

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT



FACULTE DES SCIENCES
DEPERTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE
Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en
Mathématiques, Option : Mathématiques

Thème

Théorème de Banach-steinhaus et ses applications

Proposé et Encadré par :

- Pr Mokhtari.Abdelkader

Présenté par :

Geuffaf zakaria

Barkat tahar

Barkat ibrahim

N° d'ordre :...../2013-PFE/DGI

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Dédicaces

*Mes très chers parents qui ont
consenti d'énormes sacrifices pour
mon éducation et mon bien être.
Qu'ALLAH leur assure une longue
vie et bien travail pour que je puisse
veiller à leur bonheur !*

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur

Mokhtari Abdalkader.

Je dédie ce mémoire

Barkat Ibrahim



Dédicaces

*Mes très chers parents qui ont
consenti d'énormes sacrifices pour
mon éducation et mon bien être.*

*Qu'ALLAH leur assure une longue vie
et bien travail pour que je puisse
veiller à leur bonheur !*

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur

Mokhtari Abdalkader.

Je dédie ce mémoire

Barkat Tahar



Dédicaces

*Mes très chers parents qui ont consenti
d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon
bien être. Qu'ALLAH leur assure une longue vie et
bien travail pour que je puisse veiller à leur
bonheur !*

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur Mokhtari

Abdalkader

Je dédie ce mémoire

Geuffaf Zakaria



REMERCIEMENTS



Nos vifs remerciements à notre encadreur Mr Mokhtari Abdelkader, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particulièrement à Mr. Ben Abderrahmane Benyattou, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour ces inestimables conseils, ainsi qu'aux Mrs Ouinten Youcef, Maitres de conférences en Mathématiques à l'université de Laghouat pour leurs précieuses aides ayant largement contribué à la conception de notre thèse.

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département de Génie Informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat.

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le mathématicien Stefan Banach est né le 30 mars 1892 à Autriche, et le mathématicien Hugo Steinhaus né en 1887 à Pologne, qu'ils proposent au congrès international des mathématiciens en 1927 une théorie fondamentale appelée le Théorème de Banach-Steinhaus (aussi appelé principe de la borne uniforme), Il affirme qu'une famille d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach est uniformément bornée si et seulement si elle est ponctuellement bornée. C'est une conséquence très importante de la propriété de Baire, qui se généralise d'ailleurs aux espaces de Fréchet.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres, dans le premier, nous allons présenter un rappel concernant quelques notions topologiques et les espaces métriques et normés et sur l'Algèbre de Banach. Dans le second chapitre, nous allons présenter aussi un rappel concernant quelques notions indispensables sur les opérateurs linéaires.

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter le théorème de Banach-Steinhaus, ainsi que ses applications qui sont nombreuses.

On termine par une conclusion générale.

NOTATIONS

Ω	Ouvert de \mathbb{R}^n .
$C^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ dans Ω .
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions de L. Schwartz.
\mathcal{D}^α	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
$ \alpha $	Longueur du multi-indice.
ℓ_p	$\{x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots), \sum_{k=1}^\infty \xi_k ^p < \infty\}, 0 < p < \infty$.
$L^1(du)$	Ensemble des fonctions intégrables par rapport à u .
$F(A, X)$	$\{f: A \rightarrow X\}$.
$[A]$	Ensemble des combinaisons linéaires finies sur A .
$C(A)$	$\{f: A \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ continue}\}$.
e_k	$(\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots)$.
$X_1 \oplus X_2$	Somme directe de X_1 et X_2 .
$d(x, y)$	Distance métrique entre x et y .
$d(x_0, A)$	Distance de x_0 à A .
$\ x\ $	Norme de x .
$(E, \ \cdot \)$	Espace normé.
$\langle x, y \rangle$	Produit scalaire de x et y .
$C_{x_0}(x)$	Coefficient de Fourier de x par rapport à x_0 .
$\sum_{i \in I} \alpha_i$	$\sup\{\sum_{k=1}^n \alpha_{i_k}; n \in \mathbb{N}\}$.
H_e	$\{x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i; \sum_{i \in I} \xi_i ^2 < \infty\}$

Table des matières

- Introduction générale 6
- Notations7

Chapitre 01 :

- Espaces métriques, définitions. Propriétés générales 9
- Espaces normes. définitions propriétés générales 14
- Convergence, espace métrique complet 16
- Espaces métriques de première et deuxième catégorie de Baire 17
- L'algèbre $L_a(x)$ 19

Chapitre 02 :

- Opérations linéaires sur un espace linéaire 20
- Opérateurs linéaires sur un espace norme23
- L'algèbre de Banach $L(x)$ 24
- Opérateurs linéaires réguliers 25
- Opérateurs linéaires compacts 29
- Notions topologiques 30

Chapitre 03 :

- Théorème de Banach – Steinhaus 32
- Applications 33
- Conclusion 35

ESPACES METRIQUES, DEFINITIONS. PROPRIETES GENERALES :

Définition 01:

Soit X un ensemble quelconque non vide. Une *semi-métrique*, ou *semi-distance*, sur X est une application

$$\Delta: X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que, pour tout $x, y, z \in X$, on a

D_1 . $\Delta(x, y) \geq 0$, propriété de non-négativité.

D_2 . $\Delta(x, x) = 0$, propriété d'identité.

D_3 . $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)$, propriété de symétrie.

D_4 . $\Delta(x, y) \leq \Delta(x, z) + \Delta(z, y)$, inégalité de triangle.

L'ensemble X muni d'une semi-métrique Δ s'appelle *espace semi-métrique* que nous notons par (X, Δ) .

Définition 02:

Soit X un ensemble quelconque non vide. Une *métrique* ou encore une *distance* sur X est une semi-métrique $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si et seulement si } x = y.$$

L'ensemble X muni d'une métrique d s'appelle *espace métrique*, noté par (X, d) .

Exemple 01:

Dans l'espace linéaire \mathbb{R} , l'application $d: \mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par :

$$d(x, y) = |x - y|,$$

où $|x|$ est la valeur absolue de x , est une métrique pour \mathbb{R} . Les propriétés D_1 à D_5 sont évidentes. Donc $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est un espace métrique.

Exemple 02: dans l'espace linéaire complexe \mathbb{C} , l'application $d: \mathbb{C} * \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$d(x, y) = |x - y|,$$

où $|x|$ est le module du nombre complexe x est une métrique pour \mathbb{C} . Donc $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ est un espace métrique.

Définition 03: soit (X, d) un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est borné s'il existe

$M > 0$, tel que : $d(y_1, y_2) \leq M$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$

Théorème 01: soient (X, d) un espace métrique et Y un sous-ensemble de X .

soit $y_0 \in Y$ fixe. Alors Y est borné si et seulement si s'il existe un $M > 0$ tel que :
 $d(y, y_0) \leq M$, pour tout $y \in Y$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer l'inégalité de triangle, alors pour tout $y_1, y_2 \in Y$, on a

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, y_0) + d(y_0, y_2) \leq 2M. \quad ***$$

Exemples 04 :

- $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$

$$d: \mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y| \quad (\mathbb{R}, d) \text{ est un espace métrique.}$$

- $X = \mathbb{R}^2$ $d(x, y) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Avec $x = (x, x')$ et $y = (y, y')$.

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

(X, d) est un espace métrique, $d(x, y)$ est appelée distance Euclidienne.

- $X = C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(f, g) \rightarrow d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

d : est une distance sur X .

Pour la suite considérons (E, d) un espace métrique, $A \subset E, A \neq \emptyset, x \in E$

Définition 04 :

- On appelle la distance entre x et A la quantité

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \text{ tel que } y \in A\}.$$

On aura par conséquence, si $x \in A, d(x, A) = 0$.

Soit $B \subset E$ et $B \neq \emptyset$.

- La distance entre A et B est défini par : $d(A, B) = \inf\{d(x, y) / x \in A, y \in B\}$
- Le diamètre de A est défini par : $d(A) = \sup\{d(x, y) / x, y \in A\}$.
- On dit que A est borné si $d(A) < +\infty$.

Définition 05 :

- On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble.

$$B(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) < r\}.$$

- On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r l'ensemble.

$$Bf(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) \leq r\}.$$

- On appelle sphère de centre x_0 et de rayon r l'ensemble.

$$S(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) = r\}.$$

Exemples 05 :

- $E = \mathbb{R}^2$ muni de la distance Euclidienne

$B\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x_2 + y_2 < 1\}$ est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

$Bf\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x_2 + y_2 \leq 1\}$ est la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

$B\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x_2 + y_2 < 1\}$ est la sphère de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Définition 06 : (Topologie induite par une distance)

La famille des boules ouvertes dans (E, d) est une base d'une topologie τ sur E .

Cette topologie est appelé topologie induite par distance d .

Exemples 06 :

- La métrique usuelle dans \mathbb{R} induit la topologie usuelle de \mathbb{R} .
- Dans \mathbb{R}^2 , la distance euclidienne induit la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 .

Définition 07 : (Parties ouvertes et fermées d'un espace métrique)

Soient (E, d) un espace métrique, $A \subset E$. A est une partie ouverte de E ssi: $\forall x \in A$,

$$\exists B(x, r) \text{ tel que: } B(x, r) \subset A.$$

$F \subset E$, on dit que F est une partie fermée ssi $C_E F$ est une partie ouverte.

Propriétés :

- \emptyset, E sont des parties ouvertes de E .
- Une réunion quelconque des parties ouvertes est une partie ouverte.
- L'intersection de deux parties ouvertes est une partie ouverte.

Propriété de (Hausdorff)

Soit (E, d) un espace métrique, alors $\forall x, y \in E$, tel que

$$x \neq y, \exists r_1 > 0, \exists r_2 > 0, B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset$$

On dit que (E, d) est séparé au sens de Hausdorff.

Définition 08 :

Soient $V \subset E$ et $x \in E$, on dit que V est un voisinage de x s'il existe une partie ouverte O tel que:

$$x \in O \subset V.$$

Définition 09 : (intérieur, extérieur, frontière)

Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$.

- $x(x \in A)$ est un point intérieur à A s'il existe une boule ouverte de centre x incluse dans A .

L'intérieur de A est noté \mathring{A} .

- on dit que $x(x \in A)$ est un point extérieur à A si x est intérieur à $C_E A$.

L'ensemble des points extérieurs à A est noté par $ext(A)$, et on a $e(A) = \mathring{C_A}$.

- On dit que $x(x \in A)$ est un point frontière à A s'il n'est pas intérieur ni extérieur à A .

L'ensemble des points frontières de A noté FrA , et la frontière de A $Fr(A) = Fr(C_E A)$.

Prenant par exemple $Fr(]a, b[) = \{a, b\}$.

Définition 10 : (adhérence)

Soient (E, d) un espace métrique, $A \subset E, A \neq \emptyset$.

- On dit qu'un point $x \in E$ est un point adhérent de A si $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

L'adhérence de A noté par \bar{A} est l'ensemble des points adhérents c.-à-d:

$$\bar{A} = \{x \in E / \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

➤ **Remarques**

- $A \subset \bar{A}$.
- L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .
- \bar{A} est appelé fermeture de A .

Définition 11 : (ensemble dense)

- On dit que A est dense dans B si $B \subset \bar{A}$.
- On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Par exemple \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Définition 12 : (point d'accumulation)

On dit que $x(x \in A)$ est un point d'accumulation de A si :

$$\forall r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points d'accumulations de A noté par A' , et on appelé ensemble dérivé de A .

ESPACES NORMES .DEFINITIONS PROPRIETES GENERALES :

Définition : Soit X un espace linéaire sur K , on appelle semi-

norme pour X , une application $p : X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in K$ on a

N_1 . $p(x) \geq 0$, propriété de non-négativité.

N_2 . $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, propriété d'homogénéité absolue.

N_3 . $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, propriété de sous-additivité.

L'espace linéaire X muni d'une semi-norme s'appelle *espace semi-normé*, noté par (X, p) .

Pour une semi-norme, on a $p(0) = 0$. En effet,

$$p(0) = p(0x) = 0p(x) = 0.$$

Il est possible que $p(x) = 0$ et $x \neq 0$ comme l'exemple suivant le montre.

Définition : soit X un espaces linéaire sur K , on appelle norme

sur X , une application $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\| \cdot \|$ est une semi-norme pour X et de plus

N_4 . $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace linéaire X muni d'une norme s'appelle *espace normé*, noté par $(X, \| \cdot \|)$

Quand la norme ne doit pas être précisée, on va dénoter, en bref, un espace norme par X .

➤ **Remarque :** Dans un espaces norme X on a pour tout x, y dans X

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x \pm y\|$$

En effet ,

$$\|x\| = \|(x \pm y) \pm y\| \leq \|x \pm y\| + \|y\|$$

Donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\|$$

En remplaçant x et y entre eux, on a

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y \pm x\| = \|x \pm y\|$$

Donc $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x \pm y\|$

Exemple : dans l'espace linéaire réel \mathbb{R} , l'application $\| \cdot \| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $\|x\| = |x|$, pour tout x dans \mathbb{R} .

Où $|x|$ est la valeur absolue de x , est une norme pour \mathbb{R} .

Exemple : dans l'espace linéaire complexe \mathbb{C} , l'application

$\| \cdot \| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\|x\| = |x|, \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{C},$$

Où $|x|$ est le module de x , est une norme sur \mathbb{C} .

Théorème : un espace normé est un espace métrique .

DÉMONSTRATION. Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace normé. On introduit l'application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$d(x,y) = \|x - y\|, \text{ pour tout } x,y \in X.$$

Alors d est une *métrique* pour X , induite par la norme $\| \cdot \|$.

En effet, pour tout $x,y \in X$,

$$D_1. \quad d(x,y) \geq 0,$$

$$D_2. \quad d(x,x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$$

$$\begin{aligned} D_3. \quad d(x,y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= \|y - x\| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4. \quad d(x,y) &= \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

$$D_5. \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

CONVERGENCE, ESPACE METRIQUE COMPLET

Définition : soit (X, d) un espace métrique, une suite x_n des éléments de X converge vers un élément $x_0 \in X$ dans la métrique d , si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre naturel $n_0(\varepsilon)$ tel que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, pour tous les

$n > n_0(\varepsilon)$ noté par $x_n \xrightarrow{d} x_0$ et nous disons que la suite x_n est convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

❖ **Remarque :** dans un espace métrique, la limite d'une suite si elle existe est unique.

en effet supposons que $x_n \xrightarrow{d} x$ et $x_n \xrightarrow{d} y$, Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y) = 0$$

On a : $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$

Théorème : Dans un espace métrique, une suite convergente est une suite de Cauchy.

Démonstration :

Soit $x_n \xrightarrow{d} x_0$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}; d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous les $n > n_0(\varepsilon)$

Alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$.

Espaces métriques de première et deuxième catégorie de Baire :

Définition :

Soit (X, d) un espace métrique, un sous ensemble $A \subset X$ est maigre ou de première catégorie de Baire si A est la réunion dénombrable d'ensembles rares.

Si A n'est pas de première catégorie de Baire, on dit que A est de 2^{ème} Catégorie de Baire.

❖ Remarque :

Soient (X, d) un espace métrique et $\{A_i ; i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble des sous-ensembles maigres de X , Alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est un ensemble maigre.

Exemple :

Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ le sous ensemble $Q \subset \mathbb{R}$ est maigre, mais pas rare.

Exemple :

Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ le sous ensemble $Q \in \mathbb{R}$ n'est pas rare, puisque $(a) = \mathbb{R} \neq \emptyset$

Théorème de Baire : (1^{ème} catégorie)

Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Théorème de Baire : (2^{ème} catégorie)

Si X est un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X .

Démonstration :

Soit $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ouverts denses, et soit : $G = \bigcap_{n \geq 1} \Omega_n$ soit Ω un

Ouvert non vide arbitraire de X , on va montrer que $\Omega \cap G \neq \emptyset$, cela

Prouvera que G est dense dans X .

On notera par respectivement $B_f(x, r)$ et $B_0(x, r)$ les boules fermées et

Ouvertes de centre x et de rayon r , soit $x_0 \in \Omega$ et r_0 tel que : $B_f(x_0, r_0) \subseteq \Omega$

Comme Ω_1 est dense l'ouvert $\Omega_1 \cap B_0(x_0, r_0)$ n'est pas vide, il existe donc

$$x_1 \in \Omega_1 \cap B_0(x_0, r_0) \text{ et } r_1 > 0 \text{ tel que : } B_f(x_0, r_0) \subseteq \Omega_1 \cap B_0(x_0, r_0) \subseteq \Omega_1 \cap \Omega$$

et l'on peut prendre $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$ en

Continuant ainsi, on obtient des $x_n \in \Omega_n$

Et des $r_n > 0$, pour $n \geq 1$ tel que :

$$B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \Omega_{n+1} \cap B_0(x_n, r_n) \subseteq \Omega_{n+1} \cap \Omega_n \cap \dots \dots \dots \cap \Omega_1 \cap \Omega$$

Et $0 < r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2}$ alors la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, comme X est

complet elle possède une limite l , comme :

$x_n \in B_0(x_n, r_n)$, $\forall n, p \geq 1$ on obtient : $l \in B_f(x_0, r_0)$, $\forall n \geq 1$ et donc $l \in G \cap \Omega$

L'ALGÈBRE $L_a(X)$:

Soient X et Y deux espaces linéaires sur le même corps k , nous désignons par $L_a(x,y)$ l'ensemble d'opérateurs linéaires de x dans y .

Notons d'abord que $T = 0$, i.e $Tx = 0$ pour tout x dans X , est un élément de $L_a(x,y)$.

Proposition : $L_a(x,y)$ est un sous-espace de l'espace linéaire $F(x,y)$ de toutes les applications de x dans y .

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément que pour $T_1, T_2 \in L_a(X,Y)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, l'opérateur $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ défini par

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(x) = \lambda_1 T_1(x) + \lambda_2 T_2(x); x \in X$$

est linéaire.

Si $Y = X$, nous notons $L_a(X) = L_a(X,X)$. Pour $T_1, T_2 \in L_a(X)$ nous considérons l'opération $T_2 \circ T_1$, la composition, définie par

$$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x)); x \in X$$

Qui joue le rôle d'une multiplication.

OPERATIONS LINEAIRES SUR UN ESPACE LINEAIRE:

Définition : soient X et Y deux espaces linéaires sur le même corps K , une application

$T: X \rightarrow Y$ est additive si

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2, \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X.$$

Une application $T: X \rightarrow Y$ est homogène si

$$T(\lambda x) = \lambda Tx, \text{ pour tout } \lambda \in K \text{ et } x \in X.$$

Une application $T: X \rightarrow Y$ est linéaire si elle est additive et homogène.

En d'autres termes, l'application $T: X \rightarrow Y$ est linéaire si et seulement si

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Tx_1 + \mu Tx_2,$$

pour tout $\lambda, \mu \in K$ et $x_1, x_2 \in X$.

Une application linéaire apparaît aussi sous les noms de transformation linéaire ou opérateur linéaire. Nous utiliserons le nom d'opérateur linéaire.

Exemple : Soient X et Y deux espaces linéaires sur le même corps K , $\dim X = n$ et $\dim Y = m$.

Soient u_1, \dots, u_n une base algébrique pour X et v_1, \dots, v_m , une base algébrique pour Y . Montrons que tout opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est déterminé, dans les bases choisies, de façon unique par une matrice de type :

$$n \times m, A = (\alpha_{ij}) \quad \text{où } \alpha_{ij} \in K, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m.$$

En effet, soit $x \in X$, alors

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$$

Et donc

$$y = Tx = \sum_{i=1}^n \xi_i Tu_i \dots \dots \dots (1)$$

Alors pour connaître l'opérateur linéaire T , il suffit de savoir les images $Tu_i: i = 1, \dots, n$ mais $Tu_i \in Y$, donc

$$Tu_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, n \quad \dots \dots \dots (2)$$

On obtient ainsi la matrice $A = (\alpha_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$

Inversement étant donné une matrice $A = (\alpha_{ij})$ de type $n \times m$ l'application défini par (1) et (2) est linéaire.

❖ Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs linéaires.

Théorème : soit T un opérateur linéaire $T: X \rightarrow Y$, alors

- i. $To = o$
- ii. TX est un sous-espace linéaire de Y
- iii. $\ker T = \{x \in X; Tx = o\}$ est un sous-espace linéaire de X . $\ker T$ est le noyau de T
- iv. T est une application injective si et seulement si $Tx = o$ entraîne $x = o$, i.e. $\ker T = \{o\}$

Démonstration :

- i. Nous avons $To = T(x + (-x)) = Tx + T(-x) = Tx - Tx = o$
- ii. Soient $y_1, y_2 \in TX$ et $x_1, x_2 \in X$ tel que $y_1 = Tx_1$ et $y_2 = Tx_2$ pour tout $\alpha, \beta \in k$, on a

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in TX$
- iii. Soient $x_1, x_2 \in \ker T$ et $\alpha, \beta \in k$, alors

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = o,$$

Et $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker T$.
- iv. Soit T une application linéaire injective, Alors $x \neq o$ entraîne $Tx \neq To = o$, donc $\ker T = \{o\}$, Supposons maintenant que $\ker T = \{o\}$ Alors $Tx = o$ entraîne $x = o$, donc T est injectif, parceque si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 - x_2 \notin \ker T$, donc $T(x_1 - x_2) \neq o$, d'où $Tx_1 \neq Tx_2$

Définition : Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est de rang fini si $\dim TX < \infty$.

Exemple 01 : L'opérateur linéaire nul, 0 , i.e. $0x = 0$, pour tout $x \in X$ est de rang fini. En effet $0X = \{0\}$ et $\dim \{0\} = 0$.

Exemple 02: Une fonctionnelle linéaire $x' : X \rightarrow K$ est un opérateur linéaire de rang fini. En effet $x'(X) = \{0\}$ ou bien $x'(X) = K$, *i.e.* $\dim x'(X) < \infty$.

Exemple 03: Si $\dim X = n$, tout opérateur linéaire de X dans Y est de rang fini. En effet $\dim TX \leq \dim X = n$. Si A est la matrice correspondante à T dans des bases choisies pour X et Y , le rang de la matrice A est égal à la dimension de TX .

OPERATIONS LINEAIRES CONTINUS SUR UN ESPACE NORME:

Soient $(X, \| \cdot \|_1)$ et $(Y, \| \cdot \|_2)$ deux espaces normés sur le même corps K et $T \in L_a(X, Y)$.

Définition : L'opérateur linéaire T est continu à $x_0 \in X$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$, tel que

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

Puisque la continuité de T peut être caractérisée par les suites, T est continue à x_0 si pour toute suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset X$ telle que

$$x_n \xrightarrow{\| \cdot \|_1} x_0 \text{ on a } Tx_n \xrightarrow{\| \cdot \|_2} Tx_0$$

Définition : l'opérateur linéaire $T \in L_a(X, Y)$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$, tel que

$$\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1$$

pour tout $x \in X$.

Théorème : L'opérateur linéaire $T \in L_a(X, Y)$ est continu sur X si et seulement s'il est borné.

Exemple : considérons la transformation de fourrier

$T \in L_a(L^1(\mathbb{R}), \overline{C}_0(\mathbb{R}), \| \cdot \|_{\mathbb{R}})$ définie par

$$(Tf)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} f(u) du, \text{ pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Où $\overline{C}_0(\mathbb{R})$ est l'espace de fonctions continues sur \mathbb{R} qui s'annulent à l'infini.

Alors $\|Tf\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_1$ et T est donc opérateur linéaire continu sur $L^1(\mathbb{R})$.

L'algèbre de Banach

Définition : un algèbre linéaire X muni d'une norme s'appelle une algèbre normée si on a pour tout $x, y \in X$

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Définition : une algèbre de Banach est une algèbre normée qui est complétée par rapport à la norme, i.e. un espace de Banach.

Théorème : soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, Alors $L(X)$ est une algèbre de Banach.

Démonstration : nous savons déjà que $L(X)$ est un espace de Banach et que $L(X)$ est une Algèbre Linéaire avec identité, il nous reste à montrer que pour $T_1, T_2 \in L(X)$, on a

$$\|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\|$$

Soient donc $T_1, T_2 \in L(X)$ alors :

$$\|(T_1 \circ T_2)x\| = \|T_1(T_2x)\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2x\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\| \cdot \|x\|$$

Pour tout $x \in X$, donc $T_1 \circ T_2 \in L(X)$ et $\|T_1 \circ T_2\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\|$

Opérateurs linéaires réguliers

Dans ce paragraphe, nous étudierons les opérateurs linéaires continus qui sont des Homéomorphismes d'un espace de Banach sur lui-même.

Définition : soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est régulier, si

a) $TX = X$

b) T^{-1} existe sur X et $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

L'ensemble d'opérateurs réguliers sur X est noté par $\mathcal{L}_r(X)$

Exemple : soit $X = l_2$ et considérons l'opérateur de déplacement $T_s \in \mathcal{L}(X)$ défini par

$$T_s(X) = T_s((\xi_1, \xi_2, \dots)) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$$

Alors T_s est injective et $T^{-1} \in \mathcal{L}(T_s X)$, mais pas dans $\mathcal{L}(X)$; donc T_s n'est pas régulière.

Théorème 01 :

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$, alors $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$, et $\lambda T_1 \in \mathcal{L}_r(X)$ pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Démonstration : Montrons d'abord que $T_1 \circ T_2$ admet une inverse sur X , et que

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$$

En effet $(T_1 \circ T_2)X = T_1 X = X$ et $(T_1 \circ T_2) \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \circ$

$$(T_1 \circ T_2) = I$$

Puisque l'élément inverse, s'il existe, est unique

$$(T_1 \circ T_2)^{-1} = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})$$

D'autre part

$$\|(T_1 \circ T_2)^{-1}\| = \|T_1^{-1} \circ T_2^{-1}\| \leq \|T_1^{-1}\| \|T_2^{-1}\| < \infty$$

Ce qui montre que $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$.

Si $\lambda \neq 0$, $(\lambda T_1)^{-1} = \frac{1}{\lambda} T_1^{-1}$ et $\|(\lambda T_1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T_1^{-1}\| < \infty$;

Donc $\lambda T_1 \in \mathcal{L}_r(X)$, pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Remarque : l'ensemble $\mathcal{L}_r(X)$ n'est pas fermé, en général par rapport à la somme. En effet, soient $T_1 = I$ et $T_2 = -I$, Alors $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$, mais $T_1 + T_2 = I - I = 0 \notin \mathcal{L}_r(X)$.

Théorème 02 : soient $T \in \mathcal{L}(X)$ ou $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. Si

$\|T\| < 1$, alors $I - T \in \mathcal{L}_r(X)$. Et

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

Démonstration : on sait que la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge localement uniformément et absolument dans $|z| < 1$, De plus $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

Parce que $\|T\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$, ou $T^0 = I$ est convergente en norme, Posons $U = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ Alors nous avons

$$\|U\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty$$

Ce qui entraîne que $U \in \mathcal{L}(X)$.

Montrons que $(I - T)^{-1} = U$ et donc que $(I - T) \in \mathcal{L}(X)$. Soit $U_n = \sum_{k=0}^n T^k$ Alors nous avons

$$U_n \circ (I - T) = (I - T) \circ U_n = I - T^{n+1}$$

Puisque U_n converge en norme vers U et T^{n+1} en norme vers 0, nous obtenons

$$U \circ (I - T) = (I - T) \circ U = I$$

Et donc $(I - T) \in \mathcal{L}_r(X)$

Exemple : considérons $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ et la transformation T de X sur X qui se compose d'une contraction d'un facteur r , $0 < r < 1$ et d'une rotation autour de l'origine avec l'angle φ , La matrice A qui représente T par rapport à la base $(1,0), (0,1)$ est

$$A = \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Puisque $\frac{1}{r} \cdot T$ préserve la norme, nous avons $\|T\| = r < 1$

D'après le théorème 02 l'opérateur $(I - T) \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^2)$ et possède la représentation

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 - r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & 1 - r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Nous allons vérifier que si

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

En effet nous avons :

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{1+r^2-2r\cos\varphi} \begin{pmatrix} 1 - r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & 1 - r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$A^n = \begin{pmatrix} r^n \cos n\varphi & r^n \sin n\varphi \\ -r^n \sin n\varphi & r^n \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

Et nous obtenons en posant $z = re^{i\varphi}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z^k & \operatorname{Im} z^k \\ -\operatorname{Im} z^k & \operatorname{Re} z^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} & \operatorname{Im} \frac{1}{1-z} \\ -\operatorname{Im} \frac{1}{1-z} & \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|1-z|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(1-\bar{z}) & \operatorname{Im}(1-\bar{z}) \\ -\operatorname{Im}(1-\bar{z}) & \operatorname{Re}(1-\bar{z}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{1+r^2-2r\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} 1-r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi & 1-r\cos\varphi \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}
 \end{aligned}$$

Le prochain théorème qui est une conséquence directe de (théorème 01) dit que si $T_1 \in \mathcal{L}_r(X)$ et si T_2 est assez proche de T_1 alors T_2 est aussi dans $\mathcal{L}_r(X)$

Théorème 03 :

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$ et $T_1 \in \mathcal{L}_r(X)$. Si

$\|T_1 - T_2\| < \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$ alors $T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$. De plus :

$$T_2^{-1} = T_1^{-1} + T_1^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} ((T_1 - T_2) \circ T_1^{-1})^k$$

Démonstration : en effet, nous avons

$$\|I - T_2 \circ T_1^{-1}\| = \|(T_1 - T_2) \circ T_1^{-1}\| \leq \|T_1 - T_2\| \|T_1^{-1}\| < 1$$

D'où $T_2 \circ T_1^{-1} \in \mathcal{L}_r(X)$. Et d'après le théorème 01 $(T_2 \circ T_1^{-1}) \circ T_1 = T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$.

De plus :

$$(T_2 \circ T_1^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T_2 \circ T_1^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((T_1 - T_2) \circ T_1^{-1})^k$$

Et

$$T_2 \circ T_1^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ((T_1 - T_2) \circ T_1^{-1})^k$$

En multipliant à gauche par T_1^{-1} on obtient la formule du théorème.

Corollaire : l'ensemble $\mathcal{L}_r(X)$. Est ouvert par rapport à la topologie induite par la norme sur $\mathcal{L}(X)$.

Théorème : l'opération $T \rightarrow T^{-1}$ est un opérateur continue dans $\mathcal{L}_r(X)$.

Démonstration : soient $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(X)$ tels que

$$\|T_1 - T_2\| < \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$$

On a :

$$\begin{aligned} \|T_2^{-1} - T_1^{-1}\| &\leq \|T_1^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} (\|T_1 - T_2\| \|T_1^{-1}\|)^k \\ &= \frac{\|T_1 - T_2\| \|T_1^{-1}\|}{1 - \|T_1 - T_2\| \|T_1^{-1}\|} \cdot \|T_1^{-1}\| \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{T_2 \rightarrow T_1} T_2^{-1} = T_1^{-1}$$

Opérateurs linéaires compacts

Définition :

Un opérateur linéaire $T \in L_a(x, y)$ est compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné X est relativement compact dans Y , notons par $L_c(x, y) \subset L_a(x, y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de x dans y

❖ Remarque :

Si $T \in L_c(x, y)$ alors $T \in L(x, y)$ i.e. opérateur linéaire compact est continu, en effet soit $E \subset X$ un ensemble borné quelconque alors TE étant relativement compact, donc borné et T est continu.

Exemple :

Considérons l'espace de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_{[0,1]})$ et soit K une fonction

Continue sur le carré $[0,1] * [0,1]$ alors l'opérateur linéaire donné par :

$(TF)(t) = \int_0^1 K(t, u)F(u)du$ pour tout $F \in c([0,1])$ est compact

En effet, parce que la fonction $k(t, u)$ est continue sur le carré $[0,1] * [0,1]$ elle est uniformément continue

Donc : $|K(T_1, u) - K(T_2, u)| < \varepsilon$ si $|T_1 - T_2| < \delta$ d'où :

D'autre part : $\|TF\|_{[0,1]} = \sup_t \left| \int_0^1 k(t, u)F(u)du \right| \leq M\|F\|_{[0,1]}$

Ce qui veut dire TE est uniformément borné, alors l'ensemble est TE est relativement compact.

NOTIONS TOPOLOGIQUES

Soit E un ensemble quelconque non vide. $\tau \subset P(E)$: ensemble des parties de E .

Définition 1 :

On dit que τ est une topologie sur E si elle vérifie les trois assertions suivantes :

1. $\emptyset, E \in \tau$.
2. Si une réunion quelconque de partie de τ appartient à τ (stabilité par réunion quelconque).
3. $\forall O_1, O_2 \in \tau : (O_1 \cap O_2) \in \tau$ (stabilité par intersection finie).

Définition 2 :

Si τ est une topologie sur E , les éléments de τ sont appelés les τ -ouverts. Et on note (E, τ) un espace topologique.

Exemples

- $(E, \mathcal{P}(E))$ est appelé espace topologique discret.
- $(E, \{\emptyset, E\})$ est appelé espace topologique grossier.

Définition 3 :

Soit $F \subset E$, on dit que F est un fermé si $C_E F$ est un ouvert.

❖ Remarques

- E et \emptyset sont ouverts et fermés à la fois (pour toute topologie).
- Tout élément de l'espace topologique discret $(E, \mathcal{P}(E))$ est ouvert et fermé à la fois.

Définition 4 :

Soient τ une topologie sur E , $B \subset \tau$, on dit que B est une base pour la topologie τ si :

$$\forall O \in \tau, \exists (b)_{i \in I} \in B \text{ tel que } O = \bigcup (b)_i \text{ pour } i \in I.$$

Exemples :

- Les intervalles ouverts de \mathbb{R} forment une base de la topologie usuelle de \mathbb{R} .
- les pavés ouverts de \mathbb{R}^2 forment une base de la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 .
- Les singletons forment une base de la topologie discrète.

Théorème : (Banach – Steinhaus).

Soit :

- 1) $(x, \| \cdot \|_1)$ et $(y, \| \cdot \|_2)$ deux espaces de Banach.
- 2) $\{T_\alpha; \alpha \in I\} \subset \mathcal{L}(x, y)$
- 3) Il existe pour tout $x \in X$ un nombre $M(x)$ tel que pour tout $\alpha \in I$, on ait $\|T_\alpha x\|_2 \leq M(x)$

Alors il existe un $k > 0, k < \infty$, tel que $\|T_\alpha\| \leq k$ pour tout $\alpha \in I$.

Démonstration :

Si $I = \mathbb{N}$,

les ensembles $Y_m = \{x \in X; \|T_n x\| \leq m; \text{pour tout } n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}\}$ sont fermés et $= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$, x étant un espace métrique complet, le théorème de Baire nous assure l'existence d'un Y_{m_0} tel que $Y_{m_0}^\circ \neq \emptyset$

c-à-d, il existe $x_0 \in X$ et $p_0 > 0$ tel que $\|T_n x\| \leq m_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

puisque $\|T_n x_0\| \leq M(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

nous avons pour $x \in \overline{\mathcal{B}(0, p_0)}$

$$\|T_n x\| \leq \|T_n x_0\| + \|T_n(x + x_0)\| \leq 2m_0$$

Ce qui entraîne que pour $k = 2m_0/p_0$

On a : $\|T_x\| \leq k$

APPLICATIONS

Application 01 : (sommes de Riemann)

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

De sorte que E est bien un espace de Banach définie par :

$$u_n(f) = n \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour tout fonction f , $\frac{u_n(f)}{n}$ n'est autre que l'erreur commise dans le calcul de l'intégrale de f lorsque l'on prend une somme de Riemann correspondant à une subdivision régulière de $[0,1]$ en n intervalle égaux on montre que $\|u_n\| = 2n$ de sorte que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| = +\infty$ et donc que le complémentaire de A est dense.

Une fonction f appartenant a ce complémentaire vérifie que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n(f)\| = +\infty$, ce que signifie que l'ensemble $u_n(f)$ n'est pas borné et que l'erreur commise $\frac{u_n(f)}{n}$ n'est pas un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Application 02 : (limite d'une suite d'application linéaire)

Soit :

E : espace de Banach

F : e.v normé

(f_n) : suite d'application linéaire

Et que : $f_n : E \rightarrow F$

$$x \rightarrow \|f_n(x)\|$$

Et $f_n \xrightarrow{C.S} f$

1) Linéarité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| = f(x)$$

Donc f est linéaire.

2) Continuité :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| &= 0 \\ \Leftrightarrow \sup_{x \in E} \|f_n(x) - f(x)\| &< \infty \\ \Leftrightarrow \|f_n(x)\| &\text{ est bornée} \end{aligned}$$

D'après le théorème de Banach – steinhaus :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n(x)\| < M$$

Par passage à la limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| = \|f(x)\| \leq M \text{ (bornée)}$$

Donc f est continue.

CONCLUSION

Le théorème de Banach-steinhaus a des résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle mais il a aussi été prouvé indépendamment par Hans Hahn, Il affirme qu'une famille d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach est uniformément bornée si et seulement si elle est ponctuellement bornée.