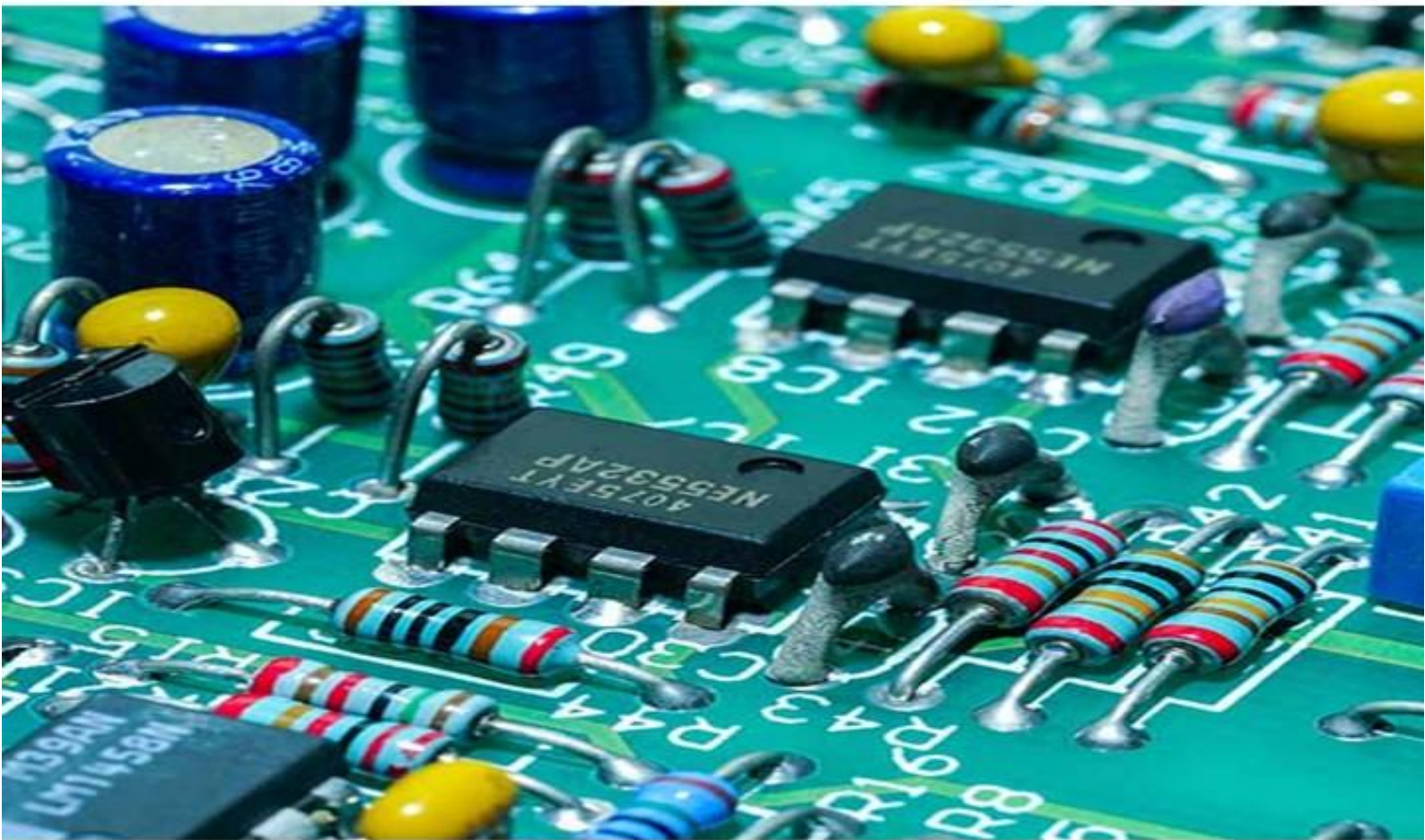


Physique appliquée

Cours et exercices corrigés

Licence - 2^e année
Sciences et technologies



Électronique Fondamentale-1-
1^{er} Edition

Dr. QUEDDOUH Ahmed

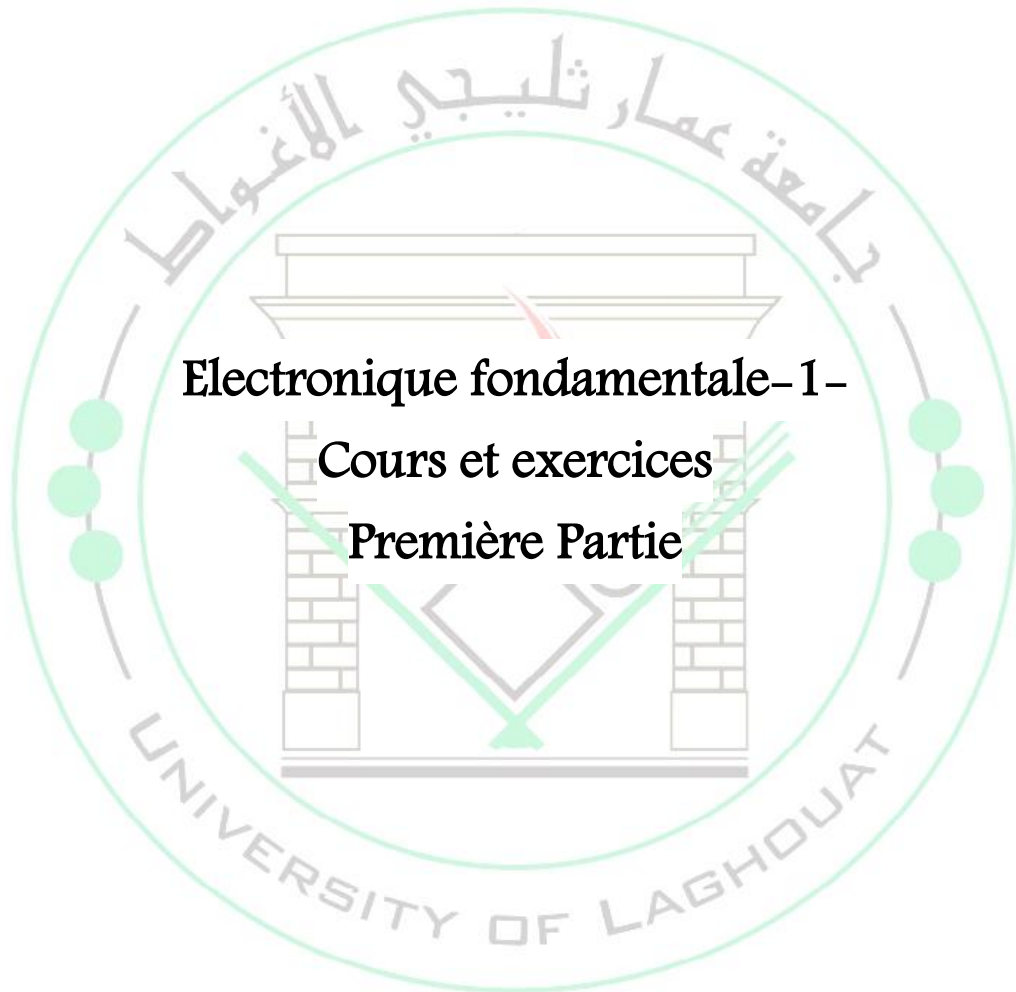
2022-2023



جامعة عمار تليجي الأغواط
Université Amar Telidji - Laghouat



Faculté de TECHNOLOGIE
Département tronc commun
Sciences et technologie



Réalisé par

Dr. GUEDDOUH Ahmed

Année universitaire
2022/2023

Table des matières

| | | |
|--------------|--|-----------|
| I. | Introduction Générale | 1 |
| II. | Régime continue – Circuits électriques | 4 |
| | Lois Kirchhoff | 4 |
| 1. | Préface | 5 |
| 2. | Concepts électriques | 5 |
| 3. | Éléments de circuit électrique | 5 |
| 3.1. | Éléments Passifs | 6 |
| 3.1.1. | Appareils de Réception | 6 |
| 3.1.2. | Résistances | 6 |
| 3.1.2.1. | Résistances fixes | 7 |
| 3.1.2.1.1. | <i>Les résistances au carbone</i> | 7 |
| 3.1.2.1.1.1. | <i>Les résistances à couche de carbone aggloméré :</i> | 7 |
| 3.1.2.1.1.2. | <i>Les résistances à couche de carbone :</i> | 7 |
| 3.1.2.1.2. | <i>Les résistances à couche de film métallique</i> | 9 |
| 3.1.2.1.3. | <i>Les résistances à couche d'oxyde métallique</i> | 10 |
| 3.1.2.1.4. | <i>Les résistances bobinées de précision :</i> | 10 |
| 3.1.2.1.5. | <i>Les résistances bobinées de puissance :</i> | 10 |
| 3.1.2.2. | Résistances réglages ou ajustables. | 11 |
| 3.1.2.2.1. | Rhéostat..... | 11 |
| 3.1.2.2.2. | Résistance ajustable..... | 11 |
| 3.1.2.2.3. | Potentiomètre | 11 |
| 3.1.3. | Bobines..... | 13 |
| 3.1.4. | Condensateurs | 14 |
| 3.2. | Éléments Actifs | 16 |
| 3.2.1. | Générateur de tension pure et réelle | 16 |
| 3.2.2. | Générateur de courant pur et réel | 16 |
| 3.2.3. | Potentiel entre les éléments passifs | 18 |
| 3.2.4. | Potentiel entre un générateur de tension..... | 18 |
| 3.2.5. | Association des éléments passifs..... | 19 |
| 3.2.5.1. | Association des résistances | 19 |
| 3.2.5.1.1. | Association des résistances en série | 19 |
| 3.2.5.1.2. | Association de résistances en parallèle | 20 |
| 3.2.5.2. | Associations des condensateurs..... | 20 |
| 3.2.5.2.1. | Condensateurs associés en parallèle..... | 20 |
| 3.2.5.2.2. | Condensateurs associés en série | 21 |
| 3.2.6. | Association des générateurs de tension | 21 |
| 3.2.6.1. | Association des générateurs de tension série..... | 21 |
| 3.2.6.2. | Association des générateurs de tension parallèle | 22 |
| 4. | Circuit (Réseau) électrique | 22 |
| 4.1. | Dipôle | 23 |
| 4.2. | Nœud | 23 |
| 4.3. | Branche..... | 23 |

| | | |
|-------------|---|-----------|
| 4.4. | Maille..... | 23 |
| 5. | Lois de Kirchhoff | 23 |
| 5.1. | Loi de Kirchhoff des nœuds | 24 |
| 5.2. | Loi de Kirchhoff des mailles | 24 |
| III. | Analyse des circuits électriques | 34 |
| 1. | Préface | 35 |
| 2. | Méthode des courants virtuels (Méthode de Maxwell) | 35 |
| 2.1. | Méthode directe des courants Maxwell (Méthode Matriciel) | 35 |
| 2.2. | Méthode des courants virtuelles (Méthode sans les matrices) | 37 |
| 3. | Théorème de superposition..... | 37 |
| 4. | Théorème de Thevenin | 39 |
| 4.1. | Exemple d'application..... | 39 |
| 4.1.1. | Calcul de la tension de Thevenin $U_{AB} = E_{TH}$ | 40 |
| 4.1.2. | Calcul de la résistance de Thevenin $R_{TH} = R_{A B }$ | 40 |
| 5. | Théorème de Norton..... | 42 |
| 5.1. | Calcul de la résistance de Norton R_N | 42 |
| 5.2. | Calcul du courant Norton $I_N = I_0$ | 43 |
| 6. | Théorème de Kennelly | 44 |
| 7. | Théorème de Millman, ou (Théorème du « potentiel de nœud »)..... | 50 |
| 8. | Théorème de substitution | 51 |
| 9. | Théorème de réciprocité | 51 |
| 10. | Théorème de Puissance maximale transférée..... | 53 |
| IV. | Régime continu | 69 |
| 2. | Les signaux électriques (selon la nature de l'information transportée). | 70 |
| 2.1. | Les signaux analogiques..... | 70 |
| 2.2. | Les signaux numériques | 70 |
| 3. | Les signaux électriques (selon leur forme)..... | 70 |
| 3.1. | Les signaux variables. | 70 |
| 3.2. | Les signaux continus. | 71 |
| 3.3. | Les signaux périodiques. | 71 |
| 3.3.1. | Signal sinusoïdale..... | 71 |
| 3.4. | Valeurs moyennes et valeurs efficaces..... | 73 |
| 4. | Formes des signaux électriques non périodiques : | 75 |
| 4.1. | Fonction échelon | 75 |
| 5. | Transformation de Fourier..... | 76 |
| 5.1. | Série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales..... | 78 |
| 5.2. | Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes..... | 79 |
| V. | Régime alternatif sinusoïdal | 85 |
| 1. | Préface | 86 |
| 2. | Réponses des dipôles élémentaires parfaits..... | 86 |
| 2.1. | Impédance..... | 86 |

| | | |
|-------------|--|------------|
| 3. | Méthode de résolution algébrique | 88 |
| 4. | Méthode de représentation de Fresnel | 88 |
| 5. | Méthode des nombres complexes..... | 89 |
| 6. | Puissance et énergie en régime sinusoïdal..... | 90 |
| 6.1. | Puissance instantanée | 90 |
| 6.2. | Puissance moyenne..... | 90 |
| 6.3. | Puissance active et puissance réactive..... | 91 |
| VI. | Quadripôles | 98 |
| 1. | Préface | 99 |
| 2. | Représentation Matricielle..... | 99 |
| 2.1. | Matrice impédance | 99 |
| 2.2. | Paramètres admittance..... | 100 |
| 2.3. | Paramètres hybrides..... | 102 |
| 2.4. | Paramètres hybrides inverses | 103 |
| 2.5. | Matrices de transfert | 104 |
| 3. | Association des quadripôles | 104 |
| 3.1. | Addition de deux quadripôles..... | 104 |
| 3.2. | Multiplication de deux quadripôles | 105 |
| VII. | Réponse en fréquence (filtres) | 110 |
| 1. | Préface | 111 |
| 2. | Diagrammes de Bode | 111 |
| 3. | Types des filtres..... | 114 |
| 3.1. | Filtre passe-bas premier ordre | 114 |
| 3.1.1. | Fonction de transfert..... | 114 |
| 3.1.2. | Fréquence de coupure ω_C | 115 |
| 3.1.3. | Diagramme de Bode : | 116 |
| 3.2. | Filtre passe-haut premier ordre..... | 116 |
| 3.2.1. | Fonction de transfert..... | 117 |
| 3.2.2. | Fréquence de coupure ω_C | 117 |
| 3.2.3. | Diagramme de Bode : | 117 |
| 3.3. | Filtre passe bande | 118 |
| 3.3.1. | Fonction de transfert $H(j\omega)$: | 119 |
| 3.3.2. | Fréquences de coupures..... | 119 |
| 3.3.3. | Bande passante | 120 |
| 3.3.4. | La nature du filtre : Filtre passe bande | 121 |
| | Conclusion | 128 |
| | Annex | 131 |
| | Les Matrices | 131 |
| 1. | Préface | 132 |
| 1. | Résolution des systèmes d'équations | 132 |
| 1.1. | Méthode par substitution | 132 |

| | | |
|--------|--|------------|
| 1.2. | Méthode par combinaison (ou par élimination) | 132 |
| 2. | Calcul matriciel-Systèmes d'équations linéaires | 133 |
| 3. | Résolution des équations matricielles | 135 |
| 3.1. | Addition matricielle..... | 135 |
| 3.2. | Soustraction Matricielle | 135 |
| 3.3. | Produit matriciel..... | 136 |
| 3.3.1. | Produit d'une matrice par un nombre réel ou complexe | 136 |
| 3.3.2. | Multiplication des matrices | 137 |
| 3.4. | Déterminant Matrice | 138 |
| 3.5. | Matrice inverse..... | 139 |
| 3.6 | Exemple de la méthode matricielle | 141 |
| | Références | 143 |

I. Introduction Générale

En ma qualité d'enseignant, il me semble que nous devons essayer d'offrir aux étudiants non seulement le maximum d'informations, qu'internet permet aux apprenants, mais nous devons tenter de rendre ces informations simples et compréhensibles, et accessibles à l'étudiant ordinaire. En tant que contribution à la diffusion des connaissances et à participer à cet appel d'offres, on a estimé que nous devons contribuer à cette action, même si ça sera limité aux étudiants qu'on enseigne, et on espère que cette contribution apportera un complément pédagogique au monde de l'électronique fondamentale.

L'électronique est une science de l'érudition technique, ou science de l'ingénieur, qui constitue l'une des branches les plus importantes de la physique appliquée, dont l'appellation dérive du mot « électron », souvent associé au traitement d'un signal électrique faible véhiculant des informations telles que le courant, la tension ou l'énergie électrique.

Dans cette définition, le concept d'information dans son sens le plus large : détermine toute quantité physique mesurable, telle que la température, le son ou la vitesse, ou abstrait comme une image, un symbole, etc., qui peut évoluer avec les lois physiques connues.

Le monde d'électronique évolue sur deux axes principaux :

1. Réduction de la taille des composants électroniques (transistors et autres structures similaires), ce qui permet l'intégration de plus en plus efficace, et ce qui a conduit à des progrès significatifs dans le monde de l'électronique.
2. Développement progressif des Méthodes et les principes utilisés dans le traitement du signal, initialement le signal analogique, puis numérique, Jusqu'à ce qu'ils deviennent des progrès sous la forme de programmes intégrés, où les fonctions électroniques de plus en plus complexes ont été intégrées dans la plupart des domaines techniques dans des composants électroniques (microprocesseur, microcontrôleur...Etc.).

Ce manuscrit électronique fondamentale -1- (partie I), est destiné aux étudiants du premier cycle d'enseignement universitaire, Il se compose de plusieurs chapitres, où on a commencé par une introduction mathématique concernant les matrices, qui est importante pour la compréhension du chapitre d'analyse des circuits électriques, ensuite on a enchaîné avec le chapitre des circuits électriques, où on a donné des concepts et des règles conventionnelles que l'étudiant (lecteur) doit les respecter pour comprendre le reste du contenu du manuscrit. Dans le deuxième chapitre je suis entré dans le vif de cet ouvrage en apprenant à analyser les circuits électriques à partir de plusieurs théorèmes. Après, on a abordé le régime variable tout en spécifiant le signal alternatif sinusoïdal et le mode d'analyse dans ce système, puis l'étude des quadripôles qui sont présentés comme une partie mathématique sous forme électrique pour compléter la poursuite d'analyse des circuits électrique dans le cadre de l'enseignement académique, et cela pour faciliter l'étude

représentée dans le dernier chapitre de cette partie du manuscrit à savoir les filtres passifs où nous avons abordé différents types des filtres, ainsi, on espère que l'étudiant sera plus compétant et saura l'importance de comprendre les concepts de base de l'électronique fondamentale.

II. Régime continue – Circuits électriques

Lois Kirchhoff

1. Préface

Un circuit électrique est un ensemble simple ou complexe de conducteurs et de composants électriques ou électroniques parcourus par un courant électrique.

2. Concepts électriques

- La charge électrique $1C = q$ est la quantité d'électricité transmise par 1 A (Ampère) dans une période d'une seconde. Sachant que $q = I.t$ où q est l'unité du Coulomb, L'Intensité (I) a pour unité Ampère, Quant au temps, son unité de mesure étant la seconde. La charge d'électrons mesuré est $e = 1,6.10^{-19} C$.

- La tension électrique (également appelée différence de potentiel D.D.P) et son unité est le Volt. Cette unité (1V) est la différence de tension entre deux points d'un câble parcouru par un courant ($I = 1A$) quand on applique une puissance ($P = 1W$), connaissant la loi : $V = P/I$.

- Le Weber (symbole : Wb) est l'unité dérivée de flux d'induction magnétique du système international (SI), est le flux magnétique qui pénètre dans une boucle fermée, ce qui crée une tension de 1V pendant une seconde (sur une base régulière), nous avons la loi $\Phi = V.t$.

- Le Tesla (symbole : T), nommé en l'honneur du physicien serbe Nikola Tesla, est l'unité dérivée d'induction électromagnétique (appelé parfois densité de flux magnétique ou champ magnétique) du Système international d'unités (SI), est le champ magnétique résultant d'un flux de 1 Weber à travers une surface de 1 mètre carré. Nous avons loi $\Phi = \int \vec{B}.d\vec{S}$ qui se transforme en cas simples en : $\Phi = \vec{B}. \vec{S}$.

- Le champ électrique est la variation du potentiel (gradient) sur une variation de position, $\vec{E} = -\vec{grad}(v)$, $\vec{E} = -\frac{\partial v}{\partial r} \vec{r}$ avec : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dans le cas simple $E \equiv \frac{V}{r}$.

3. Éléments de circuit électrique

Un circuit électrique se compose des éléments actifs (sources d'énergie) et d'autres passifs (consommateurs). Si ces éléments passifs consomment toute l'énergie, donc ils sont des résistances R, mais si l'énergie est stockée sous la forme d'un champ magnétique, ils sont des bobines, caractérisées par une inductance L, et si elle est stockée sous la forme d'un champ électrique, ils sont des condensateurs caractérisés par une capacité C. Certains éléments ont plus d'une propriété (par exemple, Le condensateur peut avoir une capacité et en même temps une résistance interne). Les éléments qui n'ont qu'une seule propriété sont des éléments purs. Ces éléments (dipôles) sont symétriques par conséquent ils ne sont pas polarisés (que ce soit une polarité positive ou négative), néanmoins sous l'influence de la source d'alimentation, ils sont polarisés.

3.1. Éléments Passifs

Les éléments passifs ne sont polarisés que s'ils sont sous l'influence d'une source d'énergie (générateur de tension ou de courant), si c'est le cas, quand le courant les traverse, ils seront polarisés entre les extrémités (pôle positif et pôle négatif), il y a une différence de potentiel entre l'élément (une tension) et le courant électrique passe à travers l'élément du plus haut potentiel (pôle positif), vers le plus bas potentiel (pôle négatif), comme l'eau qui circule du haut vers le bas.

3.1.1. Appareils de Réception

Sont des dispositifs qui consomment de l'énergie lorsqu'ils sont traversés par un courant et qui crée une tension entre leurs pôles appelés forces contre électro- motrices.

3.1.2. Résistances

La résistance électronique est l'un des composants primordiaux dans le domaine d'électronique et l'électrotechnique. Leur fonction est de s'opposer au passage du courant, L'unité de mesure des résistances est l'Ohm (Ω), elle est symbolisée par :

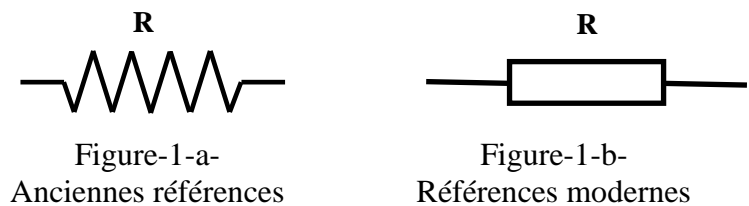


Figure-1- Symbole des résistances

On en trouve de nombreux types, différents par leurs structures, leurs formes, leurs caractéristiques électriques selon la technique de fabrication adoptée et l'emploi auquel elles sont destinées.

On peut classer les résistances suivant le modèle de la figure -2-ci-dessous :

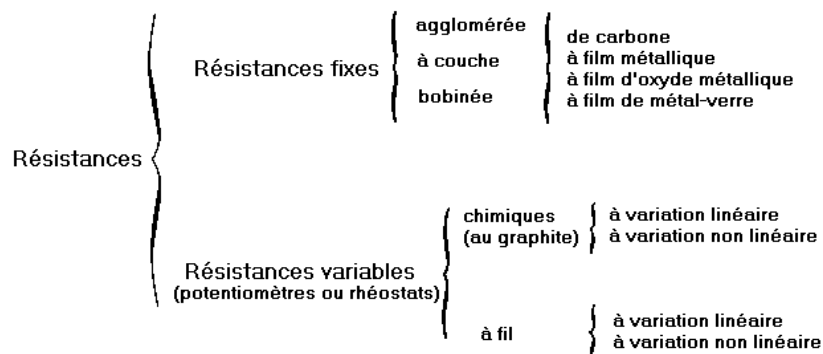


Figure-2- Catégorie des Résistances.

3.1.2.1. Résistances fixes

3.1.2.1.1. Les résistances au carbone

3.1.2.1.1.1. Les résistances à couche de carbone aggloméré :

Ce carbone finement broyé et compressé à chaud au centre d'un cylindre isolant résulte des résistances différentes valeurs selon la concentration de carbone. Dans la figure -3- ci-dessous le carbone se voit souvent à l'intérieur de la résistance.



Figure-3- Résistances bobinées de précision

3.1.2.1.1.2. Les résistances à couche de carbone :

Le carbone est déposé en une fine couche autour d'un cylindre isolant. La valeur est ajustée par des stries visibles en grattant la surface laquée.



Figure-4- Résistances bobinées de précision

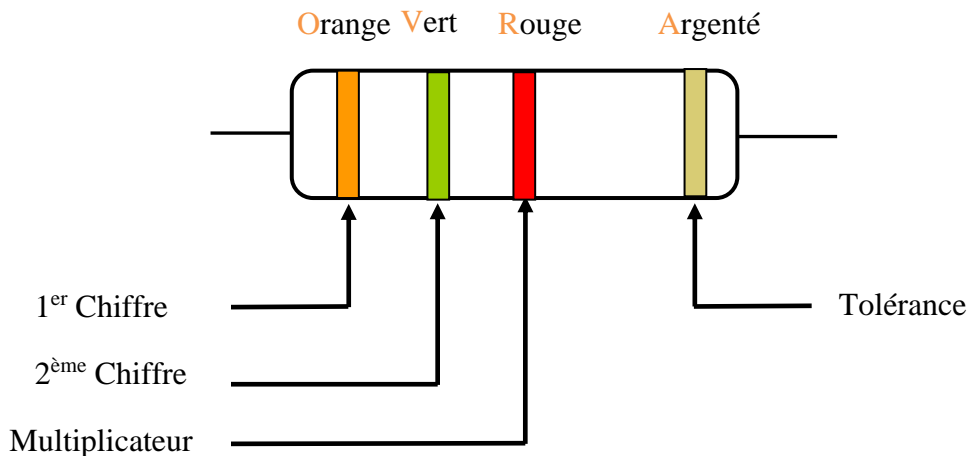
| Couleur | 1er Chiffre | 2ème Chiffre | Multiplicateur | Tolérance |
|---------|-------------|--------------|----------------|-------------|
| Noir | 0 | 0 | $\times 10^0$ | |
| Marron | 1 | 1 | $\times 10^1$ | $\pm 1 \%$ |
| Rouge | 2 | 2 | $\times 10^2$ | $\pm 2 \%$ |
| Orange | 3 | 3 | $\times 10^3$ | |
| Jaune | 4 | 4 | $\times 10^4$ | |
| Vert | 5 | 5 | $\times 10^5$ | |
| Bleu | 6 | 6 | $\times 10^6$ | |
| Violet | 7 | 7 | $\times 10^7$ | |
| Gris | 8 | 8 | | |
| Blanc | 9 | 9 | | |
| Argent | | | 10^{-1} | $\pm 10 \%$ |
| Or | | | 10^{-2} | $\pm 5 \%$ |

Phrase mnémotechnique :

“ **N**e **m**angez **r**ien **o**ù jeûnez **v**oilà **b**ien **v**otre **g**rande **b**êtise. ”

Noir-Marron-Rouge-Orange-Jaune-Vert Bleu-Violet-Gris-Blanc

Exemple 1:



Solution 1 :

Premier chiffre significatif : Orange : 3

Deuxième chiffre significatif : vert : 5

Multiplicateur : Rouge : 2

Tolérance : Argenté : $\pm 10 \%$

Donc la valeur de cette résistance est : 35×10^2 à 10% soit $3,5 \text{ k}\Omega$ à 10% .

Remarque : Il faut tout d'abord placer la résistance dans le bon sens. En général, la résistance possède un anneau doré ou argenté, qu'il faut placer à droite. Dans d'autres cas, c'est l'anneau le plus large qu'il faut placer à droite.

Il existe trois types de résistances : les résistances à 4, 5 et 6 anneaux.

1) Résistances à 4 anneaux

- Les deux premiers anneaux donnent les chiffres significatifs (le premier donne la dizaine, le second l'unité) et la troisième donne le multiplicateur (la puissance de 10 qu'il faut multiplier avec les chiffres significatifs).
- Le quatrième signifie la tolérance (les incertitudes sur la valeur réelle de la résistance donnée par le constructeur).

2) Résistances à 5 anneaux

- Les trois premiers anneaux donnent les chiffres significatifs.
- La quatrième donne le multiplicateur (la puissance de 10 qu'il faut multiplier avec les chiffres significatifs).
- Le cinquième la tolérance (les incertitudes sur la valeur réelle de la résistance donnée par le constructeur).

3) Résistances à 6 anneaux

- Les quatre premiers anneaux ont la même signification que les résistances à 5 anneaux (voir ci-dessus).
- Le sixième est un coefficient de température (variation de la conductivité électrique avec la température).

3.1.2.1.2. Les résistances à couche de film métallique

Une fine couche de métal est déposée à la surface d'un support isolant. Couche résistante obtenue par évaporation sous vide d'un métal (or, platine, nickel, chrome) dans un four où le vide atteint 10^{-6} mm de mercure. L'épaisseur de la couche varie de 100 à 1000 Å suivant le métal et la valeur désirée. Leurs puissances varient entre 0.0625 W jusqu'à quelques W.

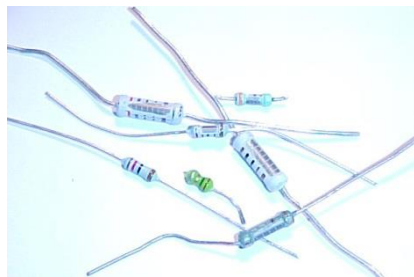


Figure-5- Résistances à couche de film métallique

3.1.2.1.3. Les résistances à couche d'oxyde métallique

Une fine couche d'oxyde métallique (généralement à base d'étain et d'antimoine) est déposée à la surface d'un support isolant. Les stries visibles, en grattant la laque, permettent l'ajustement de la valeur ohmique. L'oxyde métallique apparaît alors noir et brillant. Ils sont caractérisés par une meilleure stabilité et précision.

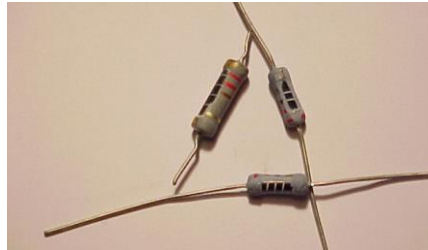


Figure-6- Résistances bobinées de précision

3.1.2.1.4. Les résistances bobinées de précision :

Le plus souvent constituées d'un fil enroulé sur un mandrin isolant en matière réfractaire et recouverte d'une couche de protection (vernis, émail, ciment ou verre). Leurs utilisations préférentielles atteignent jusqu'à 10 watts environ.



Figure-7- Résistances bobinées de précision

3.1.2.1.5. Les résistances bobinées de puissance :

Le plus souvent constitué d'un fil enroulé sur un mandrin isolant en matière réfractaire et recouverte d'une couche de protection (vernis, émail ou ciment). Leurs utilisations préférentielles sont de 5 à 20 watts environ.



Figure-8- Résistances bobinées de puissance

3.1.2.2. Résistances réglages ou ajustables.

Ne pas confondre entre résistances réglables ou ajustables et résistances variables.

Les résistances réglages sont des résistors sur lesquels on peut agir pour modifier la résistance en manœuvrant un bouton. Un contact se déplace sur le conducteur et fait ainsi varier la longueur de la partie utile de ce conducteur.

3.1.2.2.1. Rhéostat

Le rhéostat est une résistance réglable. En tournant (glissant) le bouton (curseur), un système de guidage hélicoïdal déplace un contact qui vient frotter sur les spires de fil de nichrome.

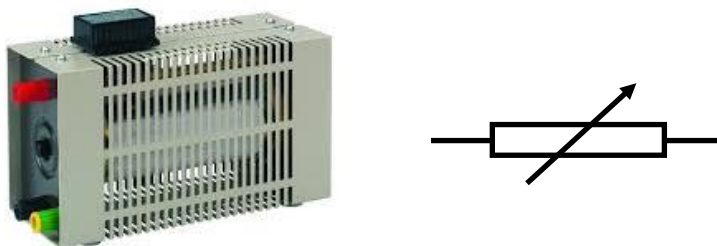


Figure-9- Rhéostat

3.1.2.2.2. Résistance ajustable

Ce résistor ajustable est constitué d'une piste circulaire en carbone sur laquelle vient frotter un contact que l'on peut déplacer à l'aide d'un tournevis. On remarquera qu'il existe 3 bornes, car les deux extrémités de la piste peuvent être connectées. Si on n'utilise qu'une seule des 2 bornes situées aux extrémités de la piste et la borne centrale on a une résistance ajustable (ou réglable). Si on utilise les 3 bornes, on a un potentiomètre.

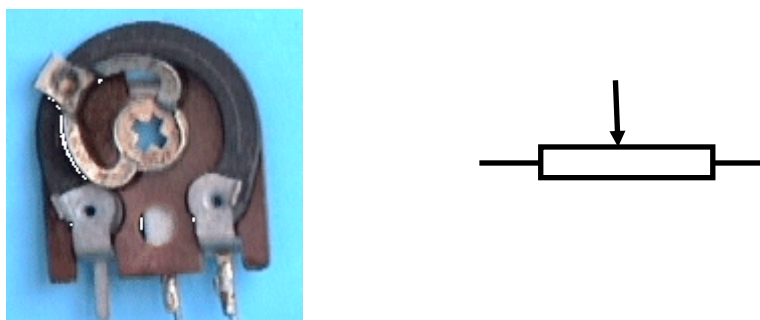


Figure-10- Résistances

3.1.2.2.3. Potentiomètre

Chaque fois que vous tournez un bouton pour augmenter ou diminuer le son de votre radio, la luminosité de votre lustre, vous manœuvrez un potentiomètre. Il existe des potentiomètres rotatifs, mais aussi des potentiomètres rectilignes dans lequel le contact se déplace en ligne droite (comme le rhéostat au-dessus). On distingue plusieurs sortes de potentiomètres suivant la variation de la résistance en fonction du déplacement du contact.

Si la résistance est proportionnelle au déplacement le potentiomètre est dit linéaire (type A)
 Mais on fabrique également des potentiomètres à variation logarithmique (type B).

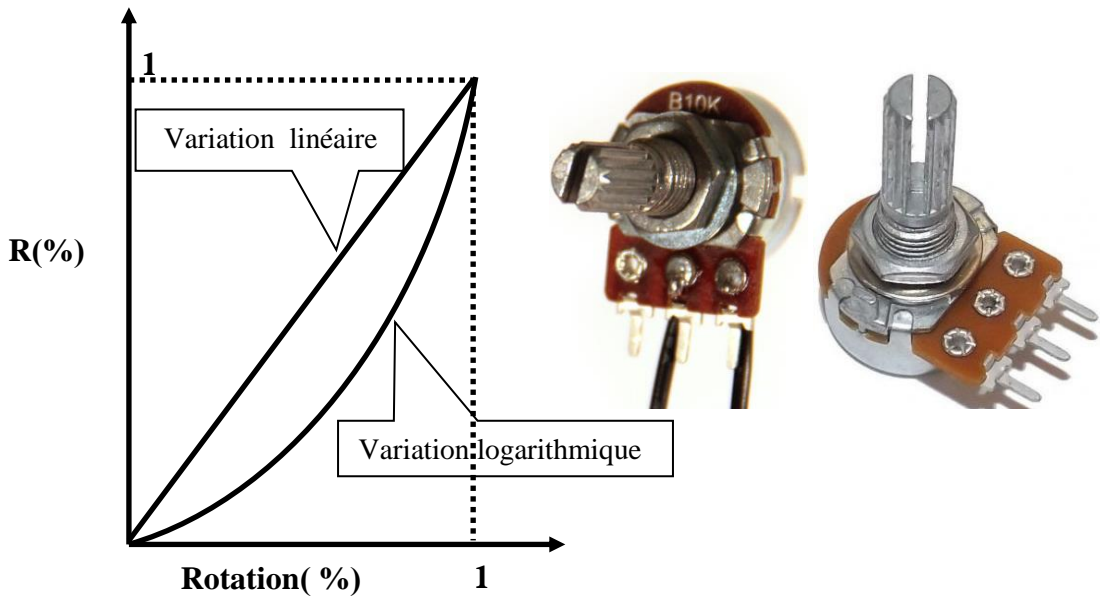


Figure-11- potentiomètre linéaire et logarithmique.

Remarque 1 : Il existe une famille de résistances qui possède la propriété de varier en fonction d'un paramètre particulier. Parmi les plus utilisées, nous trouvons :

- a. **Thermistances** sont des résistances dont la valeur varie en fonction de la température.
 - CTP : thermistance à coefficient de température positif.
 - CTN : thermistance à coefficient de température négatif.
- b. **Photo résistors (LDR)** sont des résistances dont la valeur varie en fonction de l'éclairement.
- c. **Varistors (VDR) (ou varistances)** sont des dipôles résistifs symétriques dont la caractéristique $U = f(I)$ n'est pas linéaire. La résistance diminue lorsque la tension augmente, d'où l'utilisation de varistors pour éviter ou limiter les surtensions.

Remarque 2 : Il existe des séries normalisées nommées E_{nn} , où nn est le nombre de valeurs dans une décade (c'est-à-dire entre 10^d inclus et 10^{d+1} exclu, d étant un entier quelconque).

Exemple :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| E24 (±5%) | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,7 | 3,0 | 3,3 | 3,6 | 3,9 | 4,3 | 4,7 | 5,1 | 5,6 | 6,2 | 6,8 | 7,5 | 8,2 | 9,1 |
| E12 (±10%) | 1,0 | | 1,2 | | 1,5 | | 1,8 | | 2,2 | | 2,7 | | 3,3 | | 3,9 | | 4,7 | | 5,6 | | 6,8 | | 8,2 | |
| E6 (±20%) | 1,0 | | | | 1,5 | | | | 2,2 | | | | 3,3 | | | | 4,7 | | | | 6,8 | | | |
| E3 (±40%) | 1,0 | | | | | | | | 2,2 | | | | | | | | 4,7 | | | | | | | |

3.1.3. Bobines

Une bobine est un composant courant en électrotechnique et électronique. Elle est constituée d'un enroulement d'un fil conducteur, formant plusieurs spires (Solénoïde enroulé régulièrement en hélice) éventuellement autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Ce noyau est également appelé "noyau de ferrite" ou « bobine d'inductance » ou, plus souvent, « inductance ». Cependant, le terme inductance désigne normalement une caractéristique de la bobine appelée L, son unité est le Henry (H), de plus elle se caractérise par sa résistance interne r. Parcouru par un courant alternatif ou continu, il produit un champ magnétique dans son voisinage, et plus particulièrement à l'intérieur de l'hélice. La force du champ magnétique dépend de l'intensité du courant ainsi que de la forme du fil.

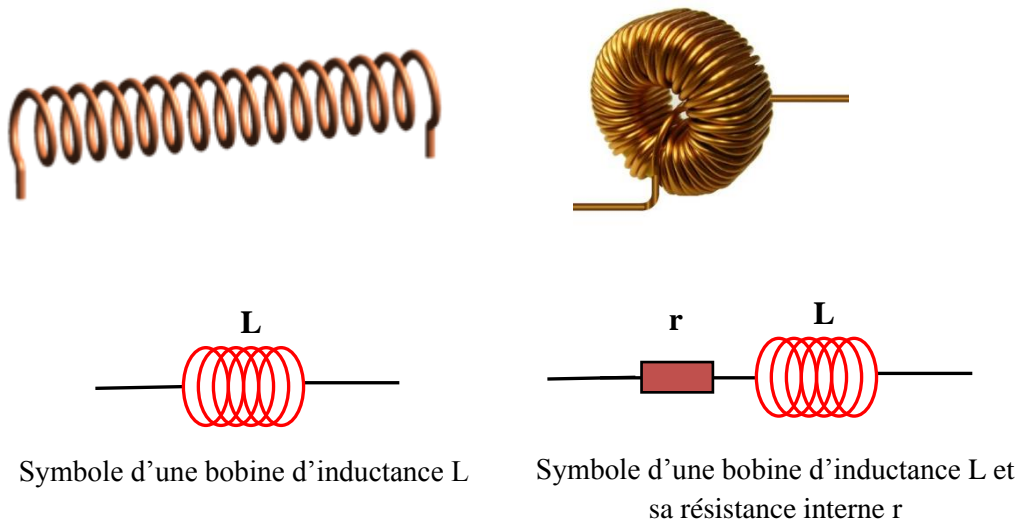


Figure-12- Bobines électrique

Le flux du champ magnétique à travers une bobine est donné par la relation : $\Phi = L.I$

Où L : est l'inductance de la bobine son unité est le Henry (H).

On considère une bobine suffisamment longue pour pouvoir négliger les effets de bord de sorte que la bobine est assimilable à un solénoïde infini. Dans ce cas, lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité I, elle produit un champ magnétique axial et uniforme dans la bobine :

$B = \mu_0.n.I$, avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H.m^{-1}$ (perméabilité magnétique du vide), n désigne la densité d'enroulement en nombre de spires/mètre, soit $n = N/d$, N nombre totale des spires.

Selon la loi du flux à travers une surface S d'une bobine : $\Phi_l = B.S = \mu_0.n.I.S$

Et le nombre total N du solénoïde :

$$\Phi = N. \Phi_l = n.d. \Phi_l = \mu_0.n^2.d.I.S$$

Après avoir comparé cette dernière équation avec la formule écrite au début du paragraphe, nous concluons le terme d'inductance $L : L=\mu_0.n^2.d.S$. et la tension au borne de cette bobine :

$$e=-d\Phi/dt=-L.dI/dt \text{ avec } V=-e \text{ d'où: } V= L.dI/dt.$$

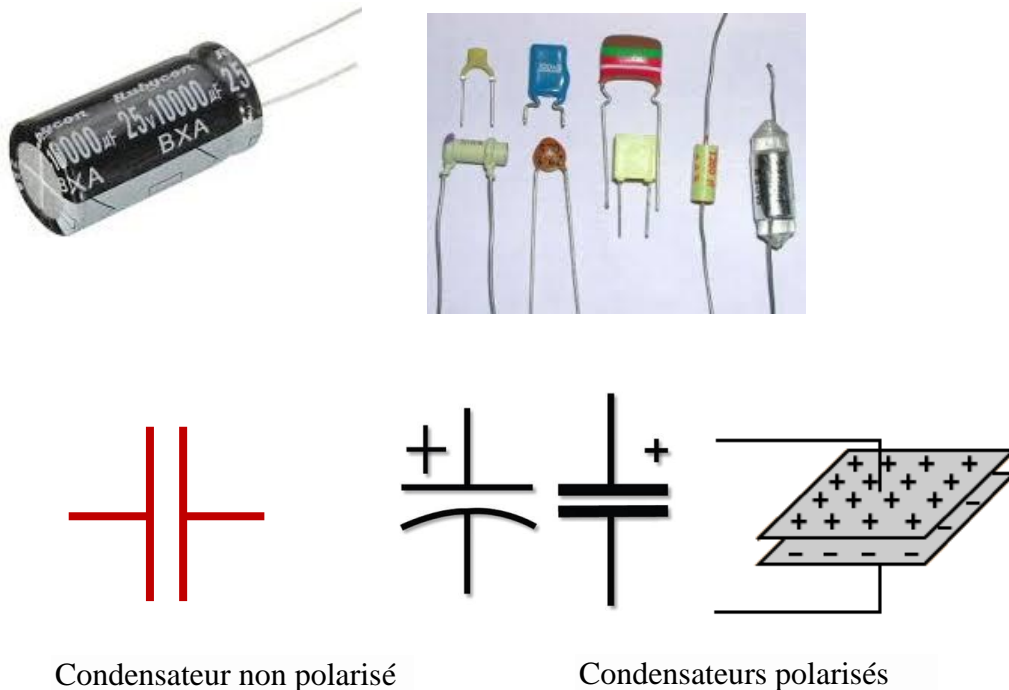
L'énergie stockée sous forme de champ magnétique est : $W=L.I^2/2$.

$$W = \int p . dt = \int V . I . dt = \int L \frac{dI}{dt} . I . dt = \int L . I . dI = \frac{L . I^2}{2}$$

3.1.4. Condensateurs

Le condensateur est un composant en électronique qui a la particularité de pouvoir stocker de l'énergie sous forme des charges électriques lorsqu'il est soumis à une tension. Ce composant est fondamental dans le domaine de l'électricité, il est presque aussi fréquent que la résistance.

Le condensateur se charge d'une quantité d'électricité (Q) lorsqu'il est soumis à une tension. Cette charge Q dépend de la tension et de la durée auquel il a été soumis à cette tension. L'énergie emmagasinée sera restituée lors de la décharge du condensateur.



Condensateur non polarisé

Condensateurs polarisés

Figure-13- Condensateurs électriques.

Le symbole des condensateurs polarisés et non polarisé et sont reconnaissables par 2 traits parallèles qui représentent les 2 armatures conductrices (voir figure ci-dessus). La caractéristique électrique principale d'un condensateur est sa capacité qui est exprimée en **Farad**, pour calculer sa valeur il faut utiliser l'équation suivante :

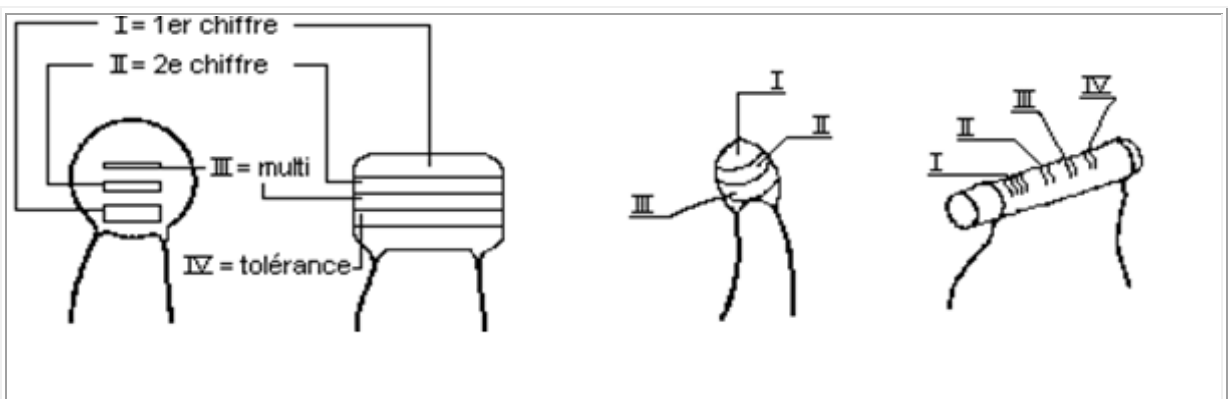
$$C = Q/U$$

Ou **C** : est la capacité du condensateur en Farads (F), **Q** : charge du condensateur en Coulombs (C) et **U** : tension aux bornes du condensateur en Volts (V).

Il existe d'autres caractéristiques des condensateurs telles que : la résistance à l'isolation ou le courant dit de fuite (due à la faible conductivité du condensateur qui cause la fuite du courant d'une plaque à l'autre et cela réduit sa qualité). Il y a aussi la tension maximale d'utilisation si on le dépasse, elle sera fortement endommagée. Enfin, il faut noter que la valeur de la capacité est écrite sur le condensateur mais il y a aussi un système de code couleur qui détermine sa valeur (voir Tableau ci-dessous).

L'énergie emmagasinée dans un condensateur sous forme d'un champ électrique et calculé de la manière suivante :

$$W = \int p . dt = \int V . I . dt = \int \frac{q}{C} . I . dt = \int \frac{q}{C} . \frac{dq}{dt} . dt = \frac{1}{C} \int q . dq = \frac{q^2}{2C}$$



| Couleur | I (valeur) | II (valeur) | III (coeff. Multiplicateur) | IV (tolérance) pour C > 10 pF |
|---------|---------------|----------------|--------------------------------|----------------------------------|
| Noir | - | 0 | x 1 (pF) | 20% |
| Marron | 1 | 1 | x 10 (pF) | 1% |
| Rouge | 2 | 2 | x 100 (pF) | 2% |
| Orange | 3 | 3 | x 1 000 (ou x 1 nF) | - |
| Jaune | 4 | | x 10 000 (ou x 10 nF) | - |
| Vert | 5 | 5 | x 100 000 (ou x 100 nF) | 5% |
| Bleu | 6 | 6 | x 1 000 000 (ou x 1 uF) | - |
| Violet | 7 | 7 | x 10 000 000 (ou x 10 uF) | - |
| Gris | 8 | 8 | x 0,01 (pF) | - |
| Blanc | 9 | 9 | x 0,01 (pF) | 10% |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| Or | - | - | - | - |
|----|---|---|---|---|

Remarque

Les valeurs sont toujours en Pico-Farad.

3.2. Éléments Actifs

Ces éléments sont dits actifs car ils fournissent de l'énergie comme les sources de tension et de courant.

3.2.1. Générateur de tension pure et réelle

Le rôle du générateur de tension continue consiste non pas à fabriquer des charges, mais à mettre en mouvement simultanément les charges mobiles situées dans les matériaux conducteurs du circuit électrique. C'est cette circulation des charges électriques dans les conducteurs que nous appelons le courant électrique et si ce courant change, la tension ne change pas à ses pôles, on dit que c'est un générateur de tension pure (parfait), mais les sources (générateurs) de tension réelle se caractérisent par leurs résistances internes qui changent la tension avec le courant.

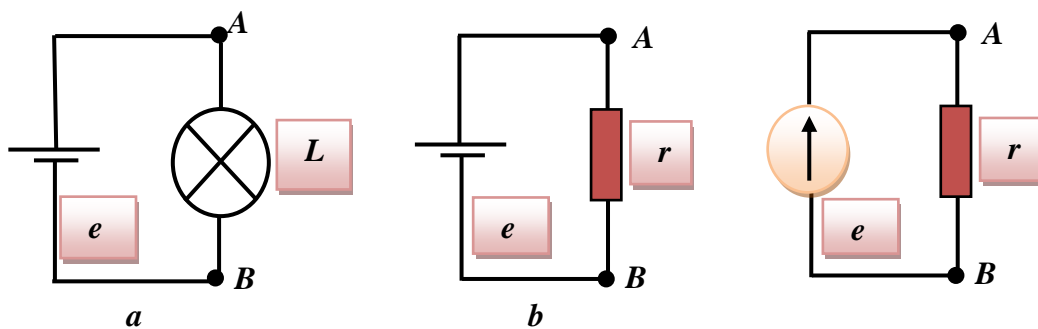


Figure-14- Représentation d'un générateur de tension parfait et d'un récepteur constitué, soit d'une ampoule électrique (a), soit d'une

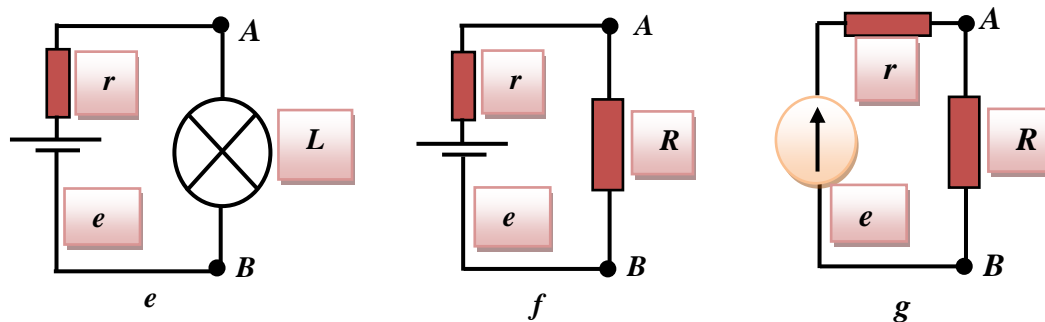


Figure-15- Représentation d'un générateur de tension réelle et d'un récepteur constitué, soit d'une ampoule électrique (a), soit d'une résistance(b) et (c).

3.2.2. Générateur de courant pur et réel

Un générateur (source) de courant continu supposé idéal est un générateur fixant l'intensité du courant électrique I_g qui le traverse quelle que soit la différence de potentiel U à ses

bornes, autrement dit quelle que soit la charge à ses bornes, à condition que cette charge ne soit pas infinie. Le courant ainsi débité est aussi appelé courant de court-circuit

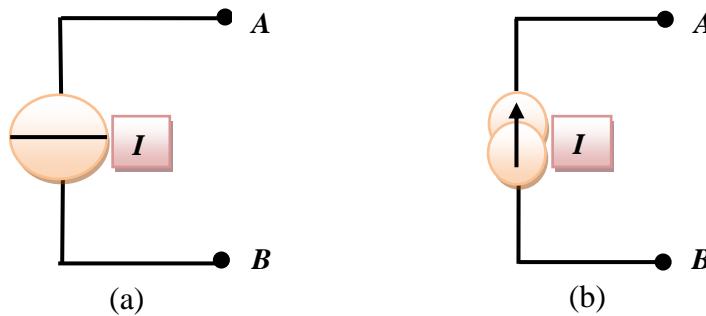


Figure-16- Représentation d'un générateur de courant parfait.
Nouveaux symboles (a) et ancien symbole (b)

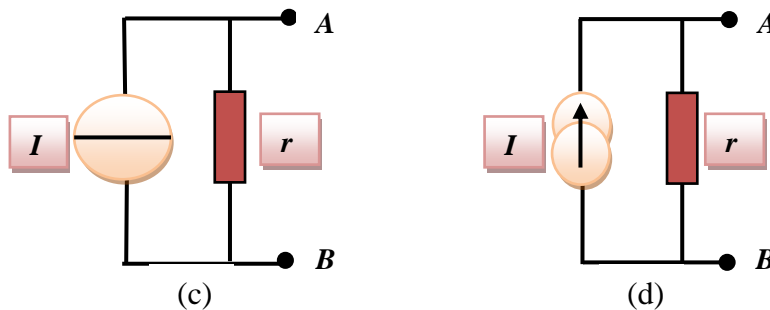


Figure-17- Représentation d'un générateur de courant réelle.
Nouveaux symboles (c) et ancien symbole(d)

Il existe une équivalence entre les générateurs de courants réels et les générateurs de tension réelle (voir figure ci-dessous).

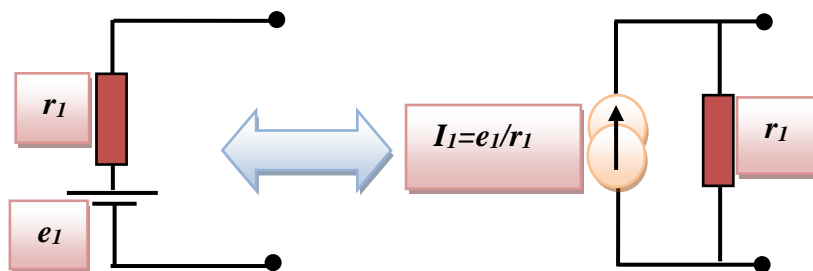


Figure-18- Représentation d'équivalence entre les générateurs de tensions réelles et les générateurs de courants réels.

Ils ont montré comment le générateur de tension « e_1 », avec sa résistance interne « r_1 » placée en série, peut être convertie en un générateur de courant « I_1 » de sorte que sa résistance électrique interne soit la même que la résistance électrique interne de la tension.

3.2.3. Potentiel entre les éléments passifs

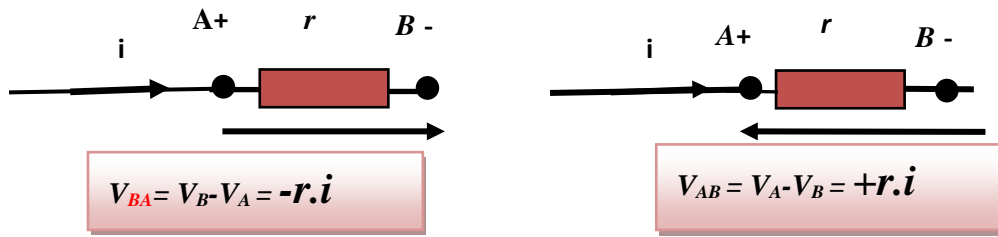


Figure-19- Représentation du Potentiel entre les éléments passifs.

Nous avons expliqué précédemment que le courant électrique passe à travers l'élément passif du plus haut potentiel (pôle positif), vers le plus bas potentiel (pôle négatif) Dans la figure ci-dessus le potentiel V_A est supérieure que le potentiel V_B ($V_A > V_B$), disons aussi que A est positif et B est négatif. Dans la figure de droite, le potentiel V_{AB} , représenté par une flèche du potentiel B (-) vers le potentiel A (+), donc il est positif et nous écrivons $V_{AB} = + r.i$. Alors que dans la figure de gauche, le potentiel V_{BA} , représenté par une flèche du potentiel A (+) vers le potentiel B (-), donc il est négatif et nous écrivons $V_{BA} = -r.i$.

Remarque :

La même méthode est appliquée pour la détermination du potentiel aux bornes des bobines et des condensateurs.

3.2.4. Potentiel entre un générateur de tension

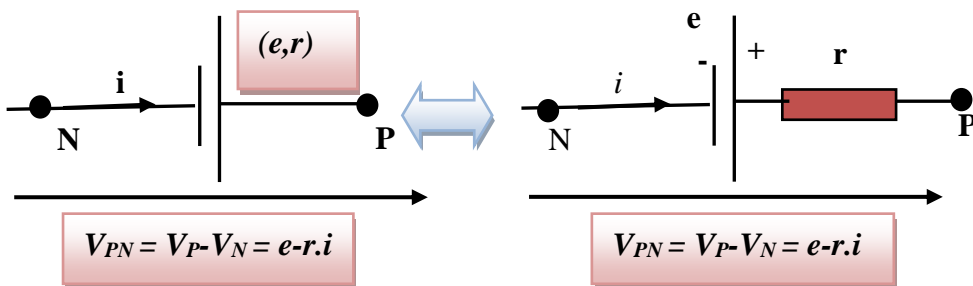


Figure-20- Représentation du Potentiel entre les éléments actifs.
 Courant entrant par la borne négative du générateur de tension.

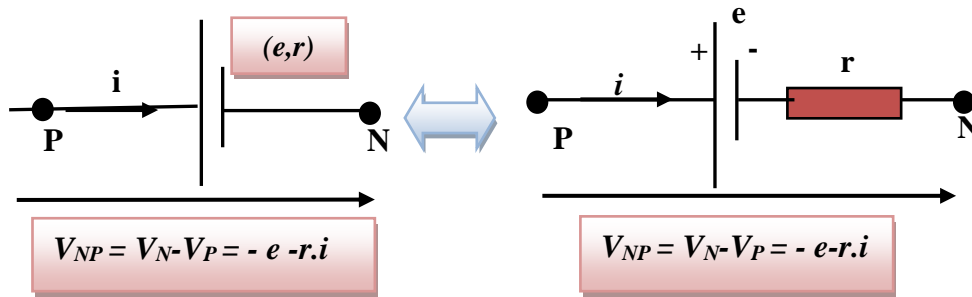


Figure-21- Représentation du Potentiel entre les éléments actifs.
 Courant entrant par la borne positive du générateur de tension.

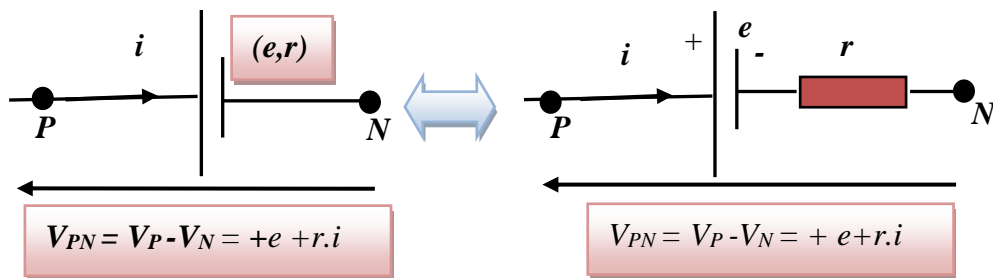


Figure-22- Représentation du Potentiel entre les éléments actifs.
 Courant entrant par la borne positive du générateur de tension.

3.2.5. Association des éléments passifs

3.2.5.1. Association des résistances

3.2.5.1.1. Association des résistances en série

La résistance R équivalente des résistances en série (voir figure 23) se calcul comme suit :

Les résistances sont traversées par le même courant d'intensité I

La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistors donne : $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, ..., $U_n = R_n I$

La tension U aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des tensions aux bornes de chacun :

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$$

La résistance équivalente $R = U/I$ vaut donc :

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

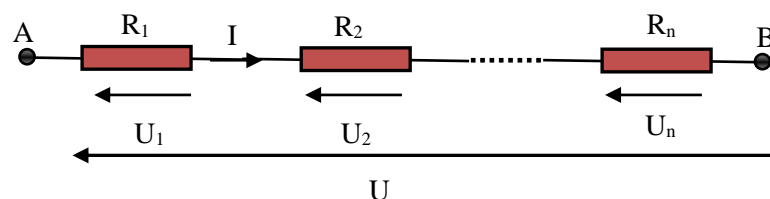


Figure-23- Association des résistances en série.

3.2.5.1.2. Association de résistances en parallèle

Les résistances sont soumises à la même tension $U = U_1 = U_2 = \dots = U_n$. L'intensité du courant du générateur est égale à la somme des intensités des courants circulant dans les résistors :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistances donne :

$$U_1 = R_1 I_1 \quad U_2 = R_2 I_2 \dots \quad U_n = R_n I_n$$

On peut en déduire la conductance équivalente $1/R$:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Cas particulier de deux résistances :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

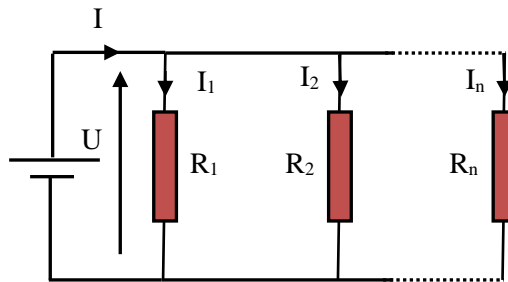


Figure-24- Association des résistances en parallèle.

Remarque

L'association des inductances des bobines se fait de la même méthode que les résistances.

3.2.5.2. Associations des condensateurs

3.2.5.2.1. Condensateurs associés en parallèle

Lorsque plusieurs condensateurs sont associés en parallèle, la capacité totale se calcule en additionnant la capacité de chacun des condensateurs.

$$C_{total} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

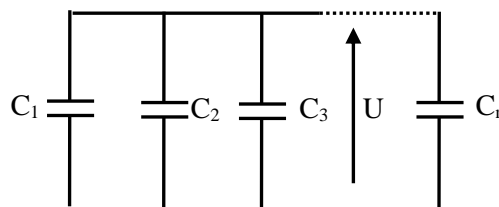


Figure-25- Associations des condensateurs en parallèle.

Dans cette équation les différentes capacités sont C1, C2 et C3, tandis que C total représente la capacité totale équivalente.

3.2.5.2.2. Condensateurs associés en série

Lorsque les condensateurs sont associés en série, la capacité totale se calcule à l'aide du formulaire suivant :

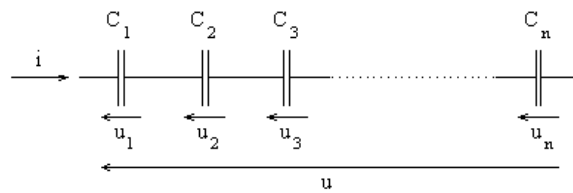


Figure-26- Associations des condensateurs en série

$$\frac{1}{C_{total}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Cette équation stipule que l'inverse de la capacité totale est égal à la somme des inverses de chaque capacité.

S'il n'y a que deux condensateurs en série l'équation peut être simplifiée de la manière suivante :

$$C_{total} = (C_1 \cdot C_2) / (C_1 + C_2)$$

3.2.6. Association des générateurs de tension

3.2.6.1. Association des générateurs de tension série

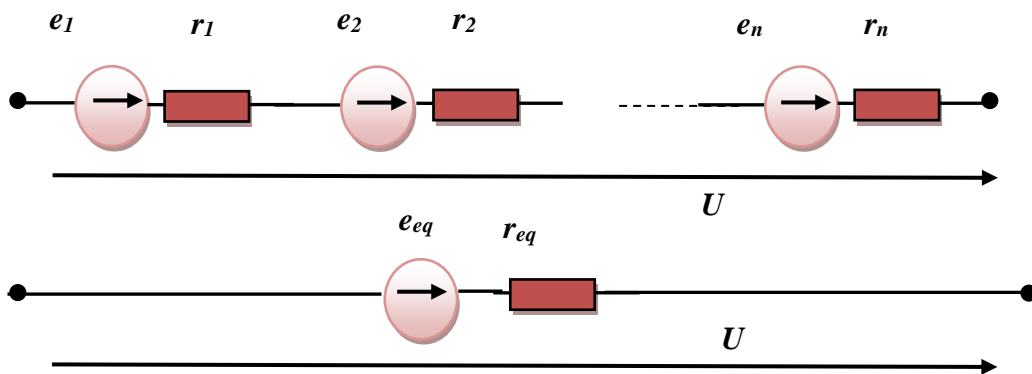


Figure-27- Associations des générateurs en série

$$U = e_1 - r_1 \cdot I + e_2 - r_2 \cdot I + \dots + e_N - r_N \cdot I$$

$$U = \sum_{i=1}^N e_i - (\sum_{i=1}^N r_i) \cdot I \text{ D'où : } U = e_{eq} - r_{eq} \cdot I$$

$$e_{eq} = \sum_{i=1}^N e_i, r_{eq} = \sum_{i=1}^N r_i$$

3.2.6.2. Association des générateurs de tension parallèle

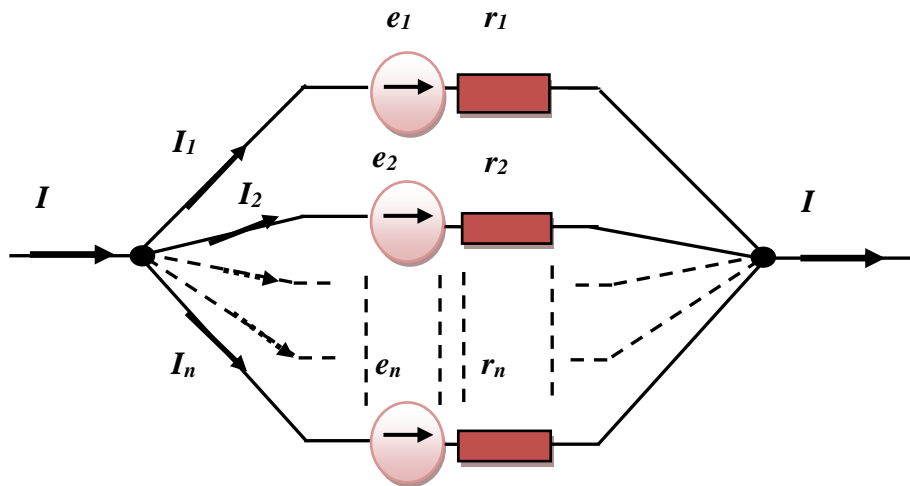


Figure-28- Association des générateurs de tension

Le courant total est :

$$I = \sum_{i=1}^N I_i \text{ et la résistance équivalente : } \frac{1}{r_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i}$$

4. Circuit (Réseau) électrique

Un circuit électronique (électrique) en régime continu (c'est-à-dire dont les grandeurs ne dépendent pas du temps) est constitué d'un ensemble de composants (ou éléments) passifs (résistances bobines, ...) ou actifs (transistors, amplificateurs opérationnels, ...) interconnectés par des fils conducteurs. En général, le circuit comporte au moins un générateur de tension ou de courant, de plus il comprend des nœuds, des branches et des mailles.

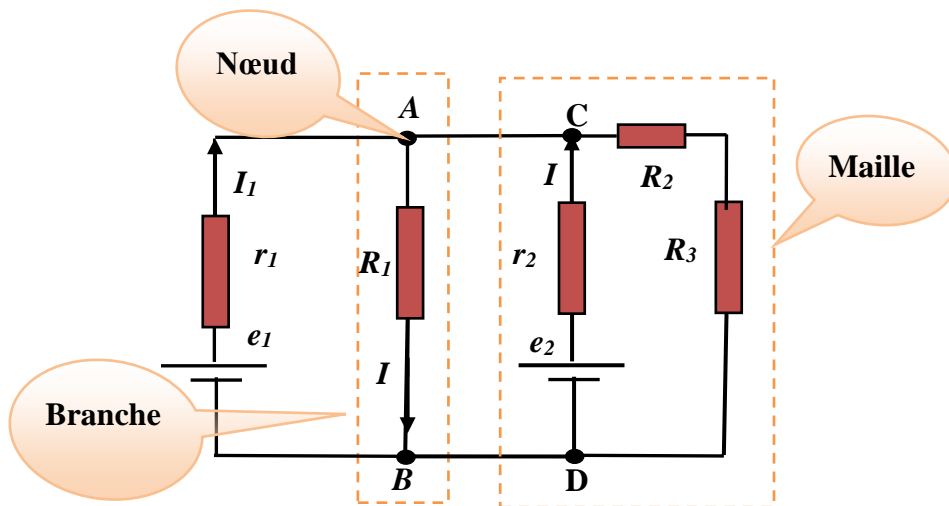


Figure-29- Circuit électronique

4.1. Dipôle

Tout élément électrique communiquant avec l'extérieur avec deux bornes capables ou non de fournir de l'énergie, est appelé dipôle. À tout instant, le courant entrant par une borne est égal au courant sortant par l'autre. Les résistances R_1 , R_2 , R_3 , r_1 et r_2 de la figure -29- ainsi les générateurs e_1 et e_2 sont tous des dipôles.

4.2. Nœud

Un nœud est un point de connexion (raccordement) entre plusieurs dipôles (éléments). A, B, C et D sont des nœuds dans la figure -29-.

4.3. Branche

Une branche est une portion d'un circuit limitée localisée entre deux nœuds. Il s'agit donc d'un sous-ensemble d'éléments mis en série parcourus par le même courant. C'est le cas par exemple de AB et CD dans la figure-29-.

4.4. Maille

Une maille est un contour fermé constitué par une succession de branches. Dans le schéma de la figure 29, l'exemple de maille noté ACDB contient deux branches.

L'étude de circuit peut se faire avec les lois suivantes :

- Les Lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) qui donnent les relations entre les différentes grandeurs du circuit en utilisant la loi d'Ohm qui caractérise la tension U aux bornes d'une résistance par rapport à l'intensité I la traversant. Si la résistance est de R :

$$U = RI.$$

- Méthode des courants de maille
- Théorème de superposition
- Théorème de Thévenin.
- Théorème de Norton.
- Théorème de Kinnelly.
- Théorème de Substitution.
- Théorème de Réciprocité.
- Théorie de la puissance maximale.

Ce chapitre va se limiter aux lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) et les autres théorèmes vont être étudiés dans le chapitre prochain.

5. Lois de Kirchhoff

Dans tous les circuits électriques, les conducteurs qui assurent les liaisons entre les composants sont supposés parfaits, c'est à dire leurs résistances sont nul (même

équipotentiels). D'autre part, ils ne peuvent ni accumuler ni fournir de charges électriques ; ils se contentent de les transporter.

5.1. Loi de Kirchhoff des nœuds

Selon cette loi, la somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent : $\sum_{i=1}^{i=n} I_{entrant} = \sum_{i=1}^{i=N} I_{sortant}$

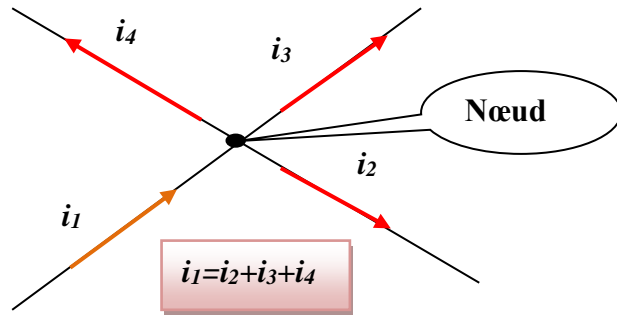


Figure-30- Loi des nœuds

5.2. Loi de Kirchhoff des mailles

La deuxième loi de Kirchhoff s'exprime de la manière suivante : La somme algébrique des différences de potentiel (ou tension) le long d'une maille adaptée est nulle.

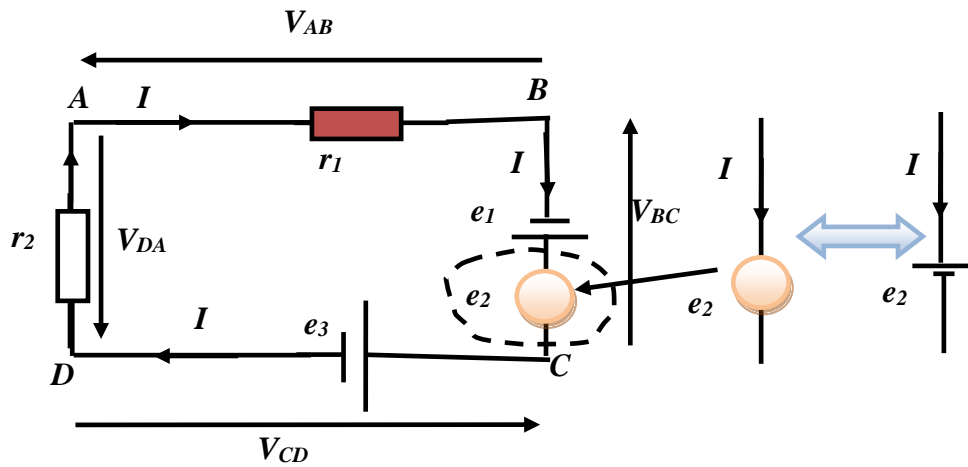


Figure-31- Loi des Mailles

En appliquant la loi de Kirchhoff (loi des mailles) : $\sum_{i=1}^{i=5} \Delta V_i = 0$

$$V_{AB} + V_{DA} + V_{CD} + V_{BC} = 0 \text{ Où :}$$

$$V_{AB} = r_1 \cdot I, \quad V_{BC} = -e_1 + e_2, \quad V_{CD} = e_3, \quad V_{DA} = r_2 \cdot I$$

Si nous trouvons que $I < 0$, on change le sens de I sans refaire le calcul. S'il existe un récepteur non-polarisé, dans ce cas on change le sens du courant dans le circuit et on répète le calcul, et si le calcul donne le même résultat, on doit changer le récepteur parce qu'il ne fonctionne pas.

a) *Étude d'une source de tension chargée par une résistance*

Soit le montage de la figure -32-

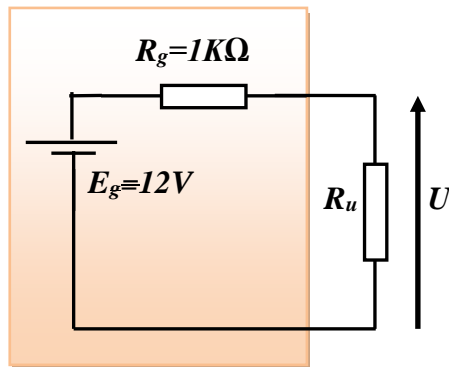


Figure-32- Générateur de tension réelle avec résistance de charge

- Tracer la caractéristique tension-courant de la source réelle.
- La résistance d'utilisation R_U varie. Tracer la droite d'équation $U = R_U.I$ pour les trois cas : $R_U = R_g$, $R_U = 2R_g$ et $R_U = 0,5R_g$.
- Déterminer graphiquement les coordonnées des points de fonctionnement des trois cas précédents. En déduire les puissances fournies à la charge. Conclure.

Solution :

- La tension en sortie aux bornes de la source réelle de tension s'écrit :

$$U = E_g - R_g.I \dots \dots \dots (1), \text{ avec : } E_g = 12 \text{ V et } R_g = 1 \text{ k}\Omega.$$

Il s'agit d'une droite de pente négative qui passe par les deux points de coordonnées :

$$(12 \text{ V}, 0 \text{ mA}) \text{ et } (0 \text{ V}, 12 \text{ mA})$$

- Le premier point de coordonnées : (12 V, 0 mA) correspond à un fonctionnement à vide : c'est à dire en débranchant la charge
- Le deuxième point de coordonnées : (0 V, 12 mA) correspond à un fonctionnement en court-circuit : c'est-à-dire en remplaçant R_U par un court-circuit.

Pour un fonctionnement normal, le point de fonctionnement doit être situé sur cette droite de charge, entre les deux points précédents.

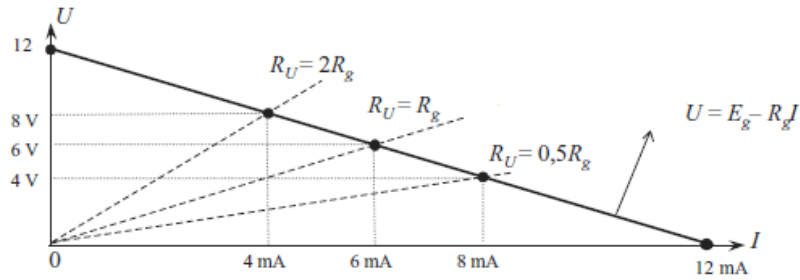


Figure-33- Caractéristique tension-courant du générateur de tension réelle et les droites d'équation $U = R_U.I$.

La droite d'équation qui reflète le fonctionnement en sortie du générateur de tension réelle est :

$$U = R_U.I$$

Il s'agit d'une droite qui passe par l'origine avec une pente positive. Nous avons tracé sur la figure-33- les trois droites qui correspondent aux trois valeurs de R_U sont :

$$R_U = R_g, R_U = 2R_g, R_U = 0,5R_g$$

Nous pouvons déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation : $U = E_g - R_g I$ et de la droite d'équation $U = R_U I$. Nous trouvons :

- Pour $R_U = R_g$ le point de coordonnées (6 V, 6 mA), soit : $P = U.I = 36 \text{ mW}$;
- Pour $R_U = 2R_g$ le point de coordonnées (8 V, 4 mA), soit : $P = U.I = 32 \text{ mW}$;
- Pour $R_U = 0,5R_g$ le point de coordonnées (4 V, 8 mA), soit : $P = U.I = 32 \text{ mW}$.

La puissance fournie à la charge atteint une valeur maximale lorsque la valeur de la résistance d'utilisation est égale à la valeur de la résistance interne du générateur de tension.

b) Étude d'une source réelle de courant chargée par une résistance

Soit le montage de la figure -34-

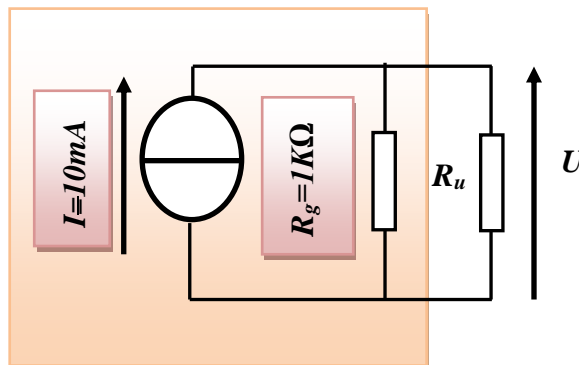


Figure-34- Générateur de courant réel avec résistance de charge

- 1) Tracer la caractéristique courant-tension de la source réelle.
- 2) La résistance d'utilisation R_U varie. Tracer la droite d'équation : $U = R_U.I$ pour les cinq cas : $R_U = 1\text{ k}\Omega$, $R_U = 2\text{ k}\Omega$, $R_U = 5\text{ k}\Omega$, $R_U = 0,5\text{ k}\Omega$ et $R_U = 0,2\text{ k}\Omega$.
- 3) Déterminer graphiquement les coordonnées des points de fonctionnement correspondants aux 5 cas précédents. En déduire les puissances fournies à la charge.
- 4) Tracer la courbe représentant la variation de la puissance en fonction de R_U . Conclure.

Solution :

- 1) Notons le courant du générateur $I_g = 10\text{ mA}$, et prenons la convention réceptrice pour la charge qui est parcourue par un courant noté I_U .

L'équation courant-tension s'écrit donc :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g} = 10\text{mA} - \frac{U}{1\text{K}\Omega} = 10\text{mA} - \frac{U}{10^3}$$

Il s'agit d'une droite qui passe par les deux points de coordonnées :

$$(10\text{ mA}, 0\text{V}) \text{ et } (0\text{ mA}, 10\text{ V})$$

- Le premier point (10 mA, 0V) correspond à l'intersection de la caractéristique avec l'axe des ordonnées. Il s'agit d'un fonctionnement en court-circuit.
- Le deuxième point (0 mA, 10 V) correspond à un fonctionnement en circuit ouvert, ce point donne une tension notée $U_V = R_g.I_g$ qui est souvent appelée tension à vide du générateur de courant.

2) Les droites d'équations : $U = R_U.I$ sont des droites qui passent par l'origine O avec des pentes égales à $1/R_U$. Nous avons tracé ces droites directement sur la figure 1.30 de la question précédente.

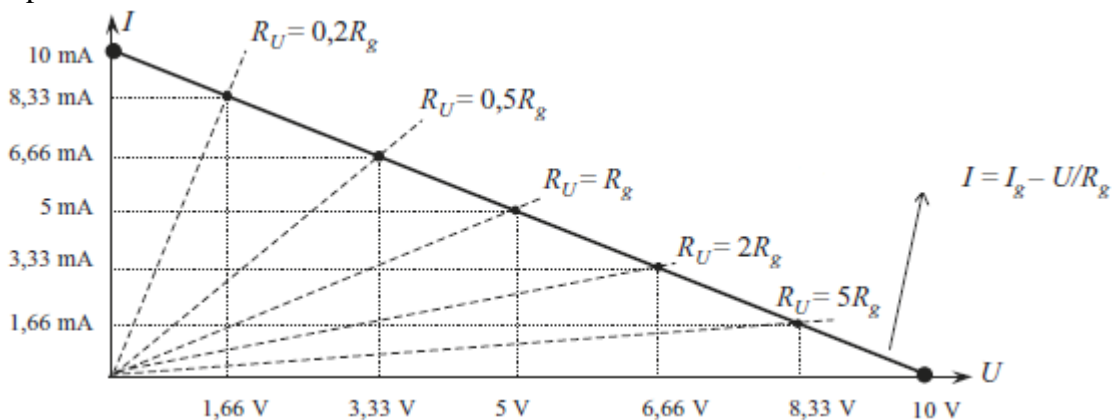


Figure-35- Caractéristique courant-tension d'une source réelle de courant et droites d'équations : $U = R_U.I$.

3) Nous pouvons déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux droites d'équations :

$$I = I_g - \frac{U}{R_g} = 10mA - \frac{U}{1K\Omega} = 10mA - \frac{U}{10^3}, I = \frac{U}{R_U}$$

R_U étant une résistance variable.

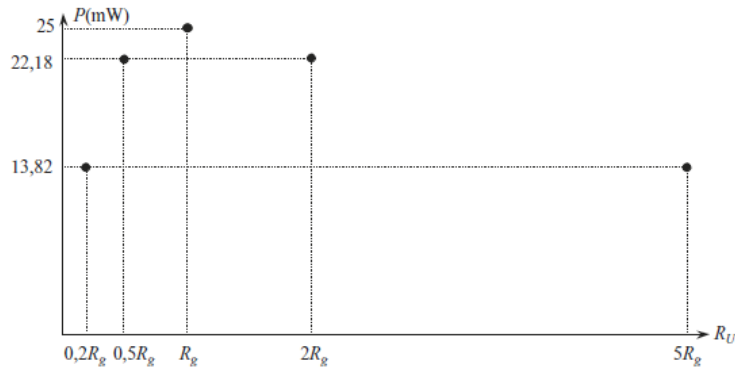


Figure-36- Variation de la puissance P en fonction de la résistance R_U .

- $R_U = R_g$, le point (5 V; 5 mA) donne $P = U.I = 25 mW$;
- $R_U = 2R_g$, le point (6,66 V; 3,33 mA) donne $P = U.I = 22,18 mW$;
- $R_U = 5R_g$, le point (8,33 V; 1,66 mA) donne $P = U.I = 13,82 mW$;
- $R_U = 0,5R_g$, le point (3,33 V; 6,66 mA) donne $P = U.I = 22,18 mW$;
- $R_U = 0,2R_g$, le point (1,66 V; 8,33 mA) donne $P = U.I = 13,82 mW$.

La puissance fournie à la charge passe par une valeur maximale lorsque la valeur de la résistance d'utilisation est égale à la valeur de la résistance interne du générateur.

Remarque importante :

Le passage du modèle d'un générateur de tension à celui d'un générateur de courant et vice versa conduit à trouver (voir théorèmes Thevenin et Norton) :

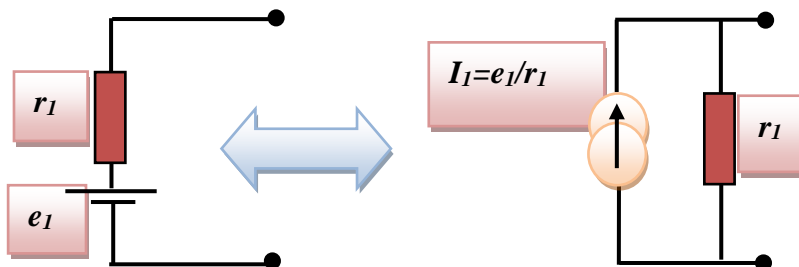


Figure- 37- Dualité générateur de tension –générateur de courant

c) Exemple d'application des lois de Kirchhoff

Soit la figure-38-ci-dessous.

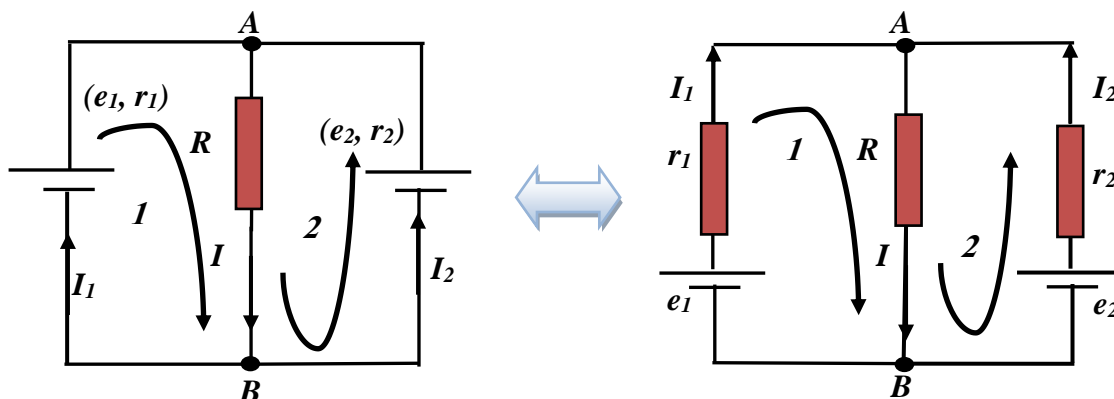


Figure-38- Application des lois de Kirchhoff

Loi des nœuds en A : $I = I_1 + I_2 \dots \dots \dots (1)$

La résolution s'effectue en écrivant la loi de Kirchhoff des tensions pour chacune des mailles, ce qui donne pour la maille (1) et (2) les équations (2) et (3):

$$e_1 - r_1 \cdot I_1 - R \cdot I = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$e_2 - r_2 \cdot I_2 - R \cdot I = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\begin{cases} (r_1 + R) \cdot I_1 + R \cdot I_2 = e_1 \\ R \cdot I_1 + (r_2 + R) \cdot I_2 = e_2 \end{cases} \begin{cases} e_1 - r_1 \cdot I_1 - R \cdot (I_1 + I_2) = 0 \\ e_2 - r_2 \cdot I_2 - R \cdot (I_1 + I_2) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & R \\ e_2 & R+r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & +R \\ +R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R \cdot (e_1 - e_2) + r_2 \cdot e_1}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2} \text{ et } I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R+r_1 & e_1 \\ R & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & +R \\ +R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R \cdot (e_1 - e_2) + r_1 \cdot e_1}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2}$$

Si : $e_1=6V, e_2=12V, r_1=1\Omega, r_2=2\Omega, R=10\Omega$, on trouve : $I_1=-1,5A, I_2=2,25A, I=0,75A$

Après avoir effectué tous les calculs, nous notons que i_1 est négatif et passe par une source de tension polarisée, donc nous ne répétons pas les calculs, mais plutôt changeons le sens du courant dans le circuit

Exemple 1:

Soit la figure-39- ci-dessous.

1) Calculer les différents courants dans les branches

Données :

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1K\Omega, R_4 = R_5 = 2K\Omega, E_1 = 10V, E_2 = 20V$$

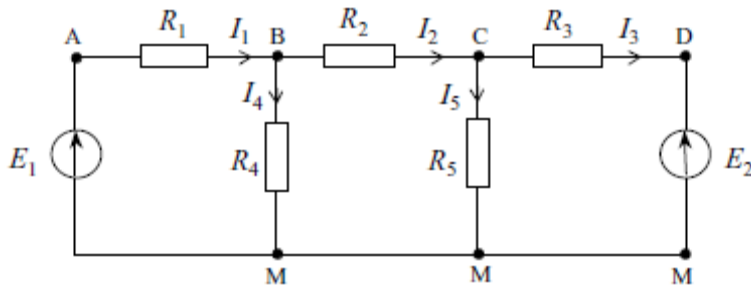


Figure-39- Exemple d'application des lois de Kirchhoff.

Solution 1 :

Après les calculs effectués on trouve :

$$I_1 = 0.66mA, I_2 = -1.33mA, I_3 = -7.55mA, I_4 = 2mA, I_5 = 6.22mA$$

Exemple 2 :

Soit la figure-40- ci-dessous.

2) Calculer les différents courants dans les branches

Données :

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1K\Omega, R_4 = R_5 = R_6 = 2K\Omega, R_7 = R_8 = 3K\Omega, E_1 = 10V, E_2 = 20V$$

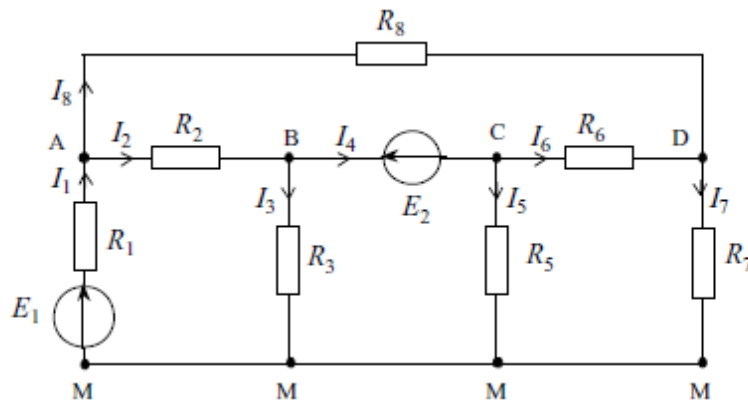
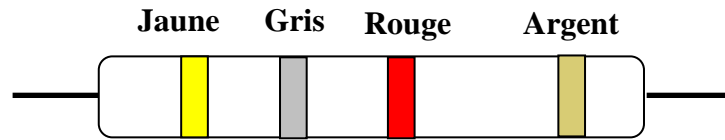


Figure-40- Exemple d'application des lois de Kirchhoff.

Exercices

Exercice 1:

- 1) Retrouvez la valeur de la résistance grâce au code de couleur des anneaux sur la figure ci-dessous.



Solution 1:

Comme nous l'avons montré dans la leçon : $R = (4800 \pm 480)\Omega$

Exercice 2 :

Nous voulons mesurer la tension et la résistance électrique interne d'un générateur de tension (e_1, r_1) et (e_2, r_2). Quand on relie le premier générateur en série avec un ampère qui a une résistance interne négligeable, on trouve une intensité de courant 1A, et quand on répète le même processus avec le second générateur, on retrouve le même courant. Si nous connectons ces deux générateurs en série et que nous leur connectons un voltmètre au lieu d'ampèremètre, nous obtenons une tension de 3V, mais si nous les inversons, nous obtenons une tension de 1V.

- 1) Calculer la force électromotrice et la résistance électrique interne des générateurs.
- 2) Tracer les courbes de tension – courant sélectrice des générateurs.

Solution 2:

Aide

Toutes ces mesures sont équivalentes à un circuit (voir figure-41-) ou on applique les lois de Kirchhoff

- 1) Après avoir établi quatre équations, on trouve : $e_1 = 1V, e_2 = 2V, r_1 = 1\Omega, r_2 = 2\Omega$.

La tension aux bornes du premier générateur est écrite comme suit : $V = e_1 - r_1 \cdot I = 1 - I$

En traçant la courbe tension – courant de ce générateur, on montre que c'est une ligne droite qui ne passe pas l'origine.

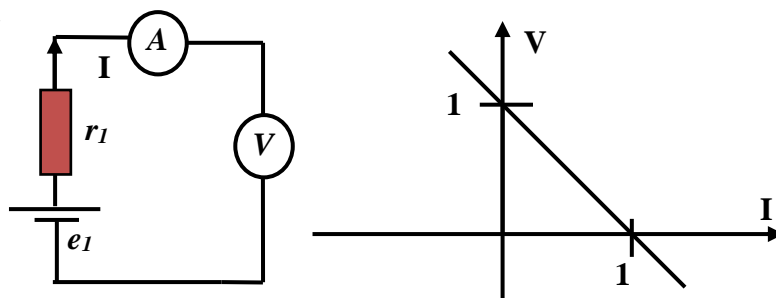


Figure-41-

La tension aux bornes du deuxième générateur est écrite comme suit $V = e_2 - r_2 \cdot I = 2 - 4I$ et de la même manière On trace la courbe tension – courant de ce générateur et on montre que c'est une ligne droite qui ne passe pas l'origine.

Exercice 3 :

En utilisant les lois de Kirchhoff, calculer les courants dans toutes les branches de la figure-42- ci-dessous.

Données : $e_1=2V, e_2=1V, e_3=3V, r_1=1 \Omega, r_2=2 \Omega, r_3=3 \Omega$

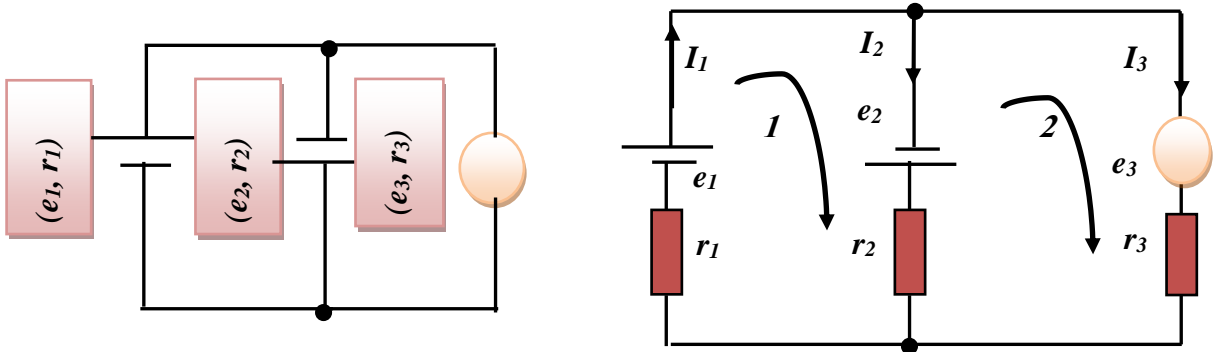


Figure-42-

Solution 3:

Au début, supposons que le courant « I_3 » traverse le récepteur du "haut" vers le "bas", tandis que le reste des courants prennent le sens montrer dans la figure-42-, cela ne posera pas de problème. La polarisation des éléments passifs comme indiquée dans Figure ci-dessus.

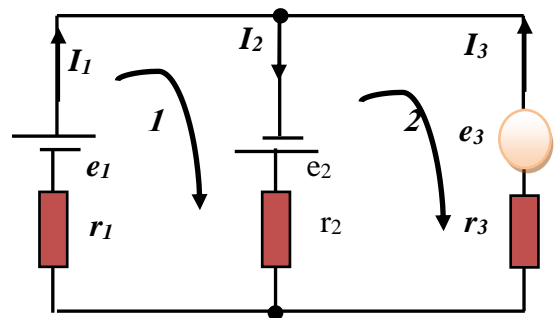
Nous avons donc trois inconnues, faisons appelle aux lois de Kirchhoff, ou on a établi les équations suivantes selon le choix des tensions mentionnée dans la figure-42- :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ e_1 - r_1 \cdot I_1 + e_2 - r_2 \cdot I_2 = 0 \\ -e_2 + r_2 \cdot I_2 - r_3 \cdot I_3 - e_3 = 0 \end{cases}$$

Après substitution et calcul, Nous trouvons que :

$I_3 = -\frac{6}{11} < 0$, le courant qui traverse le récepteur. Par conséquent, nous devons changer le sens de ce courant et recalculer.

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ e_1 - r_1 \cdot I_1 + e_2 - r_2 \cdot I_2 = 0 \\ -e_2 + r_2 \cdot I_2 + r_3 \cdot I_3 + e_3 = 0 \end{cases}$$



Mais après avoir effectué le calcul, nous retrouverons une valeur négative pour le courant « I_3 » passant par le récepteur, et nous concluons qu'il est endommagé.

Exercice 4

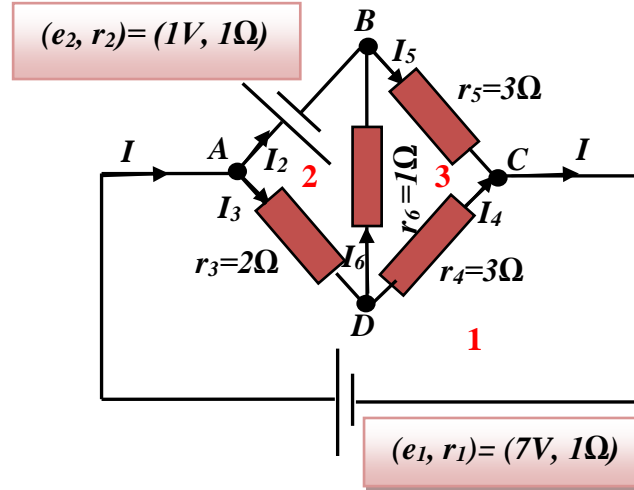


Figure-43-

Aide :

Le système d'équation que vous devez résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Lois des mailles:} \\
 \text{De 1: } e_1 - r_1 \cdot I_1 - r_3 \cdot I_3 - r_4 \cdot I_4 = 0 \\
 \text{De 2: } e_2 + r_2 \cdot I_2 - r_6 \cdot I_6 = 0 \\
 \text{De 3: } +r_5 \cdot I_5 - r_4 \cdot I_4 + r_6 \cdot I_6 = 0 \\
 \text{Loi des noeuds} \\
 \text{En A: } I = I_2 + I_3 \\
 \text{En B: } I_2 + I_6 = I_5 \\
 \text{En C: } I_4 + I_5 = I \\
 \text{En D: } I_3 = I_6 + I_4
 \end{array} \right.$$

III. Analyse des circuits électriques

1. Préface

Dans la leçon précédente, nous avons discuté la méthode de Kirchhoff, qui nous permet de calculer les divers tensions et courants dans les circuits électriques. Mais il y a des cas où l'utilisation de cette méthode est compliquée. Dans ce chapitre, nous examinerons d'autres théories et méthodes d'analyse des circuits qui nous permettent de calculer les différents courants et tensions de manière très simple et efficace.

2. Méthode des courants virtuels (Méthode de Maxwell)

2.1. Méthode directe des courants Maxwell (Méthode Matriciel)

Dans cette méthode, nous divisons le travail en deux étapes :

Dans la première étape, nous considérons l'existence d'un courant virtuel dans chaque maille indépendante du reste des autres mailles, puis nous calculons les courants réels en se référant sur les courants virtuels.

Méthode de travail

1. Nous choisissons le même sens des courants virtuels pour toutes les mailles (sens horaire ou inversé), ces courants doivent être indépendants.
2. Nous écrivons la matrice des résistances de telle sorte que nous remplissons la diagonale de la matrice avec la somme des résistances de chaque maille et le reste des éléments de la matrice sont remplis avec la somme des résistances commun entre les mailles adjacent. Enfin, nous laissons les éléments de la diagonale principal tel qu'ils sont et le reste des éléments sont précédés d'un signe moins (-).
3. Nous écrivons la matrice pour les courants virtuels (courants de Maxwell) en tenant compte de l'ordre.
4. Nous écrivons la matrice des forces électromotrices et contre- électromotrices sous forme d'une colonne en utilisant les conventions des signes décrites précédemment.
5. Dans cette dernière étape nous obtenons une équation matricielle que nous résolvons comme indiqué dans l'annexe des matrices.

Exemple 1:

Soit le circuit de la figure-44- que nous allons le traiter par la méthode directe des courants de Maxwell (Méthode Matriciel).

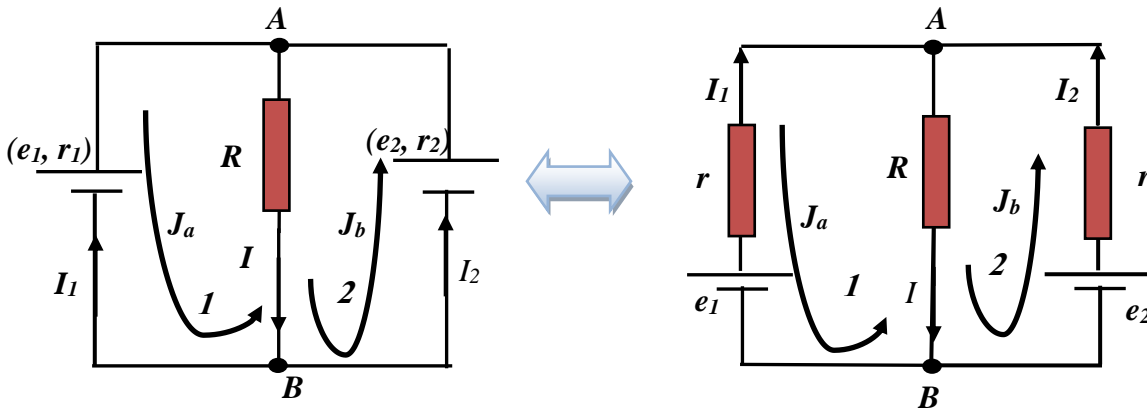


Figure-44- Méthode des courants virtuels (Méthode de Maxwell).

Solution 1:

Nous choisissons les mailles : 1 et 2, et nous appelons les courants virtuels : J_a et J_b respectivement avec le sens horaire inversé montrés sur la figure-44- ci-dessus.

- Matrice des résistances : $\begin{pmatrix} R + r_1 & -R \\ -R & R + r_2 \end{pmatrix}$
- Matrice des tensions : $\begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$
- Equation matricielle : $\begin{pmatrix} R + r_1 & -R \\ -R & R + r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$
- Equation matricielle des courants virtuels : $\begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r_1 & -R \\ -R & R + r_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

On doit Rechercher ensuite la matrice inverse des résistances. Pour cela, nous calculons d'abord le déterminant de cette matrice, on trouve : $\Delta = \begin{vmatrix} R + r_1 & +R \\ +R & R + r_2 \end{vmatrix} = (R + r_1)(R + r_2) - R^2 =$

$(r_1 + r_2).R + r_1.r_2 \neq 0$. Ensuite, nous calculons les déterminants des petites matrices et on trouve : $\begin{pmatrix} R + r_2 & +R \\ +R & R + r_1 \end{pmatrix}$. Ensuite on calcule le transposé de cette matrice, on trouve qu'elle est la même, et finalement on la divise par le déterminant de la matrice sélectionnée pour déduire la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} R + r_1 & -R \\ -R & R + r_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2} \begin{pmatrix} R + r_2 & +R \\ +R & R + r_1 \end{pmatrix}, \text{ après :}$$

$$\begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r_1 & -R \\ -R & R + r_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(r_1 + r_2).R + r_1.r_2} \begin{pmatrix} R + r_2 & +R \\ +R & R + r_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Les courants virtuels : $J_a = -\frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$ et $J_b = \frac{R.(e_2-e_1)+r_1.e_2}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$

Les courants réels peuvent alors être facilement déduits :

$$I = -J_a + J_b, \text{ avec: } I_2 = +J_b \text{ et } I_1 = -J_a$$

Après une application numérique ou en utilisant les mêmes valeurs (Figure -36- du chapitre précédent), on obtient les mêmes résultats :

Si: $e_1=6V, e_2=12V, r_1=1\Omega, r_2=2\Omega, R=10\Omega$, on trouve : $I_1=-1,5A, I_2=2,25A, I=0,75A$

Remarque

Le lecteur peut penser que cette méthode est difficile par rapport à l'ancienne méthode de Kirchhoff. Ce n'est pas vrai, mais cette méthode nous permet de résoudre rapidement et d'éviter les erreurs et son importance s'illustre surtout dans les réseaux qui contiennent un grand nombre des mailles.

2.2. Méthode des courants virtuelles (Méthode sans les matrices)

Dans ce cas aussi nous choisissons pour les courants virtuels des sens arbitraires dans tous les mailles. Ensuite, nous écrivons des équations en utilisant des courants virtuels plutôt que des courants réels. Nous prenons le même exemple ci-dessus (figure -42-), on trouve :

$$\begin{cases} -e_1 - r_1 \cdot J_a - R \cdot (J_a - J_b) = 0 \\ -e_2 - r_2 \cdot J_b - R \cdot (J_b - J_a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(r_1 + R) \cdot J_a + R \cdot J_b = e_1 \\ -R \cdot J_a + (r_2 + R) \cdot J_b = e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (r_1 + R) \cdot J_a - R \cdot J_b = -e_1 \\ -R \cdot J_a + (r_2 + R) \cdot J_b = e_2 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient :

$$J_a = \frac{\begin{vmatrix} -e_1 & -R \\ e_2 & R+r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R \cdot (e_1 - e_2) + r_2 \cdot e_1}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2} \text{ et } J_b = \frac{\begin{vmatrix} R+r_1 & -e_1 \\ -R & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{vmatrix}} = \frac{R \cdot (e_2 - e_1) + r_1 \cdot e_2}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2}$$

C'est les mêmes résultats précédents (exemple 1) :

Si: $e_1=6V, e_2=12V, r_1=1\Omega, r_2=2\Omega, R=10\Omega$, on trouve: $I_1=-1,5A, I_2=2,25A, I=0,75A$

3. Théorème de superposition

Dans un circuit électrique linéaire, le courant (ou la tension) dans une branche quelconque est égal à la somme algébrique des courants (ou des tensions) obtenus dans cette branche sous l'effet de chacune des sources indépendantes prise isolément, toutes les autres ayant été remplacées par leurs résistances internes.

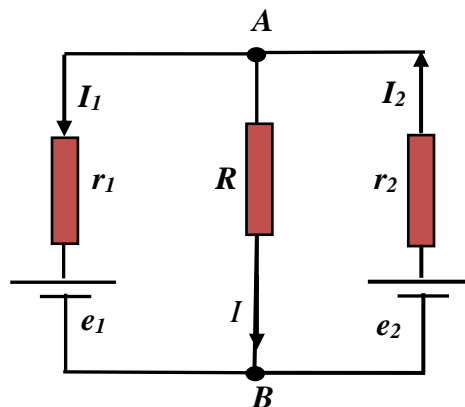


Figure -45 -

- Notez que nous avons choisis le sens du courant I_1 du haut vers le bas contrairement à ce que nous avons fait dans le paragraphe précédent.

- Nous allons utiliser le théorème de superposition pour trouver les différents courants dans le circuit de la figure-45-. Pour cela, nous supprimons d'abord la source e_1 et gardons la source e_2 , remarqué que le sens des courants a changés (figure-45-(a)).

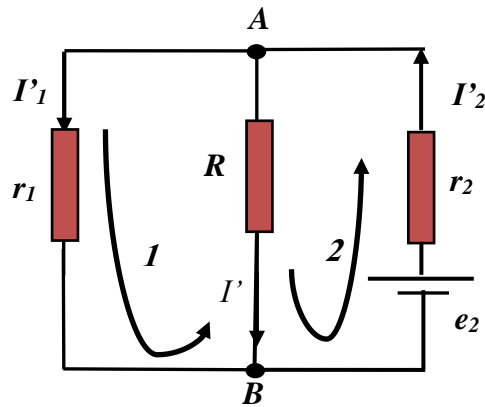


Figure -45 – (a)

De la maille (1) : $-r_1 \cdot I'_1 + R \cdot I' = 0 \dots \dots \dots (1)$

De la maille (2) : $e_2 - r_2 \cdot I'_2 - R \cdot I' = 0 \dots \dots \dots (2)$

Au nœud A : $I'_2 = I' + I'_1 \dots \dots \dots (3)$

en remplaçons (3) dans (2) : $e_2 - r_2 \cdot (I' + I'_1) - R \cdot I' = 0$, $(r_2 + R) \cdot I' + r_2 \cdot I'_1 = e_2$ d'où : $I'_1 = \frac{e_2 - (r_2 + R) \cdot I'}{r_2}$ et en utilisant l'équation (1) : $I' = \frac{r_1 \cdot e_2}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R}$ et de l'équation (1) et (3) :

$$I'_1 = \frac{R \cdot e_2}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R} \text{ et } I'_2 = \frac{(R + r_1) \cdot e_2}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R}$$

- Ensuite, on supprime la source « e_2 » et on conserve la source « e_1 », notez que le sens des courants a changé (figure-45-(b)).

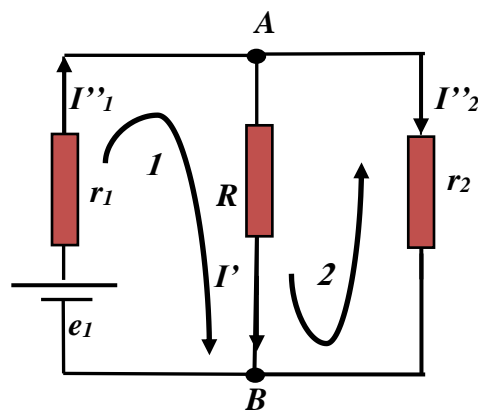


Figure -45 – (b)

De la maille (1) : $e_1 - r_1 \cdot I''_1 - R \cdot I'' = 0 \dots \dots \dots (1)$

De la maille (2) : $r_2 \cdot I''_2 - R \cdot I'' = 0 \dots \dots \dots (2)$

Au nœud A : $I''_1 = I'' + I''_2 \dots \dots \dots (3)$

Après des opérations similaires dans le paragraphe précédent :

$$I'' = \frac{r_2 \cdot e_1}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R}, I_2'' = \frac{R \cdot e_1}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R} \text{ et } I_1'' = \frac{(R+r_2) \cdot e_1}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot R + r_2 \cdot R}$$

Dans la dernière étape, on effectue la somme algébrique des courants. Notez que « I_1' » a le même sens que « I_1 », alors que « I_1'' » a le sens contraire :

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{-[R \cdot (e_1 - e_2) + r_2 \cdot e_1]}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2}$$

Notez que « I_2' » a le même sens que « I_2 », alors que « I_2'' » a le sens contraire :

$$I_2 = I_2' - I_2'' = \frac{R \cdot (e_2 - e_1) + r_1 \cdot e_2}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2}$$

Remarque : Nous n'avons pas trouvé le même signe pour le courant « I_1 » (paragraphe précédent), car nous avons changé le sens du courant dans le circuit de la figure-45- contrairement la figure-44-.

4. Théorème de Thevenin

La théorie de Thevenin permet de remplacer les éléments actifs ou passifs entre les points A et B (deux points) par un générateur de tension équivalent dite générateur de Thevenin :

$U_{TH} = V_{AB}$ (La différence entre ces deux points est une tension à vide (circuit ouvert)), avec sa résistance interne R_{TH} qui est la résistance électrique interne observée entre les points A et B quand tous les générateurs de tension sont courts circuités et les générateurs de courant sont ouverts (circuit ouvert).

4.1. Exemple d'application

Soit le même circuit étudié précédemment (Figure-44-), on demande de calculer le courant dans la branche A_1B_1 en utilisant le théorème de Thevenin.

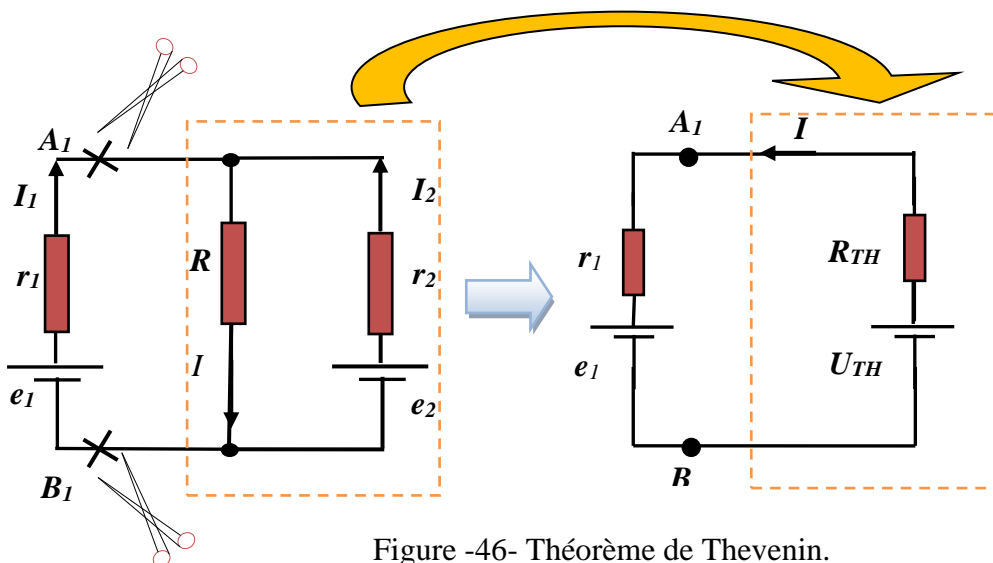


Figure -46- Théorème de Thevenin.

4.1.1. Calcul de la tension de Thevenin $U_{AB} = E_{TH}$

On débranche la branche A_1B_1 (voir figure-46-(a), ci-dessous) :

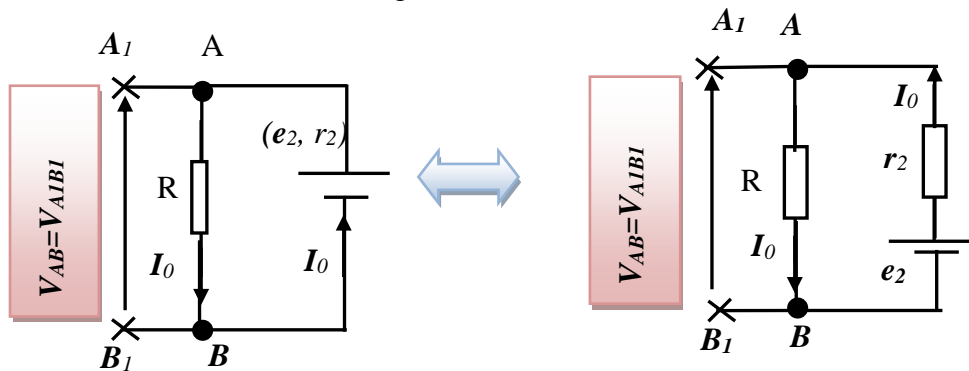


Figure -46- (a) Tension de Thevenin.

Le courant I_0 est donnée par : $I_0 = \frac{e_2}{R+r_2}$ d'où : $V_{AB} = RI_0 = \frac{R \cdot e_2}{R+r_2}$ et la tension de Thevenin :

$$U_{TH} = V_{AB} = RI_0 = \frac{R \cdot e_2}{R + r_2}$$

4.1.2. Calcul de la résistance de Thevenin $R_{TH} = R_{A1B1}$

La résistance « R_{TH} » est obtenue en passivant le générateur de tension « e_2 ». Il suffit de remplacer le générateur « e_2 » par un court-circuit, ce qui donne : $R_{TH} = R_{eq} = \frac{R \cdot r_2}{R+r_2}$

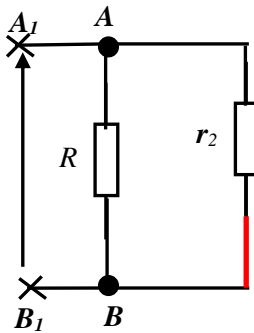


Figure -46- (b) Résistance de Thevenin.

Connaissant maintenant les valeurs de « U_{TH} » et « R_{TH} », le circuit équivalent de Thevenin (voir figure-46- (b), ci-dessous) :

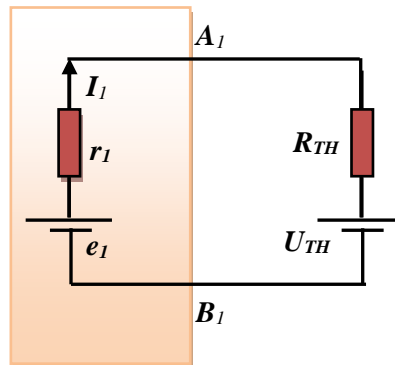


Figure -46- (b) Circuit équivalent de Thevenin.

Le courant I_1 : $I_1 = -\frac{U_{TH}-e_1}{R_{TH}+r_1}$, on remplace U_{TH} et R_{TH} par leurs expressions : $I_1 = \frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$.

Exemple 2 :

1) Trouvez le schéma équivalent de Thevenin vue entre la résistance « R_3 ».

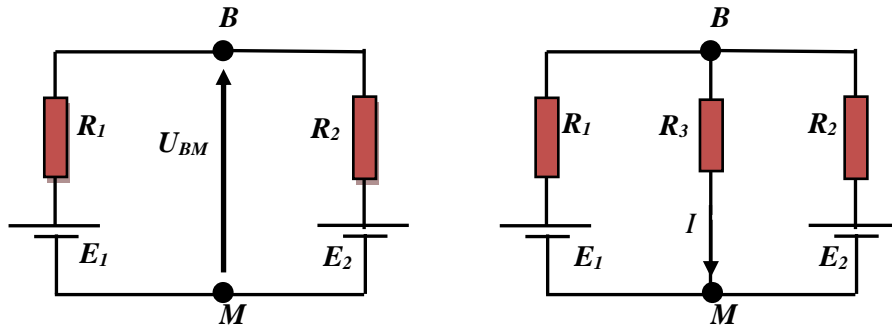


Figure -47-

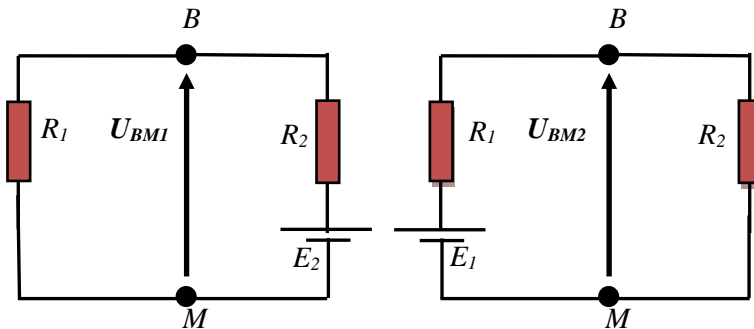
Application Numérique :

$$R_1 = 3K\Omega, R_2 = 6K\Omega, R_3 = 10K\Omega, E_1 = 20V, E_2 = 10V$$

Solution 2 :

En appliquant le théorème de superposition, on trouve :

$$U_{BM1} = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2}, U_{BM2} = E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$$



Et la tension de Thevenin sera :

$$E_{TH} = U_{BM1} + U_{BM2} = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 16.66V$$

Après le court-circuit des générateurs (voir figure-47- (a)) : $E_1 = E_2 = 0$, la résistance de Thevenin

sera : $R_{TH} = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2} = 2K\Omega$, et le schéma équivalent de Thevenin (figure-47-) :

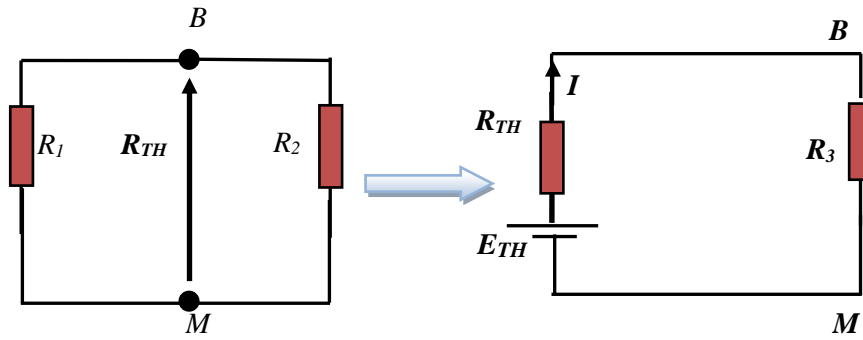


Figure -47-(a)

Figure -47- (b)

Figure -47- : (a) Calcul de la résistance de Thevenin,
(b) schéma équivalent de Thevenin

5. Théorème de Norton

Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B par un générateur de Norton équivalent de courant « I_N » et de résistance interne « R_N ».

- 1) La valeur « I_N » du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- 2) La résistance interne « R_N » correspond à la valeur de la résistance vue entre B et M lorsque les sources indépendantes sont passivées.

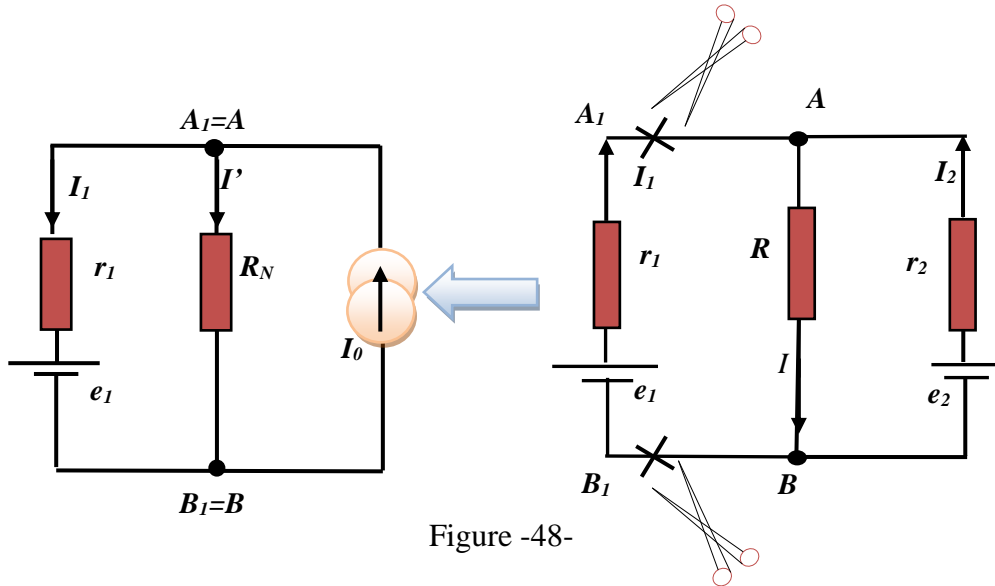


Figure -48-

5.1. Calcul de la résistance de Norton R_N

Nous calculons la résistance électrique équivalente de Norton « R_N » de la même manière que

Thevenin, nous retrouvons le même résultat : $R_N = R_{eq} = \frac{R \cdot r_2}{R + r_2}$

5.2. Calcul du courant Norton $I_N=I_0$

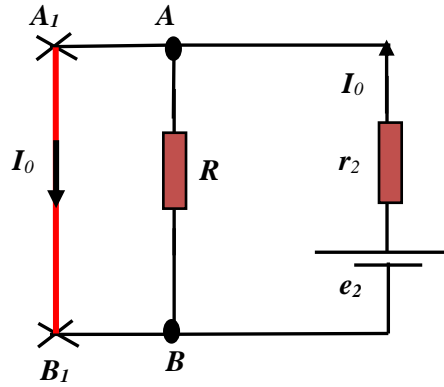
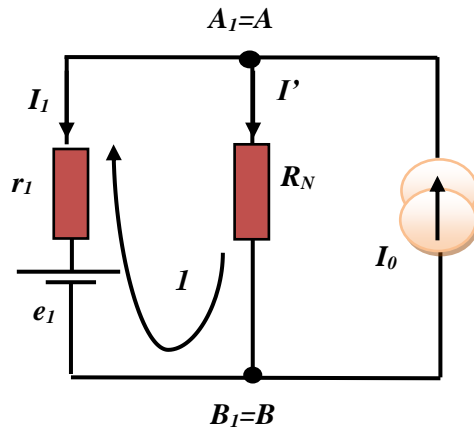


Figure -48- (a).

- Nous calculons maintenant le courant de court-circuit I_0 :

Le court-circuit entre A_1B_1 obscurcit (découple) la résistance électrique R (figure-48-(a)), donc

aucun courant ne passe à travers et nous avons : $e_2 - r_2 \cdot I_0 = 0 \Leftrightarrow I_0 = \frac{e_2}{r_2}$



Au nœud A, on a : $I_0 = I_1 + I' \dots \dots \dots (1)$,

D'où : $I' = I_0 - I_1 \dots \dots \dots (2)$

De la maille (1), on écrit : $e_1 + r_1 \cdot I_1 - R_N \cdot I' = 0 \dots \dots \dots (3)$

On substitue (2) dans (3) : $e_1 + r_1 \cdot I_1 + R_N \cdot (I_1 - I_0) = 0 \dots \dots \dots (4)$

$$e_1 + (r_1 + R_N) \cdot I_1 - R_N \cdot I_0 = 0$$

$$I_1 = \frac{-e_1 + R_N \cdot I_0}{r_1 + R_N} = \frac{-e_1 + R_N \cdot \frac{e_2}{r_2}}{r_1 + R_N}$$

$$R_N = \frac{R \cdot r_2}{R + r_2} \text{ et } I_1 = \frac{R \cdot (e_2 - e_1) - r_2 \cdot e_1}{(r_1 + r_2) \cdot R + r_1 \cdot r_2}$$

Exemple 3 :

1) Calculer le courant dans « R_u », avec les données : $I_1 = 2mA, I_2 = 5mA, R_1 = 10K\Omega, R_2 = 5K\Omega$

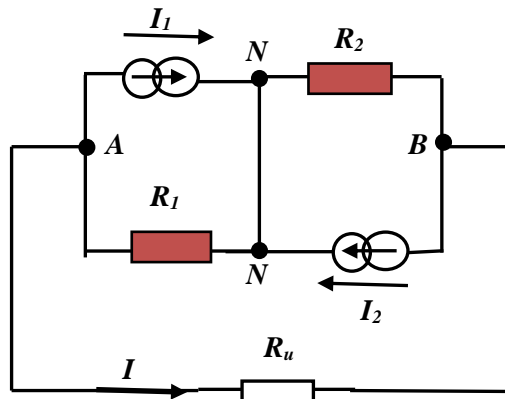


Figure -49-

Solution 3:

La figure ci-dessus (figure-49-) peut être simplifiée comme suit :

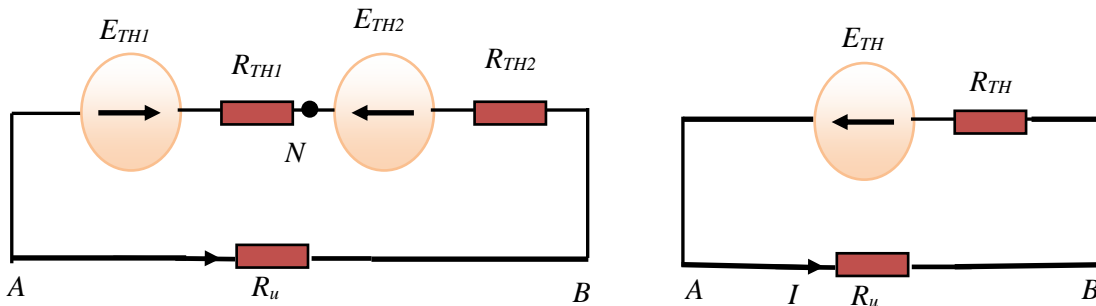


Figure -49- (a).

On effectue les calculs, on trouve :

$$E_{TH1} = I_1 R_1 = 20V, E_{TH2} = I_2 R_2 = 25V, R_{TH1} = R_1, R_{TH2} = R_2$$

$$E_{TH} = E_{TH2} - E_{TH1} = 5V, R_{TH} = R_{TH1} + R_{TH2} = R_1 + R_2 = 15K\Omega$$

6. Théorème de Kennelly

Ce théorème permet de transformer un montage en triangle (π ou Δ) en un montage en étoile (T ou Y) qui est souvent beaucoup plus facile à étudier. Cette transformation est souvent appelée transformation triangle-étoile ou étoile-triangle.

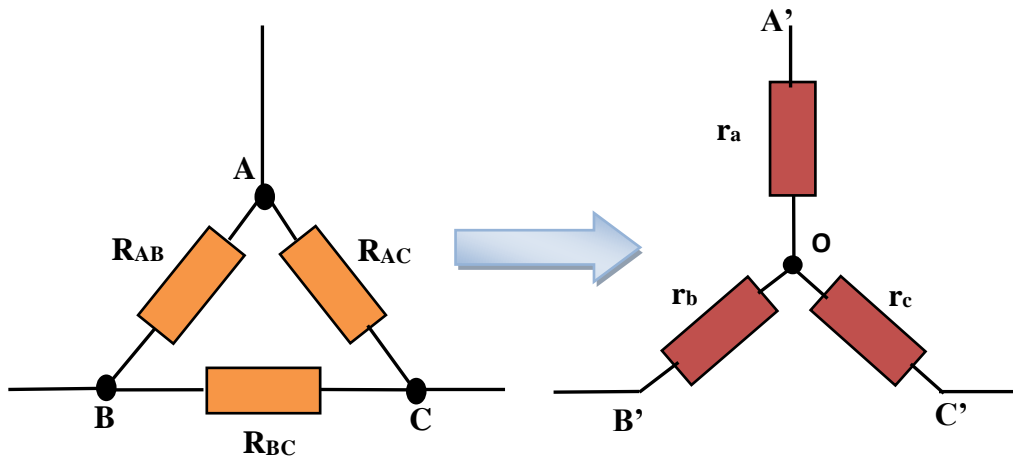


Figure - 50-Transformation Triangle → Etoile

- Les formules utilisées pour la Transformation Triangle vers étoile (figure-50-) sont les

suivantes: $r_a = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$, $r_b = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$, $r_c = \frac{R_{BC} \cdot R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$

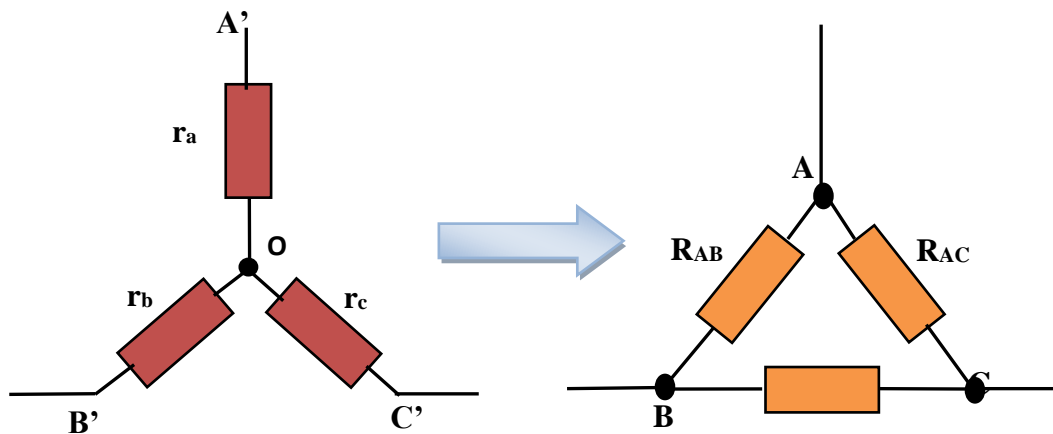


Figure - 51-Transformation Etoile → Triangle

- Les formules utilisées pour la Transformation étoile vers Triangle (figure-51-) sont les suivantes :

$$R_{AB} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_c}, R_{AC} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_b}, R_{BC} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_a}$$

- La Transformation étoile vers Triangle ou vice versa est basée sur le théorème de superposition des circuits électriques.**

- C et C' en air (circuit ouvert) :

$$R_{AB} = R_{A'B'} \Leftrightarrow r_a + r_b = (R_{AB}) // (R_{AC} + R_{BC}) = \frac{(R_{AB}) \cdot (R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \dots \dots \dots (1)$$

- B et B' en air (circuit ouvert) :

$$R_{AC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow r_a + r_c = (R_{AC}) // (R_{AB} + R_{BC}) = \frac{(R_{AC}) \cdot (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} \dots\dots\dots (2)$$

- A et A' en air (circuit ouvert) :

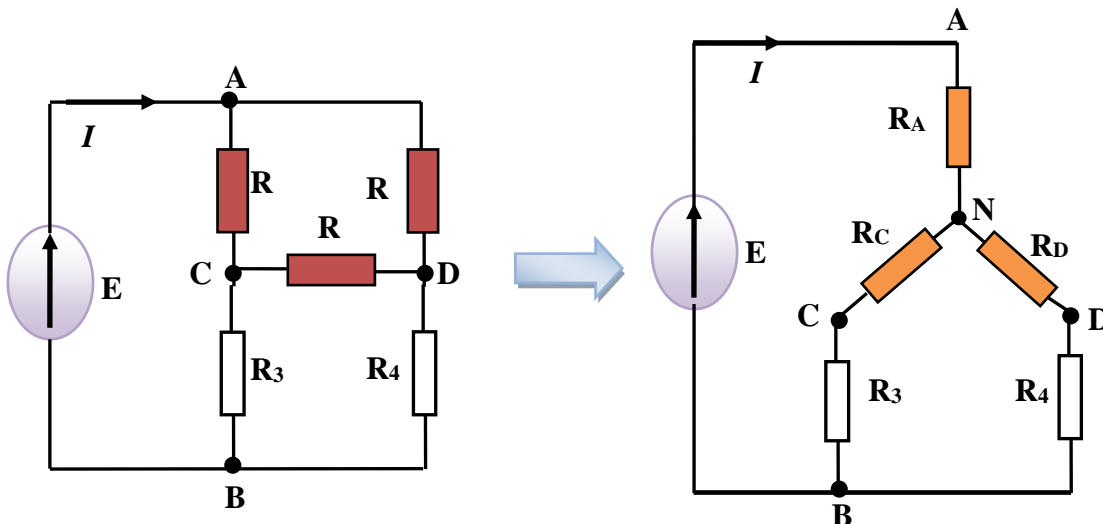
$$R_{BC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow r_b + r_c = (R_{BC}) // (R_{AB} + R_{AC}) = \frac{(R_{BC}) \cdot (R_{AB} + R_{AC})}{R_{BC} + R_{AB} + R_{AC}} \dots\dots\dots (3)$$

A partir des équations (1), (2) et (3) :

$$r_a = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}, r_b = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}, r_c = \frac{R_{BC} \cdot R_{AC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Exemple 4 :

1. Trouver l'expression de la résistance équivalente vue entre AB et déduire le courant total :



Solution 4 :

- Calcul des résistances R_A, R_B, R_C .

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R} = \frac{R}{3}, R_C = \frac{R_1 \cdot R}{R_1 + R_2 + R} = \frac{R}{3}, R_D = \frac{R \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R} = \frac{R}{3}$$

Et la résistance équivalente sera :

$$R_{eq} = R_A + [(R_C + R_3) // (R_D + R_4)] = \dots = R \text{ et le courant : } I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R}$$

Exemple 5 :

2. Calculer la résistance équivalente vue entre AE de la figure-52- :

Donnée :

$$R_1 = R_5 = 2K\Omega, R_3 = R_7 = 3K\Omega, R_2 = R_6 = 5K\Omega, R_4 = 1K\Omega, R_8 = R_9 = 8K\Omega$$

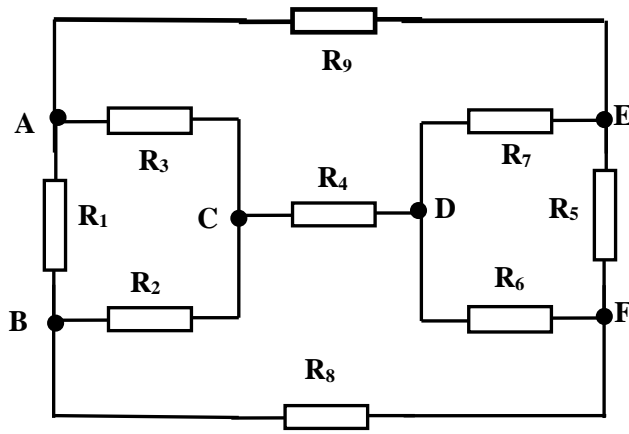


Figure-52-

Après le calcul : $R_{AE}=3.74K\Omega$.

• La Transformation Triangle vers étoile ou vice versa est basée sur le théorème de superposition des circuits électriques.

- En relie $A=B$ et $A'=B'$:

$$R_{BC} = R_{B'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{r_c + \frac{r_a \cdot r_b}{r_a + r_b}} \dots \dots \dots (1)$$

- En relie $A=C$ et $A'=C'$:

$$R_{AB} = R_{A'B'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{r_b + \frac{r_a \cdot r_c}{r_a + r_c}} \dots \dots \dots (2)$$

- En relie $C=B$ et $C'=B'$:

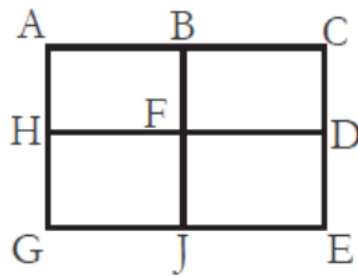
$$R_{AC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{r_a + \frac{r_b \cdot r_c}{r_b + r_c}} \dots \dots \dots (3)$$

A partir des équations (1), (2) et (3) :

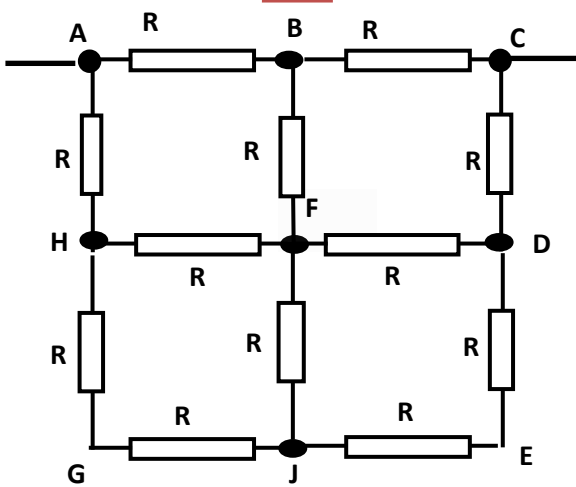
$$R_{AC} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_b}, R_{AB} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_c}, R_{BC} = \frac{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c}{r_a}$$

Problème

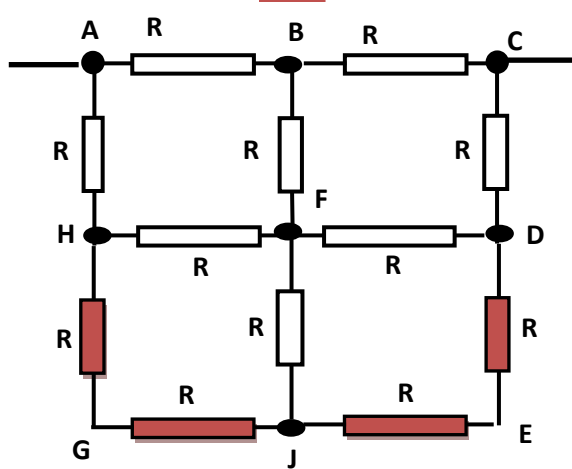
On constitue le circuit représenté par la figure ci dessous à l'aide de 12 résistances identiques, chacune de valeur R . calculer la résistance équivalente du dipôle passif vue entre AC.



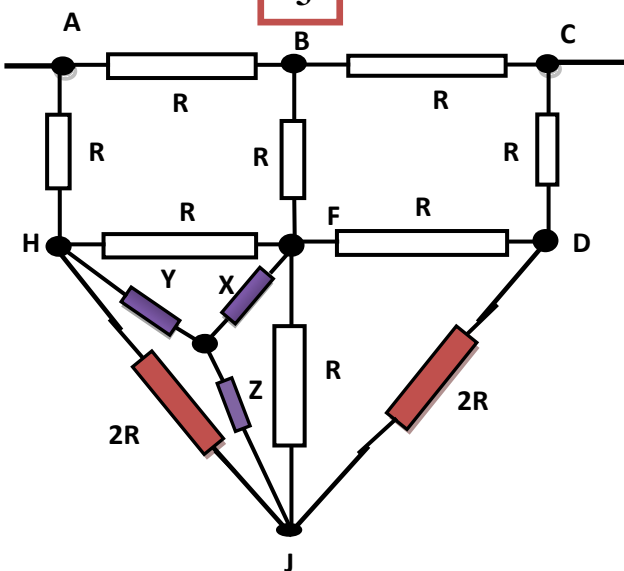
1



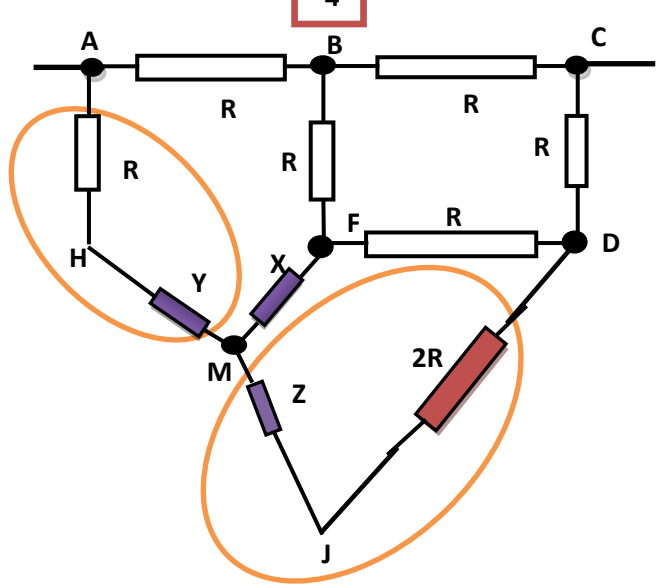
2



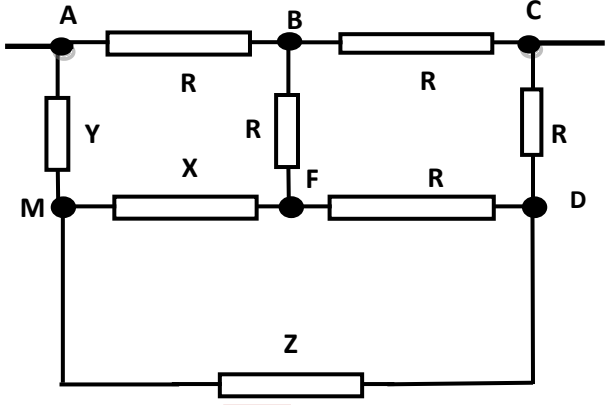
3



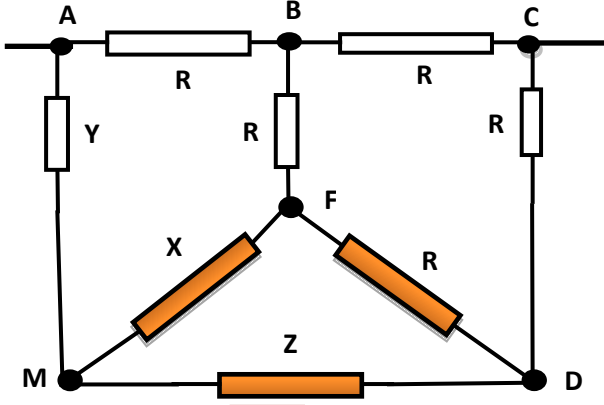
4



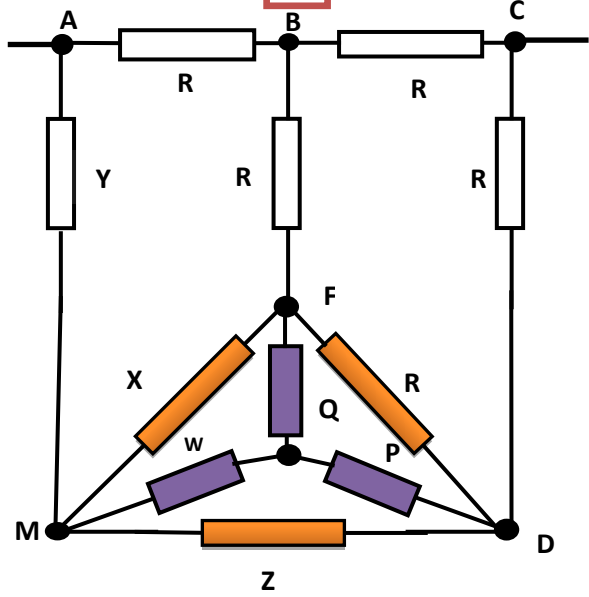
5



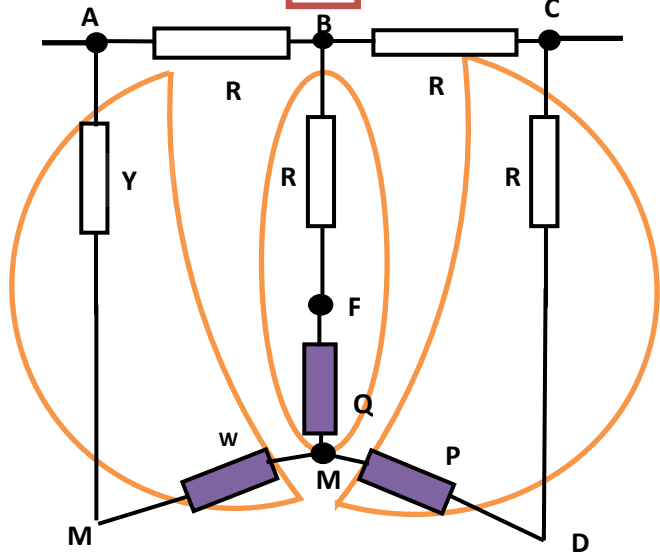
6



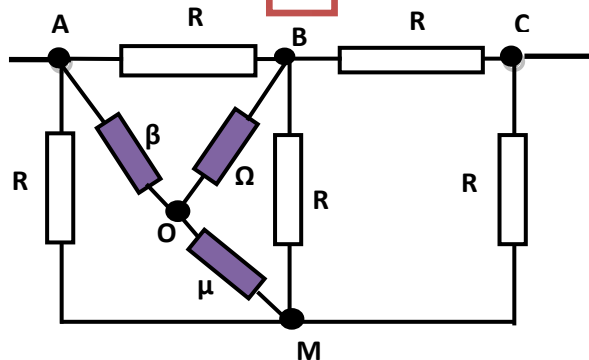
7



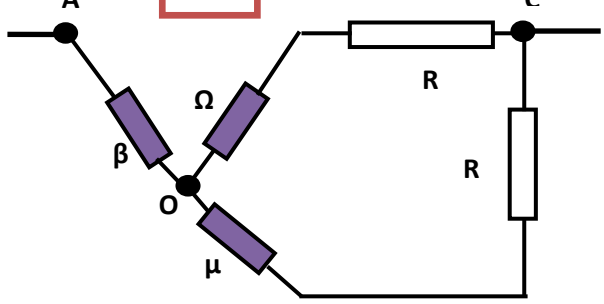
8



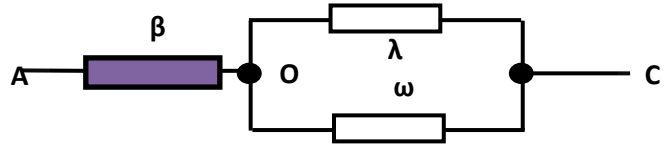
9



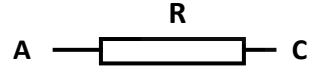
10



11



12

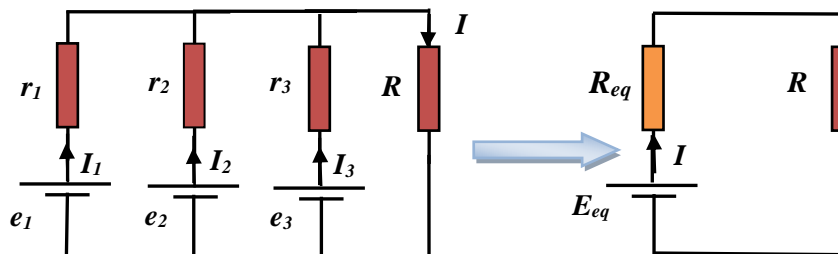


$$\begin{aligned}
 X &= \frac{R.R}{R+2R+R} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}, Y = Z = \frac{(R).(2R)}{R+2R+R} = \frac{2R^2}{4R} = \frac{R}{2}, Y_0 = R + Y = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}, Z_0 = 2R + Z = \\
 2R + \frac{R}{2} &= \frac{5R}{2}, Q = \frac{X.R}{X+R+Z_0} = \frac{\frac{R}{4}.R}{\frac{R}{4}+R+\frac{5R}{2}} = \frac{\frac{R^2}{4}}{\frac{R+4R+10R}{4}} = \frac{R}{15}, P = \frac{Z_0.R}{X+R+Z_0} = \frac{\frac{5R}{2}.R}{\frac{R}{4}+R+\frac{5R}{2}} = \frac{\frac{5R^2}{2}}{\frac{R+4R+10R}{4}} = \frac{10R}{15} = \\
 \frac{2.R}{3}, W &= \frac{X.Z_0}{X+R+Z_0} = \frac{(\frac{R}{4}).(\frac{5R}{2})}{\frac{R}{4}+R+\frac{5R}{2}} = \frac{\frac{5.R^2}{8}}{\frac{R+4R+10R}{4}} = \frac{5.R}{30} = \frac{R}{6}, R_A = R + Q = R + \frac{R}{15} = \frac{16.R}{15}, R_B = R + P = \\
 R + \frac{2.R}{3} &= \frac{5.R}{3}, R_C = Y_0 + W = \frac{3.R}{2} + \frac{R}{6} = \frac{10.R}{6} = \frac{5.R}{3}, \Omega = \frac{R.R_A}{R+R_A+R_C} = \frac{R.\frac{16.R}{15}}{R+\frac{16.R}{15}+\frac{5.R}{3}} = \frac{\frac{16.R^2}{15}}{\frac{15.R+16.R+25.R}{15}} = \\
 \frac{16R}{56} &= \frac{2.R}{7}. \\
 \beta &= \frac{R.R_C}{R+R_A+R_C} = \frac{R.\frac{5.R}{3}}{R+\frac{16.R}{15}+\frac{5.R}{3}} = \frac{\frac{5.R^2}{3}}{\frac{15.R+16.R+25.R}{15}} = \frac{25.R}{56}, \mu = \frac{R_A.R_C}{R+R_A+R_C} = \frac{\frac{16.R}{15}.\frac{5.R}{3}}{R+\frac{16.R}{15}+\frac{5.R}{3}} = \frac{\frac{16.R^2}{9}}{\frac{15.R+16.R+25.R}{15}} = \\
 \frac{16.R}{56} \cdot \frac{15}{9} &= \frac{80.R}{168} = \frac{10.R}{21} \lambda = R + \Omega = R + \frac{2.R}{7} = \frac{9.R}{7}, \omega = R_B + \mu = \frac{5.R}{3} + \frac{10.R}{21} = \frac{45R}{21} R_{AC} = \beta + \\
 \frac{\lambda.\omega}{\lambda+\omega} &= \frac{25R}{56} + \frac{\frac{9.R}{7} \cdot \frac{45.R}{21}}{\frac{9.R}{7} + \frac{45.R}{21}} = \frac{25R}{56} + \frac{\frac{405.R^2}{(7).(21)}}{\frac{27.R+45.R}{21}} = \frac{25R}{56} + \frac{405.R}{504} = \frac{225.R+405.R}{504} = \frac{630.R}{504} = \frac{5.R}{4}
 \end{aligned}$$

7. Théorème de Millman, ou (Théorème du « potentiel de nœud »)

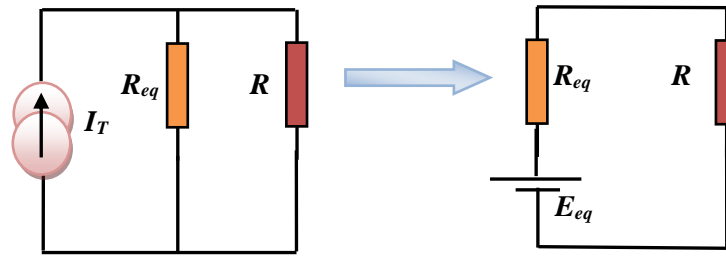
Ce théorème donne une généralisation du théorème de superposition. Il s'applique à un circuit électrique constitué de n branches en. Chacune de ces branches comprenant un générateur de tension parfait en série avec un parallèle élément passif (comme une résistance par exemple). Soit le montage schématisé ci-dessous : pour déterminer le courant dans R, on doit procéder de la méthode suivante :

1) Nous transformons toutes les sources de tension en sources de courant, donc le courant de chaque source égale à la division de chaque source de tension par la somme des résistances dans la même branche. Ces sources de courant contiennent les mêmes résistances internes qui sont placées sur la branche (voir dualité : générateur de tension – générateur de courant), comme suit :



2) Nous montons toutes les sources de courant des branches selon la loi des nœuds (loi de Kirchhoff), donc nous obtenons une source de courant égal à la somme de toutes les sources de

courant des branches, ou sa résistance interne est la résistance équivalente de toutes les résistances dans toutes les branches.

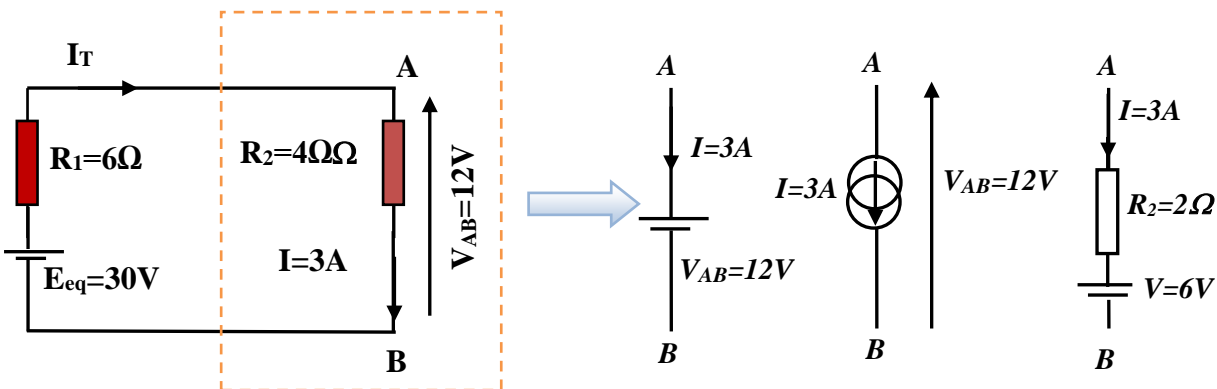


$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} I_T = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}, E_{eq} = R_{eq} I_T \quad E_{eq} = R_{eq} \cdot I_T =$$

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} \cdot \left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3} \right)$$

8. Théorème de substitution

Lorsque nous connaissons la différence de potentiel V_{AB} qui existe entre deux points quelconques d'un circuit électrique, nous ne changeons rien à l'état électrique du reste du circuit si nous remplaçons cette chute de tension et la partie du circuit qui lui donne naissance par une source de tension idéale qui délivre une tension égale à V_{AB} . De même, lorsque nous connaissons le courant « I_{AB} » qui circule dans une branche quelconque notée AB d'un circuit électrique, nous ne changeons rien à l'état électrique du reste du circuit, si nous remplaçons cette branche par une source idéale de courant qui délivre un courant « I_{AB} ».

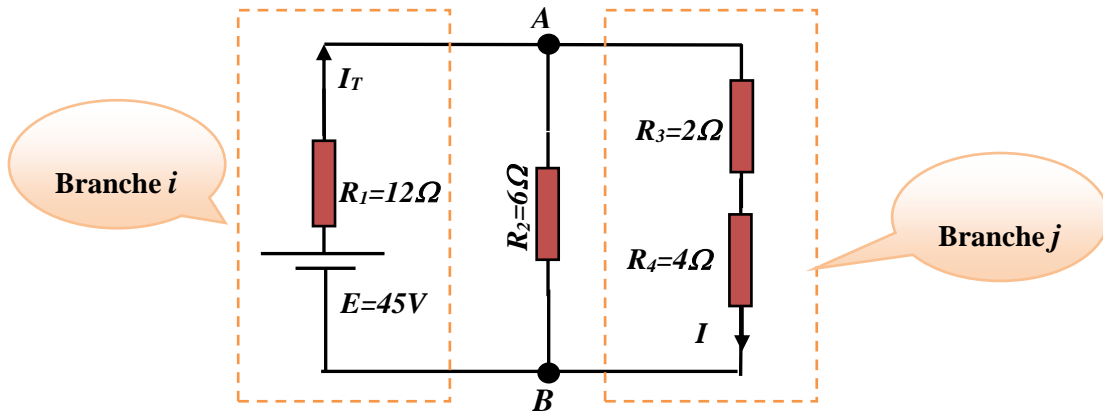


9. Théorème de réciprocité

Soient deux branches i et j d'un circuit passif. Si le fait de placer une source idéale de tension E dans la branche i produit un courant I_j dans la branche j , alors la même source de tension E placée dans la branche j produira un courant I_i dans la branche i égal à I_j : $I_i = I_j$.

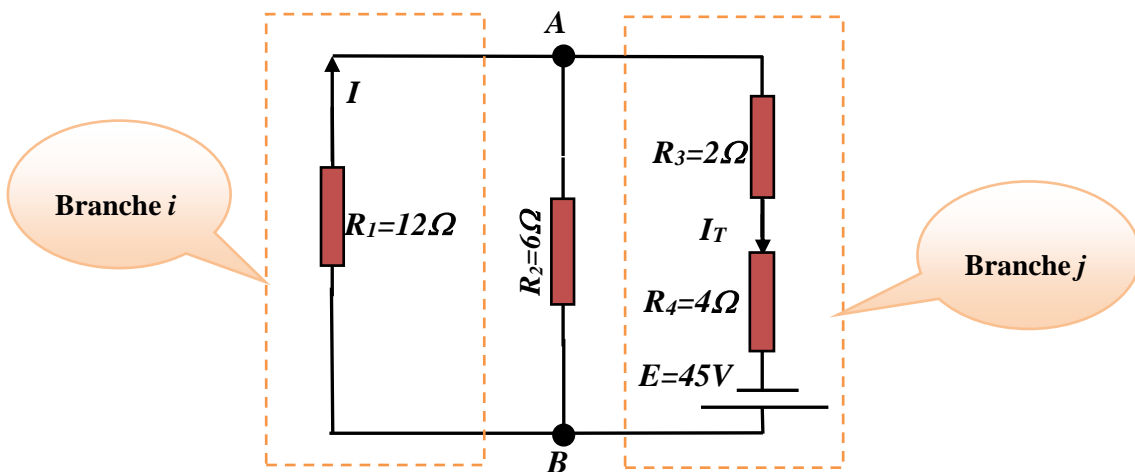
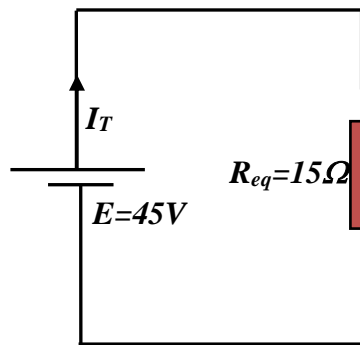
Analyse des circuits électriques

Soit le circuit ci-dessous, d'après les calculs on trouve que le courant totale $I_T = 3A$, tandis que $I = 1.5A$:



En déplaçant la source de tension E dans la branche j , et après avoir fait les calculs, on trouve que $I_T = 4.5A$,

Tandis que $I = 1.5A$ et de ce fait le théorème est vérifié.



10. Théorème de Puissance maximale transférée

Parfois, nous voulons alimenter une charge électrique par une puissance maximale fournie par un générateur de tension caractérisé par sa résistance interne. Comment cela peut être réalisée ? qu'est ce qui se passe dans ce cas ?

Considérons le circuit élémentaire de la figure-53- constitué d'un générateur réel de tension et d'une résistance de charge R_0 .

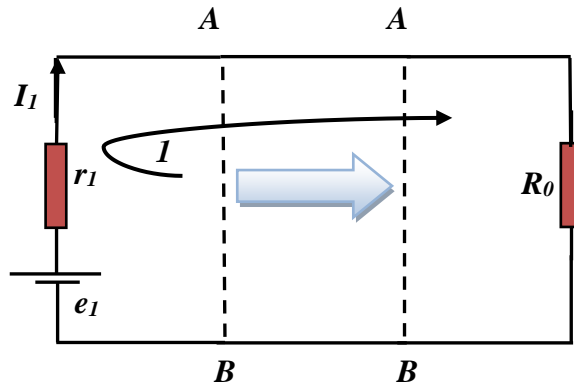


Figure-53- Adaptation de la charge à la source.

La puissance fournie par le générateur est : $P = e_1 \cdot I_1$, avec le courant : $I_1 = \frac{e_1}{(r_1 + R_0)}$ de la maille (1) :

$$e_1 - (r_1 + R_0) \cdot I_1 = 0 \text{ est de ce fait la puissance du générateur est : } P = \frac{e_1^2}{(r_1 + R_0)}$$

La puissance moyenne fournie à la charge est donnée par : $P_{R_0} = R_0 \cdot I_1^2 = R_0 \cdot \frac{e_1^2}{(r_1 + R_0)^2} = \frac{R_0 \cdot e_1^2}{(r_1 + R_0)^2}$ qui

peut être écrit sous la forme :

$$P_{R_0} = \frac{e_1^2}{4 \cdot r_1} \left[1 - \left(\frac{r_1 - R_0}{r_1 + R_0} \right)^2 \right] : \text{ Cette puissance est maximale si la dérivée de l'expression de } P_{R_0} \text{ par}$$

rapport à la résistance R_0 est nulle : d'où : $R_0 = r_1$ ou la puissance sera : $P_{R_0} = \frac{e_1^2}{4 \cdot r_1}$

$$P_{r_1} = P_{R_0} = \frac{e_1^2}{4 \cdot r_1}, \text{ et la puissance fournie par le générateur sera : } P = \frac{e_1^2}{(r_1 + R_0)} = \frac{e_1^2}{2 \cdot r_1}$$

Le rendement sera : $\eta = \frac{P_{R_0}}{P} = \frac{P_{R_0}}{P} = \frac{1}{2} = 50\%$, C'est un résultat général lorsque la puissance maximale est transférée.

Remarque :

Le théorème de Puissance maximale transférée peut être résumée comme suit : Lorsque nous connectons une charge électrique passif à une source de tension constante avec sa résistance interne : il faut que la charge électrique et la résistance interne de la source soit égaux pour qu'il ya un transfère maximale de puissance.

Exercices

Exercice 1 :

En utilisant le théorème de Kennelly, trouvez la résistance électrique équivalente vue entre : C et A de la figure-54-

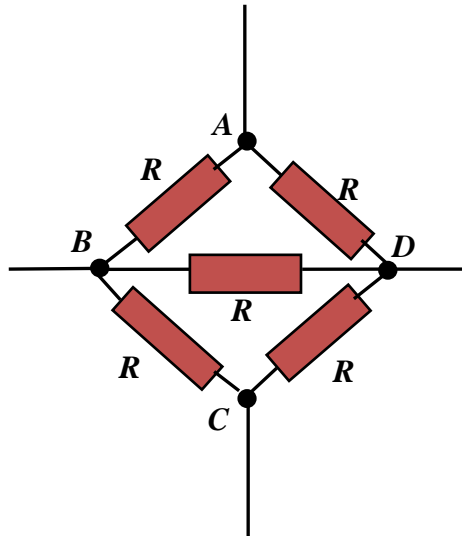


Figure-54-

Aide :

Commencez par transformez le triangle ABD en étoile.

Exercice 2

Soit le circuit de la Figure-55-.

- 1) Calculer l'intensité du courant i en fonction de : e_1 , e_2 , e_3 , r_1 et r_2 en utilisant le sens du courant représentée sur la figure-55- ci-dessous.

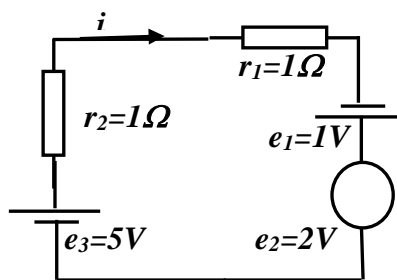


Figure-55-

Aide :

Comme nous l'avons vu dans la leçon, nous devons être conscients que s'il y a un courant négatif, nous devons changer le sens dans le circuit et refaire le calcul parce qu'il passe par un récepteur.

Exercice 3 :

1) En utilisant la méthode des courants virtuels, calculer les courants dans les branches AB, AD et AC pour la figure-56- : $r_1 = r_2 = r_5 = 1$, $r_3 = r_4 = 3$, $r_6 = 2$, $e_1 = 1V$, $e_2 = 7V$.

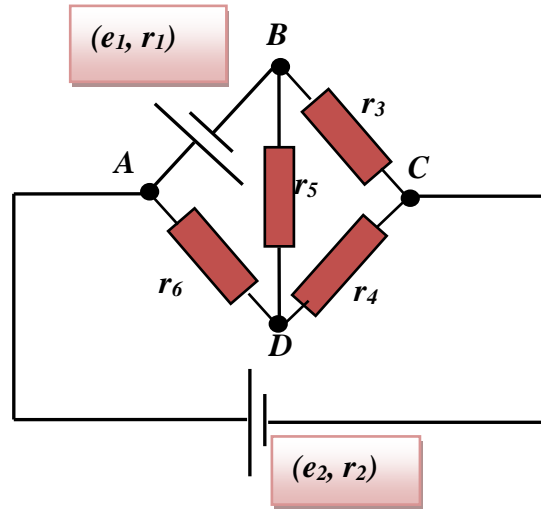


Figure-56-

Aide

Tels qu'expliquait dans la leçon. Nous recommandons d'utiliser la méthode matricielle directement.

Exercice 4 :

Soit le circuit représenté sur la figure -57-

1) Calculer les courants dans les différentes branches en utilisant la méthode de Maxwell en se servant des mailles illustrées sur la Figure-57-

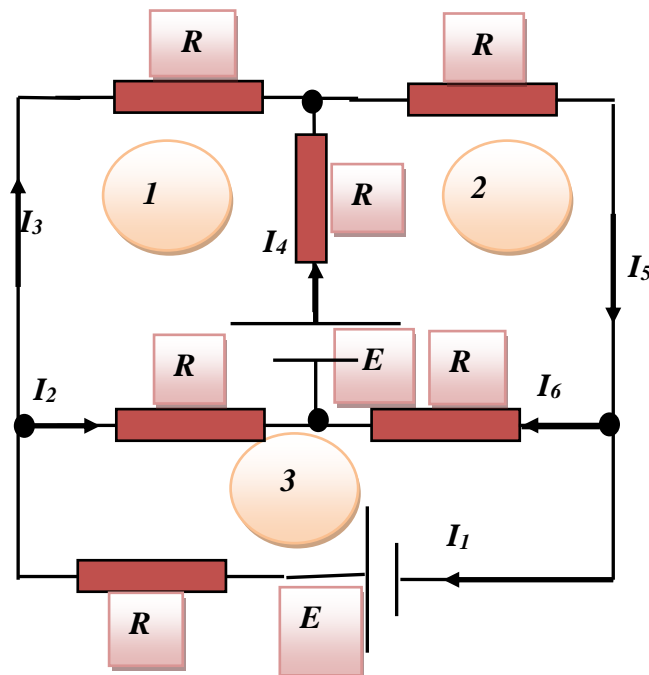


Figure-57-

Solution 4 :

L'application directe de la méthode Maxwell se traduit par :

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 3R & -R \\ -R & -R & 3R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -E \\ -E \end{pmatrix}, R \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Où nous avons adopté tous les courants de Maxwell dans le sens antihoraire (voir figure -58-)

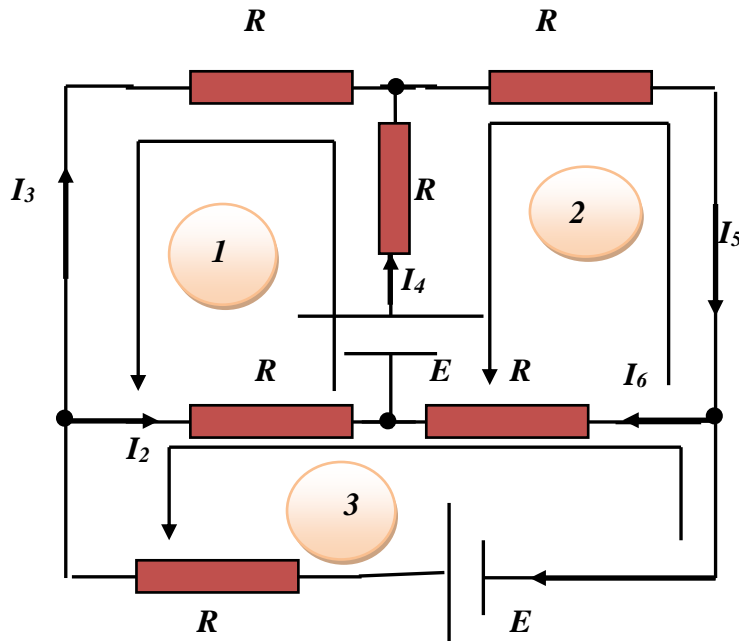


Figure-58-

Le calcul du déterminant de la matrice donne : $\Delta=16$.

La matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{R} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On suivant la démarche du calcul de la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{4R} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{4R} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = -\frac{E}{2R} \\ J_3 = -\frac{E}{2R} \end{cases}$$

D'où les courants réels :

$$I_1 = -J_3 = E/2R, I_2 = J_1 - J_3 = E/2R, I_3 = -J_1 = 0, I_4 = J_1 - J_2 = E/2R, I_5 = -J_2 = E/2R, I_6 = J_3 - J_2 = 0$$

Comme il n'y a pas de courant négatif dans le récepteur (où il n'y a pas de tel dispositif dans le circuit), il suffit de changer le sens de I_6 et I_3 dans le circuit et on n'y a pas besoin de réfère le calcul.

Exercice 5 :

Dans la figure -59- nous avons $e_n = n$ (volts), $r_n = n$ (Ω), nous demandons de calculer le courant dans la branche contenant les quatre sources de tension en utilisant le théorème de Thevenin.

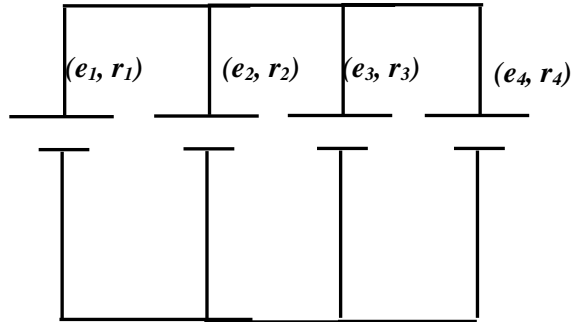


Figure-59-

Exercice 6 :

En utilisant le théorème de Thevenin et Norton, calculé le courant dans R dans le circuit de la figure-60- ci-dessous.

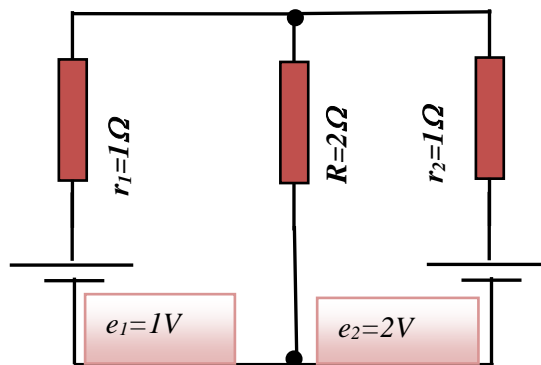


Figure -60-

Exercice 7 :

Démontrer que le circuit représenté sur la figure-61- équivaut à une boucle sans courant, à conclure qu'il n'y a pas de courant dans le réseau d'origine.

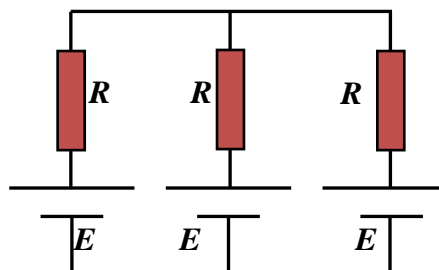


Figure-61-

Solution 7 :

Dans cet exercice, nous utilisons le théorème de Thevenin.

- Nous avons trois branches similaires : nous conservons une branche et nous remplaçons le reste du circuit par le générateur de Thevenin « E_{TH} » avec sa résistance « R_{TH} » (voir figure -62-).

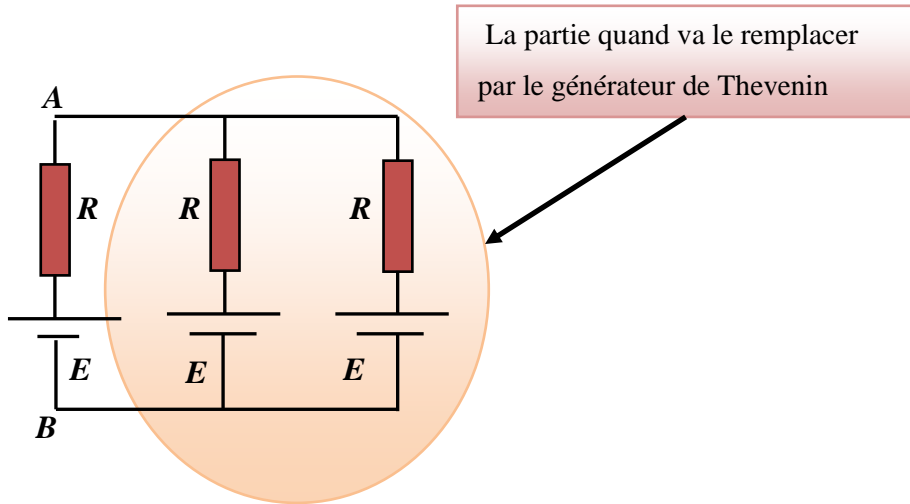
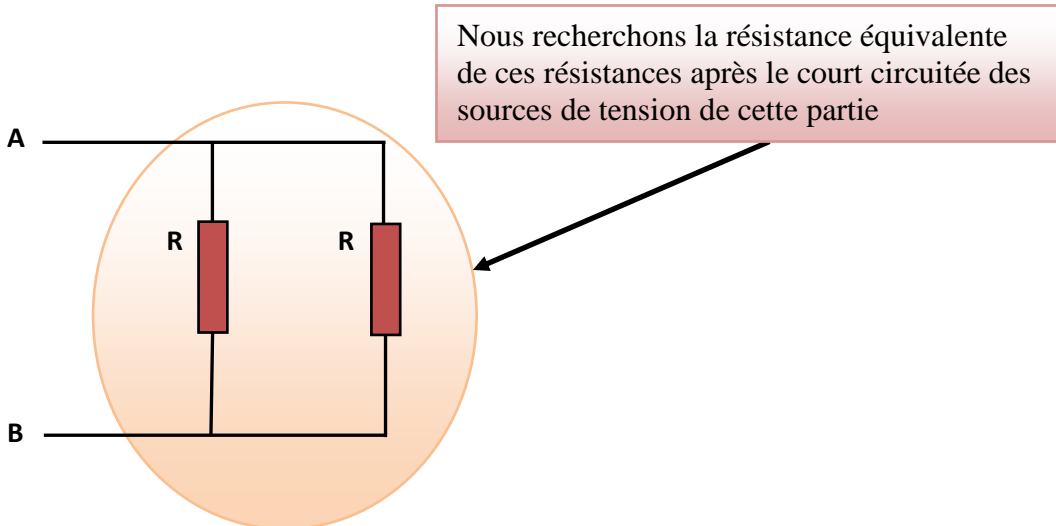


Figure-62-

a. Calcul de R_{TH} :



$$\frac{1}{R_{TH}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R} \dots \Rightarrow R_{TH} = \frac{R}{2}$$

• **Calcul de E_{TH} :**

La tension de Thevenin c'est la tension à vide entre les points A et B, en se basant sur la figure-62- ci-dessous on écrit :

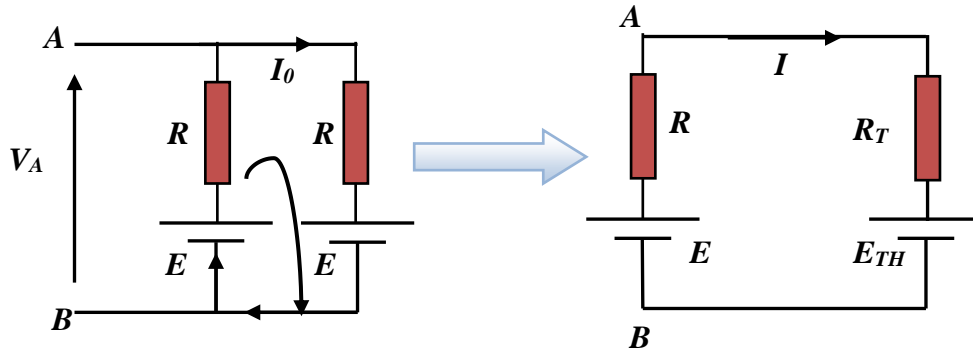


Figure -62- (a) Calcul de E_{TH}

De la maille (1) : $E - RI_0 - RI_0 - E = 0 \Rightarrow 2RI_0 = 0 \Rightarrow I_0 = 0$ et on conclut que :

$V_{AB} = E - RI_0 = E = E_{TH}$, le courant circulant dans le circuit ci-dessus (droite) :

$E - RI - R_{TH}I - E_{TH} = 0$, sachant que : $E = E_{TH} = 0$, d'où : $(R + R_{TH}).I = 0 \Rightarrow I = 0$

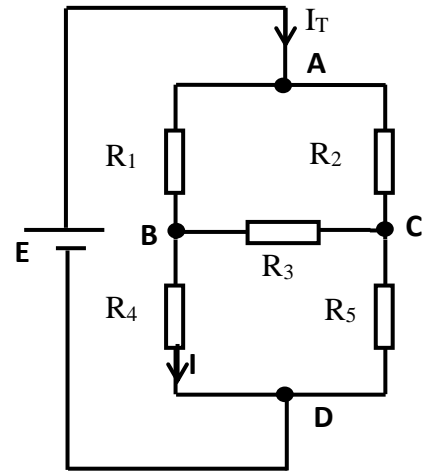
• Donc le circuit et équivalent à une boucle sans courant.

Problème :

On considère le réseau de la Fig. -1- b dans lequel :

$(R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R = 10 \Omega, E=10 V)$.

1. Transformer la Fig-1 a- du montage triangle en un montage éto
2. Calculer la résistance équivalente entre A et D.
3. Calculer le courant total I_T dans le réseau (Fig 1-b).
4. Déduire le courant I_4 et I_5
5. Calculer les tensions : $V_{BD}, V_{CD}, V_{AB}, V_{AC}$



1-b--Fig

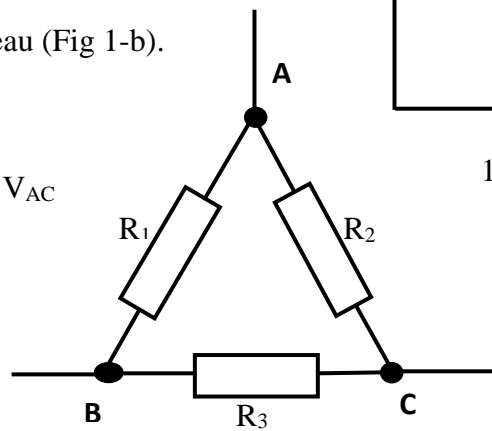


Fig 1- a-

Solution

1. Transformation de la Fig-1 a- du montage triangle en un montage étoile

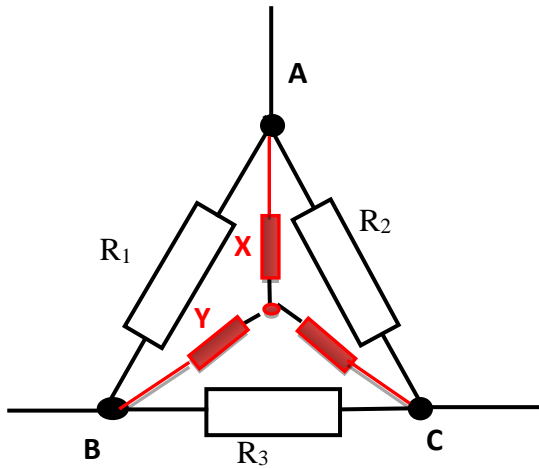


Fig 1- a--

$$X = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3 * R} = \frac{R}{3} = Y = Z$$

2. Calcul de la résistance équivalente entre A et D

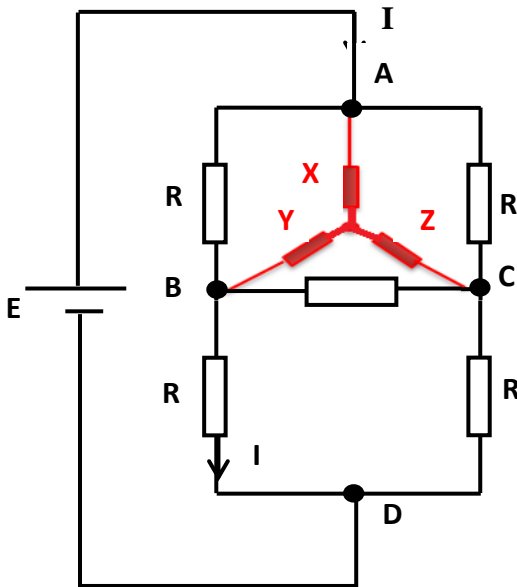


Fig 1-b-

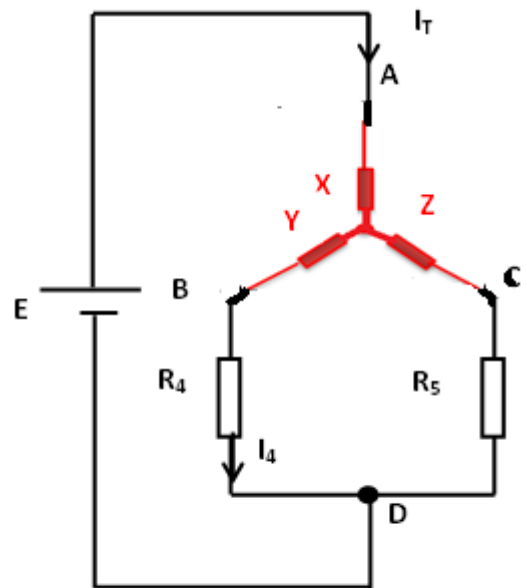


Fig -1-b-

$$R_{AD} = X + (Y + R_4) // (Z + R_5) = \frac{R}{3} + \left(\frac{R}{3} + R\right) // \left(\frac{R}{3} + R\right) = R = 10 \Omega$$

3. Calcul du courant total I_T dans le réseau (Fig 1-b).

$$E = R_{AD} * I_T \rightarrow I_T = \frac{E}{R_{AD}} = 1 A$$

4. Dédire le courant I_4 et I_5

En utilisons le diviseur de courant :

$$I_4 = \frac{(Z + R_5)}{(Y + R_4) + (Z + R_5)} = \frac{\left(\frac{R}{3} + R\right)}{\left(\frac{R}{3} + R\right) + \left(\frac{R}{3} + R\right)} = 0.5 A$$

$$I_5 = \frac{(Y + R_5)}{(Y + R_4) + (Z + R_5)} = \frac{\left(\frac{R}{3} + R\right)}{\left(\frac{R}{3} + R\right) + \left(\frac{R}{3} + R\right)} = 0.5 A$$

5. Calcul des tensions : V_{BD} , V_{CD} , V_{AB} , V_{AC}

$$V_{BD} = R_4 * I_4 = R * I_4 = 5 V = V_{CD}$$

$$V_{AB} = E = 10 V$$

$$V_{AC} = V_{AB} - V_{CD} = 5 V$$



Problème

1. Calculer le courant I_0 (Fig-1-) qui circule dans la résistance R_0 .

Donnés (المعطيات): $E_1=5 V$, $E_2 = 8 V$

$R_1=R_3= R_5=5 \Omega$, $R_2 = R_4=R_0 = 10 \Omega$,

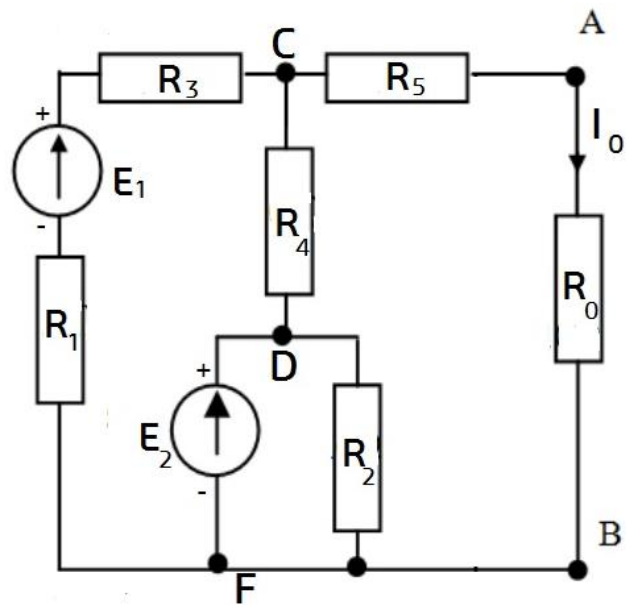
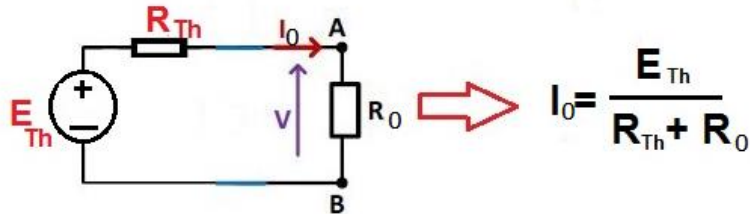


Fig-1-

Solution

D'après le théorème de Thévenin, On transforme le circuit (fig1) en un générateur de Thévenin avec ça résistance en série (Voir ci-dessous). Le circuit est ainsi ramené à une seule maille ou l'expression du courant I_0 est :



1. Calcul de $R_{Th} = R_{AB}$

$$R_{AB} = R_{Th} = [(R_1 + R_3) // R_4] + R_5 = 10 \Omega$$

2. Calcul de $E_{Th} = E_{AB}$

- De la maille 1 (Loi des mailles) (Fig-2-a):

$$E_{Th} + R_5 I_5 + R_4 I_4 - E_2$$

$$E_{Th} = E_2 - R_5 I_5 - R_4 I_4 = E_2 - R_4 I_4$$

($I_5 = 0$ circuit ouvert)

3. Calcul de I_4 :

- De la maille 2 (Loi des mailles) (Fig-2-a) :

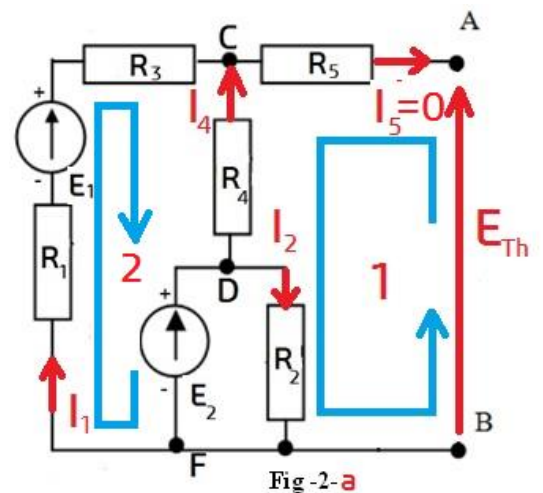
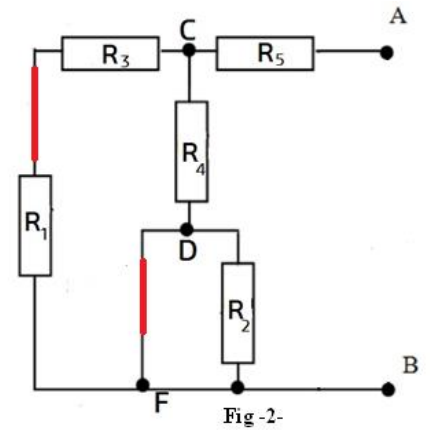
$$E_1 - E_2 + R_4 I_4 - (R_1 + R_3) I_1 = 0$$

$$(I_1 = -I_4)$$

$$E_1 - E_2 + R_4 I_4 + (R_1 + R_3) I_4 = 0$$

$$I_4 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{3}{20} A$$

$$E_{Th} = E_2 - R_4 I_4 = 8 - 10 * \frac{3}{20} = \frac{13}{2} = 6.5 V, \text{ d'où le courant } I_0 :$$



$$I_0 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_0} = \frac{6.5}{20} = 0.325 \text{ A}$$

Problème :

On considère le circuit donné par la figure.1.

On donne : $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_3 = 10\Omega$,

$R_4 = 15\Omega$ et $R_5 = 5\Omega$,

$E_1 = 10 \text{ V}$ et $E_0 = 1 \text{ V}$.

1. Calculer le courant I traversant la résistance R_5 .

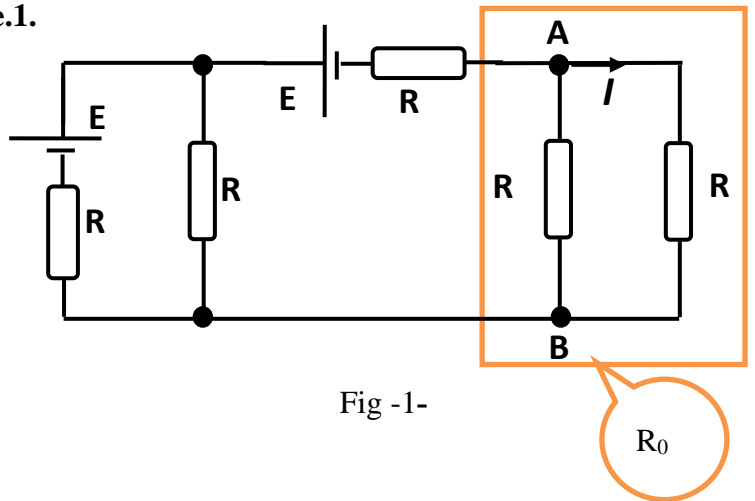


Fig -1-

2. Déduire :

- a. La tension V_{AB}
- b. Le courant qui circule dans la résistance R_4 et R_3 .

Solution

1. D'après la loi des mailles (Loi de Kirchhoff), j'écris:

De 1: $E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \dots \dots (1)$

De 2: $-E_0 - R_0 I_0 + R_2 I_2 = 0 \dots \dots (2)$

$I_1 = I_0 + I_2 \dots \dots \dots (3)$

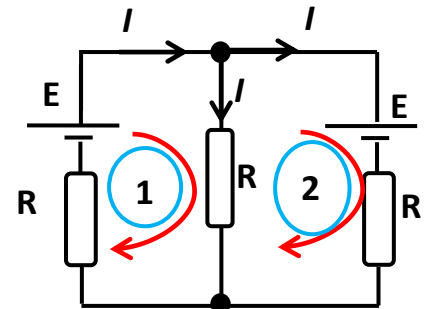


Fig -1-a

Je remplace I_1 de l'équation(3) dans (1):

$E_1 - R_1(I_0 + I_2) - R_2 I_2 = 0 \dots \dots (1)$

De 2: $-E_0 - R_0 I_0 + R_2 I_2 = 0 \dots \dots (2)$

En utilisant la méthode matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_1 + R_2 \\ -R_0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ -13.75 & 15 \end{vmatrix} = 493,75$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -13.75 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Determinant de Cramer)

$$R_0 = (R_4 // R_5) + R_3 = 13.75 K\Omega$$

$$\Delta I_0 = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 125$$

$$I_0 = \frac{\Delta I_0}{\Delta} = \frac{125}{493,75} = 0.253 A$$

$$I = \frac{R_4 I_0}{R_4 + R_5} = \frac{15 * 0.253}{20} \cong 0.19 A$$

= (le courant circulant dans R_3)

(Diviseur de courant)

$$V_{AB} = R_5 * I = 0.95 V$$

$$V_{AB} = R_4 * I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{V_{AB}}{R_4} = 0.063 A$$

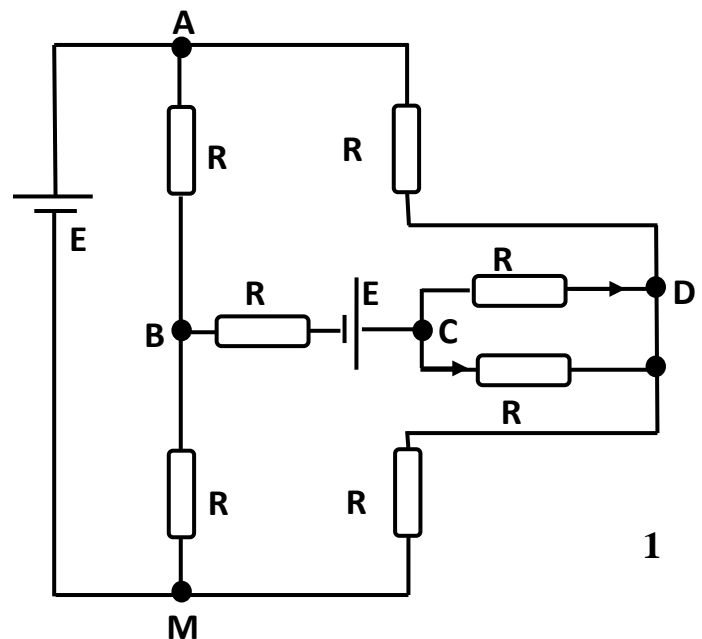
Problème 2018-2019 :

On considère le circuit donné par la figure.1.

On donne : $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 k\Omega$,

$R_6 = R_7 = 10 k\Omega$, $E_1 = 12 V$ et $E_2 = 6 V$.

3. Calculer le courant qui traverse la résistance R_2 .
4. Déduire le courant qui circule dans la résistance R_6 , faire l'application numérique.



Solution

En utilisant le théorème de Thevenin (Fig-1a) :

1. Calcul de R_{TH}

D'après la Fig-1-b :

$$R_{TH} = (R_1 // R_3) + (R_4 // R_5) + R_0 = 6 K\Omega, \text{ avec } R_0 = (R_6 // R_7) = 5 K\Omega.$$

2. Calcul de E_{TH}

$$E_{TH} = R_1 I_1 - R_4 I_4 - E_2$$

• **Calcul de I_1 et I_4**

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 6mA, \quad I_4 = \frac{E_1}{R_4 + R_5} = 6mA$$

$$E_{TH} - R_1 I_1 - R_4 I_4 - E_2 = 0 \Rightarrow E_{TH} = E_2 = 6V \text{ (Fig - 1c)}$$

$$I_2 = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_2} = \frac{6}{7} mA = 0.86mA \text{ (Fig - 1a)}.$$

• **Calcul de I_6 : en utilisant le diviseur de courant: $I_6 = I_2 \frac{R_7}{R_7 + R_6} = \frac{3}{7} = 0.43mA$.**

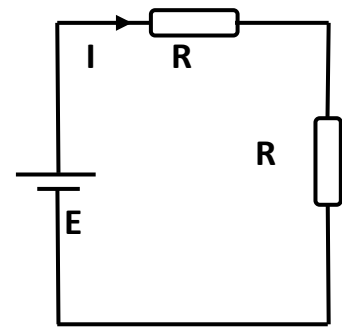


Fig - 1a

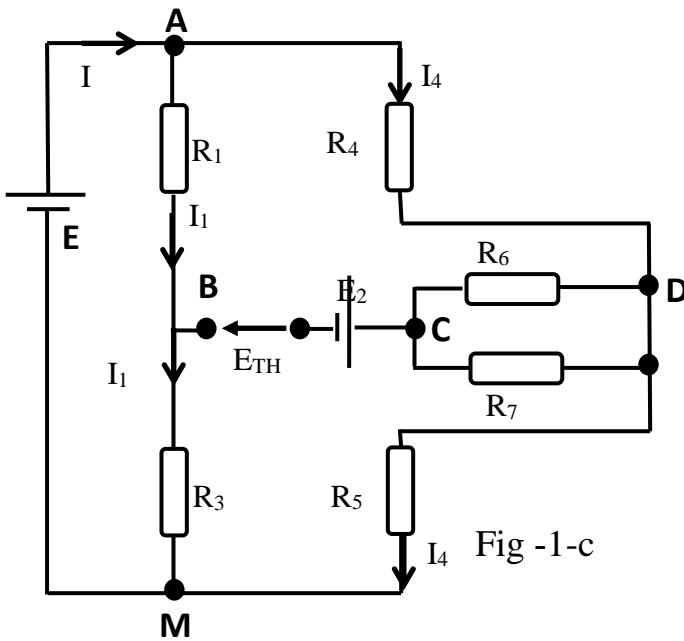


Fig - 1-c

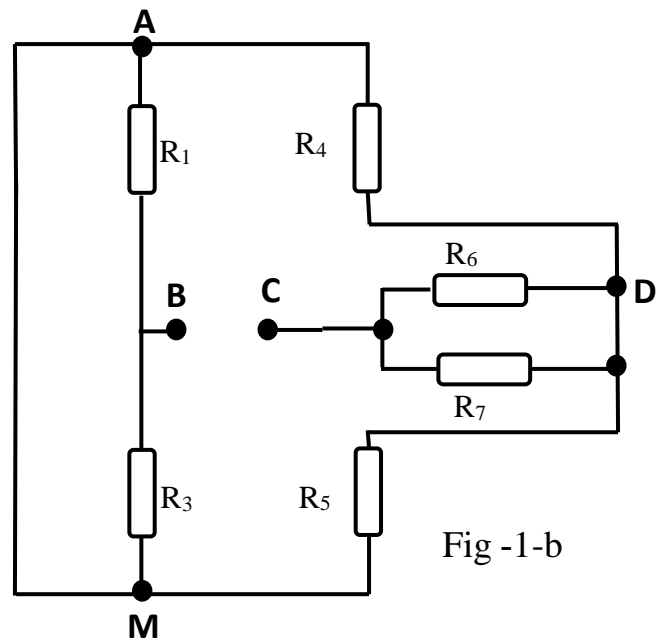


Fig - 1-b

Problème 2017-2018 :

On considère le réseau de la figure -1- dans lequel :

$$R = r = 10\Omega, \quad E = 12V$$

1. Calculer le courant total I dans le réseau.
2. Déduire le courant I_1 .

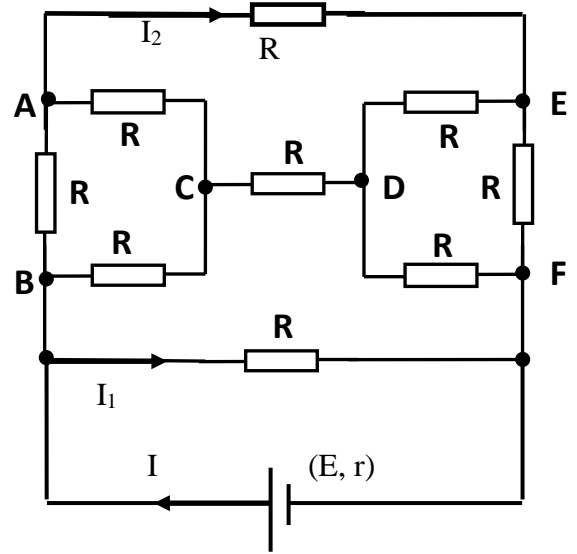
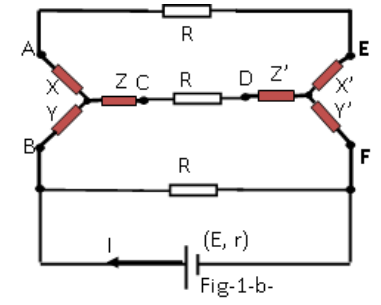
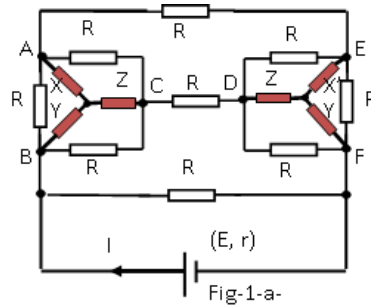


Fig-1-

1. Calcul du courant total I :

On doit d'abord calculer la résistance équivalente du réseau électrique (Voir fig-1-a- jusqu'au fig-1-g).



$$X = Y = Z = \frac{RR}{R+R+R} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R = \frac{10}{3}\Omega,$$

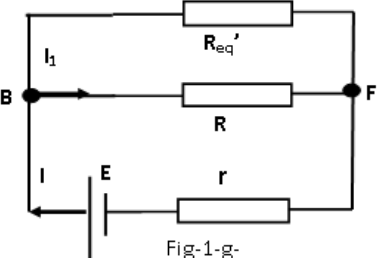
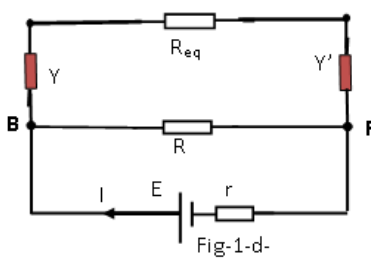
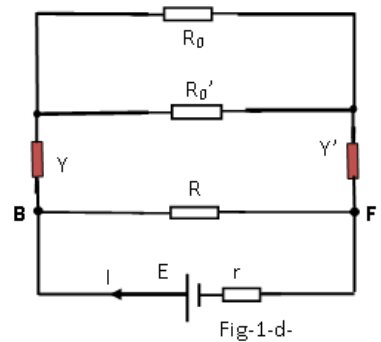
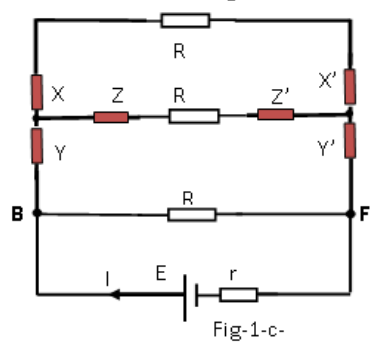
$$X' = Y' = Z' = \frac{RR}{R+R+R} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R = \frac{10}{3}\Omega,$$

$$R_0 = X + R + X' = \frac{10}{3} + 10 + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}\Omega$$

$$R_0' = Z + R + Z' = \frac{10}{3} + 10 + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}\Omega,$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0'} = \frac{1}{\frac{50}{3}} + \frac{1}{\frac{50}{3}} = \frac{6}{50}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}\Omega,$$



$$R_{eq}' = Y + R_{eq} + Y' = \frac{10}{3} + \frac{25}{3} + \frac{10}{3} = \frac{45}{3} = 15\Omega$$

$$R_{tot} = (R_{eq}' // R) = \frac{R_{eq}' * R}{R_{eq}' + R} = \frac{15 * 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6\Omega$$

$$E - rI - R_{tot}I = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{r + R_{tot}} = \frac{12}{10 + 6} = 0.75A$$

2. Dédution de I_1 :

En utilisant le diviseur de tension (Voir fig-1-g-), on obtient :

$$I_1 = I \frac{R_{eq}'}{R_{eq}' + R} = 0.75 \frac{15}{15 + 10} = 0.45A$$

Problème (2015/2016) :

On considère le réseau de la figure -2- dans lequel :

($R = 8\Omega$, $E = 7V$).

6. Transformer la Fig-2a- étoile en montage triangle.

7. Calculer le courant total dans le réseau.

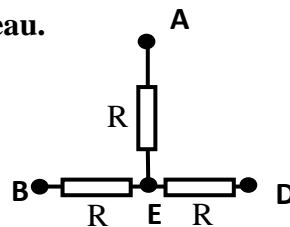


Fig-2a-

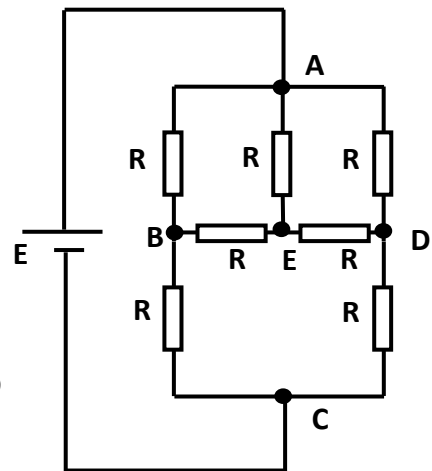
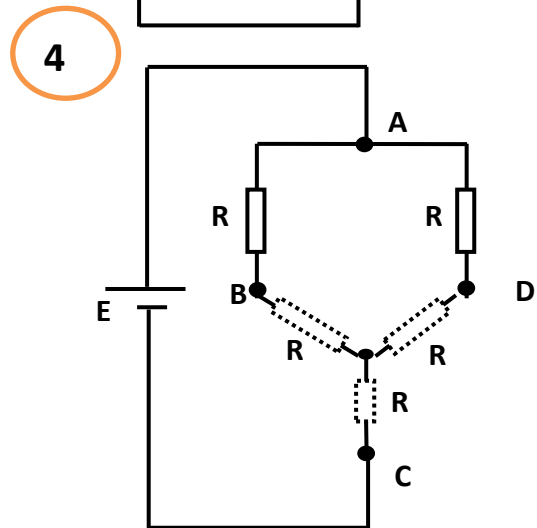
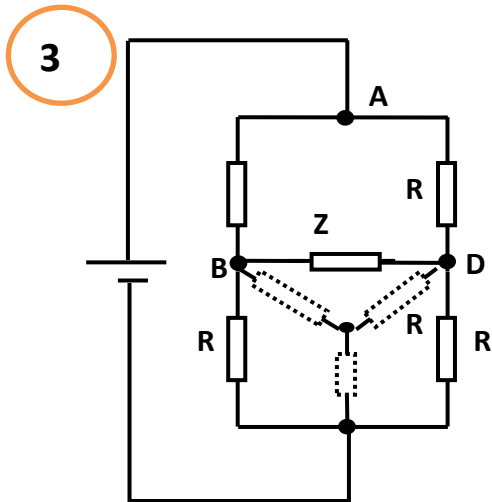
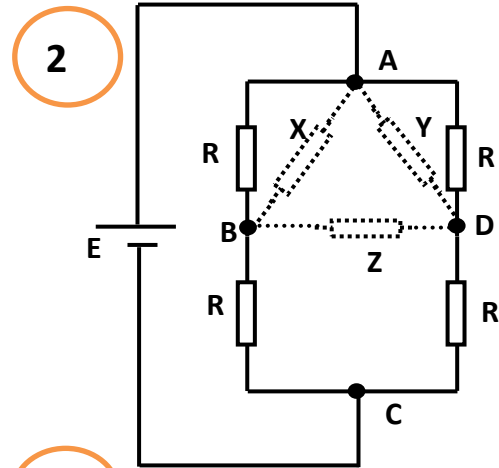
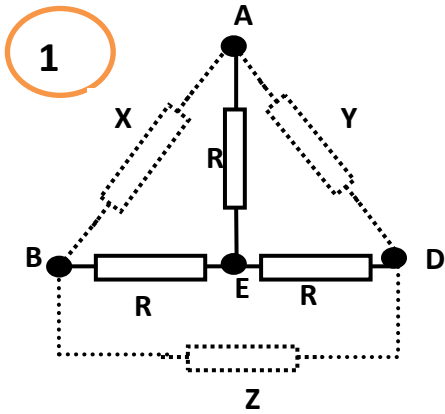


Fig-2-

Solution

Le courant total dans le réseau : $I=1 A$



IV. Régime continue

1. Préface

L'électronique est une science qui s'intéresse aux techniques utilisant des transformations de grandeurs électriques tels que la différence de potentiel et le courant afin de capturer, envoyer et exploiter les informations. Par convention on nomme ces tensions et courants : les signaux. Il existe une infinité de formes des signaux électriques qui servent à transporter une information. Ce sont tous un mélange de plusieurs signaux. Pour simplifier, nous ne parlerons que des signaux qui sont sous la forme d'une tension, après on pourra facilement généraliser.

2. Les signaux électriques (selon la nature de l'information transportée).

2.1. Les signaux analogiques.

Un signal analogique est un signal faisant des variations continues dans le temps.

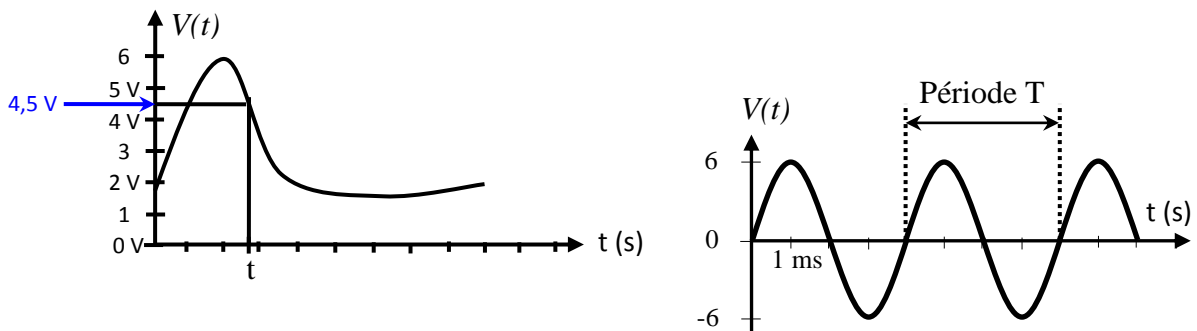


Figure-63- Signaux analogiques

2.2. Les signaux numériques

Un signal numérique est un signal faisant des variations discontinues dans le temps. Un signal numérique qui ne peut prendre que deux états distincts est appelé signal logique.

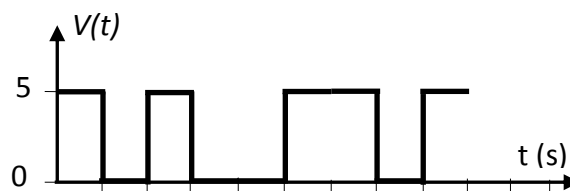
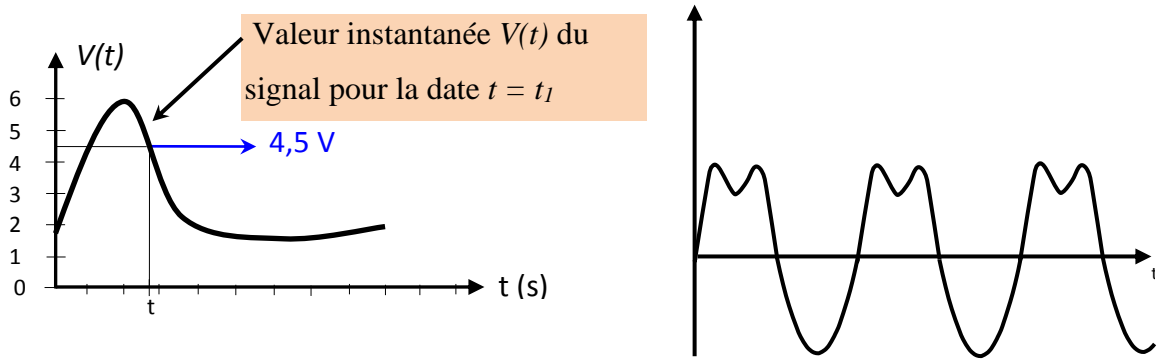


Figure-64- Signal numérique.

3. Les signaux électriques (selon leur forme).

3.1. Les signaux variables.

Un signal variable est un signal dont l'amplitude varie en fonction du temps



3.2. Les signaux continus.

Un signal continu est un signal dont l'amplitude est constante sur un intervalle de temps donné.

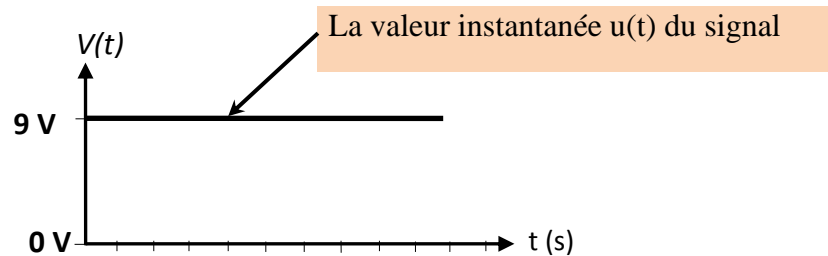


Figure-65- Signal continue.

3.3. Les signaux périodiques.

Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même à des intervalles de temps égaux appelés périodes.

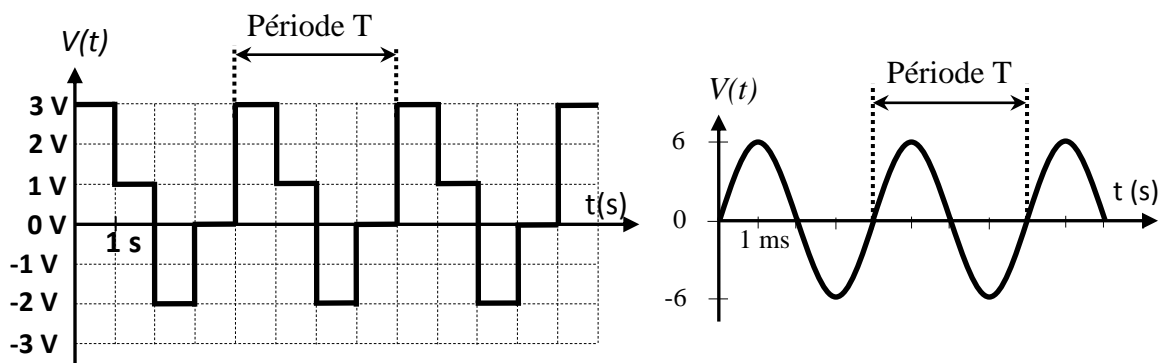


Figure-66- Signal périodique.

3.3.1. Signal sinusoïdale

Le signal sinusoïdal est un signal périodique particulier. Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide des fonctions sinus et cosinus. On dit qu'un réseau linéaire fonctionne en régime sinusoïdal ou régime harmonique si ses tensions et courants ont pour expressions algébriques

:

$$V(t) = V_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ Où : } V(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Nous avons présenté à la figure-67- le signal sinusoïdal $V(t)$ et à la figure -68- le signal Co sinusoïdal $V(t)$:

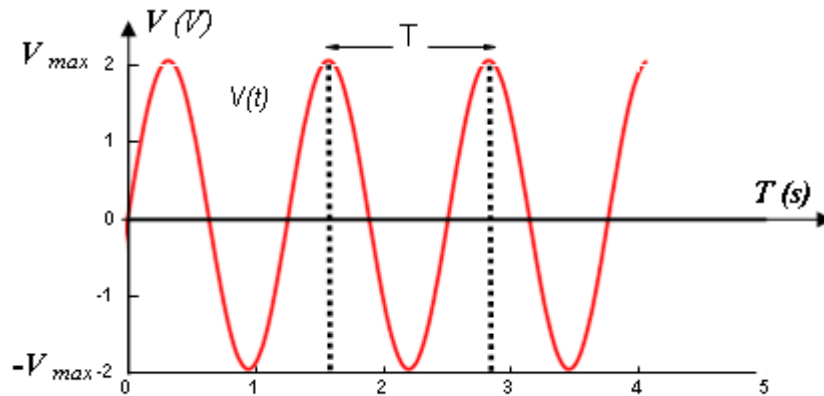


Figure-67- Représentation temporelle d'un signal sinusoïdal (Tension).

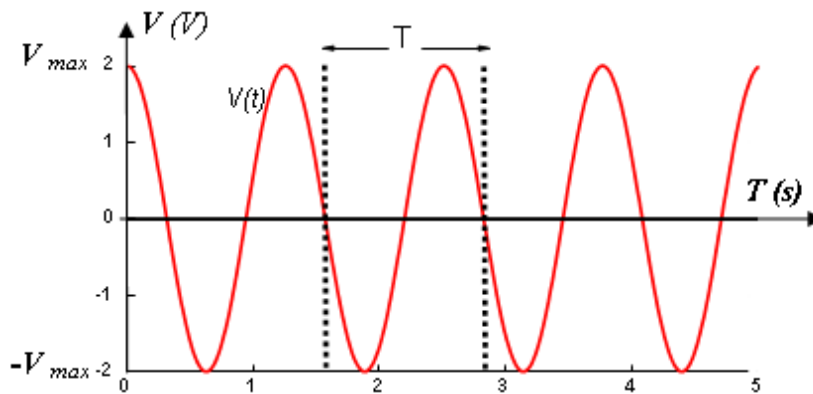


Figure-68- Représentation temporelle d'un signal Co sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est caractérisé par son amplitude maximale V_{max} et sa période T . Il peut s'écrire sous la forme : $V(t) = V_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

- V_{max} est la valeur maximale ou *crête* du signal $V(t)$;
- ω est la *pulsation* (appelée parfois vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence et à la période T par : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ exprimée en radian par seconde (rad/s).
- $\omega t + \varphi$: phase instantanée en : rad, et φ est phase à l'origine.

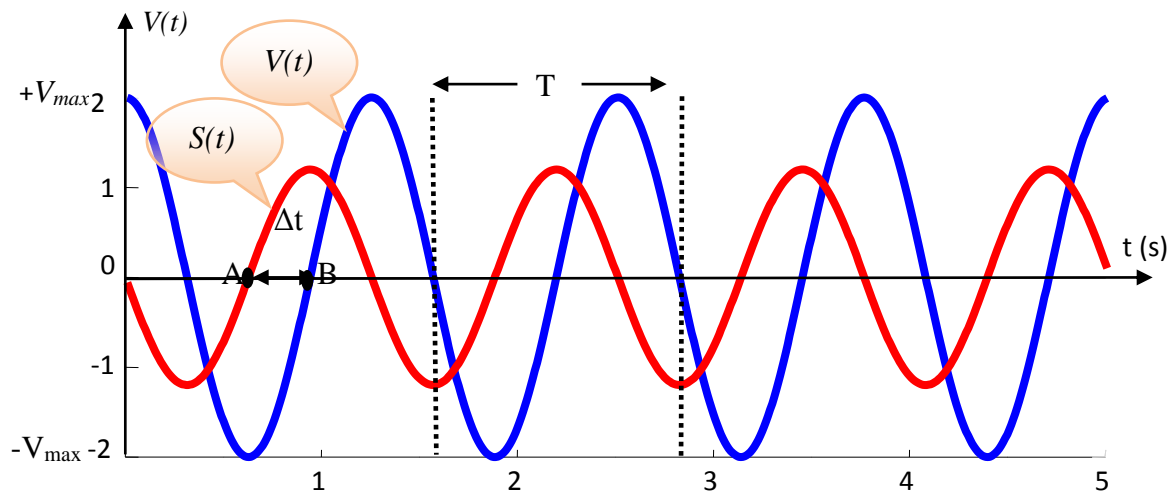


Figure-69- Représentation du déphasage entre $V(t)$ et $S(t)$: $S(t)$ est en retard de phase par rapport à $V(t)$.

3.4. Valeurs moyennes et valeurs efficaces

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale :

$$\langle V \rangle = V_{moyenne} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_{max} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt = \frac{V_{max}}{\omega [\cos(\omega t)]_0^T}$$

Puisque la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale pure est nulle, nous n'utilisons que rarement en électricité la notion de la valeur maximale V_{max} d'une fonction périodique. En compensation, nous préférons la remplacer par une grandeur plus significative V_{eff} , appelée valeur efficace (tension qui a le même effet qu'une tension continue) telle que :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_{max}^2 \sin^2(\omega t) dt}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_{max}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{V_{max}^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{V_{max}^2}{2T} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$\text{Soit : } V_{eff}^2 = \frac{V_{max}^2}{2} \Rightarrow V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Exemple 1: Valeurs moyennes et efficaces et signaux périodiques

Soit les tensions : $V_1(t)$ et $V_2(t)$ données à la figure-70-.

- 1) Calculer pour chaque tension, la valeur moyenne.
- 2) Calculer les valeurs efficaces. Que peut-on conclure ?

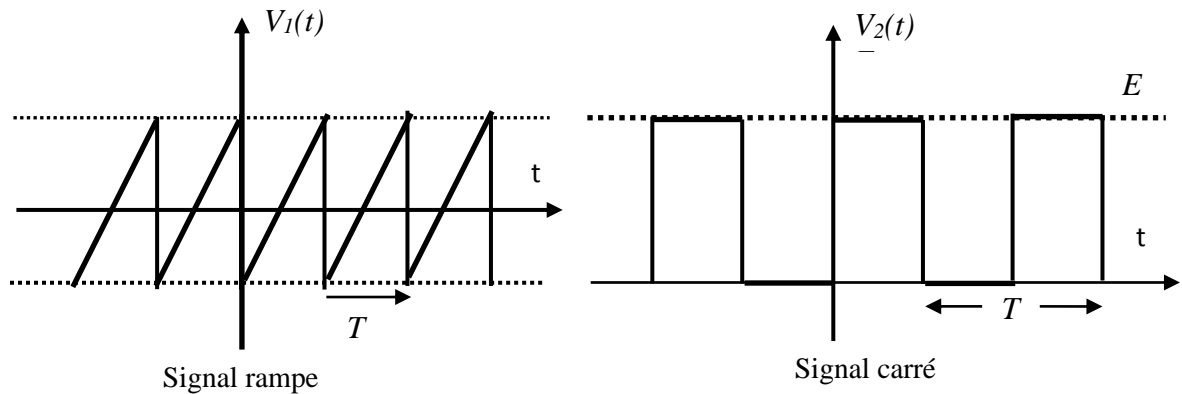


Figure- 70-

Les équations mathématiques des deux signaux sont :

$$V_1(t) = \frac{E}{T}t \dots \dots \dots \text{signal rampe}$$

$$V_2(t) = \begin{cases} E & \text{sit} \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{sit} \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases} \dots \dots \dots \text{signal carré}$$

Solution :

- Calcul les valeurs moyennes :

$$\langle V_1(t) \rangle = V_{1\text{moyenne}} = \frac{1}{T} \int_0^T V_1(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E}{T} t \cdot dt = \frac{E}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T$$

$$= \frac{E}{2}$$

$$\langle V_2(t) \rangle = V_{2\text{moyenne}} = \frac{1}{T} \int_0^T V_2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} E \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{T/2}^T 0 \cdot dt = \frac{E}{T} [t]_0^{T/2} = \frac{E}{2}$$

- Calcul les valeurs efficaces :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) \cdot dt}$$

$$V_{1\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_1^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{E}{T} t \right]^2 \cdot dt = \frac{E^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^T = \frac{E^2}{T^2} \left[\frac{T^3}{3} - 0 \right]$$

$$\text{Soit : } V_{1\text{eff}}^2 = \frac{E^2}{3} \Rightarrow V_{1\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{3}}$$

$$V_{2_{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_2^2(t) . dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [E]^2 . dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T [0]^2 . dt = \frac{E^2}{T} [t]_0^{T/2} = \frac{E^2}{T} \left[\frac{T}{2} \right]$$

$$\text{Soit : } V_{2_{eff}}^2 = \frac{E^2}{2} \Rightarrow V_{2_{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

Nous concluons que, même si la valeur moyenne d'une tension est nulle, sa valeur efficace existe et est positive. Cette quantité représente la valeur de la tension continue qui provoquerait le même dégagement de chaleur dans une résistance.

4. Formes des signaux électriques non périodiques :

4.1. Fonction échelon

La fonction échelon unité présentée à la figure-71-, est définie comme suit :

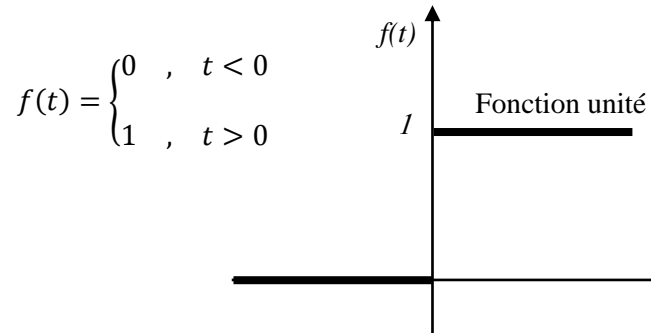


Figure -71-Fonction échelon.

Cette fonction est intéressante puisqu'elle permet l'étude des régimes transitoires.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ a & , t > 0 \end{cases}$$

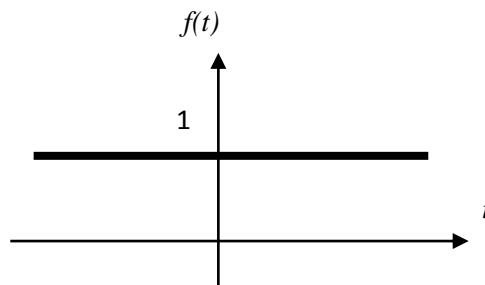


Figure-72-Fonction constante.

5. Transformation de Fourier

Premier exemple et motivations

La théorie des systèmes linéaires permet de déterminer la réponse du système à une sollicitation sinusoïdale : on est capable d'obtenir par exemple le déplacement d'un oscillateur mécanique amorti soumis à l'action d'une force extérieure $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ou, de la même manière, de connaître la tension $v_s(t)$ en sortie d'un circuit électrique (linéaire) si on connaît la tension Appliquée à l'entrée $v_e(t) = v_0 \cos(\omega t)$.

On peut alors se poser la question de savoir déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation qui est périodique, mais non harmonique, et par conséquent ne peut être exprimée comme une fonction sinusoïdale.

Par exemple, on peut considérer la fonction $f(t)$ périodique de période T de la figure ci-dessous :

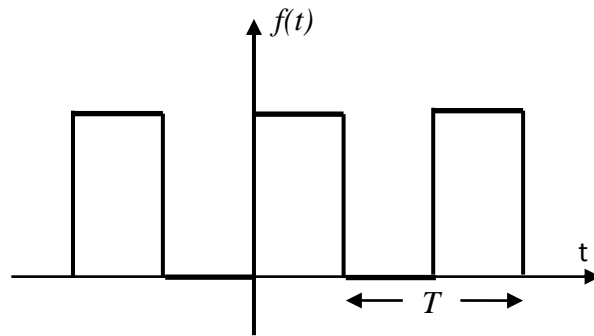
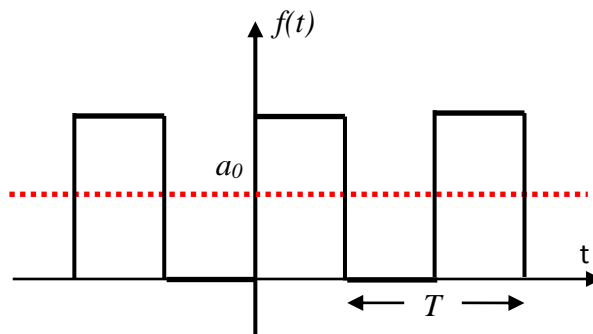
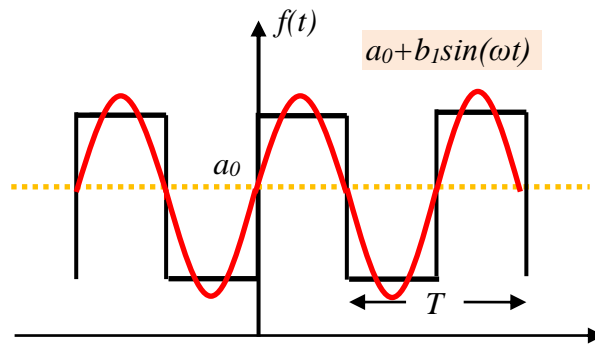


Figure-73- Représentation d'une fonction $f(t)$ périodique.

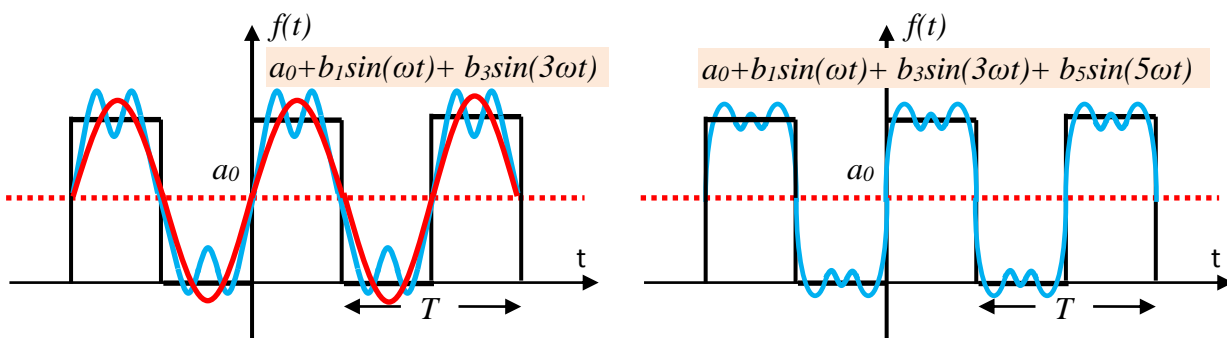
Le résultat auquel on va s'intéresser dans ce document est le suivant : on peut montrer qu'une fonction $f(t)$ périodique quelconque peut être approchée par une somme de fonctions sinusoïdales de périodes T , puis $T/2$, $T/3$ etc., et que cette approximation peut être rendue de plus en plus précise en rajoutant de plus en plus de termes. On peut d'écrire cette technique sur l'exemple de la figure-73- ci-dessus. D'abord, on essaye d'approcher la fonction $f(t)$ par une fonction constante, $f(t) \approx a_0$ qui rend compte de sa valeur moyenne :



Ensuite, pour reproduire son allure oscillante, on ajoutera à a_0 une fonction oscillante $b_1 \sin(\omega t)$, avec la même période T :



Pour s'approcher de la forme "moins arrondie" de la fonction, on s'aperçoit qu'il faut ajouter des fonctions sinusoïdales de pulsation de plus en plus élevée (période plus courte) et Proportionnelles à la pulsation fondamentale. Par exemple, pour le cas de la fonction considérée dans les deux figures ci-dessous, la contribution suivante s'écrit $b_3 \sin(3\omega t)$ et $b_5 \sin(5\omega t)$:



Nous savons donc que, pour des valeurs appropriées de a_0 , b_1 , b_3 , et b_5 ,

$$f(t) \approx a_0 + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_5 \sin(5\omega t)$$

On peut montrer qu'à la limite d'une somme infinie de termes (série) on arrive à reproduire parfaitement l'allure de la fonction périodique $f(t)$.

Mais avant de passer aux définitions générales, revenons à la question initiale : pourquoi une telle décomposition en fonction sinusoïdales est intéressante si on veut déterminer la réponse d'un système linéaire à la sollicitation $f(t)$ donnée ? C'est justement en raison de la linéarité du système : nous savons en effet qu'un système linéaire (dont le comportement est décrit par des équations différentielles linéaires) est tel que si on applique une sollicitation qui est la somme de deux fonctions, la réponse sera la somme des deux réponses aux deux sollicitations prises séparément. Si on arrive donc à décomposer "l'entrée" du système dans une somme de contributions sinusoïdales, la réponse sera donnée simplement par la somme des réponses à chaque contribution.

5.1. Série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales

L'opération de décomposition en fonctions sinusoïdales est très générale et peut s'appliquer à toute fonction périodique. Pour comprendre l'expression générale de cette décomposition il est utile de remarquer que, dans l'exemple que nous avons pris, la fonction était impaire, et son développement ne comprenait en effet que des fonctions sinus, elles aussi impaires. Si au contraire on avait pris une fonction paire, le développement aurait comporté des fonctions cosinus. Dans le cas général d'une fonction ni paire ni impaire, les deux sont présents. Ecrivons (sans démonstration) la définition du développement en série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales :

Soit $f(t)$ une fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$; $f(t)$ est alors identique à son développement en série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \dots\dots\dots (1)$$

Cette écriture est intéressante mais incomplète : évidemment, elle ne serait pas très utile si on n'avait pas un moyen de déterminer les coefficients a_n et b_n . Sur la base de considérations très générales, nous pouvons déjà dénombrer certaines propriétés de ces coefficients :

- Si $f(t)$ est une fonction réelle, alors les coefficients a_0 , a_n et b_n sont réels.
- Si $f(t)$ est une fonction paire, alors les coefficients des sinus sont tous nuls : $b_n = 0 \forall n > 0$.
- Si $f(t)$ est une fonction impaire, alors les coefficients des cosinus sont nuls : $a_n = 0 \forall n > 0$.

Ces propriétés peuvent parfois simplifier remarquablement les calculs.

En outre, nous savons déjà que le coefficient a_0 doit correspondre à la valeur moyenne de la fonction $f(t)$. Le calcul de l'expression générale des autres coefficients demande un peu de théorie mathématique, que nous n'allons pas faire ici. Le résultat final est que l'on peut calculer les coefficients du développement en série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) . dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) . \sin(n\omega t) . dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) . \cos(n\omega t) . dt$$

Remarque :

On peut choisir librement les bornes d'intégration, pourvu que l'intervalle d'intégration soit de longueur T.

5.2. Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

Nous nous sommes intéressés à la décomposition en série de fonctions sinusoïdales parce que nous savions déterminer la réponse d'un système linéaire à de telles fonctions. Cependant, dans l'étude des équations différentielles linéaires, nous nous sommes vite aperçus que ces fonctions ne sont pas très pratiques à manipuler, et qu'il était beaucoup plus efficace de les réécrire comme la partie réelle d'exponentielles complexes, beaucoup plus simples à utiliser. Il est donc naturel de se poser la même question ici : est-il possible de réexprimer le développement en série de Fourier en notation complexe ?

Il est facile de deviner que la réponse est affirmative. Il suffira en fait de réécrire les fonctions sinus et cosinus comme

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

et de réarranger les termes dans l'expression (1) pour obtenir le développement en série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega t}$$

Les coefficients de la série peuvent être aussi déterminés indépendamment du développement sur les fonctions sinus et cosinus, et on prouve qu'ils s'écrivent de manière équivalente comme suit : $C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$

Comme nous avons vu, la décomposition en série de Fourier permet de déterminer la réponse d'un système à une sollicitation non sinusoïdale. Il est particulièrement intéressant de faire une analyse de ce type en électronique, où les signaux sont typiquement périodiques. Les circuits considérés en électronique se comportent souvent comme des filtres, c'est-à-dire ils transmettent certaines fréquences sans atténuation, alors que d'autres sont fortement atténuées. En termes de développement en série de Fourier, donc, on dira que seulement certaines composantes (termes de la série) sont transmises. Dans le cas d'un filtre passe-bas, par exemple, on peut voir l'effet sur les différents termes de la série de Fourier : en partant de la série complète, qui représente le signal d'entrée, le filtre coupe les fréquences plus élevées, les variations plus rapides sont supprimées et on observe en sortie un signal de plus en plus arrondi si la fréquence de coupure devient de plus en plus petite. Un filtre passe-haut, au contraire, sera capable de supprimer la composante continue $c_0 = a_0$ et certaines des oscillations à fréquences plus faibles, un filtre passe-bande sera éventuellement capable de ne laisser passer qu'une seule composante de la série...etc.

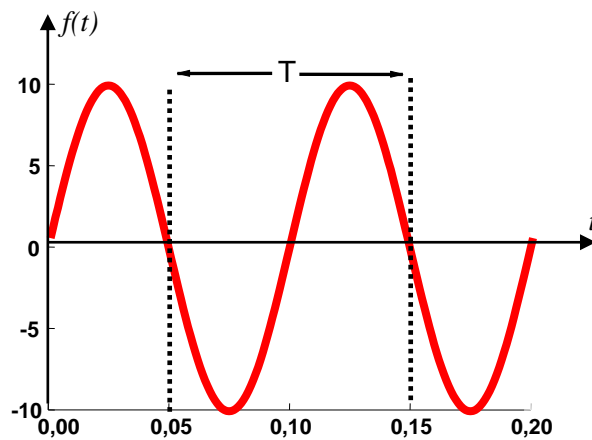
Exercice

Exercice 1 :

Soit la fonction : $f(t) = 10 \cdot \sin(20\pi t)$, on demande de :

- Représenté graphiquement.
- Trouvez l'expression de la fonction sinus qui a la même fréquence et la même valeur maximale que la fonction précédente mais qui est en retard de : $\frac{\pi}{4}$
- Représenté les deux fonctions graphiquement sur le même dessin. Calculer la différence de temps entre les deux fonctions.

Solution 1:



- L'expression de la fonction sinus qui a la même fréquence et la même valeur maximale que la fonction précédente mais qui est en retard de : $\frac{\pi}{4}$

$$g(t) = 10 \cdot \sin(20\pi t - \pi/4)$$

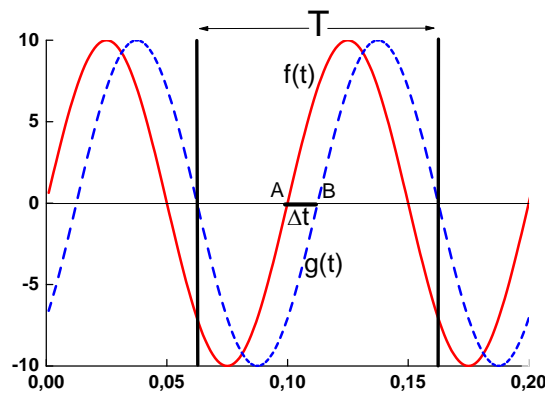


Figure-74- Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta t}{T}$$

$$\Delta t = \frac{T \cdot \Delta \phi}{2 \cdot \pi} = \frac{\Delta \phi}{2 \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{\Delta \phi}{\omega} = \frac{-\pi/4}{20 \cdot \pi} = \frac{-1}{80} = -0.0125s$$

Exercice 2 :

Tracer la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

1. Calculer la transformé Fourier : F [f (x)] de la fonction f (x).
2. Représenté graphiquement la fonction obtenue : F [f (x)].
3. Que se passe-t-il dans si f (x) est périodique, où le domaine [-2, 1] est répété indéfiniment.

Solution 2:

1. On a :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , -1 < x < 1 \\ 0 & , x > 1 \text{ أو } x < -1 \end{cases} \quad \text{(Voir le graphe ci-dessous).}$$

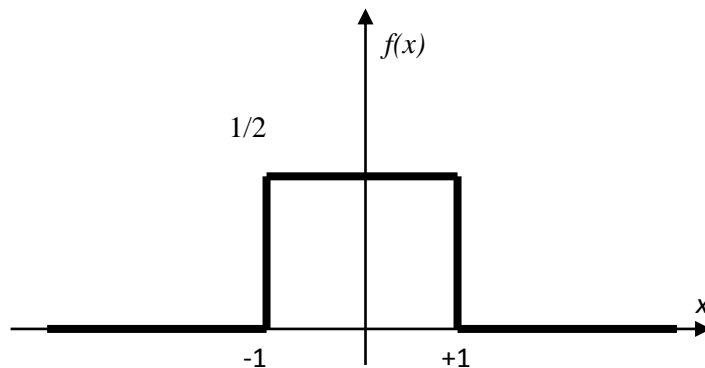


Figure-75- Fonction $f(x)$

2. La fonction $f(x)$ n'est pas périodique, nous allons donc recourir à la transformé Fourier F [f (x)] pour cette fonction :

$$\begin{aligned} F[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx + \int_{-1}^{1} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx + \int_{1}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx \end{aligned}$$

Comme la fonction n'est pas nulle sur l'intervalle[-1,1], l'intégration en dehors de ce domaine est nulle.

$$F[f(x)] = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi r x}}{-j2\pi r} \right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{-j2\pi r} - e^{+j2\pi r}}{-4j\pi r}$$

$$= \frac{1}{4j\pi r} (e^{+j2\pi r} - e^{-j2\pi r})$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \text{ (Moivre), d'où : } F[f(x)] = \frac{1}{4j\pi r} \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(2\pi r) = \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi r}$$

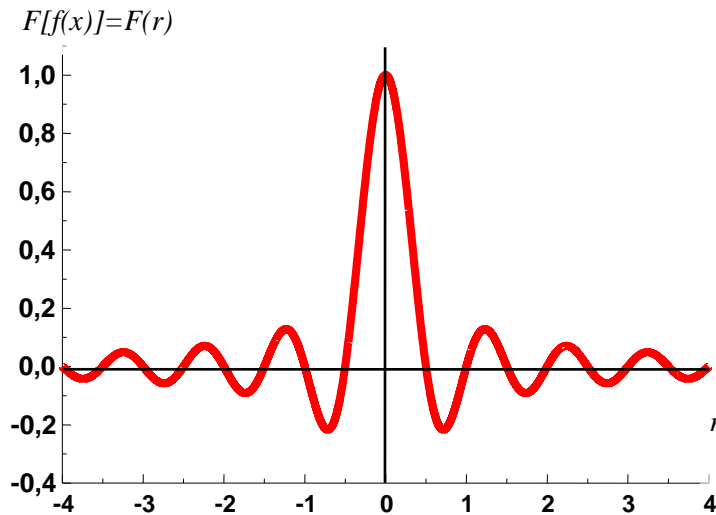


Figure-76-

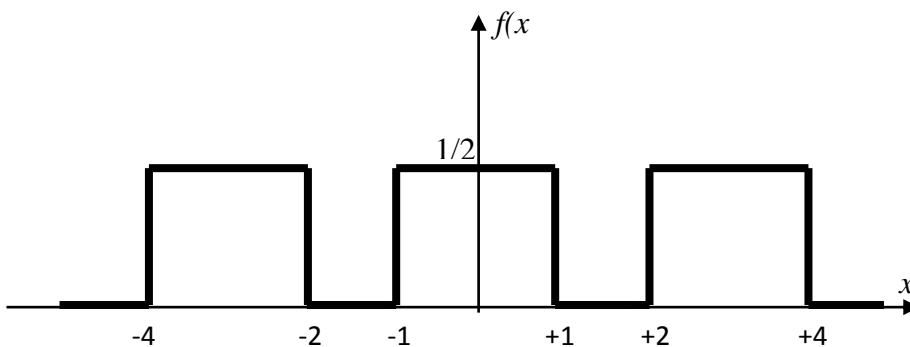


Figure-77-

Dans ce cas, nous avons une fonction périodique dont la période est $T = 3$, nous calculons sa transformé Fourier.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \sin(\omega x) + b_1 \cdot \cos(\omega x) + a_2 \cdot \sin(2\omega x) + b_2 \cdot \cos(2\omega x) + \dots + a_n \cdot \sin(n\omega x) + b_n \cdot \cos(n\omega x) + \dots$$

Puisque la fonction est paire, donc, tous les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n sont nuls et il n'y a pas besoin de les calculés.

- Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-2}^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{T} \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot dx + \frac{1}{T} \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx$$

Reste l'intégrale dont la fonction n'est pas nulle : $a_0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot dx = \frac{1}{8} [x]_{-1}^{+1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- Calcul de b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx = \frac{2}{T} \int_{-2}^1 f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-2}^{-1} f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx + \frac{2}{T} \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx = \frac{2}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \cdot \cos(n\omega x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\sin(n\omega x)}{n\omega} \right]_{-1}^{+1} =$$

$$\frac{\sin(n\omega) - \sin(-n\omega)}{4n\omega} = \frac{2 \cdot \sin(n\omega)}{4n\omega} = \frac{\sin(n\omega)}{2n\omega}$$

$$f(x) = a_0 + b_1 \cdot \cos(\omega x) + b_2 \cdot \cos(2\omega x) + \dots + b_n \cdot \cos(n\omega x) + \dots$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos(n\omega x)$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n\omega)}{2n\omega} \cdot \cos(n\omega x) \right]$$

Exercice 3 :

1. Calculer la transformé de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

2. Que se passe-t-il dans si $f(x)$ est périodique, où l'intervalle $[-L, 1]$ ce répété à l'infini, de sorte que $L > 1$.

Solution 3 :

On a :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , -1 < x < 1 \\ 0 & , x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & , -1 < x < 0 \\ 1 - x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

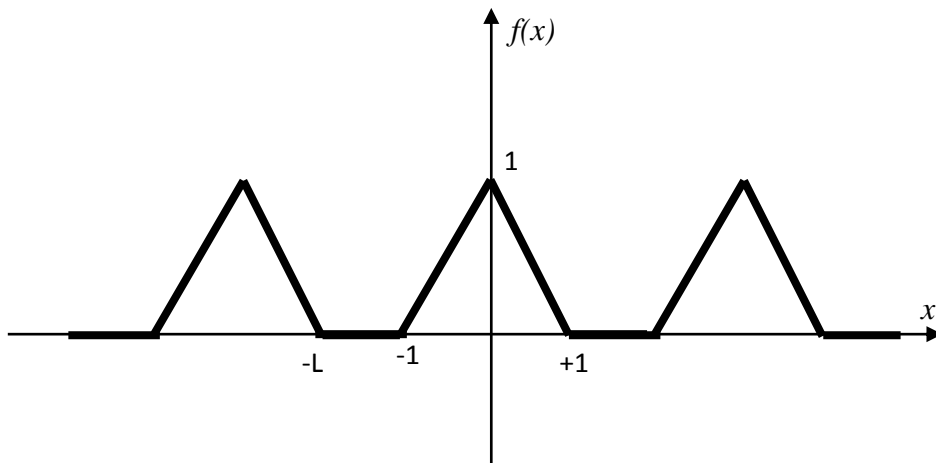
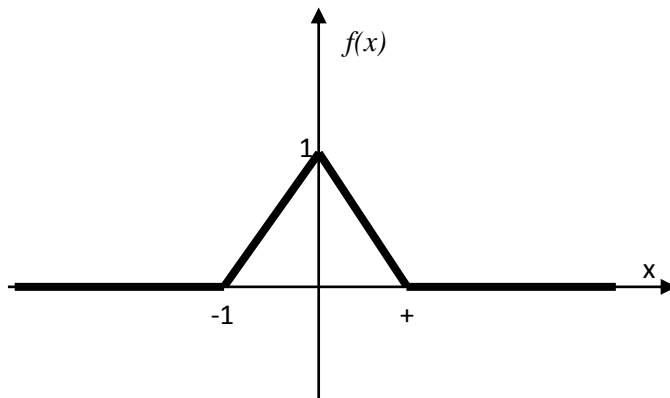
La fonction n'est pas périodique, et le calcul de la transformé de Fourier de cette fonction est

:

$$\begin{aligned}
 F[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-1} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx + \int_{-1}^0 f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx + \int_0^1 f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx \\
 &\quad + \int_1^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus que les deux intégrales : $F[f(x)] = \int_{-1}^0 (1+x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx + \int_0^1 (1-x) \cdot e^{-j2\pi r x} \cdot dx$

Ils peuvent être facilement calculés en utilisant l'intégrale par partie, par exemple



V. Régime alternatif sinusoïdal

1. Préface

Nous considérons que la fréquence du régime alternative sinusoïdal est assez faible pour que nous puissions utiliser les mêmes lois que celles que nous avons utilisées en régime continue, il suffit d'ajouter les effets inductifs de l'induction magnétique des bobines et capacitif résultants du champ électrique dans les condensateurs. Par exemple, prenons l'étude du circuit électrique RLC :

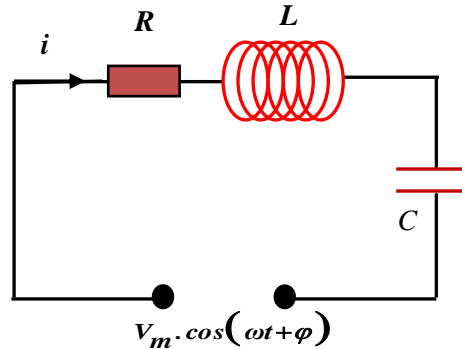


Figure-78- Circuit RLC

De la figure-78- en écrit :

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = V$$

$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$, en dérivant cette équation :

$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega V_m \cdot \sin(\omega t + \phi)$, en dérivons sur L, on obtient :

$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{-\omega V_m}{L} \cdot \sin(\omega t + \phi)$, c'est une équation différentielle sa solution :

$$i = e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot f(t) + I_m \cdot \cos(\omega t), \text{ si } t \gg \text{ on aura : } i \approx I_m \cdot \cos(\omega t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{R}{2L}t} \right) = 0$$

- La tension alternative sinusoïdale crée un courant sinusoïdal (après une courte période).

2. Réponses des dipôles élémentaires parfaits

2.1. Impédance

L'impédance électrique mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal, c'est pour cela quand entend cette grandeur se répéter dans les circuits à régime alternative sinusoïdale. La définition d'impédance est une généralisation de la loi d'Ohm dans l'étude des circuits en courant alternatif. Contrairement au régime statique, les condensateurs et les bobines se comportent comme des impédances ou des admittances, dont les valeurs varient en fonction de la fréquence.

a) Résistance

Régime alternatif sinusoïdal

La loi d'Ohm en régime sinusoïdal s'écrit toujours de la même façon et ce, quel que soit l'instant t considéré, en supposant que le courant électrique à la forme :

$i = I_m \cdot \cos(\omega t)$, donc la tension aux bornes de la résistance R est :

$$V_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \cdot \cos(\omega t)$$

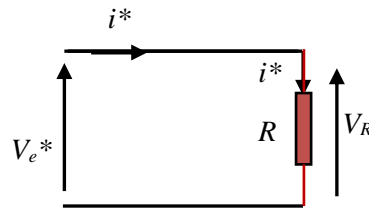
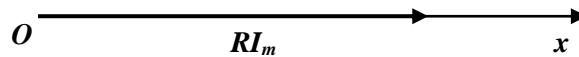


Figure-79- Circuit R

Il est représenté par un vecteur de référence O , son module $R \cdot I_m$ et qui fait un angle de 0° avec l'axe Ox .



b) Inductance pure

Nous connaissons que la relation qui lie la tension $V(t)$ au courant $i(t)$ qui passe dans une bobine d'inductance pure est donnée par :

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L\omega \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) = L\omega \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il est représenté par un vecteur de référence O , son module $L\omega \cdot I_m$ et qui fait un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe Ox .

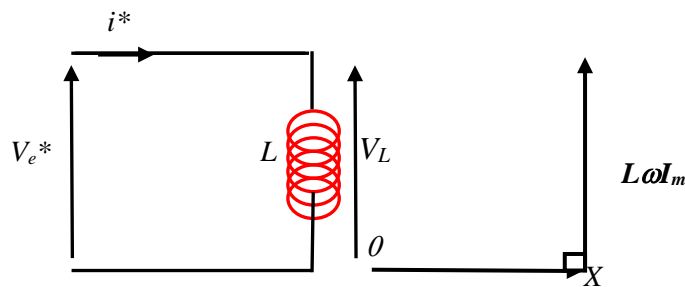


Figure-80- Circuit L

c) Condensateur parfait

La tension aux bornes d'un condensateur est :

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = \frac{I_m}{C\omega} \cdot \sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Elle est représentée par un vecteur de référence O , son module $\frac{I_m}{C\omega}$ et qui fait un angle de $\frac{-\pi}{2}$ avec l'axe Ox .

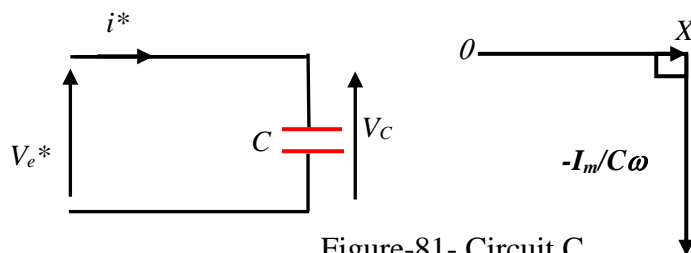


Figure-81- Circuit C

3. Méthode de résolution algébrique

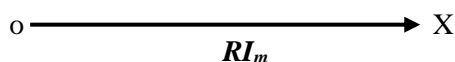
Cette méthode est basée sur le calcul direct, dans lequel on utilise des équations différentielles complexes, souvent impossibles de les résoudre manuellement, et de ce fait on fait appel à des ordinateurs. Mais, elle est généralement considérée comme une méthode valable dans tous les cas. Cette méthode peut être évitée, en utilisant des méthodes plus simples, par exemple : représentation de Fresnel, nombre complexes, cela est possible si toutes les sources de tension et de courant dans le réseau avaient tous la même fréquence.

4. Méthode de représentation de Fresnel

Dans le cadre de cette méthode, nous représentons chaque fonction de type: $V = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$, à l'instant $t = 0$ par le vecteur de référence O, son module V_m , faisant l'angle ϕ avec l'axe Ox (qui représente l'axe du courant).

Soit le courant : $i = I_m \cdot \cos(\omega t)$, qui forme un angle 0° avec l'axe des x, donc la tension aux bornes de la résistance R est : $V_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \cdot \cos(\omega t)$

- Il est représenté par un vecteur de référence O, son module $R \cdot I_m$ et qui fait un angle de 0° avec l'axe Ox.



- La tension aux bornes d'une bobine : $V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L\omega \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) = L\omega \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
- Il est représenté par un vecteur de référence O, son module $L\omega \cdot I_m$ et qui fait un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe Ox.
- La tension aux bornes d'un condensateur est :

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = \frac{I_m}{C\omega} \cdot \sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il est représenté par un vecteur de référence O, son module $\frac{I_m}{C\omega}$ et qui fait un angle de $\frac{-\pi}{2}$ avec l'axe Ox.

La résultante :

$$\begin{cases} V_m = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \cdot I_m \\ \operatorname{tg}(\varphi_m) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R} \end{cases}$$

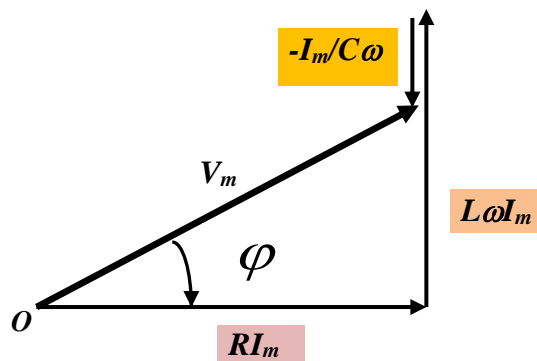


Figure-82-Représentation de Fresnel d'un circuit RLC

L'impédance de ce circuit RLC est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

5. Méthode des nombres complexes

Nous appelons nombre complexe, tout nombre de la forme $Z^* = a + jb$ où a et b sont des nombres réels.

Soit deux nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que : $Z_1^* = a_1 + jb_1$, $Z_2^* = a_2 + jb_2$

- $Z_1^* + Z_2^* = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- $Z_1^* \cdot Z_2^* = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 - a_2b_1)$

Le signe moins qui apparaît dans cette formule est dû au terme « j^2 » qui vaut -1.

Le nombre complexe conjugué $\bar{Z} = a - jb$ est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire.

Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :

- La forme classique : $Z^* = a + jb$
- La forme trigonométrique : $Z^* = |Z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$
- La forme exponentielle : $Z^* = |Z|e^{j\varphi}$
- Où $|Z|$ est le module : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}}$ et φ l'argument = arctang (b/a).
 - La tension aux bornes de la résistance R est : $V_R^* = R \cdot i^* = R \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$
 - La tension aux bornes d'une bobine pure :
 $V_L^* = L \cdot \frac{di^*}{dt} = jL\omega \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$, sachant que : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$
 D'où : $V_L^* = L\omega \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$
 - La tension aux bornes d'un condensateur est :

$$V_C^* = \frac{1}{C} \cdot \int i^* \cdot dt = \frac{I_m}{jC\omega} \cdot e^{j\omega t} = \frac{-jI_m}{C\omega} \cdot e^{j\omega t}, \text{ avec : } -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \text{ donc : } V_C^* = \frac{I_m}{C\omega} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

On appliquant la loi de Kirchhoff : $V^* = V_R^* + V_L^* + V_C^*$

$$V^* = R \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} + jL\omega \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} + \frac{-j \cdot I_m}{C\omega} \cdot e^{j\omega t} = \left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$$

$V^* = \left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \cdot i^*$, elle est de la forme : $V^* = Z^* \cdot i^*$, où : Z^* est l'impédance du circuit, et notre but est d'écrire la tension sous la forme : $V^* = V_m \cdot e^{j(\omega t + \phi_0)}$

$$\phi = \arg[V^*] = \arg[Z^*] + \arg[i^*] = \arg \left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] + \arg[I_m \cdot e^{j\omega t}], \text{ d'où :}$$

$$\phi = \arctg \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R} + \omega t = \omega t + \arctg \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}, \text{ et le déphasage à l'état initial :}$$

$$\phi_0 = \phi(t = 0) = \arctg \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}, \phi = \omega t + \phi_0 \text{ et l'amplitude : } V_m = \|V^*\| = \|Z^*\| \cdot \|i^*\| =$$

$$\left\| R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right\| \cdot \|I_m \cdot e^{j\omega t}\|, \text{ d'où : } V_m = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \cdot I_m$$

6. Puissance et énergie en régime sinusoïdal

6.1. Puissance instantanée

Soit un dipôle passif, constitué par un ou plusieurs éléments simples. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$. Nous trouvons à ses bornes une tension sinusoïdale

$V(t)$. Nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

$$P(t) = V(t) \cdot I(t)$$

Nous distinguons deux cas selon le signe de $P(t)$:

- $P(t)$ est positif, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un récepteur.
- $P(t)$ est négatif, le dipôle renvoie de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un générateur.

6.2. Puissance moyenne

La puissance moyenne est définie par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cdot dt:$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot dt \quad P_{moy} =$$

$$\frac{V_m \cdot I_m}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \cdot \cos(\omega t) \cdot dt, \text{ sachant que : } \cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$P_{moy} = \frac{V_m \cdot I_m}{2 \cdot T} \left[\int_0^T \cos(2\omega t + \phi) \cdot dt + \int_0^T \cos(\phi) \cdot dt + \right]$$

$$P_{moy} = \frac{V_{eff} \cdot I_{eff}}{T} \left[\left[\frac{\sin(2\omega t + \phi)}{2\omega} \right]_0^T + [t \cos(\phi)]_0^T \right]$$

$$P_{moy} = \frac{V_{eff} \cdot I_{eff}}{T} \left[\left(\frac{\sin(2\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega} \right) + T \cos(\varphi) \right]$$

$$2\omega T = 2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi, \sin(2\omega T + \varphi) = \sin(4\pi + \varphi) = \sin(\varphi)$$

$$\begin{aligned} P_{moy} &= \frac{V_{eff} \cdot I_{eff}}{T} \left[\left(\frac{\sin(\varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega} \right) + T \cos(\varphi) \right] = \frac{V_{eff} \cdot I_{eff}}{T} T \cos(\varphi) \\ &= V_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

En résumé :

$P_{moy} = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi)$, c'est la puissance moyenne ou active.

$\cos(\varphi) = \frac{P}{V_{eff} \cdot I_{eff}}$ est le facteur de qualité.

La puissance active est maximale dans le cas particulier d'une charge purement résistive :

$Z = R$. La tension $V(t)$ et le courant $i(t)$ sont donc en phase ce qui donne : $\cos(\varphi) = 1$, nous

trouvons : $P_{moy} = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \frac{R}{\|Z^*\|} = R \cdot I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{R}$

6.3. Puissance active et puissance réactive

Lorsqu'un réseau comporte des condensateurs et (ou) des bobines, une partie de l'énergie qui lui est fournie par la source est stockée par les éléments réactifs (condensateurs et bobines) pour être ensuite restituée à la source. Pendant la restitution de l'énergie, la puissance est négative. La puissance impliquée dans cet échange est désignée par la puissance réactive :

$$P_{réactive} = Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi)$$

➤ Dans le circuit RLC $Z^* = R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$, d'où : $\sin(\varphi) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{\|Z^*\|}$

$$Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \sin(\varphi) = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{\|Z^*\|}$$

$$Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{\|Z^*\|} = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cdot I_{eff}^2 = \frac{V_{eff}^2}{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

Exercices

Exercice 1:

Soit la figure-83-, quelle est la relation entre C et C' pour que AB soit équivalent à A'B'?

Quelle est la fréquence alors ?

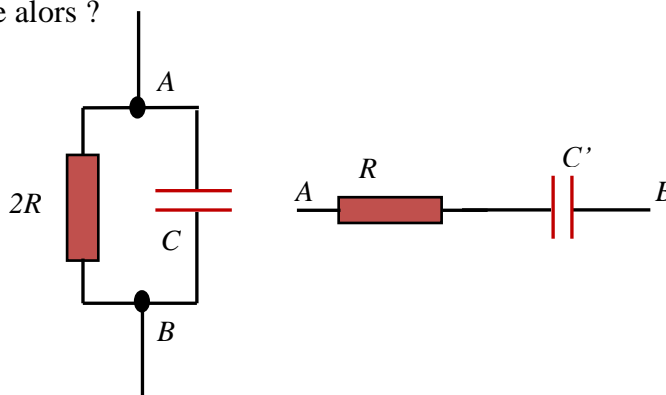


Figure-83-

Solution 1:

Pour que AB soit équivalent à A'B', il faut que : $Z_{A'B'} = Z_{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2R} + jC'\omega} = R - \frac{j}{C\omega}$

$$\frac{2R}{1 + 2jRC'\omega} = \frac{RC\omega - j}{C\omega} \Leftrightarrow R\omega \cdot (2C' - C) \cdot R + j \cdot (2R^2CC'\omega^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2C' - C = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2R^2CC'\omega^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{De l'équation (1) } C' = \frac{C}{2} \end{array}$$

et de l'équation (2) : $\omega^2 = \frac{1}{2R^2CC'} = \frac{1}{2R^2(\frac{C}{2})} = \frac{1}{R^2C^2}$ d'où : $\omega = \frac{1}{R \cdot C}$

Exercice 2 :

Soit le circuit de la figure -84- avec $E = E_m \cdot e^{j\omega t}$

- 1) Calculer les valeurs efficaces des courants i_1 et i_2
- 2) Quel sont les valeurs de C pour que i_1 et i_2 soit écarté de $\frac{\pi}{2}$
- 3) En plus de la condition précédente, nous voulons que les valeurs de i_1 et i_2 soient égaux, quelle est la relation à atteindre par R, L et ω .

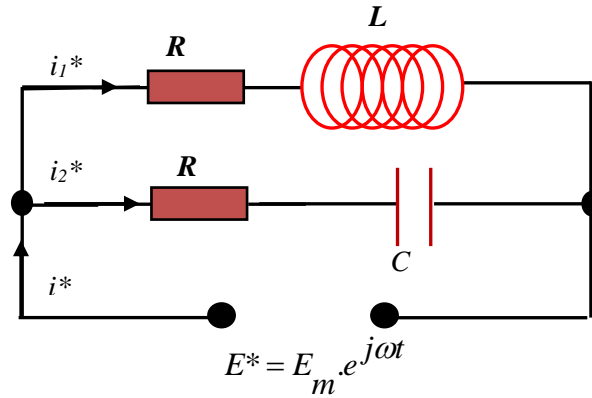


Figure-84-

Solution 2:

- Puisqu'on a deux branches en parallèle on écrit :

$$E^* = (R + jL\omega) \cdot i_1^* = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right) \cdot i_2^*$$

$$\begin{cases} i_1^* = \frac{E^*}{(R + jL\omega)} = \frac{E_m \cdot e^{j\omega t}}{(R + jL\omega)} \\ i_2^* = \frac{E^*}{\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)} = \frac{E_m \cdot e^{j\omega t}}{\left(R - \frac{j}{C\omega}\right)} \end{cases}$$

Ainsi, nous notons que les deux courants sont la division d'un nombre complexe sur un autre nombre complexe. Par conséquent, le module de chaque courant est la division des modules du numérateur sur le dénominateur de chaque courant, tandis que l'argument du courant est la différence entre les deux arguments du numérateur et le dénominateur, d'où les modules sont :

$$\begin{cases} \|i_1^*\| = \frac{E_m}{R^2 + L^2\omega^2} = I_{1,max} \\ \|i_2^*\| = \frac{E_m}{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = I_{2,max} \end{cases}$$

Ils représentent les valeurs maximales des deux courants et permettent de retrouver facilement les valeurs efficaces :

$$\begin{cases} I_{1,eff} = \frac{I_{1,max}}{\sqrt{2} \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{(R^2 + L^2\omega^2)}} \\ I_{2,eff} = \frac{I_{2,max}}{\sqrt{2} \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right)}} \end{cases}$$

Les arguments sont :

$$\begin{cases} ARG[i_1^*] = ARG[E^*] - ARG[R + jL\omega] \\ ARG[i_2^*] = ARG[E^*] - ARG\left[R - \frac{j}{C\omega}\right] \end{cases}$$

Puisque : $ARG[E^*] = ARG[E_m \cdot e^{j\omega t}] = j\omega t$ et $ARG[R + jL\omega] = \text{Arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$
 $ARG\left[R - \frac{j}{C\omega}\right] = \text{Arctg}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right)$

Ils viennent alors : $\begin{cases} ARG[i_1^*] = j\omega t - \text{Arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \\ ARG[i_2^*] = j\omega t - \text{Arctg}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) \end{cases}$

A l'instant : $t = 0$, $\begin{cases} \phi_1 = -\text{Arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \\ \phi_2 = -\text{Arctg}\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) \end{cases} \lim_{x \rightarrow \infty}$

- i_1 et i_2 soit écarté de $\frac{\pi}{2}$ si : $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ soit : $\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \phi_1$

$$\text{tg}(\phi_1) = -\text{cotg}(\phi_2) = \frac{-1}{\text{tg}(\phi_2)}$$

$\text{tg}(\phi_1) \cdot \text{tg}(\phi_2) = -1$ D'où : $\frac{L\omega}{R} = R_2 C\omega$, $C = \frac{L}{R^2}$

Pour que les valeurs de i_1 et i_2 soient égaux :

$$I_{1,eff} = I_{2,eff} \Rightarrow \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{(R^2 + L^2\omega^2)} = \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right)}$$

Donc : $R^2 + L^2\omega^2 = R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}$

$$L^2\omega^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} \Rightarrow L^2 C^2 \omega^4 = 1 \text{ d'où : } LC\omega^2 = 1$$

La solution négative est rejetée car L, C et ω^2 sont positifs.

D'après la relation précédente :

$$C = \frac{L}{R^2}, \text{ vient : } \frac{L^2\omega^2}{R^2} = 1 \text{ d'où : } \omega = \frac{R}{L}$$

Exercice 3 :

Le courant circulant dans le circuit de la figure-85- est donnée par : $i^* = I_m \cdot e^{j\omega t}$,

- 1) Donnée l'expression de la tension aux bornes de chaque dipôle passif, ainsi que la tension à la borne du générateur.
- 2) Donnée l'expression des puissances active et réactive.

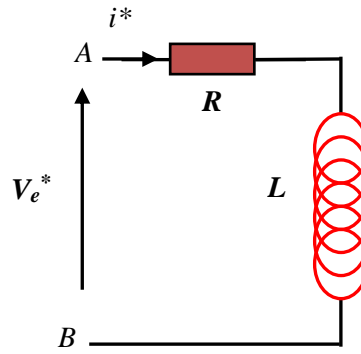


Figure-85-

Solution 3:

- La tension à la borne de R : $V_R^* = R \cdot i^* = R \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$
- La tension aux bornes de L : $V_L^* = jL\omega \cdot i^* = jL\omega \cdot I_m \cdot e^{j\omega t}$, avec : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ d'où :

$$V_L^* = L\omega \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

L'impédance totale du circuit : $Z_{eq}^* = R + jL\omega$

$$V_e^* = Z_{eq}^* \cdot i^* = (R + jL\omega) \cdot (I_m \cdot e^{j\omega t}), \text{ ou :}$$

$$R + jL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cdot e^{j\theta}, \text{ avec : } \theta = \text{Arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

Donc :

$$V_e^* = (\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cdot e^{j\theta}) \cdot (I_m \cdot e^{j\omega t}), \text{ d'où : } V_e^* = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cdot I_m \cdot e^{j(\omega t + \theta)}$$

- La puissance moyenne est : $P_{moy} = V_{AB,eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi) = V_{e,eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$

$$\text{Sachant que : } V_{eff} = P_{moy} = \|Z\| \cdot I_{eff}^2 \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \dots I_{eff}^2 \cdot \cos(\varphi)$$

$$\|Z\| \cdot I_{eff},$$

- La puissance reactive: $Q = V_{AB,eff} \cdot I_{eff} \sin(\varphi) = V_{e,eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi)$

$$Q = \|Z\| \cdot I_{eff}^2 \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \dots I_{eff}^2 \cdot \sin(\varphi).$$

Exercice 4 :

Donnée l'expression de la tension aux bornes de chaque dipôle passif de la figure -86-

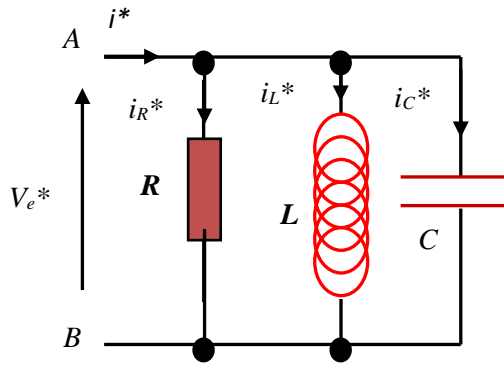


Figure-86-

Solution 4:

Du fait que tous les dipôles passifs sont en parallèle, leur impédance équivalente est :

$$\frac{1}{Z_{eq}^*} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\frac{-j}{C\omega}} = \frac{1}{R} + j \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \frac{1 + jR \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}{R}, \text{ d'où : } Z_{eq}^* = \frac{R}{1 + jR \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}, \text{ son}$$

module est : $\|Z_{eq}^*\| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}}$, est l'argument :

$$Arg[Z_{eq}^*] = Arg[R] - Arg \left[1 + jR \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right], \text{ puisque : } Arg[R] = Arg[R + j \cdot 0] =$$

$$Arctg \left(\frac{0}{R} \right) = 0$$

$$Arg \left[1 + jR \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] = Arctg \left[\frac{R \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}{1} \right] = Arctg \left[R \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right]$$

$$Arg[Z_{eq}^*] = -Arctg \left[R \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right]$$

Appelons : $\theta = Arg[Z_{eq}^*]$

$$Z_{eq}^* = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}} \cdot e^{j\theta}$$

$$V_e^* = Z_{eq}^* \cdot i^* = \left(\frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot (I_m \cdot e^{j\omega t})$$

$$V_e^* = V_R^* = V_L^* = V_C^* = \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}} \cdot e^{j(\omega t + \theta)}$$

VI. Quadripôles

1. Préface

Un quadripôle est par définition un réseau qui comporte quatre bornes de liaisons avec les circuits extérieurs.

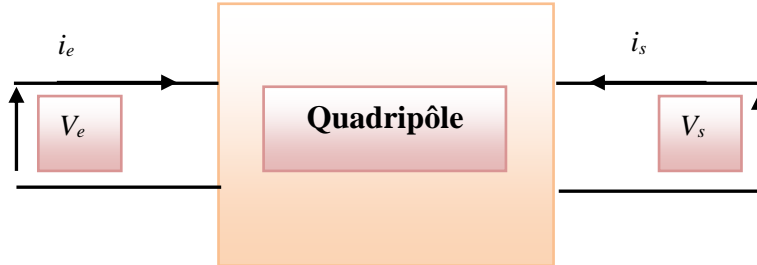


Figure -87- Représentation d'un quadripôle.

2. Représentation Matricielle

2.1. Matrice impédance

Les équations caractéristiques d'un quadripôle par les paramètres impédances peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} v_1 = Z_{11} \cdot i_1 + Z_{12} \cdot i_2 \\ v_2 = Z_{21} \cdot i_1 + Z_{22} \cdot i_2 \end{cases} \text{ Ou sous forme matriciel : } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Z_{11} , Z_{12} , Z_{21} , Z_{22} : sont appelés les impédances du quadripôle et sont également appelés impédances à vide, on peut les mesurer en circuit ouvert :

$$Z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}, \text{ est appelée impédance d'entrée en circuit ouvert (sortie à vide).}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0}, \text{ est appelée impédance de transfert inverse (action de sortie sur l'entrée) en circuit ouvert.}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}, \text{ est appelée impédance de transfert direct (action de sortie sur l'entrée) en circuit ouvert.}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0}, \text{ est appelée impédance de sortie en circuit ouvert.}$$

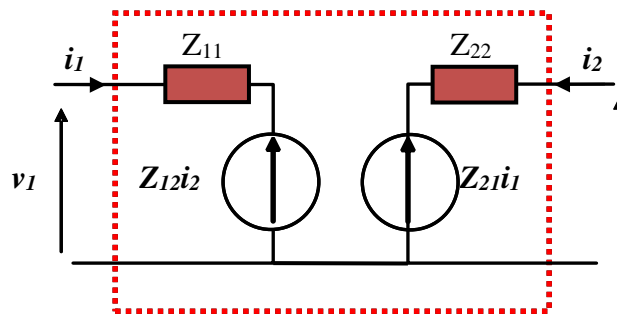


Figure -88- Modèle d'un quadripôle utilisant les paramètres impédances.

Exemple 1:

Soit le quadripôle T de la figure -89- ci-dessous.

- Trouvez les paramètres impédances, sont-ils réciproques ?

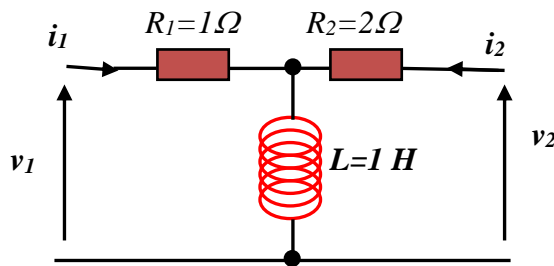


Figure -89- Quadripôle en T.

Solution 1:

D'après les lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} v_1 = R_1 \cdot i_1 + jL\omega \cdot (i_1 + i_2) \\ v_2 = R_2 \cdot i_1 + jL\omega \cdot (i_1 + i_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega) \cdot i_1 + jL\omega \cdot i_2 \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2 + jL\omega) \cdot i_2 \end{cases}$$

D'où : $Z_{11} = (R_1 + jL\omega)$, $Z_{12} = Z_{21} = jL\omega$, $Z_{22} = (R_2 + jL\omega)$

A.N : $Z_{11} = (1 + j\omega)$ (Ω), $Z_{12} = Z_{21} = j\omega$ (Ω), $Z_{22} =$

$(2 + j\omega)$ (Ω)

Ce quadrilatère est réciproque car : $Z_{12} = Z_{21}$

2.2. Paramètres admittance

Les équations caractéristiques d'un quadripôle par les paramètres admittances peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} \cdot v_1 + Y_{12} \cdot v_2 \\ i_2 = Y_{21} \cdot v_1 + Y_{22} \cdot v_2 \end{cases} \text{ Ou par l'écriture matricielle : } \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Quadripôles

Y_{11} , Y_{12} , Y_{21} , Y_{22} : sont appelés les admittances du quadripôle et sont également appelés admittances à court-circuit, on peut les mesurer en court-circuit.

$Y_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0}$: est appelée admittance d'entrée (sortie en court-circuit).

$Y_{12} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$: est appelée admittance de transfert inverse (action de sortie sur l'entrée)

en court-circuit.

$Y_{21} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0}$: est appelée admittance de transfert direct (action de sortie sur l'entrée)

en court-circuit.

$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0}$: est appelée admittance de sortie en court-circuit

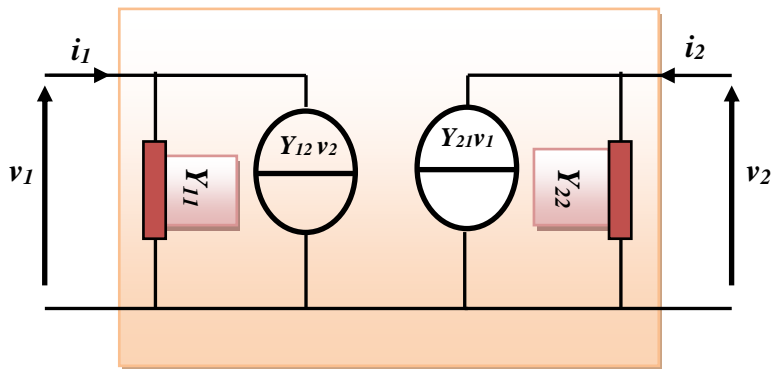


Figure -90- Modèle d'un quadripôle utilisant les paramètres admittances

Exemple 2 :

Soit le quadripôle T de la figure -91- ci-dessous.

- Trouvez les paramètres admittances, sont-ils réciproques ?

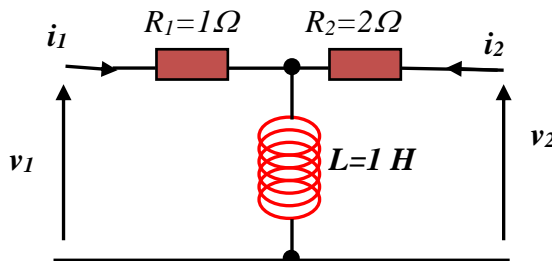


Figure -91- Quadripôle en T.

D'après les lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega) \cdot i_1 + jL\omega \cdot i_2 \dots\dots\dots (1) \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2 + jL\omega) \cdot i_2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) :

$$i_2 = \frac{1}{jL\omega} v_1 - \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} \cdot i_1 \dots\dots\dots (3), \text{ en remplaçons dans (2) :}$$

$$v_2 = jL\omega i_1 + (R_2 + jL\omega) \left(\frac{1}{jL\omega} v_1 - \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} i_1 \right) \left(\frac{(R_2 + jL\omega)(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} - jL\omega \right) \cdot i_1 =$$

$$\frac{(R_2 + jL\omega)}{jL\omega} v_1 - v_2$$

$$\left(\frac{(R_1 R_2 - L^2 \omega^2) + jL\omega \cdot (R_1 + R_2) + L^2 \omega^2}{jL\omega} \right) \cdot i_1 = \frac{(R_2 + jL\omega)}{jL\omega} v_1 - v_2$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot v_1 - \frac{jL\omega}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot v_2 \text{ et finalement :}$$

$$Y_{11} = \frac{R_2 + jL\omega}{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)}, Y_{12} = \frac{jL\omega}{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)}$$

En remplaçons dans (3) :

$$i_2 = \frac{1}{jL\omega} v_1 - \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} \cdot \left[\frac{(R_2 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot v_1 - \frac{jL\omega}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot v_2 \right],$$

$$\text{Après la distribution : } i_2 = \left[\frac{1}{jL\omega} - \frac{(R_1 + jL\omega)(R_2 + jL\omega)}{jL\omega \cdot (R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] v_1 + \left[\frac{jL\omega \cdot (R_1 + jL\omega)}{jL\omega \cdot (R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] \cdot v_2,$$

$$\text{d'où : } i_2 = \frac{1}{jL\omega} \cdot \left[1 - \frac{(R_1 + jL\omega)(R_2 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] v_1 + \left[\frac{(R_1 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] \cdot v_2$$

$$i_2 = \left[\frac{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)) - (R_1 R_2 - L^2 \omega^2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))}{jL\omega \cdot (R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] v_1 + \left[\frac{(R_1 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] \cdot v_2$$

$$i_2 = \left[\frac{+jL\omega}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] v_1 + \left[\frac{(R_1 + jL\omega)}{(R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2))} \right] \cdot v_2 \text{ et finalement :}$$

$$Y_{21} = \left[\frac{+jL\omega}{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)} \right], Y_{22} = \left[\frac{R_1 + jL\omega}{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)} \right]$$

A.N.

$$Y_{11} = \frac{2 + j\omega}{2 + 3j\omega}, Y_{12} = Y_{21} = \frac{j\omega}{2 + 3j\omega}, Y_{22} = \frac{1 + j\omega}{2 + 3j\omega}$$

2.3. Paramètres hybrides

Les équations caractéristiques d'un quadripôle par les paramètres hybrides peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot v_2 \\ i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot v_2 \end{cases} \quad \text{Ou sous forme matriciel : } \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22} : sont appelés les paramètres hybrides du quadripôle et sont formés des admittances et des impédances.

En prenant l'exemple précédent pour trouver les expressions des paramètres hybrides :

D'après les lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega) \cdot i_1 + jL\omega \cdot i_2 \dots (1) \\ v_2 = jL\omega \cdot i_1 + (R_2 + jL\omega) \cdot i_2 \dots (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) : $i_2 = -\frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} \cdot i_1 + \frac{1}{R_2 + jL\omega} v_2$

En remplaçons dans (1) : $v_1 = (R_1 + jL\omega) \cdot i_1 + jL\omega \cdot \left(-\frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} \cdot i_1 + \frac{1}{R_2 + jL\omega} v_2\right)$

D'où : $v_1 = (R_1 + jL\omega) \cdot i_1 + \frac{L^2\omega^2}{R_2 + jL\omega} \cdot i_1 + \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} v_2$

Encore : $v_1 = \left(\frac{(R_1 + jL\omega)(R_2 + jL\omega) + L^2\omega^2}{R_2 + jL\omega}\right) \cdot i_1 + \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} v_2$

$$v_1 = \left(\frac{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)}{R_2 + jL\omega}\right) \cdot i_1 + \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} v_2$$

$$\begin{cases} v_1 = \left(\frac{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)}{R_2 + jL\omega}\right) \cdot i_1 + \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} v_2 \\ i_2 = -\frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} \cdot i_1 + \frac{1}{R_2 + jL\omega} v_2 \end{cases}$$

D'où:

$$h_{11} = \frac{R_1 R_2 + jL\omega \cdot (R_1 + R_2)}{R_2 + jL\omega} = \frac{2 + 3j\omega}{2 + j\omega}$$

$$h_{12} = \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} = \frac{j\omega}{2 + j\omega}$$

$$h_{21} = \frac{-jL\omega}{R_2 + jL\omega} = -\frac{j\omega}{2 + j\omega}$$

$$h_{22} = \frac{1}{R_2 + jL\omega} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

2.4. Paramètres hybrides inverses

Parfois, nous devons écrire des relations dans le sens opposé au paragraphe précédent v_2 et i_1 en termes de v_1 et i_2 comme suit :

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} \cdot v_1 + g_{12} \cdot i_2 \\ v_2 = g_{21} \cdot v_1 + g_{22} \cdot i_2 \end{cases} \quad \text{Ou sous forme matriciel : } \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} : sont appelés les paramètres hybrides inversé du quadripôle.

2.5. Matrices de transfert

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée ou vice versa.

$$\begin{cases} v_1 = A. v_2 + B. i_2 \\ i_1 = C. v_2 + D. i_2 \end{cases}$$

Exemple 3 :

Soit l'exemple précédent, on veut chercher la matrice de transfert.

Solution 3:

Toujours d'après les lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega). i_1 + jL\omega. i_2 \dots\dots (1) \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega). i_2 \dots\dots (2) \end{cases}$$

De (2) : $i_1 = \frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2. + jL\omega}{jL\omega} . i_2$, et en remplaçons dans (1) :

$$v_1 = (R_1 + jL\omega). \left(\frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2. + jL\omega}{jL\omega} . i_2 \right) + jL\omega. i_2$$

D'où : $v_1 = (R_1 + jL\omega). \left(\frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2. + jL\omega}{jL\omega} . i_2 \right) + jL\omega. i_2$

$$v_1 = \left(\frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \frac{(R_1 + jL\omega). (R_2. + jL\omega)}{jL\omega} . i_2 \right) + jL\omega. i_2$$

Donc : $v_1 = \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \left[\frac{R_1 R_2 + jL\omega. (R_1 + R_2)}{jL\omega} \right] . i_2$

Et finalement :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \left[\frac{R_1 R_2 + jL\omega. (R_1 + R_2)}{jL\omega} \right] . i_2 \\ i_1 = \frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2. + jL\omega}{jL\omega} . i_2 \end{cases}$$

D'où : $A = \frac{(R_1 + jL\omega)}{jL\omega}$, $B = \frac{-[R_1 R_2 + jL\omega. (R_1 + R_2)]}{jL\omega}$, $C = \frac{1}{jL\omega}$, $D = \frac{-[R_2 + jL\omega]}{jL\omega}$

AN : $A = \frac{1 + j\omega}{j\omega}$, $B = \frac{-(2 + 3j\omega)}{j\omega}$, $C = \frac{1}{j\omega}$, $D = \frac{-(2 + j\omega)}{j\omega}$

3. Association des quadripôles

3.1. Addition de deux quadripôles

Si on additionne deux quadripôles (voir figure -92-)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

On aura :
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} + Z'_{11} & Z_{12} + Z'_{12} \\ Z_{21} + Z'_{21} & Z_{22} + Z'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

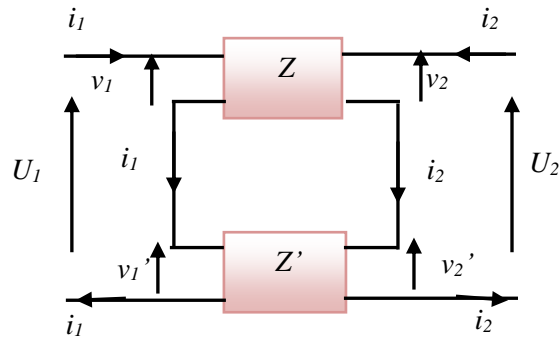


Figure -92- additionne deux quadripôles.

3.2. Multiplication de deux quadripôles

Sachant que : $J_1 = i_1 + i_1'$ et $J_2 = i_2 + i_2'$ ont utilisons les matrices des paramètres

admittances :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} + Y'_{11} & Y_{12} + Y'_{12} \\ Y_{21} + Y'_{21} & Y_{22} + Y'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice admittance équivalentes et la somme des deux matrices admittances des deux quadripôles.

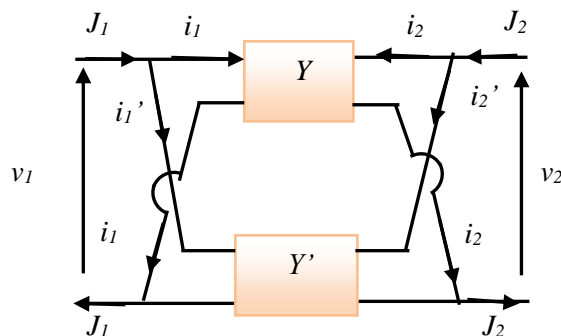


Figure -92- Multiplication de deux

Exercices

Exercice 1:

Soit le quadripôle de la figure-94- ci-dessous.

1. Calculer les paramètres impédances Z de ce quadripôle, est-il réciproque ?
2. Trouvez le quadripôle T équivalent.

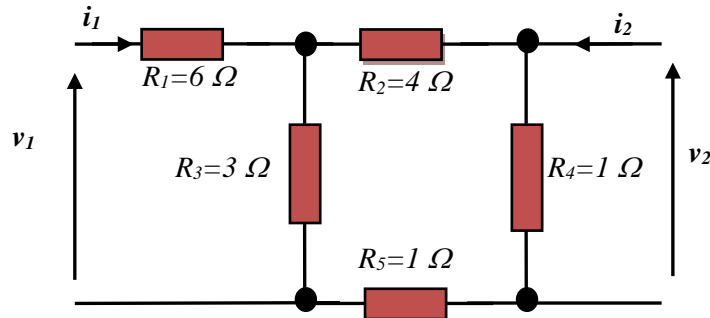


Figure-94-

Solution abrégée

1. Les paramètres impédances Z : $Z_{11} = 8 \Omega$, $Z_{12} = Z_{21} = 0,33 \Omega$, $Z_{22} = 0,89 \Omega$.
2. Oui, c'est un quadripôle réciproque : $Z_{12} = Z_{21} = 0,33 \Omega$,
3. Le quadripôle T équivalent : $Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 7,67\Omega$, $Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 0,56\Omega$, $Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 0,33\Omega$

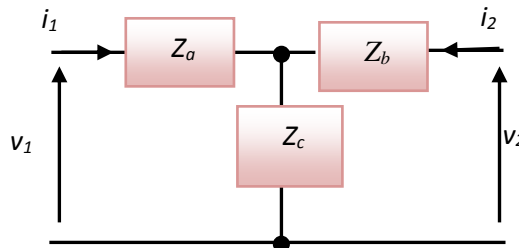


Figure-95-

Exercice 2:

Soit le quadripôle de la figure ci-dessous.

1. Calculer les paramètres admittances Y de ce quadripôle.

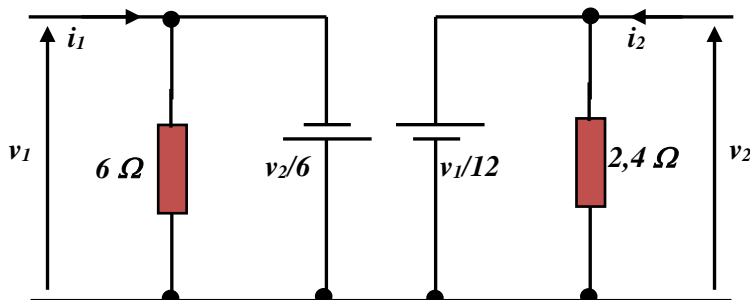


Figure-96-

Solution abrégée

$$Y_{11} = 0,167\Omega, \quad Y_{12} = 0,167\Omega, \quad Y_{21} = 0,083 \Omega, \quad Y_{22} = 0,417 \Omega.$$

Exercice 3:

Soit le quadripôle de la figure ci-dessous.

- Exprimer les grandeurs de sortie v_2 et i_2 en fonction des grandeurs d'entrée v_1 et i_1 de ce quadripôle sous la forme :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

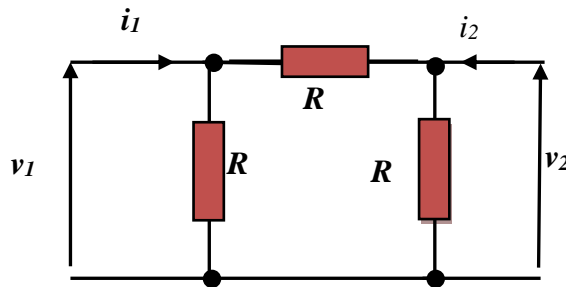


Figure-97

- Mettez deux quadripôles du quadripôle précédent sous la forme d'une chaîne. En utilisant les résultats de la question précédente, trouvez v_1 et i_1 en fonction de v_3 et i_3

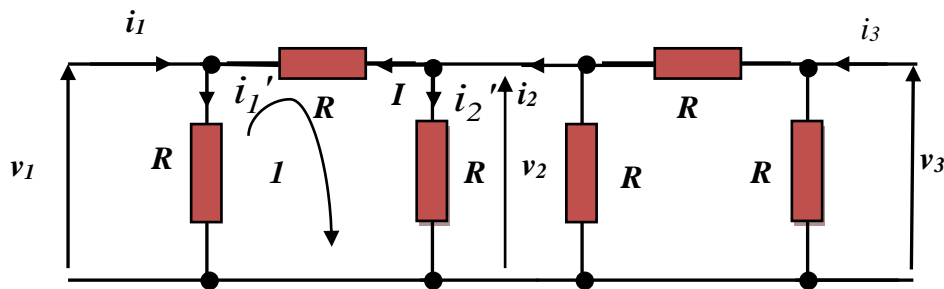


Figure-98-

Solution 3:

$$v_1 = R \cdot i_1' \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{De la maille (1) : } R \cdot i_1' + R \cdot I - R \cdot i_2' = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{Loi des nœuds (A) : } i_1 = i_1' - I \dots \dots \dots (3)$$

$$(3) \text{ dans (1) : } v_1 = R(i_1 + I)$$

$$\text{Loi des nœuds (B) : } i_2' = i_2 - I$$

$$\text{En remplaçons dans (2) : } v_1 = R(i_2 - 2I) \dots \dots \dots (4)$$

$$i_1' = \frac{v_1}{R}, \quad v_2 = R \cdot i_2', \quad i_2' = \frac{v_2}{R}$$

En remplaçons : i_2' et i_1' Dans (2) :

$$\frac{v_1}{R} + I - \frac{v_2}{R} = 0 \Rightarrow I = \frac{v_2 - v_1}{R} \dots \dots \dots (5)$$

Quadripôles

En remplaçons dans (5) dans (4) : $v_1 = R \left(i_2 - 2 \frac{v_2 - v_1}{R} \right) = Ri_2 - 2v_2 + 2v_1 \Rightarrow v_1 = 2v_2 - Ri_2 \dots \dots \dots (6)$

Et finalement :

Loi des nœuds (A) : $i_1 = i_1' - I$

$$i_1 = \frac{v_1}{R} - \frac{v_2 - v_1}{R} = \frac{-v_2 + 2v_1}{R} \dots \dots \dots (7)$$

En remplaçons dans (6) dans (7) :

$$i_1 = \frac{-v_2 + 2v_1}{R} = \frac{-v_2 + 2(2v_2 - Ri_2)}{R} = \frac{3}{R} \cdot v_2 - 2i_2 \dots \dots \dots (8)$$

$$\begin{cases} v_1 = 2v_2 - Ri_2 \\ i_1 = \frac{3}{R} \cdot v_2 - 2i_2 \end{cases} : \text{d'où la matrice de transfert : } \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A = 2 & B = -R \\ C = \frac{3}{R} & D = -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A = 2 & B = -R \\ C = \frac{3}{R} & D = -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' = 2 & B' = -R \\ C' = \frac{3}{R} & D' = -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

Notez ici que nous avons utilisé $(-i_2)$ parce i_2 et i_3 ont le même sens et peuvent changer le sens à condition de changer le signe de C' et D' comme suit:

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'' = A' = 2 & B'' = B' = -R \\ C'' = -C' = \frac{-3}{R} & D'' = -D' = 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A = 2 & B = -R \\ C = \frac{3}{R} & D = -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A'' = A' = 2 & B'' = B' = -R \\ C'' = -C' = \frac{-3}{R} & D'' = -D' = 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -R \\ \frac{3}{R} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -R \\ \frac{-3}{R} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4R \\ \frac{12}{R} & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

VII. Réponse en fréquence (filtres)

1. Préface

Dans ce chapitre, nous essayons d'analyser le comportement des circuits en termes de fréquence du signal, où l'analyse des tensions et des courants se fait quand la fréquence est variable. Si on fait varier la fréquence d'opération d'un circuit, l'impédance des capacitances et inductances variera aussi, et il est important de comprendre le comportement de ces éléments lorsque la fréquence varie. Un choix précis de ces composants montrera que les circuits peuvent bloquer ou transmettre certaines fréquences. Ce type de circuit est appelé **filtres**. En fait, un filtre pratique ne permet pas d'éliminer complètement certaines fréquences : il y a plutôt une atténuation.

Nous nous concentrons sur l'analyse des quatre types de filtres passifs : filtres passe-bas, filtres passe-haut, filtres passe-bande (bande passante) et filtres réjecteurs (coupe-bande). En plus de la réponse de ces filtres en fonction de la fréquence, nous présentons cette réponse par le diagramme de Bode.

Remarque : La réponse d'un filtre exprime le rapport entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie ($\frac{v_s}{v_e}, \frac{i_s}{i_e}$ ou $\frac{p_s}{p_e}$) d'un quadripôle en régime variable. Ce rapport s'appelle la fonction de transfert.



Figure-99- Filtre

2. Diagrammes de Bode

Il existe deux diagrammes différents pour représenter l'évolution de $H(j\omega)$ en fonction de la fréquence :

- 1) Le diagramme de Nyquist qui en est une représentation polaire.
- 2) Le diagramme de Bode qui est une représentation paramétrique de H . Nous nous limiterons à étudier la représentation de Bode.

Le diagramme de Bode permet de représenter sous forme graphique le gain en dB (décibel) : ($G = 20\log|H(j\omega)|$) et la phase $\varphi = \text{Arg}(H(j\omega))$ d'une fonction de transfert, en fonction de ω . Il permet de voir le comportement (réponse) d'un filtre en fonction de la fréquence.

- L'échelle des abscisses est logarithmique. Cela permet de représenter le gain et la phase sur une grande plage de fréquence. Ainsi, on représente :

Réponse en fréquence

$$G(\omega) = f(\log \omega) = f(\omega)$$

- a) Pour tracer le diagramme de $G = 20 \log |H(j\omega)|$ en fonction de $\log \omega$, on peut commencer par étudier le comportement asymptotique de $|H(j\omega)|$.

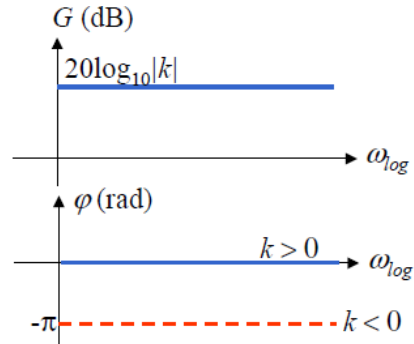
Exemple 1: Représentation de Bode

1) $|H(j\omega)| = K,$

- Gain : $G = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |K|.$

Droite horizontale

- Phase: $\varphi = \begin{cases} 0 & , K > 1 \\ -\pi & , K < 0 \end{cases}$



2) $|H(j\omega)| = j\omega$

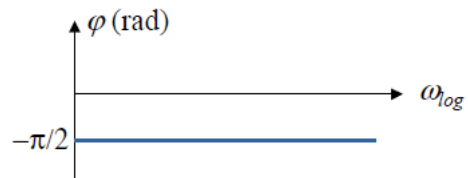
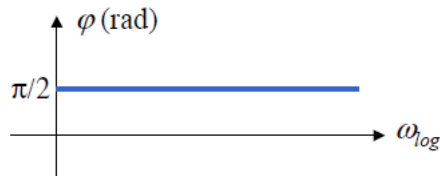
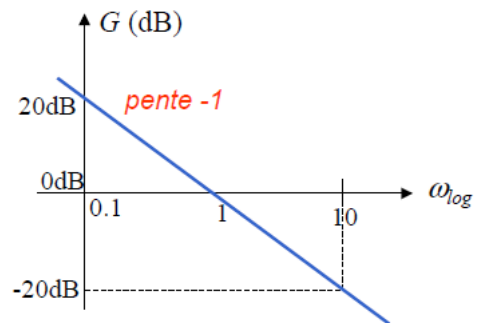
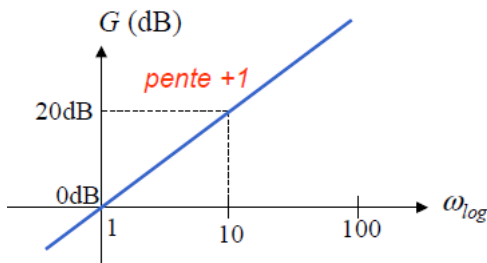
- Gain : $G = 20 \log \omega,$ Droite de pente 20dB/décade (ou pente +1)

Phase : $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

3) $|H(j\omega)| = \frac{1}{j\omega}$

- Gain : $G = -20 \log \omega,$ Droite de pente -20dB/décade (ou pente -1)

Phase : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



4) Premier ordre : $H(j\omega) = 1 + jT\omega$ ($T > 0$)

- Gain : $G = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log(1 + \omega^2 T^2)$

• $\omega \ll 1, G \approx 0$
Asymptote horizontale

• $\omega \gg 1, G \approx 20 \log \omega T$
Asymptote de pente +1

Réponse en fréquence

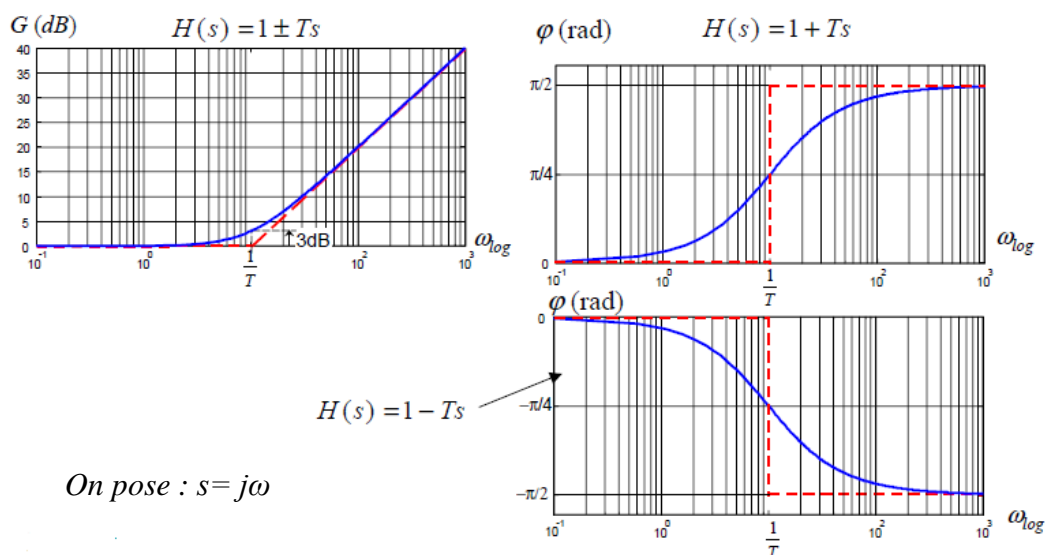
Les deux asymptotes se coupent en : $\omega_c = \frac{1}{T}$

- $A: \omega = \omega_c \text{ on } \dot{\text{a}}: G = 3\text{dB}$
 - Phase : $\varphi = \text{Arctan}(\omega T)$
- $\left. \begin{array}{l} \triangleright \omega T \ll 1, \varphi \approx 0 \\ \triangleright \omega T \gg 1, \varphi \approx \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{Asymptotes Horizontales}$
- $\triangleright A: \omega = \omega_c \text{ on } \dot{\text{a}}: \varphi = \frac{\pi}{4}$

5) **Premier ordre** : $H(j\omega) = 1 - jT\omega$ ($T > 0$)

$$G = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log(1 + \omega^2 T^2), \varphi = -\text{Arctan}(\omega T)$$

La phase change de signe par rapport au cas précédent $1 + jT\omega$



6) **Premier ordre** : $H(j\omega) = (1 + jT\omega)^{-1}$, ($T > 0$)

- Gain : $G = 20 \log |H(j\omega)| = -10 \log(1 + \omega^2 T^2)$

• $\omega T \ll 1, G \approx 0$

Asymptote horizontale

• $\omega T \gg 1, G \approx -20 \log \omega T$

Asymptote de pente -1

Les deux asymptotes se coupent en : $\omega_c = \frac{1}{T}$

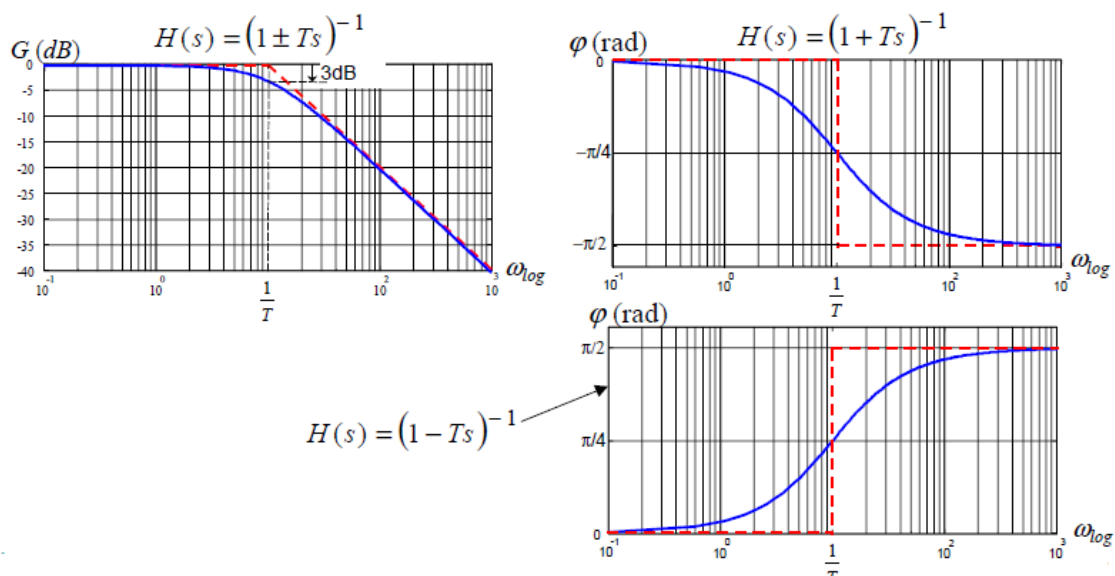
- $A: \omega = \omega_c \text{ on } \dot{\text{a}}: G = -3\text{dB}$
 - Phase : $\varphi = -\text{Arctan}(\omega T)$
- $\left. \begin{array}{l} \triangleright \omega T \ll 1, \varphi \approx 0 \\ \triangleright \omega T \gg 1, \varphi \approx -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{Asymptotes Horizontales}$

➤ A: $\omega = \omega_c$ on a: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

7) **Premier ordre** : $H(j\omega) = (1 - jT\omega)^{-1}$ ($T > 0$)

$$G = 20 \log |H(j\omega)| = -10 \log(1 + \omega^2 T^2), \quad \varphi = \text{Arctan}(\omega T)$$

La phase change de signe par rapport au cas précédent $(1 + jT\omega)^{-1}$



3. Types des filtres

3.1. Filtre passe-bas premier ordre

Un filtre passe-bas est un filtre qui laisse passer les basses fréquences et qui atténue les hautes fréquences.

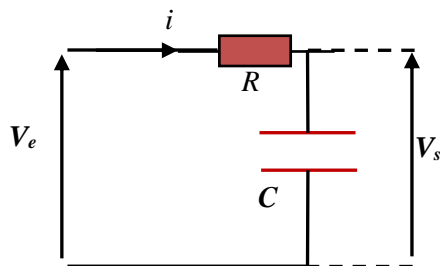


Figure-100- Filtre RC : Passe -bas.

3.1.1. Fonction de transfert

On appelle fonction de transfert le rapport : $H^*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*}$

Soit la tension d'alimentation : $V_e^* = V(j\omega t + \varphi) \sqrt{2} e^{(j\omega t + \varphi)}$ $\underline{Z}_R \underline{Z}_C(j\omega t + \varphi) \underline{Z}_i \underline{i}_{max} e, max$ et :

$$V_s^* = \underline{Z}_C i(j\omega t + \varphi) \underline{Z}_C \underline{i}_{max} \frac{-j}{C\omega}$$

Avec : $\underline{Z} = \left(R - \frac{j}{C\omega} \right)$. Donc la fonction de transfert :

$$H^*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

RC : à l'unité de temps, et l'unité inverse est la fréquence : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

D'où : $H^*(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$, et son module : $\|H^*(\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$, tandis que son argument :

$$\varphi(\omega) = \arctg(\omega)$$

3.1.2. Fréquence de coupure ω_c

La fréquence de coupure d'un circuit électronique est la fréquence limite de fonctionnement utile. Conventionnellement, cette limite est souvent fixée à la fréquence pour laquelle la puissance de sortie est réduite de moitié, pour un signal d'entrée de même amplitude, par rapport à la puissance de sortie à la fréquence de référence, ou d'une autre façon on dit qu'à la fréquence de coupure on a l'égalité suivante:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } |H(j\omega)|_{max} = 1 \text{ quand } (\omega = 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ d'où: } \left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right) = 2 \Rightarrow \omega_c = RC$$

1. Le Tracer du diagramme $|H(j\omega)| = f(\omega)$

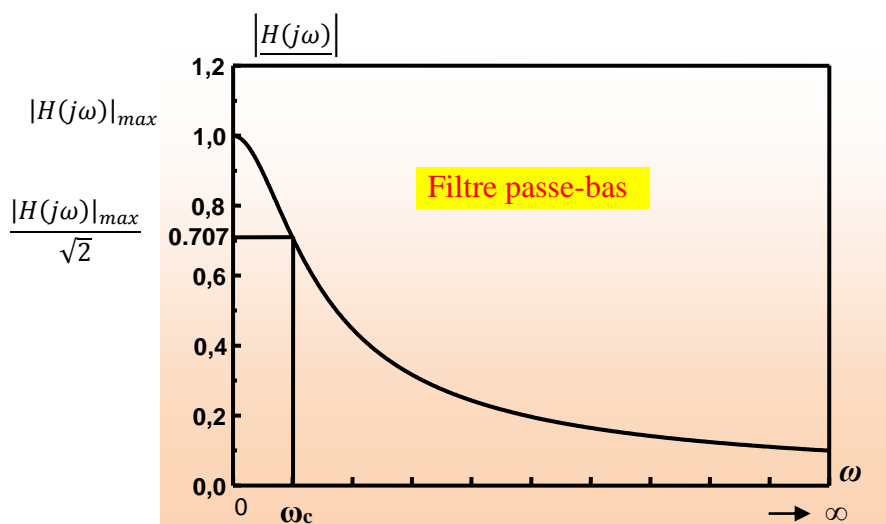


Figure-101- Fonction de transfert

2. La nature du filtre : **Filtre passe-bas.**

3.1.3. Diagramme de Bode :

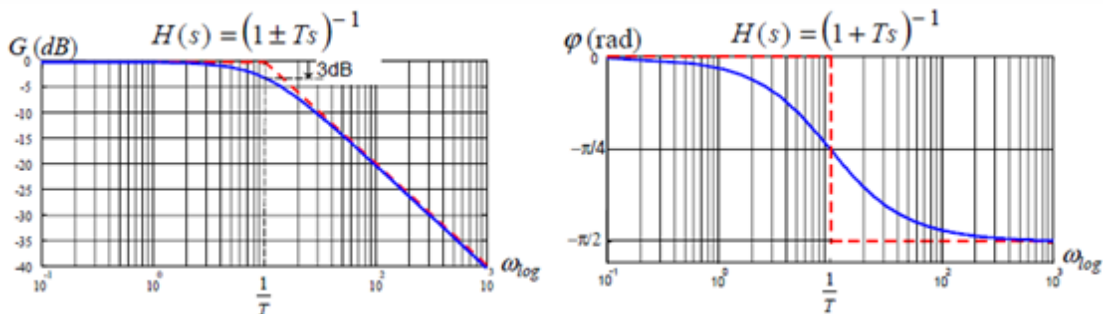
A partir de fonction de transfert trouver précédemment : $H * (\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{1}{1+jRC\omega}$, on peut tracer le diagramme de Bode tout en calculons le Gain et le déphasage de la fonction de transfert, et qui a été discuter dans les exemples précédent :

$$H(j\omega) = (1 + jRC\omega)^{-1} = \frac{1}{(1+jRC\omega)} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

- Gain : $G = 20\log|H(j\omega)| = -10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
 - $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \ll 1, G \approx 0$ • $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \gg 1, G \approx -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
 - Asymptote horizontale* *Asymptote de pente -1*

Les deux asymptotes se coupent en : $\omega_c = \omega_0$

- $A: \omega = \omega_c \text{ on à: } G = -3\text{dB}$
 - Phase : $\varphi = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
- $\left. \begin{array}{l} \text{➤ } \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \ll 1, \varphi \approx 0 \\ \text{➤ } \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \gg 1, \varphi \approx -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{Asymptotes horizontales}$
- $A: \omega = \omega_c \text{ on à: } \varphi = -\frac{\pi}{4}$



On pose : $s = j\omega$, et $T = (\omega_0)^{-1}$

3.2. Filtre passe-haut premier ordre

Un filtre passe-haut est un filtre qui laisse passer les hautes fréquences et qui atténue les basses fréquences.

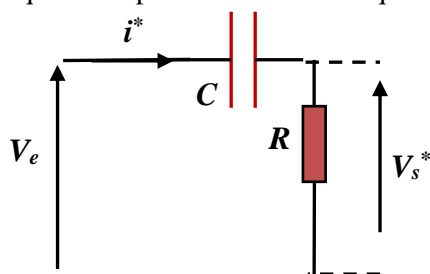


Figure-102- Filtre RC : Passe-haut.

3.2.1. Fonction de transfert

$$V_e^* = \left(R - \frac{j}{C\omega} \right) \cdot i^*$$

$$V_s^* = R \cdot i^*$$

$$H^*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{R - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{RC\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

3.2.2. Fréquence de coupure ω_c

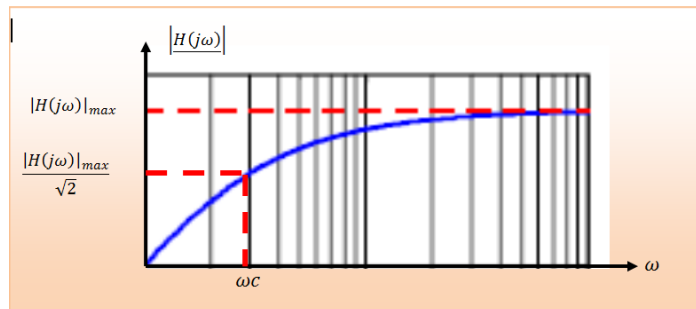
A la fréquence de coupure on a l'égalité suivante:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } |H(j\omega)|_{max} = 1 \text{ quand } (\omega = \infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ d'ou: } \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2\right) = 2 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = RC$$

Le Tracer du diagramme $|H(j\omega)| = f(\omega)$



3.2.3. Diagramme de Bode :

A partir de fonction de transfert trouver précédemment : $H^*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$, on peut tracer le diagramme de Bode tout en calculons le Gain et le déphasage de la fonction de transfert, et qui a été discuter dans les exemples précédents :

$$H(j\omega) = \left(1 - j\frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

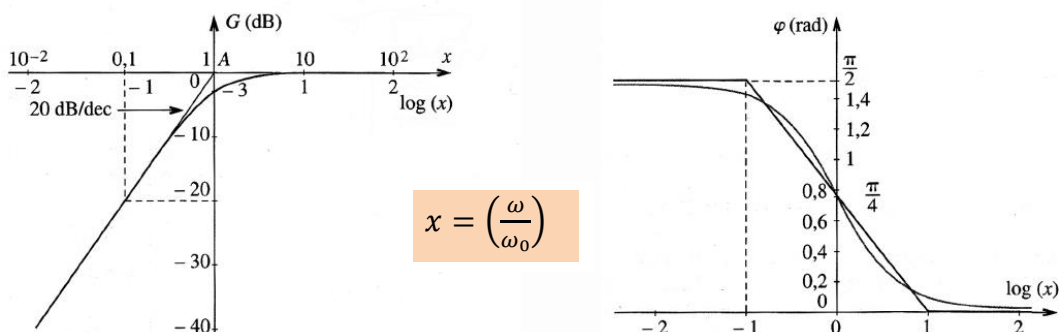
- Gain: $G = 20 \log |H(j\omega)| = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right)$
 - $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \ll 1, G \approx 0$
Asymptote horizontale
 - $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \gg 1, G \approx -20 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
Asymptote de pente +1

Réponse en fréquence

Les deux asymptotes se coupent en : $\omega_c = \omega_0$

- $A: \omega = \omega_c \text{ on } \grave{a}: G = -3\text{dB}$
- Phase: $\varphi = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$

- $\left. \begin{array}{l} \text{➤ } \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \ll 1, \varphi \approx -\frac{\pi}{2} \\ \text{➤ } \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \gg 1, \varphi \approx 0 \end{array} \right\} \text{Asymptotes horizontales}$
- $A: \omega = \omega_c \text{ on } \grave{a}: \varphi = -\frac{\pi}{4}$



3.3. Filtre passe bande

Un filtre passe-bande est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre.

Exemple

Soit le montage de la figure-102- représentant un filtre a partir d'un circuit RLC.

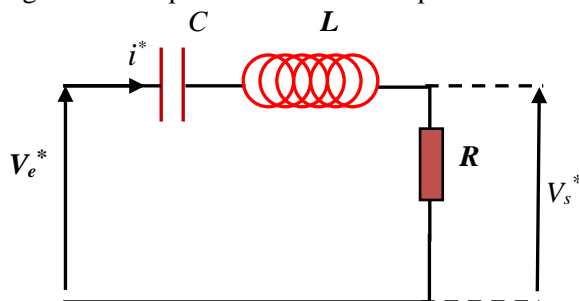


Figure-103- Filtre passe-bande

1) Calculer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et montrer qu'elle se met sous cette forme :

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}, \text{ avec : } x = \frac{\omega}{\omega_0}, Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

- 2) Calculer les fréquences de coupures
- 3) Tracer les courbes de la fonction de transfert $|H(x)| = f(x)$ et le diagramme de Bode.
- 4) Déduire la nature du filtre et Calculer la bande passante.

Solution :

3.3.1. Fonction de transfert $H(j\omega)$:

En utilisant les nombres complexes :

$$V_e^* = \left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \cdot i^* \dots \dots \dots (1)$$

$$V_s^* = R \cdot i^* \dots \dots \dots (2)$$

On dévisons (2) sur (1) :

$$H^*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{R}{\left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]} \quad \text{Le module de la fonction de transfert : } \|H^*(\omega)\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

L'argument du numérateur : $\varphi_1 = \text{Arg}[R] = \text{Arg}[R + j \cdot 0] = \text{Arctg}\left(\frac{0}{R}\right) = 0$

L'argument du dénominateur : $\varphi_2 = \text{Arg}\left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] = \text{Arctg}\left(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}\right)$

L'argument de la fonction de transfert : $\varphi(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\text{Arctg}\left(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}\right)$

En utilisant les données : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ on écrit :

$$|H(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \text{ et } \varphi(x) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\text{Arctg}\left(Q \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

3.3.2. Fréquences de coupures

Il est clair que :

$$|H(x)|_{max}$$

$$|H(x_c)| = \frac{|H(x)|_{max}}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{\omega_c}{\omega_0}}}$$

D'où :

$$Q^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[Q \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \cdot \left[Q \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 \right] = 0$$

$$\frac{(Qx^2 - x - Q) \cdot (Qx^2 + x - Q)}{x^2} = 0$$

1) $Qx^2 - x - Q = 0$,

Ou:

2) $Qx^2 + x - Q = 0$ Le discriminant : $\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac, b = -1, a = Q \text{ etc } = -1 \\ \Delta = 1 + 4Q^2 > 0 \end{cases}$

- L'équation (1) admet les solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$: Rejetée parce qu'il est négatif.

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \dots \dots \dots (1)$$

• La deuxième équation a deux solutions :

$x_1' = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$: Rejetée parce qu'il est négatif.

$$x_2' = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \dots \dots \dots (2)$$

De (1) : $x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \Rightarrow \omega_2 = \omega_0 x_2 = \omega_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} = \omega_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{L\omega_0}{R}\right)^2}}{2\frac{L\omega_0}{R}}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

D'où la première fréquence : $\omega_2 = \frac{R}{2L} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}\right) = \frac{R}{2L} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{R^2C}}\right)$

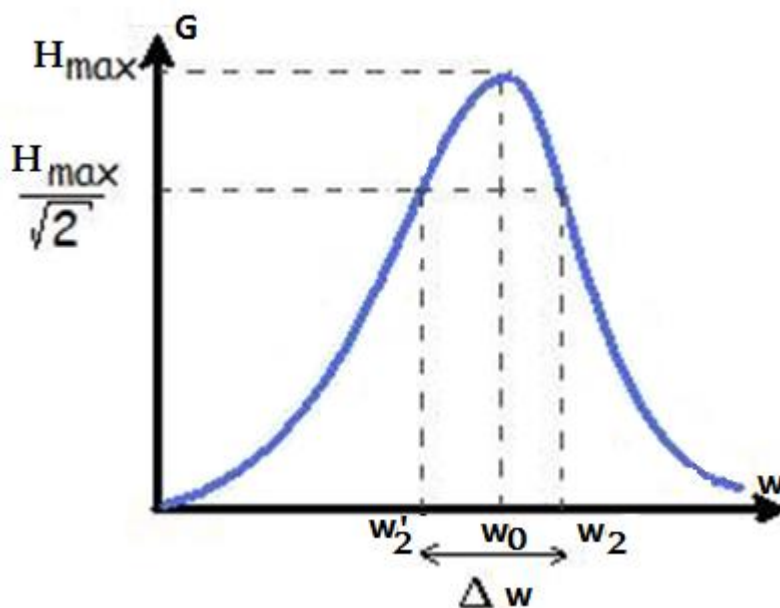
Et la deuxième fréquence : $\omega_2' = \omega_0 \cdot x_2' = \omega_0 \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} = \omega_0 \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{L\omega_0}{R}\right)^2}}{2\frac{L\omega_0}{R}}$

$$\omega_2' = \frac{R}{2L} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{R^2C}}\right)$$

3.3.3. Bande passante

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_2' = \frac{4R}{L}$$

3. Représentation de la fonction de transfert



3.3.4. La nature du filtre : **Filtre passe bande**

Problème :

On considère le filtre passif de la figure-2- :

1. Montrée que l'impédance équivalente des deux condensateurs en parallèle s'écrit sous la forme :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{2jC\omega}$$

2. Donner l'expression de l'impédance vue entre A et B
3. Donner l'expression de la fonction de transfert :

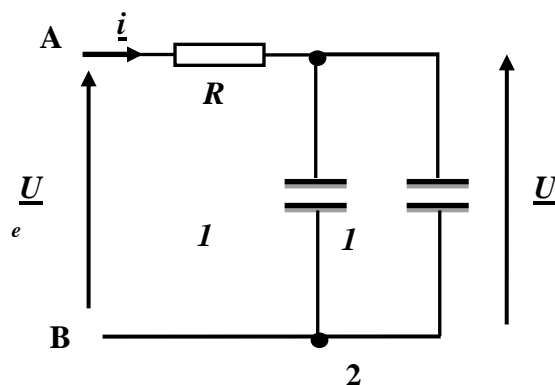
$$\underline{G}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} \text{ en fonction de } R, C \text{ et } \omega.$$

4. Mettre l'expression de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1+j2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} .$$

5. Calculer la fréquence de coupure ω_C
6. Tracer la fonction de transfert : $|\underline{G}(j\omega)| = f(\omega)$, et déduire la nature du filtre.

A.N : $R= 10K\Omega$, $C= 10\mu F$.



Solution

1. L'impédance équivalente de deux condensateurs en parallèle s'écrit sous la forme :

$$\underline{Z}_C = \frac{\frac{1}{jC\omega} * \frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{1}{jC\omega} * \frac{1}{jC\omega}}{2 * \left(\frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{2jC\omega}$$

2. L'expression de l'impédance vue entre A et B :

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{2jC\omega}$$

3. L'expression de la fonction de transfert : $\underline{G}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{\frac{1}{2jC\omega}}{R + \frac{1}{2jC\omega}} = \frac{\frac{1}{2jC\omega}}{\frac{2jRC\omega + 1}{2jC\omega}} = \frac{1}{1+2jRC\omega}$

4. L'expression de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2jRC\omega} = \frac{1}{1 + j2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

5. Calcul de la fréquence de coupure ω_c : à la fréquence de coupure on a :

$$|G(j\omega_c)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } |G(j\omega)|_{max} = 1 \text{ quand } (\omega = 0)$$

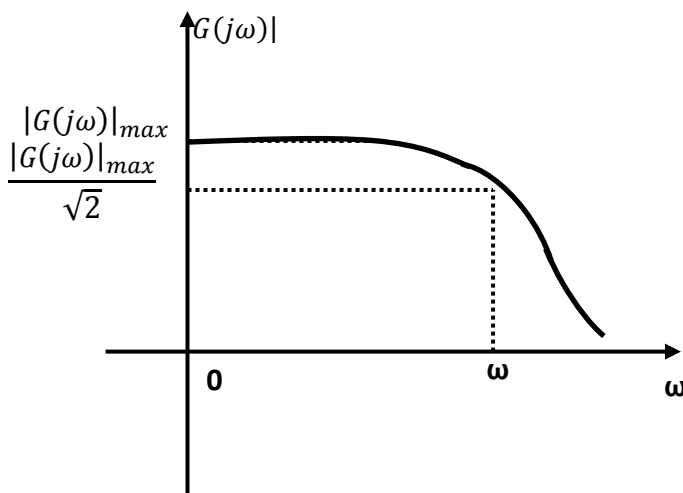
$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4 * \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ d'ou: } \sqrt{1 + 4 * \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$1 + 4 * \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4 * \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow 2 * \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right) = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{\omega_0}{2} = 5rd/s$$

6. Diagramme de la fonction de transfert $|G(j\omega)| = f(\omega)$

3. La nature du filtre.

Filtre passe bas



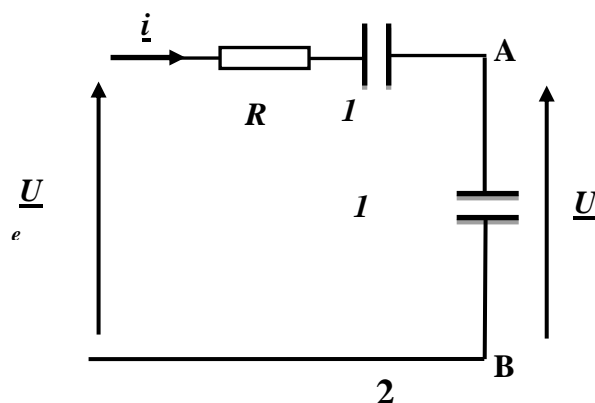
Problème :

On considère le filtre passif de la figure-2- :

1. Donner l'expression de la fonction de transfert

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{U_s}{U_e} \text{ en fonction de R, C et } \omega.$$

2. Calculer la fréquence de coupure ω_c , a partir de



l'expression de la fonction de transfert qui s'écrit sous la

forme :

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{H_0}{1+jH_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } H_0 = \frac{1}{2}.$$

3. Tracer la fonction de transfert : $\left| \underline{G(j\omega)} \right| = f(\omega)$, et

déduire la nature du filtre.

A.N : R= 10KΩ, C= 10μF.

Solution

1. L'expression de la fonction de transfert $\underline{G(j\omega)} = \frac{U_s}{U_e}$ en fonction de R, C et ω.

$$\begin{aligned} \underline{G(j\omega)} = \frac{U_s}{U_e} &= \frac{\frac{1}{jC\omega} \underline{i}}{\left[\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) + \frac{1}{jC\omega} \right] \underline{i}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\left(R + \frac{2}{jC\omega} \right)} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{jC\omega R + 2}{jC\omega}} \\ &= \frac{1}{2 \left(1 + \frac{jRC\omega}{2} \right)} = \frac{H_0}{1 + jH_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } H_0 = \frac{1}{2}$$

2. Calcul de la fréquence de coupure ω_c :

4. à la fréquence de coupure ω_c on a :

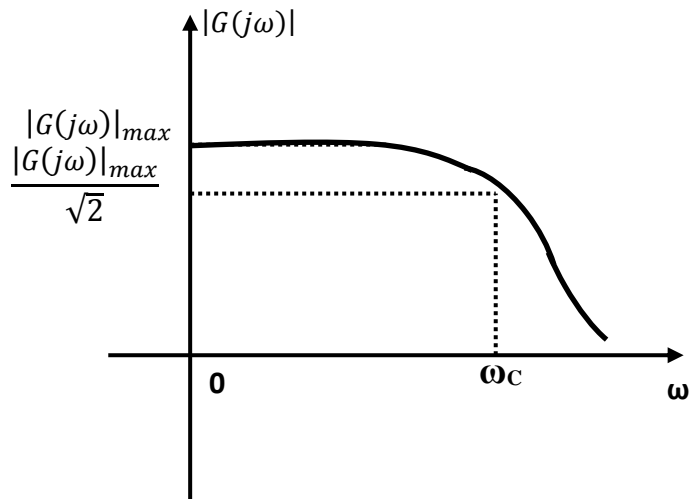
$$|G(j\omega_c)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } |G(j\omega)|_{max} = H_0 \text{ quand } (\omega = 0)$$

$$\frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(H_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \text{ d'ou: } \sqrt{1 + \left(H_0 \frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{H_0} = 2\omega_0 = 20 \text{rd/s}$$

5. Diagramme de la fonction de transfert $\left| \underline{G(j\omega)} \right| = f(\omega)$

6. La nature du filtre. **Filtre passe bas**



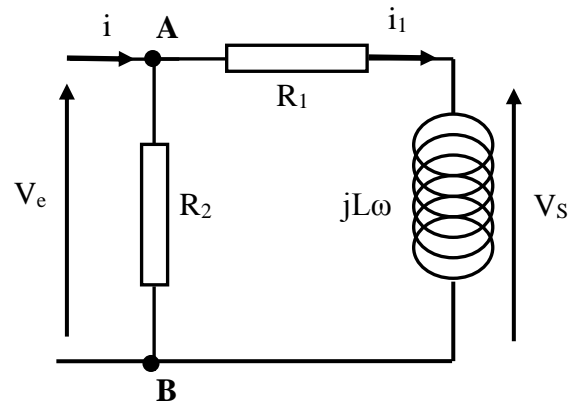
Problème

On considère le filtre passif de la figure-3-:

1. Donner l'expression de la fonction de transfert

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{V_s}{V_e} \text{ en fonction de } R_1, L \text{ et } \omega.$$

2. Calculer la fréquence de coupure ω_c .
3. Tracer le diagramme $|G(j\omega)| = f(\omega)$
4. Déduire la nature du filtre.
A.N : $R_1=R_2 \ 820\Omega, L= 2\text{mH}$.



Solution

1. L'expression de la fonction de transfert $\underline{G(j\omega)} = \frac{V_s}{V_e}$ en fonction de R_1, L et ω .

$$\begin{aligned} \underline{G(j\omega)} &= \frac{V_s}{V_e} = \frac{(jL\omega)i_1}{(R_1+jL\omega)i_1} = \frac{(jL\omega)}{(R_1+jL\omega)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{R_1}{jL\omega}+1\right)} = \frac{1}{\left(1-j\frac{R_1}{L\omega}\right)} \end{aligned}$$

$$\underline{|G(j\omega)|} = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{R_1}{L\omega}\right)^2\right)}}$$

2. à la fréquence de coupure ω_c on à :

$$|G(j\omega_c)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } |G(j\omega)|_{max} = 1 \text{ quand } (\omega \rightarrow \infty)$$

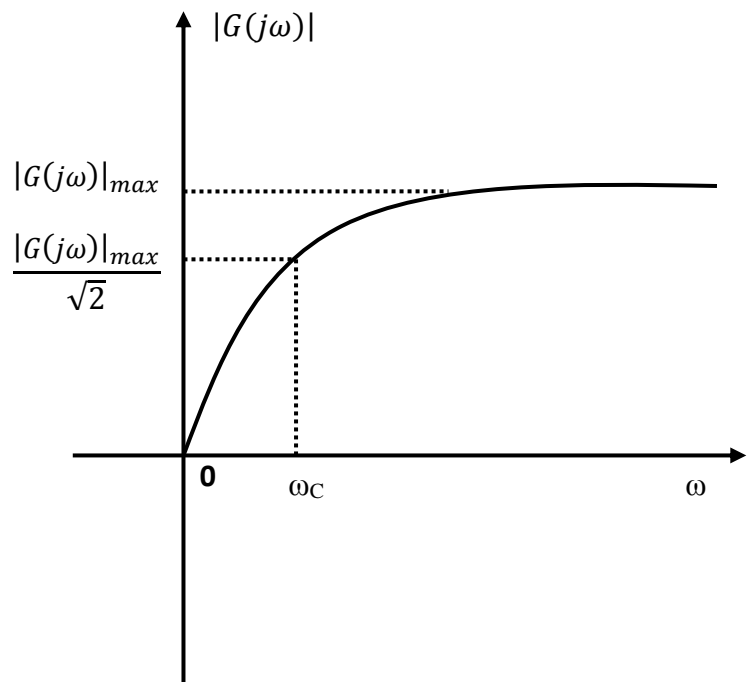
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{L\omega_C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ d'ou: } \left(1 + \left(\frac{R_1}{L\omega_C}\right)^2\right) = \sqrt{2},$$

$$\omega_C = \frac{R_1}{L} = \frac{820}{2 \cdot 10^{-3}} = 410 \cdot 10^3 \text{ rd/s}$$

3. Tracer le diagramme $|G(j\omega)| = f(\omega)$

4. La nature du filtre.

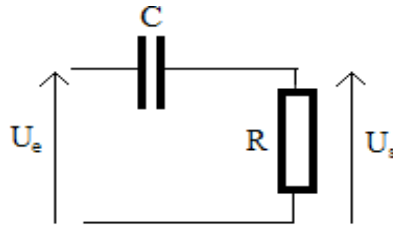
Filtre passe Haut



Exercices non résolus

Exercice 1:

On considère le filtre passif ci-dessous :

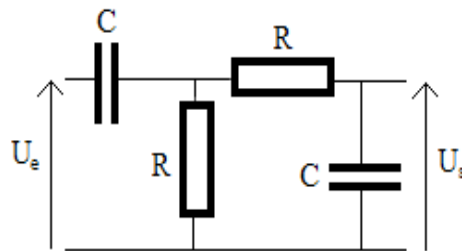


- 1) Calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$ en fonction de R, C et ω .
- 2) Calculer la fréquence de coupure f_c .
- 3) Tracer le diagramme de Bode et déduire la nature du filtre.

A.N : R= 1K Ω , C= 10nF.

Exercice 2:

On considère le filtre passif ci-dessous :



- a) Calculer la fonction de transfert $G(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$, montrer qu'on

peut la mettre sous la forme : $G(j\omega) =$

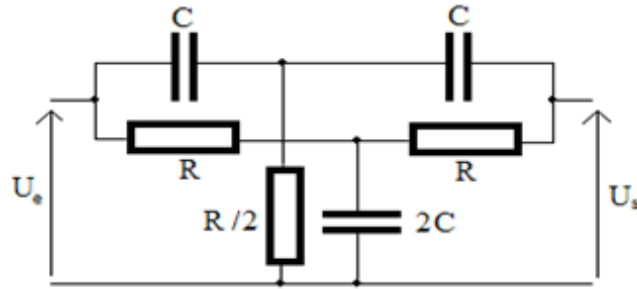
$$\frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } Q = H_0 = \frac{1}{3}.$$

- b) Calculer les fréquences de coupures.
- c) Tracer le diagramme de Bode et déduire la nature du filtre.

A.N : R= 1K Ω , C= 10nF.

Exercice 3:

On considère le filtre passif ci-dessous :



a) Calculer la fonction de transfert $\underline{G}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$, montrer qu'on peut la mettre sous la

forme :

$$H(j\omega) = \frac{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}, \omega_1 = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})RC} \text{ et } \omega_2 = \frac{1}{(2 - \sqrt{3})RC}$$

b) Tracer le diagramme de Bode et déduire la nature du filtre.

A.N : $R = 3,3\text{K}\Omega$, $C = 10\text{nF}$.

Conclusion

Conclusion

A mon sens, Enseigner et laisser l'étudiant se débrouiller complètement tout seul, est anti pédagogique, il faut qu'il y ait un accompagnement en continue de l'enseignant pour faire réussir les étudiants, et parmi cet accompagnement, la disponibilité d'un support pédagogique ou l'étudiant le prend comme une référence pour que leurs idées ne soit pas dispatché me semble être d'une importance primordiale pour contribuer à leur formation, et je pense que c'est ça la méthodologie qui nous manque

J'espère qu'après ce modeste effort, je suis arrivé à la fin de la première partie de la polycopie de l'électronique fondamentale - 1- dans l'espoir qu'on a apporté une contribution dans l'espace enseignement et qu'on a réussi dans le choix du sujet et dans l'analyse de ses chapitres : matrices, circuit bipolaires, analyse des circuits électriques, régime variable, signal sinusoïdales, quadripôles et à la fin la réponse des circuits en fréquence « filtres »)

L'étudiant en électronique fondamentale-1- a été admiré et a bénéficié de ce qui y était exposé, dans ce manuscrit qu'explique certains concepts de base dans le monde de l'électronique, ou on a ajouté beaucoup d'exemples avec solutions, ainsi que les couleurs aux circuits pour attirer l'attention de l'étudiant et pour lui donner une sorte d'attraction au sujet et l'ajout d'exercices pratiques à la fin de chaque chapitre pour consolider l'idée et sont clairement absorbés pour porter plus de compréhension.

Conclusion

Annex

Les Matrices

1. Préface

Une matrice est un ensemble rectangulaire de nombres, de symboles ou d'expressions régulières dans les lignes et les colonnes. Chaque élément de ce groupe est nommée cellule.

Par exemple, la matrice A ci-dessous contient trois lignes, trois colonnes et neuf cellules :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

Les nombres 2, 1, 3, 5, 6, 7, 4, -8 et 9 représentent les cellules, les nombres 2, 1, 3 représentent la première ligne et les nombres 2, 5, 4 représentent la première colonne.

La matrice peut être définie globalement comme une fonction mathématique linéaire

1. Résolution des systèmes d'équations

Il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

Exemple 1

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \dots\dots\dots (1) \\ 2x + y = 4 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Ce système d'équations peut être résolu par plusieurs méthodes, parmi ces méthodes :

Solution 1

1.1. Méthode par substitution

On exprime « y » en fonction de « x » à partir de l'équation (2) : $y = 4 - 2x$ nous la substituons dans l'équation (1) : $5x - 3(4 - 2x) = -1 \Rightarrow 11x - 12 = -1$, d'où : $x = 1$ et

On remplace « x » par 1 dans l'équation $y = 4 - 2x = 4 - 2(1) \Rightarrow y = 2$

Le couple (1 ; 2) est la solution du système

1.2. Méthode par combinaison (ou par élimination)

Toujours avec le même système d'équation précédent, Nous nous proposons d'éliminer « y ». Si les coefficients de cette inconnue « y » étaient égaux en valeur absolue, on conçoit qu'en additionnant ou retranchant membre à membre les deux équations du système selon que ces coefficients seraient de signes contraires ou de même signe, on obtienne une équation ne renfermant plus de « y », c'est-à-dire une équation du premier degré à une seule inconnue « x » que l'on saurait résoudre. La méthode que nous choisissons consiste précisément à multiplier les deux membres de chaque équation par des multiplicateurs convenablement choisis pour que les coefficients de l'une des inconnues deviennent égaux en valeur absolue.

• **Élimination de : « y »**

Prenons maintenant les multiplicateurs (+2) pour la première équation et (-5) pour la seconde, on obtient le système d'équation :

$$\begin{cases} 10x - 6y = -2 \dots\dots\dots (3) \\ -10x - 5y = -20 \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

Et, en additionnant membre à membre les deux équations (3) + (4), on élimine « x », et on obtient : $-11y = -22$, d'où : $y = 2$

On en déduit que $x = 1$, D'où nous obtenons pour solution le couple de valeurs (1 ; 2).

Exemple 2

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \dots\dots\dots (1) \\ x - y + z = 2 \dots\dots\dots (2) \\ 2x + 3y = 8 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

Solution 2 : $x = 1, y = 2, z = 3$

2. Calcul matriciel-Systèmes d'équations linéaires

Les exemples du paragraphe précédent peuvent être recréés par des matrices. Prenons le système ci-dessous :

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \dots\dots\dots (1) \\ 2x + y = 4 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Ce dernier peut être écrit comme suit : $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Dans l'extrême gauche, nous avons la matrice dite à deux colonnes $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. La première colonne contient les coefficients x et la deuxième colonne les coefficients y. Cette matrice est multipliée par une autre matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec une colonne et deux paires de x dans le premier et y dans le second. Ce dernier s'appelle la "colonne" et s'appelle aussi "vecteur colonne" (les vecteurs sont un cas particulier des matrices). Enfin, la deuxième extrémité de l'équation est une matrice de colonnes $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$: chaque ligne diffère de l'autre côté des deux formules formées pour la phrase. Lorsque vous tapez la phrase par des matrices, considérez l'ordre.

Si on arrive à recréés le système d'équation par des matrices, dans ce cas le système d'équations peut être résolue par plusieurs méthodes matricielles, parmi ces méthodes :

• **La méthode des déterminants de Cramer.**

La règle de Cramer (mathématicien suisse **Gabriel Cramer** (1704-1752)) utilise la notion de déterminant d'une matrice, comme suit :

- 1) Nous calculons d'abord le déterminant de la matrice (carrée) principale (système précédent) :

$$\det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

- 2) Ensuite nous calculons le déterminant à utiliser pour calculer « x », et nous l'obtenons on remplace la première colonne de la matrice principale A par la colonne de la deuxième extrémité des équations, puis on calcul son déterminant :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11, \text{ D'où } : x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1.$$

- 3) Répéter l'opération précédente de la même façon pour calculer « y », sauf dans ce cas, il faut remplacer la deuxième colonne de la matrice principale A par la colonne de la deuxième extrémité des équations, puis on calcul son déterminant :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22, \text{ D'où } : y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2$$

Exemple 3

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \dots\dots\dots (1) \\ x - y = -2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Solution 3 : $x = 2, y = 4.$

Exemple 4

Écrire les équations dans l'exemple 1 et 2 sous forme d'équations matricielles.

Solution 4 :

Exemple d'équation 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exemple d'équation 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

Rappelez-vous :

Les matrices sont des « objets » mathématiques qui ont un nombre de lignes m et un nombre de colonnes n et sont représentés par des matrices m x n.

- Les vecteurs sur les lignes représentent un cas particulier de matrices appelées aussi "lignes", qui n'ont qu'une seule ligne, contrairement aux vecteurs de la colonne dont nous avons parlé précédemment.

- Chaque ligne ou colonne est constituée d'un groupe de cellules.

Cas spéciaux :

- Une matrice pour laquelle le nombre « m » de lignes est égale au nombre « n » de colonnes sera dite matrice carrée.
- Une matrice rectangulaire dont le nombre « m » de lignes n'est pas égal au nombre « n » de colonnes.
- Une matrice nulle est une matrice dont toutes les cellules sont nulles.

3. Résolution des équations matricielles

Pour répondre à cette question, nous devons d'abord mentionner comment les opérations sont effectuées dans l'ensemble des matrices :

3.1. Addition matricielle

Pour pouvoir additionner deux matrices A et B, il faut qu'elles aient le même format, et la matrice somme a le même format que A et B. Les éléments s'additionnent selon leur position. La cellule de la 1^{ère} ligne, 1^{ère} colonne de la matrice A avec celui de la 1^{ère} ligne 1^{ère} colonne de la matrice B et ainsi de suite. Par exemple, les deux matrices A (2x2) et B (2x2), en les additionnes de la manière suivante :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

- L'addition des matrices est une opération additionnelle et commutative,
- L'élément neutre de l'addition matricielle est la matrice nulle. Par exemple la matrice

nulle 2x2 est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.2. Soustraction Matricielle

Pour pouvoir soustraire deux matrices A et B, il faut qu'elles aient le même format, et la matrice de soustraction a le même format que A et B. Les éléments soustraits selon leur position. La cellule de la 1^{ère} ligne, 1^{ère} colonne de la matrice A avec celui de la 1^{ère} ligne 1^{ère} colonne de la matrice B et ainsi de suite. Par exemple, les deux matrices A (2x2) et B (2x2), en les soustraient de la manière suivante :

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

- La soustraction matricielle n'est pas une opération commutative.

Exemple 5

Calculer $A + B$, $A - B$, dans les cas suivants :

Cas 1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas précédents, trouvez la matrice C de sorte que : $A - C = A - B$.

Solution 5 :

- Dans le cas 1 :

$$A + B = \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dans le cas 2 :

$$A + B = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} A - B = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -7 & -6 \\ -4 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas :

$$A - C = A - B \Rightarrow A - (A - C) = A - (A - B) \Rightarrow A - A + C =$$

$$A - A + B \Rightarrow C = B$$

3.3. Produit matriciel

3.3.1. Produit d'une matrice par un nombre réel ou complexe

Le produit matriciel désigne la multiplication de matrices.

Soit α un nombre réel ou complexe et A une matrice aléatoire. Après avoir multiplié α dans A , nous obtenons une matrice avec le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Exemple 6

Soit la matrice A . Trouver la matrice $10 \cdot A$ puis $A / 10$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3.5 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 6:

$$10.A = \begin{pmatrix} -10 & 20 & 35 & 90 \\ 40 & 100 & 110 & -40 \\ 30 & 20 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{A}{10} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & 0.35 & 0.9 \\ 0.4 & 1.0 & 1.1 & -0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

La division de A sur 10 équivaut à le multiplier par $\frac{1}{10}$.

3.3.2. Multiplication des matrices

- La multiplication des matrices est une opération non commutative, Pour effectuer la multiplication, nous conseillons de tenir en compte la disposition.
- En multipliant A et B (A.B), il faut que le nombre de colonnes de la matrice A (matrice gauche) soit égal au nombre de lignes de la matrice droite B. Si A est sous la forme de A (m, n) le nombre de colonnes est n, B sous la forme de B (n, k) est le nombre de lignes n, et m et k n'ont pas d'importance au cours du processus de multiplication. Enfin, nous trouvons une matrice C=A.B de la forme C (m, k), « m » : le nombre de lignes et « k » : le nombre de colonnes.
- Les matrices sont multipliées comme suit :

Nous multiplions chaque ligne de A dans chaque colonne de B, de la façon suivante : le premier élément de la ligne A dans le premier élément de la colonne B et le deuxième élément de la ligne A dans le deuxième élément de la colonne B et ainsi de suite, après nous additionnant tous la résultante des produits matriciel pour obtenir l'élément qui appartient à la matrice C. Par exemple, pour repérer l'élément C_{ij} rangent sur la ligne i et la colonne j, on doit multiplier la ligne i de A par la colonne j de B.

Exemple 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Multiplier A.B.
- Est-ce qu'on peut calculer B.A ?

Solution 7:

- Calcul de A.B

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (2).(1) + (1).(9) + (3).(-4) & (2).(3) + (1).(2) + (3).(1) \\ (1).(1) + (2).(9) + (1).(-4) & (1).(3) + (2).(2) + (1).(1) \\ (4).(1) + (1).(9) + (-1).(-4) & (4).(3) + (1).(2) + (-1).(1) \end{pmatrix}$$

Notez que nous avons obtenu une matrice avec le même nombre de lignes de A et le même nombre de colonnes de B. Par exemple, l'élément dans la ligne 1 et la colonne 1 est la somme du produit de la première ligne de A et la première colonne de l'élément B: 2 multiplier par 1, puis 1 multiplier par 9 et 3 multiplier par (-4), en tenant compte de l'ordre de chaque élément, et finalement nous additionnant tous les multipliant comme indiqué ci-dessous :

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 15 & 8 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$$

- On ne peut multiplier B.A parce que le nombre de colonnes de B diffère du nombre de lignes de A.
- L'élément neutre de la multiplication matricielle est la matrice unitaire, dont les éléments sont tous nuls, sauf ceux de son diamètre principal (diagonal), qui est nécessairement « 1 ». Notez que la matrice des unités est toujours carrée, c'est-à-dire que le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Par exemple, matrice unité 4x4 est :

$$Ide = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 8

Prenez la matrice A dans l'exemple précédent et démontrez $A.Ide = A$ et $Ide.A = A$

Aide

Du fait que A à la forme A (3.3), *Ide* a la forme suivante : $Ide = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.4. Déterminant Matrice

On ne peut définir le déterminant d'une matrice que si cette dernière est un carré NxN.

Soit par exemple, la matrice carrée 2x2 qui est définie comme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ son

déterminant : $\Delta = det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

Dans le cas de la matrice 3 x 3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Nous calculons le déterminateur sur une seule étape :

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La méthode de calcul peut être résumée comme suit : peu importe le nombre de lignes et de colonnes de la matrice, nous choisissons l'une des lignes ou l'une des colonnes de cette matrice (dans l'exemple précédent, nous choisissons la première ligne mais on peut choisir une autre ligne ou colonne). Ensuite, nous prenons toutes les cellules de la ligne (ou colonne) que nous avons choisi et on le multiplie par $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de ligne et j est le numéro de la colonne où se trouve l'élément (dans l'exemple précédent, nous multiplions a_{11} par $(-1)^{1+1}$ parce qu'il appartient à la ligne « 1 » et la colonne « 1 »). Enfin, nous le multiplions aussi par le déterminant que nous obtenons après avoir supprimé la ligne et la colonne où se trouve l'élément concerné par le calcul (dans l'exemple précédent, nous avons multiplié a_{11} par $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ déterminant que nous avons après avoir supprimé la ligne « 1 » et la colonne « 1 » qui contiennent a_{11}).

Exemple 9

- Calculer le déterminant des deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution 9 :

$$\Delta_A = (-1)^{1+1} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A = (1) \cdot (-5) - (2) \cdot (-6) + (3) \cdot (3) = 16$$

$$\Delta_B = (-1)^{1+1} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \cdot (7) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_B = (1) \cdot (-5) - (1) \cdot (-11) + (7) \cdot (-56) - (5) \cdot (-34) = -216$$

3.5. Matrice inverse

La matrice inverse ne peut être définie que si ce dernier est carré NxN et que son déterminant soit non nul.

Si nous avons une matrice carrée donnée A, la matrice inversée B est $B = A^{-1}$

Où $A \cdot B = B \cdot A = Ide$.

Exemple 10

Calculer la matrice inverse de A : $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour cela, nous suivons les étapes suivantes :

- 1) Nous calculons le déterminant de A et affirmons qu'il n'est pas nul :

$$\begin{aligned} \Delta_A &= +(4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (7) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (5) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &+(4) \cdot (-1) - (7) \cdot (-6) + (5) \cdot (3) = -4 + 42 + 15 = 53 \neq 0 \end{aligned}$$

- 2) Calculez la matrice des micro-déterminants. Le processus consiste à remplacer chaque élément de la matrice A par le déterminant obtenu après l'effacement de la ligne et de la colonne dans laquelle se trouve l'élément concerné par le calcul. Par exemple, nous changeons « 4 » par le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, qui nous est resté après la suppression de la première ligne et de la première colonne contenant l'élément 4. Ainsi, avec le reste des éléments, la matrice suivante résulte :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ 7 & -11 & -21 \\ 19 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

- 3) Chaque élément de la nouvelle matrice A_1 est multiplié par $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de ligne et j est le numéro de colonne dans lequel se trouve l'élément, ce qui donne la matrice suivante :

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot (-6) & (-1)^{1+3} \cdot (3) \\ (-1)^{2+1} \cdot (7) & (-1)^{2+2} \cdot (-11) & (-1)^{2+3} \cdot (-21) \\ (-1)^{3+1} \cdot (19) & (-1)^{3+2} \cdot (8) & (-1)^{3+3} \cdot (-4) \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} (-1)^2 \cdot (-1) & (-1)^3 \cdot (-6) & (-1)^4 \cdot (3) \\ (-1)^3 \cdot (7) & (-1)^4 \cdot (-11) & (-1)^5 \cdot (-21) \\ (-1)^4 \cdot (19) & (-1)^5 \cdot (8) & (-1)^6 \cdot (-4) \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} (-1) & -(-6) & (3) \\ -(-7) & (-11) & -(-21) \\ (19) & -(8) & (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -7 & -11 & 21 \\ 19 & -8 & -4 \end{pmatrix} \oplus \end{aligned}$$

Finalemment :

- 4) Nous calculons la matrice transfert A_2 en changeant chaque ligne avec la colonne qui lui convient dans l'ordre. La première ligne par la première colonne, deuxième ligne par la deuxième colonne, ... etc. Cela résulte dans la matrice suivante :

$$A_3 = T(A_2) = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 19 \\ 6 & -11 & -8 \\ 3 & 21 & -4 \end{pmatrix}$$

5) Enfin, nous divisons la nouvelle matrice A_3 sur le déterminant Δ_A pour obtenir la solution finale :

$$B = A^{-1} = \frac{A_3}{\Delta_A} = \frac{1}{53} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 19 \\ 6 & -11 & -8 \\ 3 & 21 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{53} & \frac{-7}{53} & \frac{19}{53} \\ \frac{6}{53} & \frac{-11}{53} & \frac{-8}{53} \\ \frac{3}{53} & \frac{21}{53} & \frac{-4}{53} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons facilement vérifier cela : $A \cdot B = B \cdot A = Ide$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{53} & \frac{-7}{53} & \frac{19}{53} \\ \frac{6}{53} & \frac{-11}{53} & \frac{-8}{53} \\ \frac{3}{53} & \frac{21}{53} & \frac{-4}{53} \end{pmatrix} = B \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{53} & \frac{-7}{53} & \frac{19}{53} \\ \frac{6}{53} & \frac{-11}{53} & \frac{-8}{53} \\ \frac{3}{53} & \frac{21}{53} & \frac{-4}{53} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.6. Exemple de la méthode matricielle

Maintenant que nous avons révisé les matrices, nous pouvons résoudre le système d'équations de l'exemple 1 par la méthode des matrices : premièrement, en écrivant le système d'équations sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Qui peut être écrit sous la

forme $A \cdot u = v$ où : $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Donc $A \cdot u = v, A^{-1} \cdot (A \cdot u) = A^{-1} \cdot v$, Cela signifie donc que nous multiplions A par la matrice inverse des deux côtés de l'égalité, les deux sur la gauche parce que l'ordre est important tant que la multiplication des matrices n'est pas une opération commutative.

Nous trouvons : $(A^{-1} \cdot A) \cdot u = A^{-1} \cdot v$, sachant que la multiplication des matrices est une opération additionnelle, c'est-à-dire : $u = A^{-1} \cdot v$, alors il faut chercher A inverser :

1. Nous calculons le déterminant A : $\Delta_A = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, il n'est pas nul.

2. Nous calculons la matrice constituée des plus petits déterminants :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Notez que nous avons directement obtenu des nombres et nous n'avons pas eu à calculer les déterminants car la matrice A de la forme : (2×2) .

4. Multiplions chaque élément de la nouvelle matrice A_1 par : $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de ligne et j est le numéro de la colonne dans laquelle se trouve l'élément, ce qui donne la matrice suivante :

$$A_2 = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (1) & (-1)^{1+2} \cdot (2) \\ (-1)^{2+1} \cdot (-3) & (-1)^{2+2} \cdot (5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \cdot (1) & - \cdot (2) \\ - \cdot (-3) & + \cdot (5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Nous calculons la matrice transfert A_2 . Cela résulte dans la matrice suivante :

$$A_3 = T(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 6) Nous divisons la matrice A_3 sur le déterminant Δ_A pour obtenir :

$$A^{-1} = \frac{A_3}{\Delta_A} = \begin{pmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -2/11 & 5/11 \end{pmatrix}$$

- 7) Finalement, nous remplaçons dans l'équation matricielle $u = A^{-1} \cdot v$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -2/11 & 5/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/11) \cdot (-1) + (3/11) \cdot (4) \\ (-2/11) \cdot (-1) + (5/11) \cdot (4) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1/11) + (12/11) \cdot \\ (2/11) \cdot + (20/11) \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/11 \cdot \\ 22/11 \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \\ 2 \cdot \end{pmatrix}$$

- 8) Donc : $x = 1$, $y = 2$.

De la même manière, les équations matricielles peuvent être résolues.

Références

1. Tahar Neffati, Electricité générale -Analyse et synthèse des circuits- 2^{ème} Edition, Dunod, 2008.
2. Robert L Boylestad. Introductory Circuit Analysis, Prentice Hall Press, 2010
3. Auvray Jean. Electronique des signaux analogiques, Dunod, 1980
4. Albert Paul Malvino, "Principes d'Electronique", Dunod, Paris, 2002.