chapitre, j'ai étudié la classe des opérateurs p -sommant aussi j'ai exposé brièvement ses propriétés .

Le troisième chapitre qui est une partie principale du travail, où j'ai connu les linéaires fortement p -sommants .

Tout en justifiant leurs propriétés avec théorème de domination et théorème de factorisation de ces opérateurs.

Abstract :

In this work, I have examined some properties of linear operators strongly p -summing between Banach spaces, then I followed the following steps :

In the first chapter, some definitions, the presentation of properties and notations

In the second chapter I studied the class of p -summing operators also I briefly exposed its properties.

The third chapter which is a main part of the work where I knew the strongly p -summing linear.

While justifying their properties with the domination theorem and the factorization theorem and these operators .

Table des matières

Introduction	2
1 PRÉLIMINAIRES	4
1.1 Introduction	4
1.2 Espaces vectoriels, topologiques et métriques	4
1.3 Espaces normés et espaces de Hilbert	6
1.4 Formules et Inégalités	9
1.5 Topologie faible et faible-*	10
1.6 Opérateurs Linéaires	11
1.7 Théorèmes fondamentaux	11
2 Les Opérateurs p-sommants	15
2.1 Définition et propriétés	15
2.2 Exemples	21
2.3 Caractérisations des opérateurs p -sommants	22
3 Les opérateurs fortement p-sommants	25
3.1 Définitions et propriétés	25
3.2 Relation entre $\mathcal{D}_p(X, Y)$ et $\pi_p(X, Y)$	27
3.3 Caractérisations des opérateurs fortement p -sommants	29
3.4 Quelques propriétés pour les espaces de Hilbert	32
3.4.1 Caractérisations sur les espaces des produits scalaires	32
Bibliographie	36

Introduction générale

Nous nous arrêterons au cadre de ce mémoire sur l'étude de quelques éléments de la théorie des opérateurs p -sommants et les opérateurs fortement p -sommants.

Historiquement, Les opérateurs p -sommant ($1 \leq p < \infty$) ont été introduit, pour la première fois par le célèbre mathématicien Grothendieck.

En 1966, le mathématicien allemand Pietsch était le premier qui a étudié les opérateurs p -sommants ($1 < p < \infty$) .

Ensuite, grâce aux mathématiciens Pelczynski et Lindenstrauss et d'autres, la théorie a gagné une attention particulière dans la théorie des espaces de Banach et l'analyse fonctionnelle.

Et plus précisément de ce travail **Les opérateurs fortement p -sommants**. Ils ont été traité par Cohen. On donnera le théorème de domination de Pietch concernant cette classe et on compare la notation des opérateurs fortement p -sommants et les opérateurs p -sommants. On donnera un théorème dû à Bu [12], qui est une généralisation d'un résultat de Cohen [11] Notre travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on a rappelé les outils nécessaires qu'on aura besoin aux chapitres qui suivent (espaces de Banach, espaces de Hilbert, topologie faible et les théorèmes de Hahn-Banach. . .).

Dans le deuxième chapitre, on a donné la définition des opérateurs p -sommants , leurs propriétés fondamentales et le théorème important de Pietsch sur la factorisation ,ainsi que trois exemples illustrant ces opérateurs.

Dans le troisième chapitre, ainsi on a donné la définition des opérateurs fortement p -sommants ,leurs Définitions et propriétés avec Relation entre $\mathcal{D}_p(X, Y)$ et $\pi_p(X, Y)$, Caractérisations des opérateurs fortement psommants. et Quelques propriétés pour les espaces de Hilbert.

Notations

Notation	Signification
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$	Corps des scalaires
E, F, G	Espaces de Banach
$L(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires de E dans F
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires et bornés (continus)
E^*	Dual topologique de l'espace E
$B_E = \{x \in E; \ x\ \leq 1\}$	Boule unité de E
$B_{E^*} = \{x \in E^*; \ x\ \leq 1\}$	Boule unité de E^*
$\langle x, x^* \rangle$	Crochet de dualité entre E et E^*
$\pi_p(E, F)$	L'espaces des opérateurs p-sommants
$\mathcal{D}(E, F)$	L'espaces des opérateurs fortement p-sommants
p^*	Le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$)

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner les notions et les outils que nous aurons utiliser dans ce mémoire. Dans les deux premières sections de ce chapitre on définit les espaces vectoriels, les espaces topologiques, les espaces métriques, les espaces normés ainsi que les espaces de Banach qui vont jouer un rôle fondamentale dans toute la suite et les espaces de Hilbert. Un autre outil puissant qu'on aura besoin c'est la topologie faible et *faible* $*$ qui sera l'objet de la quatrième section, enfin la dernière section va exposer des théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs linéaires.

1.2 Espaces vectoriels, topologiques et métriques

Définition 1.1. Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une première loi entre ses éléments, dite loi interne

$$+ : E \times E \rightarrow E$$

qui vérifie :

$\forall x, y \in E$	$(x + y) \in E$	stabilité
$\forall x, y \in E$	$x + y = y + x$	commutativité
$\forall x, y, z \in E$	$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$	associativité
$\exists e \in E, \forall x \in E$	$x + e = e + x = x$	élément neutre
$\forall x \in E, \exists x' \in E$	$x + x' = x' + x = \varnothing$	élément symétrique

Une seconde loi sur E est définie entre ses éléments et des nombres d'un corps $\mathbb{K}$, dite loi externe

$$* : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

qui vérifie :

$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$(\alpha * x) \in E$	stabilité
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$\alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$	associativité
$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$	distributivité de $*$ sur $+$
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$	distributivité de $+$ sur $*$
$\exists 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}, \forall x \in E$	$1_{\mathbb{K}} * x = x$	élément unié

Le triplet $(E, +, *)$ s'appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, les éléments de E s'appellent des vecteurs et on appelle scalaires ceux de $\mathbb{K}$

Définition 1.2. Un sous ensemble F d'un espace vectoriel $(E, +, *)$ s'appelle sous espace vectoriel et on le note $(F, +, *)$, si il vérifie :

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F \quad (x + y) \in F$ (stable pour +)
3. $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha * x \in F$ (stable pour *)

Exemples 1.1. 1. $(\mathbb{R}, +, .)$ la droite numérique muni de l'addition et de la multiplication habituelle présente un espace vectoriel.

2. Soit E un espace vectoriel, et soit l'ensemble

$$\{f : E \rightarrow \mathbb{K}\}$$

On définit l'addition et la multiplication sur cet ensemble par :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble de toutes ces applications forme un espace vectoriel, on le note par $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$

Définition 1.3. Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une topologie τ qui est une famille de sous-ensembles de E qui satisfont les conditions suivantes :

1. $\emptyset, E \in \tau$
2. $\forall O_1, O_2, \dots, O_n \in \tau$ on a :

$$\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau \quad (\text{Intersection finie})$$

3. $\forall O_1, O_2, \dots, O_n, \dots \in \tau$ on a :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \in \tau \quad (\text{réunion infinie ou finie})$$

On appelle le couple (E, τ) espace topologique, les éléments de τ sont appelés des ouverts.

Exemples 1.2. 1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$, on considère la topologie

$$\tau = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

(E, τ) est un espace topologique

2. La droite réelle $\mathbb{R}$ muni de la topologie de tous les intervalles ouverts constitue un espace topologique.

Parmi les espaces topologiques particuliers, on distingue les espaces métriques et les espaces normés.

Définition 1.4. On appelle métrique ou distance toute fonction d'un espace $E \times E$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et on la note ρ .

$$\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y, z \in E$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; (*symétrie*)
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; (Inégalité triangulaire).

Le couple (E, ρ) s'appelle espace métrique.

Exemples 1.3. 1. $(\mathbb{R}, \rho)$, avec $\rho(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.

2. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ on introduit la métrique ou la distance entre $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par :

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Définition 1.5. [2, p.47] On dit qu'un espace métrique E est séparable si il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E

1.3 Espaces normés et espaces de Hilbert

Définition 1.6. Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle norme sur E et on la note $\|\cdot\|$ toute application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle espace vectoriel normé.

Exemples 1.4. 1. Tout espace métrique est un espace normé, où la norme est définie par :

$$\|x - y\| = \rho(x, y)$$

2. On peut définir sur l'espace réel $\mathbb{R}^n$ les normes suivantes. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

(a)

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|;$$

(b)

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

(c)

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

3. . Soit E un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de E et on le note par E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de toutes les formes linéaires continues définies sur E . E^* est un espace normé, et on définit la norme de $u \in E^*$ par l'une des formules équivalentes suivantes : [10]

(a)

$$\|u\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|}$$

(b)

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)|$$

(c)

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$$

(d)

$$\|u\| = \inf\{K > 0, \quad |u(x)| \leq K\|x\|\}$$

On introduit par la suite un sous ensemble particulier et important des espaces vectoriels normés, c'est les espaces de Banach.

Définition 1.7. . Une suite $(x_n)_n$ dans un espace normé E est de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i, j > N_0 \quad \|x_i - x_j\|_E \leq \epsilon$$

Définition 1.8. Un espace vectoriel normé E est dit espace de Banach, si il est complet. C'est-à-dire si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de E est convergente dans E

Exemples 1.5.

1. La droite réelle constitue un espace de Banach.
2. Soit E un espace normé. Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. En particulier, E^* l'espace dual de E est un espace de Banach.

Dans ce stade on introduit la notion d'espace réflexif [2, p.39].

Soit E^{**} le bidual de E , l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur E^* , et soit l'injection canonique suivante :

$$J_E : E \rightarrow E^{**} \tag{1.1}$$

qui à tout $x \in E$ associe $J_E(x)$ telle que

$$\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in E^*$$

cette application est une isométrie

$$\|J_E(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E, \quad \forall x \in E$$

On dit que l'espace de Banach E est réflexif si

$$J_E(E) = E^{**} \quad (j_E \text{ est bijective})$$

3. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ un nombre réel, les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ formés des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

est un espace de Banach qu'on le désigne par $l_p(\mathbb{R}^n)$ ou tout simplement l_p

4. Le sous espace de $\mathbb{R}^n$ formé des suites bornées muni de la norme

$$\|(x_n)_n\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $l_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ou tout simplement l_{∞} . On notera $c_0(\mathbb{R}^n)$ ou c_0 le sous espace fermé de l_{∞} des suites qui convergent vers zéro.

5. Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

6. Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ -mesurable. On définit suivant les valeurs du réel p les normes suivantes

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t))^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}, & p = +\infty \end{cases}$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalences, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ -mesurables telles que $\|f\|_p < +\infty$, Σ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue.

Définition 1.9. [3, p.39] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire, symétrique et définie positive. C'est-à-dire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

telle qu'en plus est linéaire par rapport aux deux variables, elle est :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle && \text{symétrique} \\ \forall x \in E \quad \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \forall x \in E \quad \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 && \text{définie positive} \end{aligned}$$

On dit que le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien si E est un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Si l'espace E est de dimension finie on appelle $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace Euclidien.

De même, si à la place du corps $\mathbb{R}$ on prend $\mathbb{C}$, on aboutit à des espaces préhilbertiens complexes.

La proposition suivante fait le lien entre les espaces préhilbertiens et les espaces normés.

Proposition 1.1. [3, p.39] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien ; alors l'expression

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définie une norme sur E . On dira que $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Définition 1.10. On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.

Exemples 1.6. 1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire Euclidien défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

on a :

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. Parmi les espaces l_p définient plus haut, seulement l'espace l_2 est de Hilbert, et on a

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_2$$

on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

3. L'espace $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ définie plus haut, constitué par les fonctions à carré intégrable muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in L_2(\mu) \quad \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$$

est l'un des plus important exemples d'espaces de Hilbert, la norme associée est

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{\Omega} f^2(x)d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.4 Formules et Inégalités

L'inégalité de Hölder soient

$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p > 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (1.3)$$

ou encore, pour toute fonction $f \in L_p(\mu), g \in L_{p^*}(\mu)$ on a :

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)|d\mu(t) \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(t)|^{p^*} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (1.4)$$

L'inégalité de Minkowski soient

$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p > 1$

on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou encore, pour toute fonction $f, g \in L_p(\mu)$ et $p > 1$ on a :

$$\left(\int_{\Omega} |f(t) + g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour la démonstration voir [12, p.46]

1.5 Topologie faible et faible-*

Soit (x_n) une suite de points d'un espace vectoriel normé E . Soit $f \in E^*$, il se peut arriver que $(f(x_n))$ converge cependant que (x_n) ne converge pas, d'où les deux définitions suivantes.[2, p.40]

On définit sur l'espace de Banach E , en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ notée ω qui est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur E .

Soit $(x_n)_n$ une suite de E , et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x si et seulement si

$$\langle x^*, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^*, x_n \rangle \quad \forall x^* \in E^*$$

De même, on définit sur l'espace de Banach E^* la topologie faible-*, pour chaque $x \in E$ on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

La topologie faible-* notée $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Soit $(x_n^*)_n$ une suite de E^* , et $x^* \in E^*$. On dit que $(x_n^*)_n$ converge *-faiblement vers x^* si et seulement si

$$\langle x^*, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^*, x \rangle \quad \forall x \in E$$

Exemples 1.7. [1, p.9-10] . On définit l'espace des suites faiblement p-sommables. On dit qu'une suite est faiblement p-sommable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle| < +\infty \quad \forall x^* \in E^*$$

L'espace des suites faiblement p-sommables noté par

$$l_{p,w}(E)$$

est un espace de Banach([7, p.32.33]), où la norme est définie par

$$\|(x_n)\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.5)$$

Dans le cas $p = \infty$

$$l_{\infty,w}(E) = l_{\infty}(E) \quad \text{où} \quad \|(x_n)\|_{l_{\infty,w}} = \|(x_n)\|_{\infty} \quad (1.6)$$

L'importance de la topologie *-faible est sans aucun doute contenue dans le théorème de Alaoglu-Banach-Bourbaki.

Théorème 1.1. (Alaoglu-Banach-Bourbaki.)

L'ensemble $B_{X^*} = \{ \varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1 \}$ est compacte pour la topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$

1.6 Opérateurs Linéaires

Soient E et F deux espaces normés.

Définition 1.11. L'application

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = u(x) \end{aligned}$$

s'appelle opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2)$$

D_u désigne le domaine de définition de l'opérateur u .

Par la suite, on va s'occuper aux opérateurs dit bornés.

Définition 1.12. Un opérateur u est borné, si il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Définition 1.13. Un opérateur u est continu en $x_0 \in E$, si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|x - x_0\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|u(x) - u(x_0)\|_F < \epsilon$$

Théorème 1.2. . L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné.

Pour plus de détails voir [12, p.215.216]

Définition 1.14. [12, p.223] Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné, on appelle opérateur adjoint de u et on le note par u^* l'application :

$$u^* : F^* \rightarrow E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \forall y^* \in F^* \quad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^*(y^*) \rangle$$

Théorème 1.3. [12, p.224] Si u est un opérateur borné, donc u^* l'est aussi et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \quad (1.7)$$

1.7 Théorèmes fondamentaux

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

Définition 1.15. Soit $x, y \in E$, on appelle segment joignant les deux points x, y l'ensemble de tous les éléments de la forme

$$\alpha x + \beta y; \quad \alpha, \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta = 1 :$$

Définition 1.16. Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe, si

$$\forall x, y \in M; \text{ le segment joignant ces deux points est inclu dans } M$$

Définition 1.17. Soit $A \subset E$, on appelle enveloppe convexe de l'ensemble A le plus petit convexe contenant A , et le note par $\text{conv}(A)$.

Théorème 1.4. (*Théorème de Hahn-Banach forme analytique*) . Soit

$$p : E \rightarrow \mathbb{R}$$

une application qui vérifie :

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x); \quad \forall x \in E \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0; \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y); \quad \forall x, y \in E \end{aligned}$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x); \quad \forall x \in G :$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g ,

$$g(x) = f(x); \quad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x); \quad \forall x \in E$$

Remarque 1.1. Concernant le dual topologique d'un espace normé, on peut introduire la norme moyennant le produit de dualité entre E et E^* de la manière suivante :

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle x, x^* \rangle|$$

Corollaire 1.1. [2, p.3] Soit G un sous espace vectoriel de E et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle|$$

Alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g telle que :

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*} \tag{1.8}$$

Démonstration. [2, p.3] posons $p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|$ On a

1. $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} p(x + y) &= \|g\|_{G^*} \|x + y\| \leq \|g\|_{G^*} (\|x\| + \|y\|) \\ &\leq p(x) + p(y) \end{aligned}$$

2. $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \|g\|_{G^*} \|\lambda x\| \leq \|g\|_{G^*} \lambda \|x\| \\ &\leq \lambda p(x) \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \|g\|_{G^*} &= \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle| \\ &= \sup_{x \in B_G} |g(x)| \\ &= \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{G^*}$$

ce qui vous dire

$$|g(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\|, \quad \forall x \in G - \{0\}$$

En appliquant le théorème de hahn banach (1.3) , on constate qu'il existe une forme linéaire f qui prolonge g , telle que

$$|f(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\| \quad \forall x \in E$$

donc

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{G^*} \quad (1.9)$$

Montrons l'autre sens de l'inégalité (1.8) On a

$$\|f\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*} \quad \text{car } G \subset E$$

Mais, et en vertu du prolongement on a :

$$\|f\|_{G^*} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \|g\|_{G^*}$$

donc

$$\|g\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*} \quad (1.10)$$

et d'après les formules (1.9) et (1.10), il résulte que

$$\|g\|_{G^*} = \|f\|_{E^*}$$

□

Corollaire 1.2. [2, p.3] Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E^*$, tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$$

Démonstration. [2, p.3] Soit $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Il est clair que $G \subset E$; l'application g est continue pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ car :

$$|g(tx_0) - g(t_0x_0)| = |t\|x_0\|^2 - t_0\|x_0\|^2| = |(t - t_0)\|x_0\|^2| \leq \epsilon$$

Il suffit de choisir

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|x_0\|}$$

D'autre part

$$\frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \frac{|t|\|x_0\|^2|}{|t|\|x_0\|} = \|x_0\| = \|g\|_{G^*}$$

donc, et d'après le corollaire précédent il existe $f_0 \in E^*$ tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$$

(pour la dernière égalité on pose $t = 1$)

□

Corollaire 1.3. [2, p.4] Pour tout $x \in E$ on a :

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle|$$

(le sup est atteint)

Démonstration. [2, p.4] On suppose que $x \neq 0$ donc pour toute $f \in B_{E^*}$ on a d'un part :

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$$

$$\sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

et d'autre part d'après le corollaire (1.2) il existe une application $f_0 \in E_*$ telle que

$$\|f_0\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x \rangle = \|x\|^2$$

Si on pose $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$, on remarque que $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$ □

Définition 1.18. Soit E un espace normé, on appelle hyperplan d'équation

$$[f = \alpha]$$

l'ensemble

$$H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$$

avec, f est une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition 1.19. Soit $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens

1. large si

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B$$

2. strict si

$$\exists \epsilon > 0 \quad f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B$$

Théorème 1.5. (Théorème de H-B première forme géométrique).

Soit E un espace normé et $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. Supposons que A est **ouvert**, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Notons qu'un hyperplan est fermé si et seulement si sa fonction f est continue.

Chapitre 2

Les Opérateurs p -sommants

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1. Supposons que $1 \leq p < \infty$ et $u \in L(E, F)$. On dit que l'opérateur u est **absolument p -sommant**, si il existe une constante $C > 0$, et pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ de E on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in E^*} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.1)$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\pi_p(E, F)$ et on note par $\pi_p(u)$ la borne inférieure des constantes C vérifiant (2.1)

Remarque 2.1. 1. En vertu des formules (1.2) et (1.5), la formule (2.1) peut encore s'écrire :

$$\| (u(x_k))_{k=1}^n \|_p \leq C \| (x_k)_{k=1}^n \|_{p,w} \quad (2.2)$$

Donc on peut tirer que les opérateurs p -sommants transforment des suites faiblement p -sommantes vers des suites fortement p -sommantes.

2. Dans le cas $p = \infty$, la formule (2,2) s'écrit :

$$\| (u(x_k))_{k=1}^n \|_{\infty} \leq C \| (x_k)_{k=1}^n \|_{\infty,w}$$

et en vertu de (1,6) on aura :

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \|u(x_k)\| \leq C \sup_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$$

On conclut que si $p = 1$ l'ensemble $\pi_{\infty}(E, F)$ sera identique à $\mathcal{L}(E, F)$.

Enonçons maintenant une proposition importante qui fait la liaison entre l'espace $\pi_p(E, F)$ et l'espace $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 2.1. Soit

$$u : E \rightarrow F \quad \text{un opérateur linéaire :}$$

Si u est p -sommant. Alors, u est continu.

Démonstration. Il suffit de prendre le cas $n = 1$ dans (2.1). Soient

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad x \in E$$

donc

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|$$

en vertu du Corollaire (1.3), on constate que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \|x\|$$

qui exprime la continuité de u sur E . Avec l'inégalité intéressante

$$\|u\| \leq \pi_p(u) \quad (2.3)$$

□

Proposition 2.2. *L'ensemble $\pi_p(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\pi_p(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$

1. $\pi_p(E, F)$ est non vide, car pour $u = 0$ (l'opérateur nul) on a :

$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall C > 0$$

2. Soient u et v deux opérateurs p -sommants, où il existe C_1 telle que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et il existe C_2 telle que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|v(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si on applique l'inégalité de Minkowski, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(u+v)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n \|v(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

par conséquent

$$u + v \in \pi_p(E, F)$$

3. Soient u un opérateur p -sommant et α un réel quelconque, donc il existe C telle que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(\alpha u)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= |\alpha| \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\alpha| C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par conséquent

$$(\alpha u) \in \pi_p(E, F)$$

□

Proposition 2.3. π_p est une norme sur l'espace $\pi_p(E, F)$.

Démonstration. Pour tous u et v deux opérateurs p -sommants et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite d'éléments de E , on a :

1. $\pi_p(u) \geq 0$ (puisque les constantes C sont positives) :
2. si $\pi_p(u) = 0$ donc

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

c'est-à-dire u est nul .

— Si l'opérateur nul vérifie (2.1). Alors,

$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle| \quad \forall x \in E$$

il est clair que la borne inférieure des nombres C est 0, donc

$$\pi_p(0) = 0$$

3. Soit α un réel quelconque, on va montrer que $\pi_p(\alpha u) = |\alpha| \pi_p(u)$ Comme $u \in \pi_p(E, F)$, on a d'après l'inégalité (2.5)

$$\begin{aligned} \pi_p(\alpha u) &= \inf(|\alpha|C) \\ &= |\alpha| \inf C \\ &= |\alpha| \pi_p(u) \end{aligned}$$

4. Soient u et v deux opérateurs p -sommants, on a d'après l'inégalité (2.4) :

$$\pi_p(u + v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v)$$

□

Proposition 2.4. $(\pi_p(E, F), \pi_p)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\pi_p(E, F)$, alors elle converge dans le même espace.

On a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_0 \quad \forall i > j \geq j_0, \quad \pi_p(u_j - u_i) \leq \epsilon$$

donc, pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ d'éléments de E on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(u_j)(x_k) - (u_i)(x_k)\|^p \right) \leq \epsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)$$

Si $i \rightarrow +\infty$

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(u_j)(x_k) - (u)(x_k)\|^p \right) \leq \epsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right) \quad (2.6)$$

Et puisque $\pi_p(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$, on trouve $u_j \rightarrow u$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, et d'après l'inégalité (2.6)

$$u_j \rightarrow u \quad \text{dans} \quad \pi_p(E, F)$$

□

Théorème 2.1. (Théorème d'Inclusion). si $1 \leq p < q < \infty$ alors ,

$$\pi_p(E, F) \subset \pi_q(E; F)$$

en plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$$

Démonstration. [1, p.11] Soient

$$(x_k)_{k=1}^n \subset E \quad \text{et} \quad \lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}$$

donc

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^p = \lambda_k^p \|u(x_k)\|^p = \|u(x_k)\|^q$$

par suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.7)$$

si $u \in \pi_p(E, F)$, on aura

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

moyennant la formule (2.7), on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit d'autre part $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$ Comme

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1$$

on peut appliquer l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q} \frac{1}{p}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^{p \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q} \frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^n (\|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1})^{\frac{pq}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{q,w} \end{aligned}$$

multipliant les deux membres par :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u) \|u\|_{q,w} \quad (2.8)$$

donc

$$u \in \pi_p(E, F)$$

et d'après (2.8) on a

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$$

□

Théorème 2.2. (Théorème de Composition). *soit $1 \leq p < \infty$*

1. *si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \pi_p(F, G)$ alors,*

$$v \circ u \in \pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v) \|u\|.$$

2. *si $u \in \pi_p(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ alors,*

$$v \circ u \in \pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \|v\| \pi_p(u).$$

Démonstration. 1. Supposons que

$$v \in \pi_p(F, G) \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad (x_k)_{k=1}^n \subset E$$

on trouve

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(x_k), y^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, u^*(y^*) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(v) \|u^*\| \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \langle x_k, \frac{u^*(y^*)}{\|u^*\|} \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ (\text{la formule (1.7)}) \quad &\leq \pi_p(v) \|u\| \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Donc $v \circ u \in \pi_p(E, G)$ en plus

$$\pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v) \|u\|.$$

2. Supposons que $u \in \pi_p(E, F)$ et puisque $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|v\| \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|v\| \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

d'après ce qui précède, on tire que

$$v \circ u \in \pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(u) \|v\|.$$

□

En vertu du Théorème de Composition, on peut constater les deux propriétés importantes suivantes [7, p.37-38].

Soient E, E_0, F, F_0 des espaces de Banach.

Proposition 2.5. (*Propriété d'idéal*). *si*

$$u \in \mathcal{L}(F, F_0), \quad \text{et} \quad w \in \mathcal{L}(E_0, E)$$

alors

$$v \in \pi_p(E, F) \implies uvw \in \pi_p(E_0, F_0)$$

Proposition 2.6. (*Propriété d'injectivité*). *Si F un sous espace de F_0 et soit l'isométrie*

$$i : F \longrightarrow F_0$$

alors

$$u \in \pi_p(E, F) \iff iu \in \pi_p(E, F_0)$$

en plus

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u)$$

Démonstration. — Le premier sens est immédiatement tiré d'après la composition et on a :

$$\pi_p(iu) \leq \pi_p(u) \tag{2.9}$$

— Soit $iu \in \pi_p(E, F_0)$, donc pour toute suite $(x_k)_{k=1}^n \subset E$ on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(iu)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iu) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Mais, et comme

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(iu)(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iu) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

c'est-à-dire

$$u \in \pi_p(E, F)$$

en plus , on a :

$$\pi_p(u) \leq \pi_p(iu) \tag{2.10}$$

En vertu de (2.10) et (2.9) on trouve

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u)$$

□

2.2 Exemples

Illustrons les opérateurs p-sommants par des exemples. Soient la compact K et la fonctionnelle δ_k définit, pour tout $k \in K$, par :

$$\begin{aligned} \delta_k : C(K) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longrightarrow \langle \delta_k, f \rangle = f(k) \end{aligned}$$

On remarque que $\delta_k \in C(K)^*$.

Soient μ une mesure de probabilité sur K et $1 \leq p < \infty$.

1. [1, p.12] L'opérateur suivant constitue un exemple de base pour les opérateurs p-sommants.

Soit, pour toute fonction $\varphi \in L_p(K, \mu)$, l'opérateur de multiplication suivant :

$$\begin{aligned} M_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(K, \mu) \\ f &\longrightarrow M_\varphi(f) = f\varphi \end{aligned}$$

Cet opérateur est p-sommant, avec

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$$

En effet, soit $(f_k)_{k=1}^n \in C(K)$, on a

$$\begin{aligned} \|(M_\varphi(f_k))_{k=1}^n\|_p &= \left(\sum_{k=1}^n \|M_\varphi(f_k)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \|f_k \varphi\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \int_K |\varphi(t)|^p |f_k(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_K \sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_K \sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{t \in K} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K |\varphi(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \sup_{\delta(t) \in C(K)^*} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \|(f_k)_{k=1}^n\|_{p,w} \end{aligned}$$

Donc l'opérateur en question est p-sommant, et on a

$$\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p$$

mais, d'après l'inégalité (2.3), on a :

$$\pi_p(M_\varphi) \geq \|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_p$$

Par conséquent

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$$

2. [9, p.270] Comme cas particulier, l'opérateur

$$\begin{array}{ccc} J_p : & C(K) & \longrightarrow L_p(K, \mu) \\ & f & \longrightarrow J_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et de plus

$$\pi_p(J_p) = 1$$

En effet, il suffit de prendre $\varphi = 1$ dans l'exemple précédent.

3. L'opérateur d'inclusion suivant

$$\begin{array}{ccc} i_p : & L_\infty(K, \mu) & \longrightarrow L_p(K, \mu) \\ & f & \longrightarrow i_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et on a :

$$\pi_p(i_p) = 1$$

En effet, utilisant le fait que $L_\infty(\mu)$ peut regarder comme étant $C(K)$, voir [1, p.13]

2.3 Caractérisations des opérateurs p-sommants

Dans cette section, nous donnerons le théorème fondamental de factorisation de Pietsch pour les opérateurs p-sommants. Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur aux références [13, 8]

Théorème 2.3. *Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant et $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une probabilité de Radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que*

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

Inversement, s'il existe une probabilité de Radon λ sur $(B_{X^}, \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ telle que la formule citée au dessus est vérifiée, alors T est p-sommant et $\pi_p(T) \leq C$*

Remarque 2.2. La factorisation proprement dite.

L'inégalité (2.11) de Pietsch implique qu'il existe $\tilde{T}$ dans $B(S_p, Y)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ S & \xrightarrow{j/S} & S_p \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{j} & L_p(K, \lambda) \end{array}$$

avec $T = \tilde{T} \circ j/S \circ i$ et $\|\tilde{T}\| = \pi_p(T)$

Où

$$K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$$

$$C(K) = \{\text{des fonctions continues sur } K\},$$

$$i : X \rightarrow S, i(x) = \varphi_x \text{ qui est une isométrie injective ,}$$

$$S = \{\varphi_x, x \in X \text{ avec } \varphi_x(\xi) = \langle x, \xi \rangle\} \text{ qui est un sous espace fermé de } C(K) ,$$

$$j : C(K) \rightarrow L_p(K, \lambda) \text{ est l'injection naturelle, et } \pi_p(j) = 1(j/S \text{ est } j \text{ restreint à } S)$$

$$S_p = j(S)^{L_p(K, \lambda)}$$

Remarque 2.3. On peut déduire facilement le théorème d'inclusion, Théorème 2.1 en utilisant le théorème de Pietsch et l'inégalité de Hölder.

Corollaire 2.1. Si T est 2-sommant alors T se factorise par $L_\infty(K, \lambda)$ et $L_2(K, \lambda)$.

Démonstration. Reprenons le diagramme de la Remarque 2.2 pour $p = 2$. P est la pro-

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ S & \xrightarrow{j/S} & S_2 \\ \cap & & \cap \uparrow P \\ C(K) & \xrightarrow{j} & L_2(K, \lambda) \end{array}$$

jection de $L_2(K, \lambda)$ sur S_2 de norme ≤ 1

□

Le théorème classique suivant dû à Nachbin.

Théorème 2.4. Soient X_0 un sous espace fermé d'un espace de Banach X , $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $u : X_0 \rightarrow L_\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un opérateur linéaire continu. Alors, il existe $\tilde{u} : X \rightarrow L_\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ linéaire continu prolongeant $u(\tilde{u}|_{X_0} = u)$ et $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$

Proposition 2.7. Soit X_0 un sous espace d'un Banach X et $T \in \pi_2(X_0, Y)$. Alors il existe une extension de T , soit $\tilde{T} : X \rightarrow Y$, 2-sommant et $\pi_2(\tilde{T}) \leq \pi_2(T)$

Démonstration. D'après le Corollaire 2.1 T se factorise par $L_\infty(K, \lambda)$ et $L_2(K, \lambda)$

$$\begin{array}{ccc} X \supset X_0 & \xrightarrow{T} & Y \\ \tilde{i} \searrow i \downarrow & & \uparrow B \\ L_\infty(K, \lambda) & \xrightarrow{j} & L_2(K, \lambda) \end{array}$$

Par le Théorème 2.4 se prolonge en $\tilde{i} : X \rightarrow L_\infty(K, \lambda)$ avec $\|\tilde{i}\| \leq 1$ et $\|B\| \leq \pi_2(T)$.
On pose $\tilde{T} = B\tilde{j}\tilde{i}$ et on aura

$$\pi_2(\tilde{T}) \leq \|B\|\pi_2(j)\|\tilde{i}\| \leq \pi_2(T)$$

Ce qui termine la démonstration □

Théorème 2.5. [13, p.345]

Soient $1 \leq p < \infty$, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire (où X, Y sont des espace de Banach).

*T est p -sommant si et seulement si $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ est p -sommant de plus, on a $\pi_p(T) = \pi_p(T^{**})$*

Chapitre 3

Les opérateurs fortement p -sommants

3.1 Définitions et propriétés

On étudiera maintenant la classe d'opérateurs fortement p -sommants comme une caractérisation des conjugué d'opérateurs p^* -sommants.

Définition 3.1. Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ (X, Y sont des espaces de Banach arbitraires) est fortement p -sommant, $1 < p \leq \infty$ si et seulement si, il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$, et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\|(\langle T(x_i), y_i^* \rangle)\|_{l_1^n} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n} \quad (3.1)$$

Encore une fois la classe d'opérateurs fortement p -sommants de X dans Y , qui est notée par $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p(T) = \inf \{ C \text{ vérifiant l'inégalité (3.1)} \}$$

Théorème 3.1. Soit $1 < p \leq \infty$ et X, Y deux espaces de Banach

- (1) $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace normé
- (2) Si $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ alors T est continu et $\|T\| \leq d_p(T)$

Proposition 3.1. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $v : l_p^n \rightarrow Y^*$ un opérateur linéaire borné, l'opérateur T est fortement p -sommant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), v(e_i) \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \quad (3.2)$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Proposition 3.2. Soient $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $R \in \mathcal{B}(Y, Z)$ et $S \in \mathcal{B}(E, X)$

- (1) si T est fortement p -sommant, alors $R \circ T$ est fortement p -sommant et $d_p(R \circ T) \leq \|R\| d_p(T)$
- (2) Si T est fortement p -sommant, alors $T \circ S$ est fortement p -sommant et $d_p(T \circ S) \leq d_p(T) \|S\|$

Démonstration. (1) Soient $n \in \mathbb{N}$ $x_1, \dots, x_n \in X$ et $z_1^*, \dots, z_n^* \in Z^*$. Il suffit d'après (3.2) de montrer que

$$\sum_{i=1}^n |\langle RT(x_i), z_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\|$$

où $v : Z \rightarrow l_{p^*}^n$ tel que :

$$v(z) = \sum_{i=1}^n z_i^*(z) e_i$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle RT(x_i), z_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), R^*(z_i^*) \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \|w\| \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w(y) &= \sum_{i=1}^n \langle R^*(z_i^*), y \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle z_i^*, R(y) \rangle e_i \\ &= \|R(y)\| \sum_{i=1}^n \left\langle z_i^*, \frac{R(y)}{\|R(y)\|} \right\rangle e_i \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|R\| \sup_{x \in B_Z} \|(z_i^*(x))_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n}, \\ &\leq \|R\| \|v\| \end{aligned}$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n \in E$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle (T \circ S)(e_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle T(S(e_i)), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|S(e_i)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \quad (v(y) = \sum_{i=1}^n y_i^*(y) e_i) \\ &\leq d_p(T) \left(\|S\|^p \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \\ &\leq d_p(T) \|S\| \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que, $d_p(T \circ S) \leq d_p(T) \|S\|$ et ceci termine la démonstration. $\square$

3.2 Relation entre $\mathcal{D}_p(X, Y)$ et $\pi_p(X, Y)$

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs fortement p^* -sommants

Théorème 3.2. *soit X, Y deux espace de Banach. Alors,*

- (1) *Soit $1 \leq p < \infty$ L'opérateur T est p -sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est fortement p^* -sommant de Y^* dans X^* et $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$.*
- (2) *Soit $1 < p \leq \infty$. L'opérateur T est fortement p -sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est p -sommant de Y^* dans X^* et $d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*)$*

Démonstration. (1) Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $T \in \pi_p(X, Y)$ On va montrer que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*)$.

si $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ et $(x_i^{**} \subset X^{**}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T^*(y_i^*), x_i^{**} \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, T^{**}(x_i^{**}) \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|y_i^*\| \|T^{**}(x_i^{**})\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|T^{**}(x_i^{**})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Puisque T est p -sommant, il résulte que T^{**} est p -sommant, de plus $\pi_p(T) = \pi_p(T^{**})$. On trouve

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T^{**}(x_i^{**})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i^{**}, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.4)$$

En remplaçant l'inégalité (3.4) dans (3.3), on aura

$$\sum_{i=1}^n |\langle T^*(y_i^*), x_i^{**} \rangle| \leq \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} \|(x_i^{**}(\xi))\|_{l_p^n}$$

Ce qui implique que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(X^*, Y^*)$ et $d_{p^*}(T^*) \leq \pi_p(T)$.

Inversement. On suppose que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(X^*, Y^*)$, soit $x_1, \dots, x_n \in X$, et soit y_i^* une suite définie dans Y^* on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle T x_i, y_i^* \rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^n |\langle x_i, T^*(y_i^*) \rangle| \\ &\leq d_{p^*}(T^*) \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Puique $(l_p^n(X))^* = (l_{p^*}^n(X^*))$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n y_i^*(T x_i) \right| : y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*, \left(\sum_{i=1}^n \|y_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\}$$

Nous faisons entrer le supremum sur la boule unité sur $l_{p^*}^n(X^*)$ on trouve

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq d_{p^*}(T^*) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ce qui implique que T est p -sommant et $\pi_p(T) \leq d_{p^*}(T^*)$

(2) De la même façon que (1)

Le corollaire suivant est immédiat d'après les résultats de Pietsch . Pietsch a montré que les opérateurs p -sommants sont faiblement compacts et complètement continus (un opérateur T est complètement continu s'il transforme des suites faiblement convergentes aux suites fortement convergentes).

□

Corollaire 3.1. *Si $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$, alors T est faiblement compact et l'opérateur adjoint T^* est complètement continu.*

Corollaire 3.2. *D'après le Théorème (3.2), on a si $p_1 < p_2$ alors $\mathcal{D}_{p_2}(X, Y) \subset \mathcal{D}_{p_1}(X, Y)$*

Théorème 3.3. *Il existe des espaces de Banach tels que*

$$\pi_p(X, Y) \neq \mathcal{D}_{p^*}(X, Y), \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Démonstration. a) Soit $1 \leq p \leq 2$. Pietsch a montré que l'opérateur canonique $I : l_1 \rightarrow l_2$ est p -sommant ($I \in \pi_p(l_1, l_2)$) pour $1 \leq p < \infty$ mais l'opérateur adjoint $I^* : l_2 \rightarrow l_\infty$ n'est pas p -sommant ($I^* \notin \pi_p(l_2, l_\infty)$) pour, $1 \leq p \leq 2$ (voir [13, p.338]).

Donc d'après le Théorème (3.2) l'opérateur $I \notin \mathcal{D}_{p^*}(l_2, l_\infty)$ pour $2 \leq p^* \leq \infty$

De la même façon, l'opérateur $I^* \in \mathcal{D}_{p^*}(l_2, l_\infty)$ pour $2 \leq p^* \leq \infty$ mais $I^* \notin \pi_p(l_2, l_\infty)$ pour $1 \leq p \leq 2$

b) Maintenant, soit $2 \leq p \leq \infty$: Considérant l'opérateur $I_0 = IJ$ définit par :

$$\begin{array}{ccc} l_1 & \xrightarrow{I} & l_2 \\ & I_0 \searrow & \downarrow j \\ & & l_p \end{array}$$

où I, J sont des opérateurs canoniques. Puisque J est continu, nous concluons que I_0 est p -sommant pour tout $p \geq 2$. Mais l'opérateur adjoint $I_0^* : l_{p^*} \rightarrow l_\infty$ n'est pas p -sommant. En effet, si $x_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, il suit que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|I_0^*(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p}} = \infty$$

Bien que

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

Ce qui implique, I_0^* n'est pas p-sommant ; donc d'après le Théorème (3.2) ,
 $I_0 \notin \mathcal{D}_{p^*}(l_1, l_p)$.

De même façon, l'opérateur $I_0 \in \mathcal{D}_{p^*}(l_{p^*}, l_{\infty})$ mais $I_0^* \notin \pi_p(l_{p^*}, l_{\infty})$.

□

3.3 Caractérisations des opérateurs fortement p-sommants

On va maintenant présenter le théorème de domination concernant cette classe d'opérateurs.

Théorème 3.4. *Un opérateur $T \in B(X, Y)$ est fortement p-sommant, $1 \leq p \leq \infty$, si et seulement si, il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ et une constante positive C , telle que pour tout $x \in X$, on a*

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (3.5)$$

Démonstration. Premièrement on commence par montrer la réciproque. Soient $(x_i) \subset X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ D'après (3.5), on a

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|x_i\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. On aura donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq C \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right) \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_{Y^*}} \|y_i^*(y)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_{p^*}^n} \end{aligned}$$

Ce qui implique que $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ et $d_p(T) \leq C$

On démontre la première implication. On a, T est fortement p-sommant $\Leftrightarrow T^*$ est p^* -sommant et $d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*)$ (Théorème (3.2))

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle x, T^*(y^*) \rangle| \\ &\leq \|x\| \|T^*(y^*)\| \\ &\leq d_p(T) \|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Remarque 3.1. *On peut en déduire facilement le théorème d'inclusion 2.1 en utilisant le théorème de Pietsch et l'inégalité de Hölder.*

Maintenant on donnera les relations entre les opérateurs fortement psommants et les opérateurs psommants dans le cas des opérateurs des rangs finis

Lemme 3.1. [5]

Soient T un opérateur linéaire du rang fini. et $(x_i) \subset X$, $(y_i) \subset Y$

(1) Pour $1 \leq p < \infty$ on a $T \in \pi_p(X, Y)$ et $\pi_p(T) \leq \inf \left(\|(x_i)\|_{l_p(X)}, \|(y_i)\|_{l_{p^*}^w(Y)} \right)$

(2) Pour $1 < p \leq \infty$ on a $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ et $d_p(T) \leq \inf \left(\|(x_i)\|_{l_{p^*}^w(X)}, \|(y_i)\|_{l_p(Y)} \right)$

Lemme 3.2. .

Soit $1 \leq p \leq \infty$ on a

(1) Soit T un opérateur de l_p^n dans X . Alors $T \in \pi_{p^*}(l_p^n, X)$ et $T \in \mathcal{D}_p(l_p^n, X)$ avec

$$d_p(T) \leq \pi_{p^*}(T)$$

(2) Soit T un opérateur de X dans $l_{p^*}^n$. Alors $T \in \mathcal{D}_p(X, l_{p^*}^n)$ et $T \in \pi_{p^*}(X, l_{p^*}^n)$ avec

$$\pi_{p^*}(T) \leq d_p(T)$$

Démonstration. (1) Puisque T est du rang fini, on peut conclure du lemme précédent que $T \in \pi_{p^*}(l_p^n, X)$ et $T \in \mathcal{D}_p(l_p^n, X)$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de l_p^n par ce que T est p^* -sommant, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \pi_{p^*}(T) \sup_{\|x^*\|_{l_{p^*}^n} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(e_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \pi_{p^*}(T) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si $x_1, \dots, x_m \in l_p^n$ alors on peut écrire x_j sous la forme

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

par conséquent si $(y_j) \in l_{p^*}(X^*)$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |y_j^*(Tx_j)| &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ij} y_j^*(Te_i)| \\ (1 < p < \infty) &\leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{ij} |y_j^*(Te_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \sum_j \|x_j\|_{l_p^n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\|Te_i\|^{p^*}) \left(\sum_{j=1}^m \left| \frac{y_j^*(Te_i)}{\|T(e_i)\|} \right|^{p^*} \right) \right\}^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|(x_j)\|_{l_p(l_p^n)} \left(\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\|y\|_X \leq 1} \|y_j^*(y)\|_{l_{p^*}^w} \end{aligned}$$

Donc, d'après (3.6), on trouve

$$\sum_{j=1}^m |y_j^*(Tx_j)| \leq \pi_{p^*}(T) \cdot \|(x_j)\|_{l_p^n(l_p^n)} \cdot \sup_{\|y\|_X \leq 1} \|y_j^*(y)\|_{l_{p^*}^w}$$

Ce qui implique

$$T \in \mathcal{D}_p(l_p^n, X) \quad \text{et} \quad d_p(T) \leq \pi_{p^*}(T)$$

Pour $p = \infty$, trivial.

- (2) D'après le Théorème 3.2 $T \in \mathcal{D}_p(X, l_{p^*}^n)$ alors $T^* \in \pi_{p^*}(l_p^n, X^*)$ et d'après (1) $T^* \in \mathcal{D}_p(l_p^n, X^*)$.

Ce qui implique d'après le Théorème 3.2, $T \in \pi_{p^*}(X, l_{p^*}^n)$ et $\pi_{p^*}(T) \leq d_p(T)$.

□

3.4 Quelques propriétés pour les espaces de Hilbert

Pour montrer le théorème de Bu dans le cas des espaces de Hilbert, nous utilisons l'inégalité de Khintchine et aussi l'inégalité de Kahane. Pour cela quelques rappels concernant les variables aléatoires de Rademacher et ces inégalités nous seront nécessaires. Elles sont définies comme suit : pour chaque n dans $\mathbb{N}$, soit la fonction

$$\begin{aligned} r_n : [0, 1] &\longrightarrow \{-1, +1\} \\ t &\longrightarrow r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^n t \pi \end{aligned}$$

On utilise le langage probabilistique, on peut dire que $(r_n(t))_{n=1}^\infty$ est une suite des variables aléatoires indépendantes. On a aussi

$$\mu\{t : r_n(t) = +1\} = \mu\{t : r_n(t) = -1\} = \frac{1}{2}$$

μ est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous référons le lecteur à [8] pour plus de détails sur cette notion.

On désigne par $\operatorname{Rad}(X)$ l'espace de Banach des suites presque inconditionnel sommable dans X avec la norme

$$\|(x_n)_n\|_{\operatorname{Rad}(X)} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^\infty r_n(t) x_n \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 3.2. (Inégalité de Khintchine).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, il existe des constantes positives A_p, B_p telles que pour toute suite de scalaires (a_n) , on a

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 3.3. (Inégalité de Kahane).

Soit $1 < p, q < \infty$, soit X un espace de Banach et (x_n) une suite dans X , alors il existe une constante positive K_{pq} telle que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{pq} \left(\int_0^1 \|r_k(t) x_k\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

3.4.1 Caractérisations sur les espaces des produits scalaires

Soit X un espace linéaire normé. On dit que X est un espace de produit scalaire, s'il existe un produit scalaire défini dans X tel que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Théorème 3.5. [6] Soit X un espace normé. Alors X est un espace de produit scalaire si et seulement si, pour tout espace de Banach Y et tout opérateur 2-sommant $T : X \rightarrow Y$, le conjugué T^* est 2-sommant et

$$\pi_2(T^*) \leq \pi_2(T)$$

On peut donner le Théorème 3.5 comme suit.

Théorème 3.6. [5, Théorème 4.2.2]

Soit Y un espace linéaire normé, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) X est un espace de produit scalaire
- (2) Pour tout espace de Banach Y , $\pi_2(X, Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X, Y)$ et $d_2(T) \leq \pi_2(T)$
- (3) Pour tout espace de Banach Y , $\mathcal{D}_2(X, Y) \subseteq \pi_2(X, Y)$ et $\pi_2(T) \leq d_2(T)$

Nous comparons maintenant les notions d'opérateurs p -sommants et les opérateurs fortement p -sommants pour les espaces de Hilbert.

Bu a généralisé le Théorème (3.6, (2)) de [5, Théorème 4.2.2, (ii)] pour tout p et q ($1 < p, q < \infty$) ($\Pi_p(H, Y) \subset \mathcal{D}_q(H, Y)$) à la place de $p = q = 2$ cité dans le Théorème 3.6 où H est un espace de Hilbert quelconque et $\Pi_p(H, Y)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires p -sommants.

Théorème 3.7. [4]

Soit $1 < p, q < \infty$, et H un espace de Hilbert. Alors

$$\pi_p(H, Y) \subseteq \mathcal{D}_q(H, Y),$$

de plus

$$d_p(T) \leq \frac{1}{A_{q^*}} B_p \cdot K_{p,q^*} \cdot \pi_p(T).$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut remplacer H par l_2^m pour $m \in \mathbb{N}$. Car, si on prend $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset H$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\text{span } (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est isométrique à l_2^m . On utilise la projection $P : H \rightarrow l_2^m$ puis on retourne au cas initial. Soit $T \in \pi_p(H, Y)$ alors il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{l_2^n}$ telle que pour tout $x \in l_2^n$ on a

$$\|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^n}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.7)$$

Pour $x_1, \dots, x_n \in l_2^m$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$x_i = \sum_{k=1}^m x_{i,k} e_k, \quad i = 1, \dots, n$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \left\langle \sum_{k=1}^m x_{i,k} T(e_k), y_i^* \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^m x_{i,k} \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^m |x_{i,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^m |\langle T(e_k), y_i^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\|_{l_2^m} \left(\sum_{k=1}^m |\langle T(e_k), y_i^* \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Ce qui entraîne d'après l'inégalité de Khintchine que

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \left(\|x_i\|_{l_2^m} \cdot A_{q^*} \left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right\|_{L_{q^*}(D)} \right)$$

D'où encore par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq A_{q^*} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right\|_{l_{q^*}^n(L_{q^*}(D))}$$

D'après Fubini

$$\leq A_{q^*} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k \langle T(e_k), y_i^* \rangle \right\|_{L_{q^*}(D, l_{q^*}^n)}$$

et donc inférieure ou égale à

$$A_{q^*} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2^m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \|y_i^*\|_{l_{q^*}^{n,w}(Y^*)} \left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k T(e_k) \right\|_{L_{q^*}(D)} \quad (3.8)$$

Nous intéressons maintenant à la quantité

$$\left\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k T(e_k) \right\|_{L_{q^*}(D)}$$

D'après l'inégalité de Kahane, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k T(e_k) \right\|_{L_{q^*}(D)} &\leq K_{p,q^*} \left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k(t) T(e_k) \right\|_{L_p(D,Y)} \\ &\leq K_{p,q^*} \left\| \sum_{k=1}^m T \epsilon_k(t) e_k \right\|_{L_p(D,Y)} \end{aligned}$$

Mais d'après (3.7), on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^m T \epsilon_k(t) e_k \right\|_{L_p(D,Y)} &\leq \pi_p(T) \left(\int_D \int_{B_{l_2^m}} \left| \sum_{k=1}^m x^*(e_k) \epsilon_k(t) \right|^p d\mu(x^*) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \int_D \left| \sum_{k=1}^m x^*(e_k) \epsilon_k(t) \right|^p d\mu(x^*) dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Khintchine

$$\begin{aligned} &\leq B_p \cdot \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \left(\sum_{k=1}^m |x^*(e_k)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K_{p,q^*} \cdot B_p \cdot \pi_p(T) \left(\int_{B_{l_2^m}} \|x^*\|_{l_2^m}^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K_{p,q^*} \cdot B_p \cdot \pi_p(T) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\| \sum_{k=1}^m \epsilon_k T(e_k) \right\|_{L_{q^*}(D, Y)} \leq K_{p, q^*} \cdot B_p \cdot \pi_p(T) \quad (3.9)$$

En combinant (3.8) et (3.9) on a aura

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq A_{q^*} \cdot k_{p, q^*} \cdot B_p \cdot \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \| (y_i^*) \|_{l_{q^*}^{n, w}(Y^*)}$$

Ce qui implique que

$$T \in \mathcal{D}_q(H, Y)$$

et

$$d_p(T) \leq A_{q^*} \cdot B_p K_{p, q^*} \cdot \pi_p(T)$$

Ce qui acheve la démonstration. □

Bibliographie

- [1] S. A. Abdillah, *Extensions au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt*, Thèse de Doctorat, l'Université de Bordeaux 1. (26-11-2012).
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris. 1983.
- [3] E. Burrioni, *La topologie des espaces métriques*, Ellipses, Paris. 2005.
- [4] Q. Bu, *Some mapping properties of p -summing operators with hilbertian domain*, Contemporary Mathematics 328 (2003), 145-149.
- [5] J. S. Cohen, *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates.*, Math. Ann. 201 (1973), 177-200.
- [6] J. S. Cohen, *A characterization of inner product spaces using absolutely 2-summing operators.*, Studia Math. 38 (1970), 271-276.
- [7] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge *Absolutely Summing Operators.*, Cambridge Studies In Advanced Mathematics : 43. 1995.
- [8] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [9] D.J.H. Garling. *Inequalities : A journey into Linear Analysis.*, Cambridge, University Press. 2007.
- [10] M. Hazi, *Résumé En Topologie (en arabe)*. Edition OPU, Algerie. 1994.
- [11] H. Hogbe-Nlend, V. B. Moscatelli. *Nuclear and Conuclear Spaces*. NorthHolland Mathematics Studies : 52. North-Holland Publishing Company. 1981.
- [12] A. Kolmogorov, S. Fomine., *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.*, Edition Mir-Moscou. deuxième édition, Décembre 1973.
- [13] A. Pietsch, *Absolut p -summierende in Abbildungen in normierten Räumen.*. Studia Math. 28 (1967), 333-353.