الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي الأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـليـــة الـعـلـــوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique

Par :

BENCHIKH Meriem Ep. HATTAB

THEME

Opérateurs de Toeplitz tronqués sur quelques espaces de dimension finie

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. OUCHENANE Djamel	MCA	Président
Mr. YAZID Fares	MCB	Examinateur
Mr. YAGOUB Ameur	MCA	Encadreur

Année universitaire 2020/2021

Remerciements.

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

Ma reconnaissance va également à mon encadreur Monsieur ***YAGOUB Ameur,*** *Maitre de Conférences à l'université Amar Telidji de Laghouat, pour toute la documentation qu'il m'a fournie, ses conseils judicieux, ces orientations, son aide précieuse et les efforts qu'il a déployés pour l'accomplissement de ce travail.*

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur ***OUCHENANE Djamel,*** *Maître de Conférence à l'université Amar Telidji de Laghouat, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de mon mémoire de master. Je lui exprime mes profonds respects et toute ma gratitude.*

Je remercie vivement Monsieur ***YAZID Fares,*** *Maître de Conférence à l'université Amar Telidji de Laghouat d'avoir pris la peine d'examiner ce travail et m'honorer par son présence parmi les membres de jury.*

Je tiens à remercier Monsieur ***RAHMOUNE Abdelaziz,*** *chef de Département de mathématiques à l'université Amar Telidji de Laghouat ainsi que toutes les personnes que j'ai contacté et qui ont été toujours disponible pour m'avoir facilité toutes les taches.*

Un très grand merci à ma mère, mon mari et toute ma famille sans oublier tous mes chers enseignants que ce soit à l'université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen ou bien l'université Amar Telidji de Laghouat pour les efforts qu'ils ont fournis pour avoir participer à notre formation.
Mes remerciements vont chaleureusement à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dont le nom n'est pas cité ici, même si par un mot d'encouragement ; je leur dis merci infiniment.

BENCHIKH Meriem.

Dédicaces.

Toutes les lettres ne sauront trouver les mots qu'il faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour,
le respect, la reconnaissance.
Aussi, c'est tout simplement que :

Je dédie ce travail ...

A ma très chère mère : *Tout l'encre du monde ne pourrait suffire pour exprimer mes sentiments envers un être très cher. Vous avez toujours été mon école de patience, de confiance et surtout d'espoir et d'amour. Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, la lumière qui illumine mon chemin.*
Ce travail est le résultat de l'esprit de sacrifice dont vous avez fait preuve, de l'encouragement et le soutien que vous ne cessez de manifester, j'espère que vous y trouverez les fruits de votre semence et le témoignage de ma grande fierté de vous avoir comme maman.
J'implore Dieu, tout puissant, de vous accorder une bonne santé, une longue vie et beaucoup de bonheur.

A mon très cher père décédé : *Puisse Dieu vous avoir en sa sainte miséricorde et que ce travail soit une prière pour votre âme.*

A mon mari : *J'exprime ma profonde reconnaissance pour le soutien continu dont tu as toujours fait preuve.*
Tu m'as toujours encouragé, incité à faire de mon mieux, ton soutien m'a permis de réaliser le rêve tant attendu.
Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur.

A mes frères Manel, Mouhammed et Mehdi.

A toutes ma famille : oncles, tantes, cousins, cousines.

A toutes ma belle famille et leurs enfants.

ملخص.

هذه المذكرة تندرج في مجال نظرية المؤثرات. في الفصل الأول من هذه المذكرة ، نقدم النتائج الكلاسيكية المتعلقة بفضاءات هاردي, بفضاءات نموذجي وبعض المفاهيم الأساسية مثل الإسقاطات و إعادة إنتاج النواة. في الفصل الثاني من هذه المذكرة نهتم بمؤثرات توبليتز المبتورة على الفضاء النموذجي وبالخصوص التمثيل المصفوفي لمؤثرات توبليتز المبتورة في حالة ما كانت الدالة الداخلية u مساوية ل z^n أو عبارة عن جداء بلاشك من الدرجة n .

كلمات مفتاحية:

فضاءات هاردي, فضاءات نموذجي, الدالة الداخلية ,جداء بلاشك , مؤثرات توبليتز المبتورة ,التمثيل المصفوفي .

Abstract.

This dissertation joins in the field of operator theory. In the first part of the thesis, we give classical results concerning the Hardy space, models spaces and some besic concepts such as projections and reproducing kernels. In the second part of the thesis we are interested in the truncated Toeplitz operators on the model space, we are particularly interested the matrix representation of truncated Toeplitz operators where the inner function u is z^n or a Blaschke product of order n.

Key words :
Hardy space, model space, inner function, Blaschke product, truncated Toeplitz operators, matrix representation.

Résumé.

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs. Dans la première partie du mémoire, nous donnons les résultats classiques concernant l'espace de Hardy, l'espace modèles et quelques notions de base telles que les projections et les noyaux reproduisant. Dans la dexième partie du mémoire on s'intéresse aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle, plus particulièrement *à* la représentation matricielle d'un opérateur de Toeplitz tronqué dans le cas *où* la fonction intérieure u est égale *à* z^n, o*ù* bien un produit de Blaschke d'ordre n.

Mots clés :

Espaces de Hardy, espace modèle, fonction intérieure, produit de Blaschke, opérateurs de Toeplitz tronqués, représentations matricielles.

Table des matières.

Introduction.

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Elle est dédié *à* l'étude de certains opéateurs sur quelques espaces fonctionnels. On note par $\mathbb{D}$ le disque unité et $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$ et par m la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité $\mathbb{T}$ tel que : $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$, et par $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$ muni de la norme $\|f\| := (\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^2 dm(\zeta))^{\frac{1}{2}}$ et du produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta)$. On définit l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ par l'espace des fonctions analytiques $f \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier de signe négatifs sont nuls c'est-*à*-dire :

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n \leq 0\},$$

avec $\widehat{f}(n)$ est le n-ième coefficient de Fourier de f. $H^2(\mathbb{T})$ est un sous espaces fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$. On identifie $H^2(\mathbb{T})$ *à* sous espace des fonctions holomorphes $f \in Hol(\mathbb{D})$ sur $\mathbb{D}$ par

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^2 = \sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\},$$

par la limite radiale f^*, (est un isomorphisme isométrique), définie par :

$$f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta),$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$. Le noyau reproduisant de $H^2(\mathbb{D})$, noté k_λ donné par la formule : $k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Les espaces modèles sont les sous-espaces fermés non nul de H^2 invariants par l'adjoint du shift, $S^* := f \longrightarrow \frac{f(z)-f(0)}{z}$, d'après le théorème de Beurling [1], ces espaces sont de la forme

$$K_u^2 := (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle = 0, \quad \text{pour tout g} \in H^2\},$$

o*ù* u est une fonction intérieure. Comme dans le cas de H^2, chaque K_u^2 est un espace *à* noyau reproduisant noté k_λ^u défini par : $k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z}$, $(\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$. Dans le cas particulier K_u^2 est de dimension fini si u est un produit de Blaschke d'ordre fini. Chaque espace modèle est équipé d'un opérateur de conjugaison C défini par $C[f](\zeta) = u(\zeta)\overline{\zeta f(\zeta)}$ pour tout $f \in K_u^2$ et $\zeta \in \mathbb{T}$. Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u^2. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^\infty$ sur K_u^2 est défini par :

$$A_\varphi^u = P_u(\varphi f) \quad \text{pour chaque } f \in K_u^2.$$

L'étude des opérateurs de Toepliz tronqués est un domaine de recherche d'actualité dans la théorie des opérateurs. Sur l'espace modèle ces opérateurs ont été introduits par Sarason [23] en 2007.

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement aux matrices des opérateurs de Toepliz tronqués. La matrice de A_φ relativement *à* la base $\mathcal{S} = \{1, z, z^2, ..., z^n\}$ est de la forme :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

La matrice de A_φ relativement *à* la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ est de la forme :

$$r_{ij} = \begin{cases} a_i \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i - \lambda_j}} + a_j \frac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j - \lambda_i}} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & \text{si} \quad i \neq j \\ \\ \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_k \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i - \lambda_k}} + a_i \left[1 + \frac{\overline{\lambda_i u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \right] & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

où les a_i sont les coordonnées de la fonction φ relativement *à* la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2. Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant les espaces de Hilbert, $L^2(\mathbb{T})$, Hardy H^2, et les opérateurs bornés dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 est entièrement consacré aux espaces modèles, nous rappelons la définition de l'espace modèle ainsi que ses propriétés élémentaires qui nous sont utiles dans l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Le dernier chapitre de ce mémoire contiennent les opérateurs de Toeplitz tronqués et leurs représentations matricielles dans le cas d'espace modèle de dimension finie.

Chapitre 1

Préliminaires.

Nous exposons dans ce chapitre les éléments de la théorie des espaces de Hilbert qui correspond *à* ce cadre, notamment, les notions d'orthogonalité, de projection, les espaces $L^2(\mathbb{T})$ et les espaces de Hardy. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [2, 5, 8, 9, 10, 17, 22]. On terminera ce chapitre par une présentation sommaire de quelques opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert.

1.1 Espaces de Hilbert.

1.1.1 Forme bilinéaire et produit scalaire.

Définition 1.1. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*
Une application $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une ***forme bilinéaire*** *si toutes les applications partielles $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ et $y \longmapsto \langle x, y \rangle$ sont linéaires.*

i) Elle est ***symétrique*** *si $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, pour tous $x\,;\, y \in E$.*

ii) Elle est ***définie positive*** *si $\langle x, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in E$ et si ($\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$).*

iii) ***Un produit scalaire*** *est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.*

1.1.2 Applications anti-linéaires et formes sesquilinéaires.

Définition 1.2. *Soient E et F, deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*
Une application $L : E \longrightarrow F$ est dite ***anti-linéaire*** *si :*
pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y \in E$ $\quad L(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} L(x) + \bar{\mu} L(y)$.

Définition 1.3. *Une application* $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une* ***forme sesquilinéaire*** *si l'application linéaire partielle* $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ *est linéaire et si l'autre* $y \longmapsto \langle x, y \rangle$ *est anti-linéaire.*

i) Elle est dite ***symétrique hermitienne*** *si :*

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *pour tous* $x; y \in E$.

ii) Elle est définie positive.

iii) Un ***produit (scalaire) hermitien*** *est une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne, définie positive.*

1.1.3 Norme préhilbertienne.

Définition 1.4. *Soit* $\langle .,. \rangle$ *un produit scalaire hermitien sur E. On définie sur E* ***la norme*** *associée à* $\langle .,. \rangle$ *par :* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Lemme 1.1. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire* $\langle .,. \rangle$ *. Alors, pour tous* $x, y \in E$

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y \rangle + \| y \|^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y \rangle + \| y \|^2 . \end{aligned}$$

□

Nous vérifions aisément certaines propriétés de la norme pour $\|.\|$:

1. $\|x\| \geq 0$ par définition, et si $\|x\| = 0$ c'est que $\langle x, x \rangle = 0$ et donc $x = 0$
2. pour $\lambda \in \mathbb{C}$ nous avons

$$\| \lambda x \| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle}.$$

Proposition 1.1. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz).***
Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle$*. Alors pour tous* $x, y \in E$ *:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Démonstration.
Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \| tx + y \| = \| x \|^2 t^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y\rangle t + \| y \|^2 .$$

Le discriminant de ce polynéme quadratique doit donc être ≤ 0 :

$$0 \geq (2\mathcal{R}e\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

d'où

$$\|x\|\|y\| \geq |\mathcal{R}e\langle x, y\rangle| \geq \mathcal{R}e\langle x, y\rangle.$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle x, y\rangle = \alpha|\langle x, y\rangle|$,
d'où $\overline{\alpha}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, et :

$$\begin{aligned}
\|x\|\|y\| &= \|x\|\|\alpha y\| \\
&\geq \mathcal{R}e\langle x, \alpha y\rangle \\
&= \mathcal{R}e(\overline{\alpha}\langle x, y\rangle) \\
&= \mathcal{R}e|\langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x, y\rangle|.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.5. *On appelle* ***espace préhilbertien*** *un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit hermitien $\langle ., .\rangle$ et de la norme associée $\|.\|$. Un espace préhilbertien peut être muni d'une structure d'espace métrique pour la distance*

$$d(x, y) := \| x - y \|.$$

Proposition 1.2. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel préhilbertien et soient $x; y \in E$. Alors on dispose des énoncés suivants :*

1. ***Théorème de Pythagore :***

$$\mathcal{R}e\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \| x + y \|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. ***Identité du parallélogramme :***

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3. ***Formule de polarisation :***

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4} + i\left(\frac{\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2}{4}\right).$$

Définition 1.6. *On dit qu'un espace préhilbertien $\mathcal{H}$, muni de la norme $\|.\|$ associée au produit hermitien $\langle .,.\rangle$, est* ***un espace de Hilbert*** *si $(\mathcal{H}, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet.*

1.1.4 Orthogonalité.

Définition 1.7. *On dit que x et y sont* ***orthogonaux*** *si $\langle x, y\rangle = 0$ noté $x \perp y$, et on dit que x et y sont* ***perpendiculaires*** *si $\mathcal{R}e\langle x, y\rangle = 0$.*

Remarque :

Dans le cas des espaces préhilbertiens réels ces deux notions coïncident, mais dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel préhilbertien, x et ix sont perpendiculaires puisque

$$\langle x, ix\rangle = -i\langle x, x\rangle \text{ et donc } \mathcal{R}e\langle x, ix\rangle = 0.$$

Définition 1.8. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\langle .,.\rangle$ le produit hermitien sur $\mathcal{H}$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, on définie* ***l'orthogonal*** *de F par :*

$$F^\perp := \{x \in \mathcal{H} : \quad \text{pour tout } y \in F, \quad \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.3. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, alors :*

i) Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est fermé.

ii) Si G est un sous-espace vectoriel et si $G \subset F$, alors $F^\perp \subset G^\perp$.

iii) On a : $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

Définition 1.9. *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une* ***base orthonormale*** *d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ si :*

- $\|e_i\| = 1$.
- *L'espace engendré $Vect\{e_i\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.*
- $e_i \perp e_j \quad$ *pour $i \neq j$.*

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel fermé. Il existe une unique application linéaire $P_F : \mathcal{H} \longrightarrow F$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{H}$*

$$\| x - P_F(x) \| = d(x, F) := \inf_{z \in F} \| x - z \| \ .$$

De plus :

i) $P_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant cette égalité.

ii) $x - P_F(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

iii) P_F est 1-lipschitzienne (donc continue), i.e.

$$\|P_F(x)\| \leq \|x\| \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. On note $y := P_F(x)$. Montrons que $x - y \in F^{\perp}$.
On sait que, pour tout $z \in F$, on a :

$$\mathcal{R}e\langle x - y, z - y\rangle \leq 0.$$

Donc $\mathcal{R}e\langle x - y, w\rangle \leq 0$ pour tout $w \in F$.
En remplaçant w par $-w$ puis par iw, on conclut que $\langle x - y, w\rangle = 0$ pour tout $w \in F$.
On a par Pythagore :

$$\|x\|^2 = \| x - P_F(x) \|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Exemple 1.1. *Si F est un sous-espace de dimension finie et si $e_1, ..., e_n$ est une base orthonormée de F, on a la formule explicite*

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

1.2 Espace $L^2(\mathbb{T})$.

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}$ du plan complexe $\mathbb{C}$,
$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité $\{\zeta \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\zeta| = 1\}$, m la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité $\mathbb{T}$ avec :

$$dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi} \quad où \quad \theta \in [0; 2\pi[.$$

et par $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$, (pour plus de détails voir [14]).

Définition 1.10. *Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ on définit* ***la norme*** *de $L^2(\mathbb{T})$ par :*

$$\|f\| := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^2 dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}},$$

muni du ***produit scalaire*** *défini par :*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta).$$

Muni de ce produit scalaire et de la norme qui est définie précédemment, $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.4. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonction définit par :*

$$\begin{aligned} e_n : \ \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto e_n(\zeta) = \zeta^n \end{aligned}.$$

L'ensemble $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. $e_n \in L^2(\mathbb{T})$ et $\|e_n\| = 1$. En effet

$$\begin{aligned} \text{soit n} \in \mathbb{Z} : \|e_n\| &= \left(\int_{\mathbb{T}} |e_n(\zeta)|^2 dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}} |\zeta^n|^2 dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Montrons que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m - n \neq 0$.

$$\begin{aligned} \langle e_m, e_n\rangle &= \left(\int_{\mathbb{T}} e_m(\zeta)\overline{e_n(\zeta)}dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}}. \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^m\overline{\zeta^n}dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{m-n}dm(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormée.
Montrons que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est total ou bien maximal. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On suppose que $\langle f, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; donc en particulier $\langle f, e_0\rangle = 0$. *D'où*

$$\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)dm(\zeta) = 0.$$

Donc $f = 0$ m-presque partout sur $\mathbb{T}$.
Par conséquent $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est total.
D'où $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormé de $L^2(\mathbb{T})$. $\square$

Définition 1.11. *Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$. On note*

$$\widehat{f}(n) := \langle f, \zeta^n \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta^n} dm(\zeta),$$

$\widehat{f}(n)$ est appelé le n-ième coefficient de Fourier de f.
Chaque fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ peut se développer en série de Fourier sous la forme :

$$f(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\zeta^n.$$

On note par $L^\infty := L^\infty(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de toutes les fonctions bornées essentiellement mesurables sur $\mathbb{T}$, équipé de la norme :

$$\|f\|_\infty := ess - sup_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)|,$$

où

$$ess - sup_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)| = sup\left\{a \geq 0 : m(\zeta \in \mathbb{T}, |f(\zeta)| > a) > 0\right\}.$$

Proposition 1.5. *Soit φ une fonction mesurable sur $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$ *pour tout* $f \in L^2(\mathbb{T})$.
ii) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

1.3 Espaces de Hardy.

Pour pouvoir définir l'espace de Hardy classique sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, nous avons besoins de la proposition suivante :

Proposition 1.6 ([8])**.** *Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$.*
La fonction définie sur [0 ; 1[par

$$r \longmapsto \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta),$$

est une fonction croissante.

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$. On a

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

On remarque que le deuxième membre est une fonction croissante de r.
Par conséquent la fonction

$$r \longmapsto \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta),$$

est une fonction croissante sur $[0\,;\,1[$. □

Définition 1.12 ([8])**.** *On appelle* ***espace de Hardy*** $H^2(\mathbb{D})$ *l'espace des fonctions analytiques sur le disque unité,* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$*, telle que la norme*

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} := \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta),$$

soit fini.
On note $H^\infty(\mathbb{D})$ *l'ensemble des fonctions* f *analytiques bornée sur* $\mathbb{D}$ *muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Proposition 1.7. *Soit f une fonction analytique sur* $\mathbb{D}$*.* f *est un élément de* $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si*

$$\sup_{0\le r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) < \infty.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sup_{0\le r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $f = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et $r \in [0;1[$.
Supposons que $f \in H^2(\mathbb{D})$. Soit f_r telle que $f_r(\zeta) = f(r\zeta) \in L^2(\mathbb{T})$.
On a :

$$\begin{aligned} \sup_{0\le r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) &= \sup_{0\le r<1} \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 r^{2n} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{n\ge 0} |a_n|^2 r^{2n} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &= \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Inversement

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}}|f(r\zeta)|^2dm(\zeta) &= \sup_{0\leq r<1}\sum_{n\geq 0}|a_n|^2r^{2n}\\ &= \sum_{n\geq 0}|a_n|^2\\ &= \|f\|^2.\end{aligned}$$

Donc $f\in H^2(\mathbb{D})$. □

Il est bien connu d'après les travaux de Fatou et de Riesz que pour $f\in H^2(\mathbb{D})$ et f_r définie par :

$$r\in[0;1[\longmapsto f_r(\zeta):=f(r\zeta).$$

La limite radiale de toute fonction f notée f^* est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ par :

$$f^*(\zeta):=\lim_{r\to 1^-}f(r\zeta) \qquad \zeta\in\mathbb{T},$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$ et $f^*\in L^2(\mathbb{T})$.

Définition 1.13. *On appelle* ***espace de Hardy*** $H^2(\mathbb{T})$ *l'espace des fonctions* $f\in L^2(\mathbb{T})$ *dont les coefficients de Fourier de signe négatifs sont nuls c'est-à-dire :*

$$H^2(\mathbb{T}):=\{f\in L^2(\mathbb{T}):\widehat{f}(n)=0,n<0\},$$

et

$$H^\infty(\mathbb{T}):=\{f\in L^\infty(\mathbb{T}):\widehat{f}(n)=0,n<0\},$$

où $\widehat{f}(n)$ *est le n-ième coefficient de Fourier de* f*.*

$H^2(\mathbb{T})$ est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ définie par :

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{T}}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta),$$

et muni de la norme

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{T})}=\int_{\mathbb{T}}|f^*(\zeta)|^2dm(\zeta),$$

où f^* est la limite radiale de f.

Remarque : On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$ car l'application

$$\begin{array}{rcccl}\chi & : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T})\\ & & f & \longmapsto & f^*\end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

1.3.1 Noyau reproduisant.

Définition 1.14. *Soit X un ensemble arbitraire non vide et M(X) un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X. On dit que M est* ***un espace de Hilbert*** *à* ***noyau reproduisant*** *si pour tout $x \in X$, la fonction d'évaluation*

$$\begin{array}{rcccl} L_x & : & M(X) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, la continuité de la forme linéaire L_x ($x \in X$) entraîne qu'il existe un unique élément $k_x \in M(X)$ tel que $L_x(f) = \langle f, k_x \rangle$. La fonction k_x est appelée ***le noyau reproduisant*** *au point x.*

Proposition 1.8. *Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. L'application $L_\lambda : f \longmapsto f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2.*

Démonstration. Soit $f \in H^2$, $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ on a :

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ fixé la fonction d'évaluation $f \longmapsto f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2. □

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe dans H^2 une unique fonction, notée k_λ telle que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle. \tag{1.1}$$

La fonction k_λ est appelée le noyau de Cauchy ou le noyau de Cauchy-Szegö.
Le noyau de Cauchy est un noyau reproduisant donnée par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}, \tag{1.2}$$

et

$$\|k_\lambda\| = \frac{1}{\sqrt{1 - |\lambda|^2}} \qquad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Remarquons qu'en utilisant la formule (1.1),la relation (1.2) n'est autre que la formule intégrale de Cauchy de la fonction $f \in H^2$, c'est-*à*-dire :

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} dm(\zeta) \qquad \text{pour tout} f \in H^2 \text{et } z \in \mathbb{D},$$

o*ù* f^* la limite radiale de f existe presque partout et est un élément de L^2, ce qui nous assure que l'intégrale ci-dessus est bien définie.
De même, la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimée terme de noyau de Cauchy, autrement dit, on a :

$$P[f](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} dm(\zeta) \quad \text{pour} f \in L^2.$$

Remarquons aussi que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$f^{(n)}(\lambda) = \langle f, k_\lambda^{(n)} \rangle,$$

o*ù*

$$k_\lambda^{(n)}(z) = \frac{n! z^n}{(1 - \overline{\lambda} z)^{n+1}}$$

est la dérivée n-ième de k_λ par rapport *à* $\overline{\lambda}$.

Proposition 1.9. *La famille* $\{k_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ *est linéairement indépendant.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ n points distincts de $\mathbb{D}$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j k_{\lambda_j} = 0.$$

Montrons que $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$. Pour tout $f \in H^2$ on a :

$$\begin{aligned} o &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j k_{\lambda_j}, f \rangle & (1.3) \\ &= \langle a_1 k_{\lambda_1}, f \rangle + \langle a_2 k_{\lambda_2}, f \rangle + ... + \langle a_n k_{\lambda_n}, f \rangle & (1.4) \\ &= a_1 \langle k_{\lambda_1}, f \rangle + a_2 \langle k_{\lambda_2}, f \rangle + ... + a_n \langle k_{\lambda_n}, f \rangle & (1.5) \\ &= \overline{a_1} f(\lambda_1) + \overline{a_2} f(\lambda_2) + ... + \overline{a_n} f(\lambda_n). & (1.6) \end{aligned}$$

Maintenant il suffit de trouver un polynôme f tel que $f(\lambda_j) = a_j$ pour $j = 1, 2, ..., n$. Le théorème d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un tel polynôme et la relation 1.6 devient :

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + ... + |a_n|^2 = 0.$$

Donc $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$. □

1.3.2 Opérateur de shift.

Les opérateurs shift tiennent une place importante dans le monde des opérateurs sur la théorie des fonctions.

Définition 1.15. ***L'opérateur de décalage*** *à* ***droite*** *(ou shift) sur H^2 est un défini par :*

$$S[f](z) = zf(z) \qquad \textit{pour } f \in H^2 \textit{et } z \in \mathbb{T},$$

et son ***adjoint*** *l'opérateur de décalage à gauche $S^* : H^2 \longrightarrow H^2$ est défini par :*

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad \textit{pour } f \in H^2 \textit{et } z \in \mathbb{T}.$$

Proposition 1.10. *L'opérateur shift S sur H^2 est une isométrie.*

Démonstration. Soit $f \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \int_{\mathbb{T}} |\zeta f(\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^2 dm(\zeta) \\ &= \|f\|^2. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.2. *Soit U un opérateur défini par :*

$$U : (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2,$$

est une isométrie et est unitaire, ce qui nous permet de regarder S en termes de coefficients de Taylor comme un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Autrement dit, on a :

$$S(a_0, a_1, ...) = (0, a_0, a_1, ...) \quad \textit{avec } f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

et

$$S^*(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_1, a_2, ...).$$

On dit qu'un sous-espace fermé M de H^2 est invariant par l'opérateur S si $SM \subseteq M$; et on dit que M non trivial lorsque $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$.
Le théoréme classique de Beurling (voir [1] ou [8]) donne une caractérisée complète des sous-espaces invariants non triviaux.

Théorème 1.2 (A.Beurling [1] ou [8]). *Un sous-espace fermé non trivial M de H^2 est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$uH^2 := \{uh \quad h \in H^2\},$$

où u est une fonction intérieure non constante.

Remarque : une fonction $u \in H^\infty$ est dite intérieure lorsque $|u| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

1.3.3 Théoréme de factorisation.

Dans cette section, nous rappelons brièvement les résultats essentiels de la factorisation des éléments de H^2.

Définition 1.16. *Soit $(a_n)_n \subset \mathbb{D}$ une suite satisfait la condition de Blaschke $\sum_{n\geq 0}(1-|a_n|) < \infty$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
Alors pour tout $k \geq 0$, le produit infini

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \frac{|a_n|}{a_n}, \tag{1.7}$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.
*La fonction définie par la relation (1.7) est une fonction intérieure appelée **le produit de Blaschke** construit sur la suite $(a_n)_n$.*

Définition 1.17. *Soit μ une mesure positive, finie sur $\mathbb{T}$ et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On définit la fonction S_μ sur $\mathbb{D}$ par :*

$$S_\mu(z) := \exp\left\{-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)\right\} \quad z \in \mathbb{D}.$$

*La fonction S_μ est une fonction interieure appelée **fonction interieure singulière**.*
*BS est appelé le **facteur interieur** de la fonction f.*

Définition 1.18. *Soit φ une fonction mesurable positive telle que* $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ *avec :*

$$L^1(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}; f \textit{ mesurable et} \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|dm(\zeta) < +\infty\}.$$

La fonction analytique définit par :

$$F(z) = c\exp\left\{\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log\varphi(\zeta)dm(\zeta)\right\} \quad z \in \mathbb{D},$$

est appelée ***fonction extérieure****. Dans cette définition, c désigne une constante de module 1.*
Si $\varphi = f$ on dit que F est ***le facteur extérieur*** *de la fonction f.*

Théorème 1.3. *Toute fonction f non identiquement nulle dans H^2 admet, à une constante prés, une unique factorisation de la forme*

$$f = BSF,$$

où B est un produit de Blaschke, S est une fonction intérieure singulière et F est une fonction extérieure dans H^2.

Ces résultats vont nous permettre de voir une fonction de l'espace de Hardy comme une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ ou comme une fonction de $L^2(\mathbb{T})$. On pourra alors utiliser la théorie des fonctions analytiques ou la structure de $L^2(\mathbb{T})$ pour calculer des normes ou utiliser les propriétés des coefficients de Fourier.

1.4 Opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert.

1.4.1 Définitions.

Définition 1.19. *Soient E et F deux espaces vectoriel sur le même corps $\mathbb{K}$. On dit que* ***l'opérateur*** *(ou l'application) $T : E \longrightarrow F$ est* ***linéaire*** *s'il vérifié les conditions suivantes : pour tous $x, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

- *Condition additive*

$$T(x + y) = T(x) + T(y).$$

- *Condition homogène*

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Définition 1.20. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, alors **l'image** de l'opérateur T est définie par :*

$$Im(T) = \{Tx, x \in E\},$$

*et **le noyau** de l'opérateur T est définit par :*

$$Ker(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Définition 1.21. *Soient E et F deux espaces normés, soit T un opérateur linéaire définit sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite **continue** au point x_0 de G si on a la propriété suivante :*
Pour toute suite x_n de G converge vres x_0, la suite Tx_n converge vers $T(x_0)$ c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = T(x_0).$$

*T est dite **borné** s'il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$\| T(x) \|_F \leq k\|x\|_E \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Remarque :

1. l'opérateur linéaire T est dit continue sur G s'il est continue en chaque point de l'ensemble G.
2. Si G est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème 1.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *T est continu sur E.*
2. *T est continu en 0.*
3. *il existe une constante k telle que $\|Tx\| \leq k\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration.
L'implication $1 \Longrightarrow 2$ est évidente.

On va montrer l'implication $2 \Longrightarrow 3$. On suppose que T est continu en 0, alors :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{il existe } \delta > 0, \text{tel que pour tout x} \in E : (\|x\| < \delta) \Longrightarrow (\|Tx\| < \varepsilon). \tag{1.8}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E, x \neq 0$. On pose

$$x' = \frac{\delta}{2\|x\|}x,$$

alors

$$\|x'\| = \frac{\delta}{2}.$$

D'o$\grave{u}$, $\|x'\| < \delta$ et par conséquent $\|Tx'\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|Tx'\| &= \| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \| \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|}\|Tx\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\|Tx\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|.$$

Il existe alors k satisfaisant 3. Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ et 3 est vérifiée avec $k = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$.

Montrons que $3 \Longrightarrow (1)$.

On suppose que 3 est vérifiée, alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|T(x - y)\| \leq k\|x - y\|,$$

c'est $\grave{a}$ dire

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|.$$

L'application T est lipschitzienne donc, elle est continue. □

Définition 1.22. *Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*

Définition 1.23. *(Norme d'un opérateur linéaire continu.)*

Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu entre les espaces vectoriels normés. Le nombre

$$\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

qui est par le Théorème 1.4.1 fini, est appelé ***la norme*** *de T et est noté $\|T\|$.*

Proposition 1.11. *(Propriétés de la norme d'opérateur) Soient E, F et G des espaces vectoriels normés.*

1. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $\|T\| = 0$ si et seulement si $T = 0$.*
2. *Si $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $T + S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, $\alpha T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.*
4. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.*

De 1 et 3 de la Proposition 1.4.1, $\|.\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Notation : La composée $T \circ S$ de deux opérateurs T et S sera souvent noté TS.

1.4.2 Adjiont d'un opérateur linéaire continue.

Définition 1.24. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'unique application $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$. on ait :*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle,$$

*est appelée **adjointe** de T. De plus on a :*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Ce qui prouve que T^* est aussi continue.

Proposition 1.12. *Soient E et F des espaces de Hilbert. Soit $T \longrightarrow T^*$ une application antilinéaire, isométrique de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$. De plus pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :*

— $(T^*)^* = T$.

— $\| T^*T\| = \|T\|^2$.

— $(TS)^* = S^*T^*$.

1.4.3 Opérateur isométrique, normal, unitaire, positif et autoadjoint.

Définition 1.25. *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Lorsque $E = F$; $\mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.*

1. *$U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F$.*
2. *$U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé isométrique (co-isométrique) si $\|U(x)\| = \|x\|$. pour tout $x \in E$.*
3. *$N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $\|N^*(x)\| = \|N(x)\|$ pour tout $x \in E$, ou $NN^* = N^*N$.*
4. *$U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $U^* = U$.*
5. *$P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in E, \langle P(x), x\rangle \geq 0$.*
6. *Deux opérateurs $A : E \to E$ et $B : F \to F$ sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U : E \to F$ tel que $A = U^*BU$.*

Chapitre 2

Espaces modèles.

2.1 Définitions et propriétés.

Nous allons maintenant considérer les sous-espaces fermés de H^2 qui sont invariants par le l'adjoint de shift, S, S^*. Ces sous-espaces sont connus sous le nom d'espaces modèles. Les résultats énoncés ici ainsi que leurs démonstrations viennent de [18, 19, 21].

Proposition 2.1. *Soit E un sous-espace fermé invariant par S dans H^2 si et seulement si $E^{\perp}$ est invariant par S^*.*

Définition 2.1. *Soit u une fonction intérieure. On appelle* ***espace modèle*** *correspondant à u, le sous-espace de H^2 défini par :*

$$\begin{aligned} K_u^2 &:= (uH^2)^{\perp} \\ &= H^2 \ominus uH^2 \\ &= \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle = 0, \quad \textit{pour tout } g \in H^2\}. \end{aligned}$$

Cette définition ne donne pas de description explicite des éléments de l'espace modèle K_u^2. Le théorème suivant nous décrit complétement K_u^2.

Théorème 2.1. *(Douglas-Shapiro-Shields [6]). Pour chaque fonction intérieure u, l'espace modèle K_u^2 correspondant est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ où $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u^2 = H^2(\mathbb{T}) \bigcap u\overline{zH^2(\mathbb{T})} \quad \textit{avec } z : \zeta \in \mathbb{T} \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}.$$

Démonstration. Si $f \in H^2(\mathbb{T}) \bigcap u\overline{zH^2(\mathbb{T})}$, il existe $h \in H^2$ telle que $f = u\overline{zh}$ presque partout sur $\mathbb{T}$, et pour tout $g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle f, ug \rangle &= \langle u\overline{zh}, ug \rangle \\
&= \langle \overline{zh}, g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta g(\zeta) h(\zeta)} dm(\zeta) \\
&= 0 \quad \text{(d'après le théorème de Cauchy)},
\end{aligned}$$

c'est-*à*-dire : $f \in (uH^2)^{\perp} = K_u^2$.
Réciproquement, si $f \in K_u^2$, on a $\langle f, uz^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
c'est-*à*-dire $(\widehat{\overline{u}f})(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc, $\overline{u}zf \in \overline{H^2(\mathbb{T})}$ ou encore $f \in u\overline{zH^2}$. □

Comme les sous-espaces uH^2 constituent les sous-espaces invariants non triviaux de S. Les sous-espaces modèles K_u^2 jouent les rôles analogues pour le S^*.

Corollaire 2.1. *Soit u une fonction intérieure, l'espace modèle K_u^2 correspondant est un sous-espace propre de H^2 qui est invariant par S^*.*

Démonstration. Soit M un sous-espace propre de H^2 invariant par S^*. Pour $f \in M$ et $g \in M^{\perp}$ on a :

$$\langle f, Sg \rangle = \langle S^* f, g \rangle = 0,$$

donc $Sg \in M^{\perp}$ pour tout $g \in M^{\perp}$, d'o*ù* $M^{\perp}$ est un sous-espace non trivial de H^2, invariant par S.
D'après le théorème de Beurling, il existe u une fonction intérieure telle que $M^{\perp} = uH^2$.
D'o*ù* $M = (uH^2)^{\perp}$. □

Corollaire 2.2. *Soient u et v des fonctions intérieures. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $u|v \Rightarrow \exists f \in H^2, v = uf$.

ii) $K_u^2 \subset K_v^2$.

Remarque : La multiplication par une fonction intérieure est une isométrie sur H^2.
Cette remarque est utilisée dans la démonstration de cette proposition.

Proposition 2.2. *Si u et v sont des fonctions intérieures non constantes et $u_1 = uv$, alors :*

$$K_{u_1}^2 = K_u^2 \oplus uK_v^2.$$

Démonstration. Comme la multiplication par une fonction intérieure est une isométrie, vH^2 est un sous-espace fermé de H^2 et donc on peut écrire :

$$H^2 = vH^2 \oplus (vH^2)^{\perp}.$$

La multiplication par u_1 est aussi une isométrie et on a :

$$uH^2 = uvH^2 \oplus u(vH^2)^{\perp},$$

c'est-*à*-dire

$$\begin{aligned} H^2 &= uH^2 \oplus (uH^2)^{\perp} \\ &= uvH^2 \oplus u(vH^2)^{\perp} \oplus (uH^2)^{\perp} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(uvH^2)^{\perp} = u(vH^2)^{\perp} \oplus (uH^2)^{\perp},$$

c'est-*à*-dire :

$$K^2_{u_1} = K^2_u \oplus uK^2_v.$$

$\square$

Soit P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K^2_u. On note M_u et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et $\overline{u}$ respectivement.

Remarque : (définition du l'opérateur de multiplication).

Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et $D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}$. On appelle opérateur de multiplication, de symbole φ sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur défini par

$$\begin{array}{rcccl} M: & D(M_\varphi) \subseteq & L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ & & f & \longmapsto & M_\varphi = \varphi f. \end{array}$$

Définition 2.2. *Soit u une fonction intérieure de H^2 alors :*
$M_uPM_{\overline{u}}$ est la projection orthogonale sur uH^2; et la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K^2_u est définit par : $P_u = P - M_uPM_{\overline{u}}$.

.

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, k_\lambda \rangle &= \langle f, P_u k_\lambda \rangle \\ &= \langle P_u f, k_\lambda \\ &= (P_u f)(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \lambda\overline{\zeta}} |dm(\zeta)|. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de H^2, chaque K_u^2 est un espace *à* noyau reproduisant.
Soit E un sous-espace de H^2 avec k_λ est le noyau reproduisant de H^2, alors le noyau reproduisant de E est la projection orthogonale $P^E k_\lambda$ de k_λ sur E. Donc

$$k_\lambda - P^E k_\lambda$$

est le noyau reproduisant de $E^\perp$, c'est-*à*-dire le noyau reproduisant de K_u^2 est la projection orthogonale de k_λ sur K_u^2, il est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

2.2 Espaces modèles de dimension finie.

Dans cette section, nous verrons que les espaces modèles les plus simples sont ceux qui correspondent aux produits de Blaschke d'ordre fini et que ce sont les seuls espaces modèles de dimension finie.

Proposition 2.3. *Soit u une fonction intérieure.*

i) Si $u(z) = z^n$ alors K_u^2 est l'ensemble des polynômes de degré $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. C'est-à-dire :

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1}, \quad a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}\}.$$

ii) Si u est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ comptés avec leurs ordre de multiplicité alors :

$$K_u^2 = \left\{ \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1}}{(1 - \overline{\lambda_1} z)(1 - \overline{\lambda_2} z)...(1 - \overline{\lambda_n} z)}; \quad (a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{C} \right\}. \tag{2.1}$$

iii) Si u est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros deux à deux distincts $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ d'ordre de multiplicités respectifs $m_1, m_2, ..., m_n$ alors :

$$K_u^2 = span \left\{ \frac{d^{l_{j-1}}}{dz} \left[\frac{1}{1 - \overline{\lambda_j} z} \right]; \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq l_j \leq m_j \right\}. \tag{2.2}$$

Démonstration. On va montrer directement la deuxième propriété car la première propriété est un cas particulier de la deuxième.
On suppose que les zéros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ du produit de Blaschke sont simples et deux *à* deux distincts. On a :

$$\langle uh, k_{\lambda_j} \rangle = u(\lambda_j) h(\lambda_j),$$

pour tout $h \in H^2$ et pour tout $j \in \{1,2,...,n\}$, alors :

$$span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\} \subseteq K_u^2.$$

Si $f(\lambda_j) = \langle f, k_{\lambda_j} \rangle$ pour tout $j \in \{1,2,...,n\}$, alors u divise f et donc $f \in uH^2$.
Ainsi

$$span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\}^{\perp} \subseteq (K_u^2)^{\perp}.$$

Comme $K_u^2 = span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\}$, alors toute combinaison linéaire des k_{λ_j} pour $j \in \{1,2,...,n\}$ peut être exprimé comme une fonction rationnelle du même type de (2.1).
Et réciproquement, tout expression du type (2.1) peut être décomposée comme combinaison linéaire des fonctions $k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}$.
Si λ est un zéro d'ordre m de u, il faut remplacer k_λ par ses dérivées d'ordre inférieure ou égal $\grave{a}$ $m-1$, c'est-à-dire $k_\lambda, k_\lambda^{'}, k_\lambda^{''}, ..., k_\lambda^{(m-1)}$ à la place de k_λ dans la démonstration précédente. □

Proposition 2.4. *$dimK_u^2 < \infty$ si et seulement si u est un produit de Blaschke d'ordre fini.*

Démonstration. ($\Longleftarrow$) La proposition précédente montre que si u est un produit de Blaschke d'ordre fini , on a $K_u^2 < \infty$. ($\Longrightarrow$) On suppose que $dimK_u^2 < \infty$: Si u admet un facteur qui est un produit de Blaschke admettant comme zéros la suite infini $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, alors K_u^2 contient un système infini linéairement indépendant.
D'autre part, si u admet un facteur v ; qui est une fonction intérieure singulière, alors $v^{\frac{1}{n}}$ est une fonction intérieure qui divise v pour tout $n \geq 1$. Ainsi $K^2_{v^{\frac{1}{1+n}}} \subsetneq K^2_{v^{\frac{1}{n}}} \subsetneq K_v^2$ pour $n > 1$. Donc on peut trouver une suite infinie orthonormale dans K_u^2 en prenant des vecteurs $f_n \in K^2_{v^{\frac{1}{n}}} \ominus K^2_{v^{\frac{1}{1+n}}}$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que $dimK_u^2 < \infty$. □

En contraste avec l'espace de Hardy, l'espace modèle n'admet pas $\grave{a}$ priori de base orthonormée mais la proposition 2.3 nousmontre que si la fonction u est un produit de Blaschke d'ordre n avec des zéros simples $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ deux $\grave{a}$ deux distincts, la famille $\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\}$ est une base non orthogonale de K_u^2.
Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on note par b_λ le facteur de Blaschke défini sur $\mathbb{D}$ par :

$$b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}; \quad z \in \mathbb{D}.$$

Soit u est un produit de Blaschke dont les zéros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont simples et deux $\grave{a}$

deux distincts.

Remarquons que :

$$\langle b_{\lambda_1}k_{\lambda_2}, k_{\lambda_1}\rangle = b_{\lambda_1}(\lambda_1)k_{\lambda_2}(\lambda_1) = 0.$$

de même,

$$\langle b_{\lambda_1}b_{\lambda_2}k_{\lambda_3}, k_{\lambda_1}\rangle = \langle b_{\lambda_1}b_{\lambda_2}k_{\lambda_3}, k_{\lambda_2}\rangle = 0.$$

En continuant le processus, on obtient la famille $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ définie par :

$$e_1(z) := \frac{\sqrt{1-|\lambda_1|}}{1-\overline{\lambda_1}z}$$

et

$$e_k(z) := \left(\prod_{j=1}^{k-1} b_{\lambda_j}\right)\frac{\sqrt{1-|\lambda_k|}}{1-\overline{\lambda_k}z}.$$

Takenaka a montré que la famille $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ ainsi définie est une base orthonormée de l'espace modèle K_u^2.

Proposition 2.5. *Si $(u_j)_{j\geq 1}$ est une suite finie ou dénombrable de fonctions intérieures telle que le produit $u = \prod_{j\geq 1} u_j$ converge, on a :*

$$K_u^2 = k_{u_1}^2 \oplus \bigoplus_{j\geq 2}\left(\prod_{n=1}^{j-1} u_n\right) K_{u_j}^2.$$

2.3 Opérateurs de conjugaison.

Définition 2.3. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.* ***Un opérateur de conjugaison*** *sur H est un opérateur $C : H \longrightarrow H$ vérifiant :*

- $\langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$.
- $C^2 = Id_H$.

Un opérateur T défini sur H est dit C-symétrique s'il existe un opérateur de conjugaison C sur H tel que $T^* = CTC$. Chaque espace modèle K_u^2 admet un opérateur de conjugaison

$$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2,$$

défini par :

$$C[f](z) = u(z)\overline{zf(z)} \quad f \in K_u^2, z \in \mathbb{T}. \tag{2.3}$$

Dans ce qui suit, l'image de chaque fonction f par l'opérateur de conjugaison C défini dans la relation 2.3 est notée $\widetilde{f}$ c'est-à-dire $\widetilde{f} = C[f]$. Les détails sur cet opérateur peuvent être trouvés dans [11, 12, 13].

Lemme 2.1. *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a :*

1. $\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$, *en particulier si* $u(\lambda) = 0, \widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)}{z-\lambda}$.
2. $\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{k_\lambda^u}, f \rangle, \quad f \in K_u^2$.

Démonstration. Montrons d'abord (1). Puisque $|u| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$, pour tout $z \in \mathbb{T}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{k_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u(z)} \\
&= u(z)\overline{z}\frac{1-u(\lambda)\overline{u(z)}}{1-\lambda\overline{z}} \\
&= \overline{z}\frac{u(z)-u(\lambda)}{1-\overline{z}\lambda} \\
&= \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}.
\end{aligned}$$

La propriété (2) découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{k_\lambda^u}, f \rangle &= \langle Ck_\lambda^u, f \rangle \\
&= \langle Ck_\lambda^u, C^2 f \rangle \\
&= \langle Cf, k_\lambda^u \rangle \\
&= \langle \widetilde{f}, k_\lambda^u \rangle \\
&= \widetilde{f}(\lambda).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Opérateurs de Toeplitz tronqués, représentations matricielles.

3.1 Généralités sur les opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans le chapitre précédent, on a définit l'espace modèle K_u^2 correspondant *à* la fonction intérieure $u \in H^2$. Dans cette partie on va s'intéresser aux opérateurs de Toeplitz tronqués et particulièrement aux matrices de ces opérateurs dans certaines bases de K_u^2. Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle. Ils représentent une généralisation de grande envergure des matrices de Toeplitz classiques. Les opérateurs de Toeplitz tronqués ont été formellement introduits par Sarason dans [23].

Définition 3.1. *Soit une fonction $\varphi \in L^\infty$,* ***l'opérateur de Toeplitz*** *de symbole φ sur H^2 est défini par :*

$$\begin{array}{rccl} T_\varphi : & H^2 & \longrightarrow & H^2 \\ & f & \longrightarrow & T_\varphi(f) = P(\varphi f), \end{array}$$

où P est la projection orthogonale de L^2 sur H^2.

Brown et Halmos ont montré qu'un opérateur T borné sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $S^*TS = T$.

La matrice $A = (a_{ij})_{i;j}$ de l'opérateur de Toeplitz T_φ définit sur H^2 dans la base

$\{1, z, z^2, z^3, ...\}$ est donnée par :

$$a_{ij} = \langle T_\varphi z^j, z^i\rangle = \langle P(\varphi z^j), z^i\rangle = \langle \varphi z^j, Pz^i\rangle = \langle \varphi, z^{j-i}\rangle = \widehat{\varphi}(i-j).$$

c'est-*à*-dire

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Où

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-ikt}dt.$$

Définition 3.2. *Soit une fonction $\varphi \in L^2$,* ***l'opérateur de Toeplitz tronqué*** *de symbole φ sur K_u^2 est défini par :*

$$\begin{array}{llll} A_\varphi^u : & K_u^2 & \longrightarrow & K_u^2 \\ & f & \longrightarrow & A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{array},$$

où P est la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2.
L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u^2 est noté par $\mathcal{T}_u$.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 3.1. *Soient φ et $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_\varphi^u, A_\psi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes a et b, $A_{a\varphi+b\psi}^u = aA_\varphi^u + bA_\psi^u$.*
2. *$(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$.*

Le résultat suivant montre que les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés ($\in \mathcal{T}_u$) sont C-symétriques.

Lemme 3.1. *Les opérateurs dans $\mathcal{T}_u$ sont C-symétriques.*

Démonstration. On note par $K_u^\infty = K_u^2 \bigcap H^\infty$, le sous espace K_u^∞ est dense dans K_u^2. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ avec A_φ^u est borné. Pour $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle CA_\varphi^u Cf, g\rangle &= \langle Cg, A_\varphi^u Cf\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\ &= \langle A_{\overline{\varphi}}^u f, g\rangle \\ &= \langle (A_\varphi^u)^* f, g\rangle. \end{aligned}$$

Puisque K_u^∞ est dense dans K_u^2, on a le résultat. $\square$

Pour $\varphi \in K_u^2$ l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u commute avec S_u, et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec S_u^*.
L'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u est la compression sur K_u^2 de l'opérateur de Toeplitz T_φ défini sur H^2, et S_u est la compression de S sur K_u^2 donc, puisque $\varphi \in K_u^2 \subset H^2$, T_φ commute avec S alors A_φ^u commute avec S_u et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec S_u^*.
Le symbole de l'opérateur de Toeplitz T_φ défini sur l'espace de Hardy est unique car $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.
Par contre dans l'espace modèle ce n'est pas le cas, le symbole d'un opérateur de Toeplitz tronqué n'est pas unique, on peut voir par exemple que l'opérateur de symbole φ sur K_u^2 est souvent nul même si $\varphi \neq 0$. On a le théorème de Sarason suivant :

Théorème 3.1. *Soit $\varphi \in L^2$. Alors*

$$A_\varphi^u = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

nous donnons un exemple trés simple suivent, pour un opérateur de Toeplitz tronqué n'a pas un symbole unique.

Exemple 3.1. *$I = A_1^u = A_{k_0^u}^u = A_{\overline{k_0^u}}^u$. En effet, soit $f \in K_u^2$. Alors $A_1^u(f) = P_u f = f$. Et $A_1^u - A_{k_0^u}^u = A_{\overline{u(0)u}} = 0$ car $u(0)u \in uH^2$, et nous avons $A_{\overline{k_0^u}}^u = (A_{k_0^u}^u)^* = I$.*

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur borné sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué.

Théorème 3.2. *Un opérateur A borné sur K_u^2 appartient à $\mathcal{T}_u$ si, et seulement si, il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u^2$ tels que :*

$$A - S_u A S_u^* = \varphi_1 \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \varphi_2. \tag{3.2}$$

Dans ce cas, $A = A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}}^u$.

Remarque : En appliquant l'opérateur de conjugaison C *à* la relation (3.2), on a la caractérisation équivalente : un opérateur A borné sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u^2$ tels que :

$$A - S_u^* A S_u = \varphi_1 \otimes \widetilde{k_0^u} + \widetilde{k_0^u} \otimes \varphi_2.$$

Dans ce cas, $A = A_{\widetilde{\varphi_1} + \overline{\widetilde{\varphi_2}}}^u$.

3.2 Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué.

Dans cette partie, on s'intéresse aux matrices des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle dans le cas où la fonction intérieure est égale a z^n, ou bien un produit de Blaschke d'ordre fini.

3.2.1 Cas de la fonction intérieure u définie par $u(z) = z^n$.

Si $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, la famille $\mathcal{S} = \{1, z, z^2, ..., z^n\}$ est une base orthonormée de K_u^2 et la matrice de l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ relativement *à* la base $\mathcal{S}$ n'est autre qu'une matrice de Toeplitz usuelle donnée par la formule 3.1 formé par les coefficients de Fourier de la fonction φ.
En effet, si $A = (a_{jk})_{0\leq k,j\leq(n-1)}$ est la matrice de A_φ dans la base $\mathcal{S}$ alors

$$a_{jk} = \widehat{\varphi}(k-j).$$

La matrice de A_φ relativement *à* la base $\mathcal{S}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Théorème 3.3 ([16, 20])**.** *Soient A et B deux matrices de Toeplitz. Le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

i) A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures.

ii) A ou B est un multiple de l'identité.

iii) Il existe un $\beta \in \mathbb{C}$ tel que A et B sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \beta a_{n-1} & \dots & \beta a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & \beta a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \beta b_{n-1} & \dots & \beta b_1 \\ b_1 & b_0 & \dots & \beta b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Notons :
$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = (a_{i-j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
$B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = (b_{i-j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
$A \times B = C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Par définition,

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}.$$

C est une matrice de Toeplitz si et seulement si

$$c_{ij} = c_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-j}. \tag{3.4}$$

Nous distinguons deux cas pour cette égalité.

1. Pour $i = j$. On a :

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} \quad \text{pour } i = 0, ..., n-1.$$

   c'est-à-dire

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1} b_{k-i-1} \quad \text{pour } i = 0, ..., n-2.$$

   En déduit l'égalité :

$$a_{i-n+1} b_{n-i-1} = a_{i+1} b_{-i-1}$$

   Autrement dit

$$\begin{cases} a_{-n+1} b_{n-1} & = & a_1 b_{-1} \\ a_{-n+2} b_{n-2} & = & a_2 b_{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{-1} b_1 & = & a_{n-1} b_{-n+1} \end{cases}$$

2. Pour $i \neq j$, soit $l = i - j$ c'est-à-dire $j = i - l$ avec $|l| = 1, ..., n-2$. On a :

$$c_{i-j} = c_l = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i+l} \quad \text{pour } i = 0, ..., n-1.$$

Remarquons que pour chaque i et l , on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k}b_{k-i+l} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+l}b_{k-1-i+l},$$

c'est-$\grave{a}$-dire

$$\sum_{k=0}^{n} a_{i-k}b_{k-i+l} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1}b_{k-1-i+l},$$

donc

$$a_{i-n+1}b_{n-1-i+l} = a_{i+1}b_{-1-i+l}.$$

En variant l dans la relation précédente, on obtient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a_1b_{-1} &= a_{-n+1}b_{n-1} \\ a_1b_{-2} &= a_{-n+1}b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_1b_{-n+1} &= a_{-n+1}b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2b_{-1} &= a_{-n+2}b_{n-1} \\ a_2b_{-2} &= a_{-n+2}b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_2b_{-n+1} &= a_{-n+2}b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n-1}b_{-1} &= a_{-1}b_{n-1} \\ a_{n-1}b_{-2} &= a_{-1}b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n-1}b_{-n+1} &= a_{-1}b_1 \end{cases}$$

Donc, pour chaque $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on a :

$$\begin{cases} a_ib_{-1} &= a_{-n+i}b_{n-1} \\ a_ib_{-2} &= a_{-n+i}b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_ib_{-n+1} &= a_{-n+i}b_1 \end{cases}$$

S'il existe $a_{i_0} \neq 0$, on pose $\beta = \frac{a_{-n+i_0}}{a_{i_0}}$ et on a :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1} \quad b_{-2} = \beta b_{n-2} \quad ...b_{-n+1} = \beta b_1.$$

Et on a deux alternatives sur β.

Si $\beta = 0$ $\quad b_{-1} = b_{-2} = ... = b_{-n+1}$ et en revenant dans le dernier système, on a :

i) Soit $a_{-n+i} = 0$ pour tous les $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

ii) ou bien $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

En résumé, si $\beta = 0$, A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures ou B est multiple de l'identité.

Si $\beta \neq 0$ on a :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1} \quad b_{-2} = \beta b_{n-2} \quad ...b_{-n+1} = \beta b_1.$$

Nous avons encore deux cas :

i) S'il existe un s tel que $b_{n-s} \neq 0$ alors

$$a_i b_{-s} = a_{-n+i} b_{n-s},$$

c'est-à-dire

$$\beta a_i b_{n-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

d'où

$$a_{-n+i} = \beta a_i$$

Donc A et B sont de la même forme que la troisième condition du théorème.

ii) Si $b_1 = b_2 = ... = b_{n-1} = 0$, B est un multiple de l'identité.

□

• $\mathbb{C}^*$ algèbre engendrée par S_u.

Dans cette partie, nous allons montrer que, si $u(z) = z^n$ ou $u(z) = b_\lambda^n(z), \lambda \in \mathbb{D}$ alors la $\mathbb{C}^*$ algèbre engendrée par S_u n'est autre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n àcoefficients dans $\mathbb{C}$.

Théorème 3.4. *Soit u la fonction intérieure $u(z) = z^n$. On désigne par A la matrice de S_u par rapport à la base orthogonale $S = \{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ de K_u^2 alors :*

$$e_{ij} = A^{*(n-1-i)} A^{n-1} A^{*j} \quad pour \quad 0 \leq i, j \leq n-1,$$

où (e_{ij}) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^* = \overline{A^t}$ l'adjoint de A.
Donc

$$\mathbb{C}^*(S_u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Démonstration. Soit $(f_k)_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de remarquer que :

$$e_{ij}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k \neq j \\ f_i & \text{si } k = j \end{cases}$$

et

$$A^{*l}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k < l \\ f_{k-l} & \text{si } k \geq l \end{cases}$$

et

$$A^{m}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k \neq 0 \\ f_m & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Alors

$$A^{*j}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k < j \\ f_{k-j} & \text{si } k \geq j \end{cases}$$

Donc

1. Si $k < j$ on a :

$$A^{*(n-1-i)}A^{n-1}A^{*j}(f_k) = 0.$$

2. Si $k \geq j$ on a :

$$A^{n-1}A^{*j}(f_k) = A^{n-1}(f_{k-j}) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k-j \neq 0 \\ f_{n-1} & \text{si } k-j = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} A^{*(n-1-i)}A^{n-1}A^{*j}(f_k) &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k \neq j \\ A^{*(n-1-i)}(f_{n-1}) & \text{si } k = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k \neq j \\ f_{(n-1)-(n-1-i)} & \text{si } k = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } k \neq j \\ f_i & \text{si } k = j \end{cases} \\ &= e_{ij}(f_k). \end{aligned}$$

Donc e_{ij} est un produit des puissances de A et A^*, alors :
$\{e_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq n-1} \subseteq \mathbb{C}^*(S_u)$, ce qui implique que $\mathbb{C}^*(S_u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. □

Le théorème ci-dessus a pour corollaire le résultat suivant, qui montre qu'on peut avoir le même résultat si la fonction intérieure u est un produit de Blaschke d'ordre n avec un seul zéro répété n-fois.

Corollaire 3.1. *Avec les mêmes notations que le théorème précédent.*
Si

$$u(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right)^n$$

alors

$$\mathbb{C}^*(S_u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

3.2.2 Cas d'un produit de Blaschke d'ordre n avec des zéros deux *à* deux distincts.

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué dans le cas o*ù* la fonction intérieur u est de la forme :

$$u(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\lambda_j}{1-\overline{\lambda_j}z} \quad \text{avec} \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_j \neq \lambda_i \quad \text{pour } i \neq j. \tag{3.5}$$

Notons que dans le cas o*ù* u est de la forme 3.5, le noyau reproduisant k_λ^u et le noyau de Cauchy-Szegö k_λ coïncident aux points $\lambda_j \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ et la famille $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_j}, j = 1, 2, ..., n\}$ est une base non orthogonale de K_u^2.
En 2008, Cima, Ross et Wogen ([4]) ont donné une caractérisation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués en général dans le cas de la dimension finie. Nous rappelons ici leur résultat.

Théorème 3.5 (Cima-Ross-Wogen [4])**.** *. Soit u une fonction intérieure de la forme (3.5) et A une application linéaire sur K_u^2. Si $M = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ désigne la matrice de A relativement à la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2, $A \in \mathcal{T}_u$ si et seulement si*

$$r_{ij} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{u'(\lambda_j)}\left[\frac{\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i}} r_{1i} + \frac{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_1}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i}} r_{1j}\right] \quad \textit{pour} \quad 1 \leq i,j \leq n \quad \textit{et } i \neq j. \tag{3.6}$$

La relation (3.6) nous dit que la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué est entièrement déterminée par la donnée des coefficients de la première ligne et de la diagonale. La relation (3.6) veut dire aussi

$$r_{i1} = \frac{\overline{u'(\lambda_1)}}{u'(\lambda_i)} r_{1i} \quad \text{et} \quad r_{ji} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{u'(\lambda_j)} r_{ij} \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Exemple 3.2. *Si $n = 2$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

est une matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\}$ *de* K_u^2 *si et seulement si*

$$\overline{u'(\lambda_1)}r_{12} = \overline{u'(\lambda_2)}r_{21}.$$

Les lemmes suivants nous seront utiles dans le calcul des coefficients de la matrice.

Lemme 3.2. *Pour* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, *on a :*

1. $\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, \tilde{k}_{\lambda_j} \rangle = \frac{1}{1-\overline{\lambda_j}\lambda_i}$.
2. $\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad i = j \\ u'(\lambda_i) & si \quad i \neq j \end{cases}$

Démonstration. Pour $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

1. $\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, \tilde{k}_{\lambda_j} \rangle = \langle C\left[k_{\lambda_i}\right], C\left[k_{\lambda_j}\right] \rangle = \langle k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} \rangle = k_{\lambda_j}(\lambda_i) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_j}\lambda_i}$.
2. On a $\langle \tilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle = \tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j)$ car k_{λ_j} est un noyau reproduisant et $\tilde{k}_{\lambda_i} \in K_u^2$.

   Mais

$$\tilde{k}_{\lambda_i}(z) = \frac{u(z)}{z - \lambda_i} = \frac{1}{1 - \overline{\lambda_i}z} \prod_{p=1,p\neq i}^{n} b_{\lambda_p}(z) \quad \text{ou} \quad b_{\lambda_p}(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{D}.$$

   Il s'ensuit que :

   • Si $i \neq j$,

$$\tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j) = \frac{u(\lambda_j)}{\lambda_j - \lambda_i} = 0.$$

   • Si $i = j$

   Remarquons que $u' = b'_{\lambda_1} b_{\lambda_2} ... b_{\lambda_n} + b_{\lambda_1} b_{\lambda_2} ... b'_{\lambda_n}$ et

$$u'(\lambda_s) = \frac{1}{1 - |\lambda_s|^2} \prod_{p=1,p\neq s}^{n} b_{\lambda_p}(\lambda_s).$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_i) &= \frac{1}{1 - \overline{\lambda_i}\lambda_i} \prod_{p=1,p\neq i}^{n} b_{\lambda_p}(\lambda_i) \\ &= \frac{1}{1 - |\lambda_i|^2} \prod_{p=1,p\neq i}^{n} b_{\lambda_p}(\lambda_i) \\ &= u'(\lambda_i). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. *Pour chaque $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, les coefficients de la matrice de $A_{\overline{\widetilde{k}_{\lambda_j}}} = k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}$ sont tous nuls sauf le coefficient t_{jj} tels que $t_{jj} = \overline{u'(\lambda_j)}$. C'est-à-dire :*

$$A_{\overline{\widetilde{k}_{\lambda_j}}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \overline{u'(\lambda_j)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. D'aprés Sarason on note $A_{\overline{\widetilde{k}_{\lambda_j}}} = k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}$ et pour
$j \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$A_{\overline{\widetilde{k}_{\lambda_j}}}(k_{\lambda_i}) = k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}(k_{\lambda_i}) = \delta_{ij}\overline{u'(\lambda_j)}k_{\lambda_j}, \text{d'aprés le Lemme 3.2}$$

□

Lemme 3.4. *Pour chaque $s \in \{1, 2, ..., n\}$, notons $(b_{ij}(s))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $A_{k_{\lambda_s}}$ relativement à la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2. Alors les $b_{ij}(s)$ sont donnés par :*

$$b_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s} - \overline{\lambda_j}} & si \quad i = s, \quad j \neq s \\ \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s} - \overline{\lambda_i}} \frac{\overline{u'(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad s = j, \quad i \neq s \\ \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_s}} & si \quad i = j, \quad j \neq s \\ 1 + \frac{\overline{\lambda_s u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} & si \quad i = j = s \\ 0 & si \quad i \neq s, j \neq s, \quad et \quad i \neq j \end{cases}$$

Démonstration. Pour chaque $s \in \{1, 2, ..., n\}$ et $1 \leq j \leq n$, par définition, $b_{ij}(s)$ est la i-ème composantede $A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_j})$.

• Si $j \neq s$, on a :

$$\begin{aligned} A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_j}) &= P_u[k_{\lambda_s}k_{\lambda_j}] \\ &= P_u\left(\frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s}-\overline{\lambda_j}}k_{\lambda_s} + \frac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_s}}k_{\lambda_j}\right) \\ &= \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s}-\overline{\lambda_j}}k_{\lambda_s} + \frac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_s}}k_{\lambda_j} \\ &= b_{sj}k_{\lambda_s} + b_{jj}k_{\lambda_j}. \end{aligned}$$

• Si $j = s$, on a :

$$A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_s}) = P_u(k_{\lambda_s}^2) \in K_u^2.$$

Donc ils existent $c_{1s}, c_{2s}, ..., c_{ns} \in \mathbb{C}$ tels que

$$A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_s}) = P_u(k_{\lambda_s}^2) = c_{1s}k_{\lambda_1} + c_{2s}k_{\lambda_2} + ... + c_{ns}k_{\lambda_n}.$$

Donc pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$\langle P_u(k_{\lambda_s}^2), \widetilde{k}_{\lambda_i}\rangle = c_{is}\overline{u'(\lambda_i)}. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \langle P_u(k_{\lambda_s}^2), \widetilde{k}_{\lambda_i}\rangle &= \langle k_{\lambda_s}^2, P_u(\widetilde{k}_{\lambda_i})\rangle \\ &= \langle k_{\lambda_s}^2, \widetilde{k}_{\lambda_i}\rangle \\ &= \overline{\langle \widetilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_s}^2\rangle} \\ &= \overline{I_{is}}. \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad I_{is} = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{\zeta - \lambda_i}\frac{1}{(1-\lambda_s\overline{\zeta})^2}dm(\zeta).$$

Posons $\zeta = e^{i\theta}$ alors :

$$dm(\zeta) = \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{et} \quad d\theta = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}d(\theta) = i\zeta d(\theta) \quad \text{c'est-à-dire} \quad dm(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Donc

$$I_{is} = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{\zeta-\lambda_i}\frac{1}{(1-\lambda_s\overline{\zeta})^2}dm(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_i)(\zeta-\lambda_s)^2}d(\zeta).$$

On a deux cas :

1. Pour $i \neq s$; on considère la fonction f définie par :

$$f(z) = \frac{zu(z)}{(z-\lambda_i)(z-\lambda_s)} = \frac{z}{(1-\overline{\lambda_i}z)(1-\overline{\lambda_s})}\prod_{k=1,k\neq i,s}^{n}\frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}z}.$$

La fonction f est une fonction holomorphe sur chaque voisinage V du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui ne contient pas les points λ_i, λ_s, donc f admet un prolongement analytique qu'on va noté f^s avec

$$f^s(z) = \frac{zu(z)}{(z-\lambda_i)(z-\lambda_s)}.$$

On a dans ce cas :

$$I_{is} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^s(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)} d(\zeta) = f^s(\lambda_s),$$

d'autre part on a :

$$f^s(\lambda_s) = \frac{\lambda_s}{(1-|\lambda_s|^2)(1-\overline{\lambda_i}\lambda_s)} \prod_{k=1,k\neq i,s}^{n} \frac{\lambda_s-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}\lambda_s} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s-\lambda_i}u'(\lambda_s).$$

Donc

$$I_{is} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s-\lambda_i}u'(\lambda_s).$$

2. Pour $i = s$, on a :

$$I_{ss} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)^3} d(\zeta).$$

On considère la fonction g définie par $g(z) = zu(z)$.

Puisque la fonction g est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors d'après la formule de Cauchy on a :

$$I_{ss} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)^3} d(\zeta) = \frac{g''(\lambda_s)}{2} = u'(\lambda_s) + \frac{\lambda_s}{2}u''(\lambda_s).$$

De l'équation (3.7) on obtient :

$$c_{is} = \frac{\overline{I_{is}}}{\overline{u'(\lambda_i)}}.$$

Donc

$$c_{is} = \begin{cases} \frac{\overline{\lambda_s}}{\overline{\lambda_s-\lambda_i}}\frac{\overline{u'(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & \text{si} \quad i \neq s \\ \\ 1+\frac{\overline{\lambda_s}}{2}\frac{\overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} & \text{si} \quad i = s \end{cases}$$

□

Nous allons maintenant déterminer la matrice de A_φ pour $\varphi \in K_u^2$.

Lemme 3.5. *Soit $\varphi \in K_u^2$, notons par $(r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sa matrice dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2. Alors les r_{ij} sont donnés par :*

$$r_{ij} = \begin{cases} a_i \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_j}} + a_j \frac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i}} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad i \neq j \\ \sum_{k=1,k\neq i}^{n} a_k \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_k}} + a_i \left[1 + \frac{\overline{\lambda_i u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}\right] & si \quad i = j \end{cases}$$

où les a_i sont les coordonnées de la fonction φ relativement à la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de K_u^2.

Démonstration. Soit $\varphi \in K_u^2$, alors il existe $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n},$$

donc $A_\varphi = \sum_{s=1}^{n} a_s A_{k_{\lambda_s}}$. Il s'ensuit, que $r_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ij}(s)$.

• Si $i = j$ on a :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ij}(s) \\ &= a_1 b_{ij}(1) + a_2 b_{ij}(2) + ... + a_n b_{ij}(n) \\ &= a_i b_{ij}(i) + a_j b_{ij}(j) \\ &= a_i \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_j}} + a_j \frac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i}} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}. \end{aligned}$$

• Si $i \neq j$ on a :

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ii}(s) \\ &= a_1 b_{ii}(1) + a_2 b_{ii}(2) + ... + a_n b_{ii}(n) \\ &= a_1 \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_1}} + a_2 \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_2}} + ... + a_i \left[1 + \frac{\overline{\lambda_i u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}\right] + ... + a_n \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_n}} \\ &= \sum_{k=1,k\neq i}^{n} a_k \frac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i}-\overline{\lambda_k}} + a_i \left[1 + \frac{\overline{\lambda_i u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}\right]. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.6. *Si $\varphi \in K_u^2$ alors la matrice de $A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$ est de la forme*

$$diag(a_1 \overline{\lambda_1} \overline{u'(\lambda_1)} + a_2 \overline{\lambda_2} \overline{u'(\lambda_2)} + ... + a_n \overline{\lambda_n} \overline{u'(\lambda_n)}),$$

où les coefficients $a_1, a_2, ..., a_n$ sont les coordonnées de la fonction φ relativement à la base $\mathcal{A}$ de K_u^2.

Démonstration. Soit $\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n}$ avec $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\widetilde{\varphi} = \overline{a_1}\widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a_2}\widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a_n}\widetilde{k_{\lambda_n}},$$

et

$$\begin{aligned} S_u\widetilde{\varphi} &= \overline{a_1} S_u \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a_2} S_u \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a_n} S_u \widetilde{k_{\lambda_n}} \\ &= \overline{a_1}\lambda_1 \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a_2}\lambda_2 \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a_n}\lambda_n \widetilde{k_{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{S_u\widetilde{\varphi}} = a_1 \overline{\lambda_1}\overline{\widetilde{k_{\lambda_1}}} + a_2 \overline{\lambda_2}\overline{\widetilde{k_{\lambda_2}}} + ... + a_n \overline{\lambda_n}\overline{\widetilde{k_{\lambda_n}}}.$$

Comme $A_{\overline{\widetilde{k_{\lambda_p}}}} = k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}}$ alors :

$$A_{\overline{\widetilde{k_{\lambda_p}}}} = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda_p} A_{\overline{\widetilde{k_{\lambda_p}}}} = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda_p} (k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}}).$$

D'où

$$A_{\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}(\lambda_s) = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda_p} (k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}})(k_{\lambda_s}) = a_p \overline{\lambda_p}\overline{u'(\lambda_p)}\delta_{sp}.$$

□

Bibliographie

[1] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[2] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[3] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[4] J. Cima, W. Ross, et W. Wogen, Truncated Toeplitz operators on finite dimensional spaces. Operators AndMatrices, (2) :357-369, 2008.

[5] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] R. Douglas, , H. Shapiro et A. Shields, Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operators. Ann. Inst. Fourier, 20(1) :37-76, 1970.

[7] Djaa. B. Messirdi, Etude spectrale des Opérateurs de Multiplications .Maghreb. Math .Rev. Volume 8 No 1/2, 1999.

[8] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[9] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea Publishing Company, Kew York, 1957.

[10] P. A. Fuhrmann, Linear systems and operators in Hilbert space, McGraw-Hill 1981.

[11] S. Garcia, Conjugation, the backward shift and Toeplitz kernels. J. Op. Th., 54(2) :239-250, 2005.

[12] S. Garcia, et M. Putinar, Complex symmetric operators and applications. Trans. Amer. Math. Soc., 358(3) :1285-1315, 2005.

[13] S. Garcia, et M. Putinar, Complex symmetric operators and application II. Trans. Amer.Math. Soc., 359(8) :3913-3931, 2007.

[14] S. R. Garcia, J. E. Mashreghi, W. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge University Press, 2016.

[15] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Springer, GTM 236, 2007.

[16] F. Korrichi : Opérateurs de Toeplitz tronqués et de composition. 2016, université de Biskra.

[17] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)

[18] N. Nikolski, Treatise on the shift operator : spectral function theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.

[19] N. Nikolski, Operators, functions, and systems : an easy reading, vol 1. Mathematical surveys and monographes, vol 92. American Mathematical Society, 2002.

[20] F. R. Randriamahaleo, Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Teoplitz tronqués de rang fini. IMB - Institut de Mathématiques de Bordeaux, 2015.

[21] M. Rosenblum, et J. Rovnyak, Hardy classes and operator theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.

[22] Wa. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.

[23] D. Sarason, : Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Operators And Matrices, 1(4) :491-526, 2007.