الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالاغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : MOHAMMEDI Ahmed

THÈME

Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et ses applications

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

• **Mr. YAGOUB Ameur**	M.C.B	**Président**
• **Mr. RAHMOUNE Abdelaziz**	M.C.B	**Examinateur**
• **Mr. BOUKEHILA Ahcene**	M.C.B	**Encadreur**

Année Universitaire 2019/2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage

A ma très chère mère

A mon cher père - Dieu tout-puissant a pitié de lui -

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous les étudiants de
2ème
MASTER Mathématiques.

Remerciments

Notre remerciement s'adresse en premier lieu à
Allah le tout puissant pour la volonté
la santé et la patience qu'il nous a donné durant toutes ces
longues années.

Nous tenons deuxièment remercier
Mr.BOUKEHILA Ahcene
notre directeur de recherche qui a apporté
une aide précieuse.

Nous lui exprimons notre gratitude pour
sa grande disponibilité ainsi que pour
sa compréhension et les encouragements qu'il nous
a apportés...

Nos remerciements vont aussi à tous nos enseignants de
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Université AMMAR THLIDJI LAGHOUAT qui ont
contribué à notre formation durant nos années des
études.

À tous les membres du jury Mr.YAGOUB Ameur et Mr.RAHMOUNE Abdelaziz qui nous font
l'honneur
de juger notre travail...

Enfin, nous tenons à exprimer
notre très reconnaissance à tous nos amis
et nos collègues pour le soutien
moral et matériel...

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades que l'on notera EDSR. Nous étudions des résultats d'existence et d'unicité de la solution dans le cas lipschitzien et celui de monotonie ; nous donnons ensuite quelques estimations a priori pour les solutions des EDSR et enfin nous rappelons un résultat de Peng : théorème de comparaison. Aussi une formule explicite de la solution des EDSR linéaires est donnée. LA représentation des EDSR dans le cadre markovien, nous permet d'établir alors le lien entre les EDSR et les équations aux dérivées parielles d'une part et à la finance d'autre part.

Au premier chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude des EDSR, telle que l'existence et l'unicité, les estimations a priori et le théorème de comparaison qui fait appel à la notion des EDSR linéaires.

Au second chapitre, on étudie les EDSR d'un point de vue markovien. On fait un rappel sur les EDS et ensuite on donne la propriété de markov pour ce type d'équations.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des liens entre les EDSR et les EDP en montrant que les soluions des EDSR sont solutions de viscosité pour le système d'EDP dans le cas parabolique.

Le dernier chapitre, on étudie l'application de ces équations et leurs rôles dans la finance en donnant un exemple financier.

Abstract

In this work, we introduce the notion of backward stochastic differential equations where note BSDE. We study results of the existence and the uniqueness for the solution in the Lipschitz and monotony case, we give some of a priori estimate for the solution of BSDE and in the end we remember a result of Peng : comparison theorem. Also an explicit formula of the solution of linear BSDE is given. The representation of the BSED within the context of Markov we permet to set up a link between the BSDE and partials differentials equations one hand and in finance on the other hand.

In the first chapter, we are interested by study of BSDE as existence and uniqueness for the solution, some a priori estimates concerning the solution and so on we state the comparison theorem and it relation with a linear BSDE.

In the second chapter, we study the solution of BSDE in markov sense. We recall some properties of SDE and we give the Markov property to this type of equations.

the third chapter, is cosacrated to study the links between the BSDE and the PDE in order to prove that the solution of BSDE is soltion of viscosity for the PDE system in the parabolic case.

The last chapter, is devoted to the application of BSDE in finance, we make a financial example.

ملخص

في هذا العمل ، قدمنا فكرة المعادلات التفاضلية العشوائية الإرجاعية والتي نرمز لها $EDSR$. ندرس نتائج وجود ووحدانية الحل في حالة ليبشيتزيان وقضية الرتابة . ثم نقدم بعض التقديرات الأولية لحلول $EDSR$ وأخيرًا نتذكر نتيجة $Peng$: نظرية المقارنة .كما يتم إعطاء صيغة واضحة لحل $EDSR$ الخطي. يسمح لنا تمثيل $EDSR$ في إطار عمل ماركوف بإقامة الصلة بين $EDSR$ والمعادلات بالمشتقات الموازية من ناحية والتمويل من جهة أخرى .

في الفصل الأول ،كنا مهتمين بدراسة $EDSR$ ، مثل الوجود والوحدانية ، وتقديرات مسبقة ونظرية المقارنة التي تستدعي فكرة $EDSR$ الخطية .

في الفصل الثاني ، ندرس $EDSR$ من وجهة نظر ماركوفية. نقوم بعمل تذكير على EDS ومن ثم نعطي خاصية ماركوف لهذا النوع من المعادلات .

في الفصل الثالث ،مخصص لدراسة الروابط بين $EDSR$ و EDP من خلال إظهار أن حلول $EDSR$ هي حلول اللزوجة لنظام EDP في حالة القطع المكافئ .

الفصل الأخير ندرس تطبيق هذه المعادلات ودورها في التمويل من خلال إعطاء مثال مالي .

Table des matières

Notations

Pour tous réels x et y :

$x \wedge y = \min(x,y)$, $\quad x \vee y = \max(x,y)$.

$x^+ = \max(x,0)$, $\quad x^- = \max(-x,0)$. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}^d$ est l'espace réel eucledien de dimension d. $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs.

Pour tous $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on note $<,>$ le produit scalaire et $|.|$ la norme euclidienne :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \quad \text{et} \quad |x| = \sqrt{< x, x >}.$$

$\mathbb{R}^{m\times d}$ est l'ensemble des matrices réelles $m \times d(\mathbb{R}^{m\times 1} = \mathbb{R}^m)$. I_d est la matrice identité $d \times d$.

Pour tout $\sigma = (\sigma^{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq d} \in \mathbb{R}^{m\times d}$, on note $\sigma* = (\sigma^{i,j})_{1\leq j\leq d, 1\leq i\leq m}$ la matrice transposée dans $\mathbb{R}^{m\times d}$. On note $trace(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$, la trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$.

On choisit comme norme matricielle sur $\mathbb{R}^{m\times d}$:

$$\|\sigma\| = (trace(\sigma\sigma*))^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout ensemble A, l'indicatrice de A est notée :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: un espace de probabilité.

$\mathbb{P} - p.s.$: la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

$\mathcal{B}(U)$: la tribu borélienne engendrée par les ouverts de l'espace topologique U.

$\sigma(\mathcal{G})$: la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{G}$, collection de sous-ensembles de Ω.

$E[X]$: l'espérance de la variable aléatoire X par rapport à une probabilité $\mathbb{P}$ fixée initialement.

$E[X|\mathcal{G}]$: l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$.

$E_Q[X]$: l'espérance de la variable aléatoire X pa rapport à la mesure de probabilité Q.

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^m)$: l'ensemble des variables aléatoires X, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}$-mesurables tel que $E|X|^p < +\infty$, pour $p \in [1, +\infty[$. On ommettra parfois certaints arguments et on écrira L^p ou $(L^p(\mathbb{P}))$ lorsqu'il n'ya pas d'ambiguité.

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^m)$: l'ensemble des variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, bornées, $\mathcal{F}$-mesurables. On écrira parfois L^∞.

$\mathcal{N}$: l'ensemble des $\mathbb{P}$-négligeables, où $\mathbb{P}$ est une probablité fixée intialement.

EDSR : Equations Différentielles Stochastiques Rétrograd.

EDP : Equations aux Dérivées Partielles.

EDO : Equations Différentielles Ordinaires.

EDS : Equations Différentielles Stochastiques.

BSDE : Backward Stochastic Differential Equations.

SDE : Stochastic Differential Equations.

Introduction

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique des équations différentielles stochastiques rétrogrades que l'on notera EDSR. Ces équations ont été introduites sous forme linéaire par **Bismut** en 1973 **[1]**. Elle apparaissaient en effet à la fois comme équation de processus adjoint en contrôle stochastique ainsi que pour l'évaluation et la couverture d'option en mathématiques financière dans le modèle de **Black - Scholes**. Mais c'est seulement en 1990, qu'elles ont été formalisées par **Pardoux - Peng [9]** dans un cadre général. La solution d'une EDSR est un couple $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ de processus adaptés par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{0\leq t\leq T}$ de mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,T]}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérfiant

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, t \in [0,T],$$

où $T > 0$ est un instant final, tel que $Y_T = \xi$,

$$\text{avec } \xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}; \mathbb{R}^k\right),$$

qu'on écrit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, t \in [0,T].$$

comme la notion d'EDSR généralise la propriété bien connue de représentation des martingales, de nombreux travaux ont été éffectués concernant l'existence et l'unicité de la solution $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ de l'EDSR, tel que, le cas lipschitzien dans le travail de **Pardoux - Peng [9]** et celui de monotonie dans le résultat de **Peng [10]** d'une part. D'autre part les études des EDSR illustrent le lien avec les équations aux dérivées partielles. Ainsi la théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières.

La différence principale entre une EDS et une EDO est que l'on ne peut pas renverser le temps. Considérons en effet l'exemple simple, en dimension 1, de l'équation différentielle suivante

$$dY_t = 0 \ , \ t \in [0,T] \ . \tag{1}$$

Si on la considère comme une EDO, il est équivalent de prendre pour conditions aux limites $Y_0 = \xi$ et $Y_T = \xi$, et ce pour tout réel. Il y a alors une solution unique $Y_t = \xi$.

Si on la regrade comme une EDS, celà se complique. En effet la solution Y_t doit être adaptée à la filtration brownienne . Ce n'est plus la même de spécifier Y_0 ou Y_T. Pour $\xi \in L^2$, variable $\mathcal{F}_T-$mesurable, l'équation (1) avec $Y_T = \xi$ n'a pas nécessairement de solution ; la seule solution envisageable est $Y_T = \xi$ qui n'en est une que si ξ est constante.

Dans ce qui suit, nous allons présenter une brève description de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, on étudie certaines propriétées d'existence et d'unicité de la solution de l'EDSR, en particulier dans le cas lpischitzien et celui de monotonie, ainsi on donne quelques estimations a priori sur la solution, ensuite on énonce le théorème de comparaison et la notion des EDSR linéaires et celle de la notion de solution de viscosité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des EDSR dans un cadre particulier, le caractère markovien des EDSR où l'on a éffectué tout d'abord un rappel sur les EDS markoviennes, ce qui nous a permis d'étudier la propriété de markov pour les EDSR et de donner quelques estimations a priori sur la solution de l'EDSR markovienne.

Le troisième chapitre est consacré aux liens entre les EDSR et les équations différentielles partielles et on montre que la solution de l'EDSR au sens markovien est une solution de viscosité d'un système d'EDP parabolique ou elliptique.

Le dernier chapitre est consacré à l'application des EDSR en finance et nous montrons que plusieurs problèmes en marché sont gouvernés par des EDSR. Nous terminons ce chapitre en donnant un exemple financier illustrant cette application.

Chapitre 1

Notions génerales et résultats principaux sur les EDSR

1.1 Définitions et propriétés

Soit un intervalle de temps $[0,T]$. On Considère un mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ de dimention d, défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On note $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par $\sigma(B_s, 0\leq s\leq t\leq T)$.

Soit

$$S^2\ (\mathbb{R}^k) = \left\{ \begin{array}{c} (Y_t)_{t\in[0,T]} \text{ proc. prog. mes. à valeurs dans } \mathbb{R}^k : \\ E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty \end{array} \right\}.$$

On met sur S^2 la norme définit par

$$\|Y\|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right], \tag{1.1}$$

et l'on note $S_c^2\ (\mathbb{R}^k)$ est le sous espace de S^2 formé par les processus continus.

Soit

$$M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right) = \left\{ \begin{array}{c} (Z_t)_{t\in[0,T]} \text{ proc. prog. mes. à valeurs dans } \mathbb{R}^{k\times d} : \\ E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty \end{array} \right\}.$$

En définissant la norme sur M^2 par

$$\|Z\|_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right]. \tag{1.2}$$

On remarque qu'en définissant le produit scalaire sur les matrice $k\times d$ par

$$\langle z, z\rangle = trace\left(zz^*\right).$$

On obtient

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle.$$

Soit $\mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

On montre que les espaces S^2, S_c^2 et $\mathbb{M}^2$ sont des espace de Banach pour les normes définies précédemment.

Nous désignerons $\mathbb{B}^2$ l'espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)\times\mathbb{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

On se donne ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$−mesurable et de carré intégrable, c'est à dire :

$$\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}; \mathbb{R}^k\right), \tag{1.3}$$

et on appelle générateur toute fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} & \to & \mathbb{R}^k \\ & & (t,\omega,y,z) & \mapsto & f(t,\omega,y,z) \end{array},$$

qui s'écrit simplement $f(t,y,z)$.

1.1.1. Hypothèses et propriétés

Supposons qu'il existe un proc. prog. mes. $(\overline{f_t}; 0 \leq t \leq T)$ appartenant à $\mathbb{M}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et des constantes μ et $K > 0$ tels que

H1. $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ $f(.,y,z)$ est progressivement mesurable,

H2. $\mathbb{P}$–$p.s, \forall t, y, z \quad |f(t,y,z)| \leq \overline{f_t} + K(|y| + \|z\|)$,

H3. $f(t,y,.)$ est lipschitzienne, *i. e.*,

$$\mathbb{P} - p.s. \ \forall t, y, z, z' \quad |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K \|z - z'\|,$$

H4. $f(t,.,z)$ est monotone, *i.e.*,

$$\mathbb{P}\text{–}p.s. \quad \forall t, y, y', z \quad (y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq \mu |y - y'|^2 \ ,$$

H5. $\mathbb{P} - p.s. \ \forall t, y, z \quad f(t,y,z)$ est continue.

Si de plus $f(t,.,z)$ est uniformément lipschitzienne, le couple (ξ, f) est dit paramètres standards.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'EDSR suivante

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \ , \ 0 \leq t \leq T \\ \ \ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Cette équation est comprise comme suit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \ , \forall t \in [0,T].$$

1.2 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t) \ , \ t \in [0,T] \text{ avec } Y_T = \xi. \tag{1.4}$$

On suppose que, pour tout instant t, Y_t soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$.

Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas détirministe. La meilleure approximation dans L^2 qui est $\mathcal{F}_t$-adaptée, est la martingale

$$Y_t = E\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théoèrme de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que

$$Y_t = E\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right) = E\left[\xi\right] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s \quad \text{d'où} \quad -dY_t = -Z_t dB_t \;\; \text{avec } Y_T = \xi.$$

On voit donc, apparaître sur l'exemple le plus simple, une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y_t $\mathcal{F}_t$-adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. L'équation devient alors

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t \;, \quad 0 \leq t \leq T \;\; \text{avec} \;\; Y_T = \xi, \tag{1.5}$$

qui s'écrit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \;, \; \forall t \in [0, T] \;.$$

Définition 1.1

Une solution de l'EDSR (1.6) est un couple $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ vérifiant

$$\mathbb{P}-p.s. \;\; Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \;, \; \forall t \in [0, T] \tag{1.6}$$

Avec la condition suivante

$$\mathbb{P}-p.s. \quad \int_0^T \left\{f(s, Y_s, Z_s) + \|Z_s\|^2\right\}ds < \infty.$$

Remarque 1.1

Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrables de l'équation (1.6) étant bien définies, Y est une semi-martingrale continue ; ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est $\mathcal{F}_t$-adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer que, sous une hypothèse sur le générateur f , le processus $Y \in S_c^2$.

Proposition 1.1. [4]

Supposons qu'il existe un processus progressivement mesurable $(\overline{f_t}; 0 \leq t \leq T)$ appartenant à $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^+)$ et une constante positive K tels que

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\quad |f(t,y,z)|\leq\overline{f_t}+K(|y|+\|z\|)\ .$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (1.6) telle que $Z\in\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, alors Y appartient à S_c^2.

Démonstration

Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe.

En effet, on a pour tout $t\in[0,T]$

$$Y_t=Y_0-\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds+\int_0^t Z_s dB_s, \tag{1.7}$$

et par suite, en utilisant l'hypothèse sur f , on obtient

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\leq|Y_0|+\int_0^T(\overline{f_s}+K\|Z_s\|)ds+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|+K\int_0^T|Y_s|ds.$$

Posons

$$\zeta=|Y_0|+\int_0^T(\overline{f_s}+K\|Z_s\|)ds+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_s dB_s\right|.$$

Puisque $Z\in\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ et d'après l'inégalité de Doob, le troisième terme est de carré intégrable, il en est de même pour $\{\overline{f_t}\}_{0\leq t\leq T}$ et Y_0 est constante donc de carré intégrable , il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu d'après la remarque précédente, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\leq\zeta e^{KT}, \tag{1.8}$$

qui montre que Y appartient à S_c^2. ■

- Ainsi dans la suite la solution de l'EDSR (1.6) signifie que $(Y,Z)\in\mathbb{B}^2$.

Donnons maintenant un résultat d'intégrabilité que nous servira dans la suite.

Lemme 1.1. [3]

Supposons que les hypothèses de la proposition (1.1) soient vérifies. Alors le processus M_t défini par

$$M_t=\int_0^t Y_s Z_s dB_s\ ,\ t\in[0,T] \tag{1.9}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Démonsration

Il est claire que M_t est une martingale, il nous reste qu'à vérifier qu'elle est uniformément intégrable.

Les inégalités de Burkholder-David-Gundy, nous montre qu'il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] &\leq CE\left[\int_0^T|Y_s|^2\|Z_s\|^2ds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T\|Z_s\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned} \tag{1.10}$$

et par suite, en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, en posant

$$a = \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \quad \text{et} \quad b = \left(\int_0^t \|Z_s\|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \leq C'\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + E\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 \, ds\right]\right).$$

On cette dernière quantité est finie par hypothèse, donc

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] < \infty. \tag{1.11}$$

D'où le résultat. ∎

1.3 Majoration a priori

En générale, on introduit les estimations pour montrer la dépendance de la solution d'une EDSR par rapport aux paramètres d'entrées, *i.e*, le générateur f et la condition finale ξ. On va consédérer une hypothèse sur les paramètre standards (ξ, f) pour pouvoir établir l'estimation.

(L)

$$E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2 \, dt\right] < \infty. \tag{1.12}$$

Proposition 1.2. [5]

sous les hypothèses H1-H5 et (L) . Si (Y, Z) est solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \,, \ \forall t \in [0, T] \,. \tag{1.13}$$

Alors il existe une constante c qui dépend seulement de T, μ et K telle que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] \leq cE\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2 \, dt\right]. \tag{1.14}$$

Démonstration

Soit $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ une solution de l'EDSR (1.13), on peut écrire Y_0 comme suit

$$Y_0 = \xi + \int_0^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_0^T Z_s dB_s. \tag{1.15}$$

et donc

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_0^t Z_s dB_s. \tag{1.16}$$

On définit une suite de temps d'arrêt (τ_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \tau_n = \inf\{t \in [0, T] : |Y_t| \geq n\}, \tag{1.17}$$

et l'on note les processus arrêtés Y_t^n par $Y_{t\wedge\tau_n}$.

On montre que

$$\begin{array}{ll} \tau_n = 0 \text{ et } |Y_t^n| = |Y_0| & \text{si } Y_0 \geq n, \\ \tau_n > 0 & \text{si } Y_0 < n, \\ |Y_t^n| = |Y_t| & \text{si } t < \tau_n, \\ |Y_t^n| = |n| & \text{si } t \geq \tau_n. \end{array}$$

Donc

$$|Y_t^n| \leq n \vee |Y_0| \ . \tag{1.18}$$

Comme (Y, Z) est solution de l'EDSR (1.16), on a

$$\begin{aligned} Y_t^n &= Y_0 - \int_0^{t\wedge\tau_n} f(s, Y_s^n, Z_s)ds + \int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s dB_s \\ &= Y_0 - \int_0^t \chi_{[0,\tau_n](s)} f(s, Y_s^n, Z_s)ds + \int_0^t \chi_{[0,\tau_n](s)} Z_s dB_s. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Utilisant l'inégalité de Doob et le fait que $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, en prenant l'espérance dans (1.19), on obtient

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s^n|^2\right] \ &\leq \ 3\left|Y_0^n\right|^2 + 3E\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \chi_{[0,\tau_n](s)} f(s, Y_s^n, Z_s)ds\right)^2\right] \\ &\quad +12E\left[\int_0^t \left\|\chi_{[0,\tau_n](s)} Z_s\right\|^2 ds\right], \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s^n|^2\right] &\leq 3\left|Y_0^n\right|^2 + 12E\left[\int_0^t \left\|\chi_{[0,\tau_n](s)} Z_s\right\|^2 ds\right] + 3t\int_0^t E\left[\left|\chi_{[0,\tau_n](s)} f(s, Y_s^n, Z_s)\right|^2\right] ds \\ &\leq 3\left|Y_0\right|^2 + 12E\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 ds\right] + 3T\int_0^t E\left[\left|f(s, Y_s^n, Z_s)\right|^2\right] ds. \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'hypothèse H2 on obtient

$$|f(s, Y_s^n, Z_s)| \leq \overline{f_s} + K(|Y_s^n| + \|Z_s\|) \ ,$$

d'où

$$|f(s, Y_s^n, Z_s)|^2 \leq 3\overline{f_s}^2 + 3K^2 \left|Y_s^n\right|^2 + 3K^2 \left\|Z_s\right\|^2 \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_s^n|^2\right] \ &\leq 3\left|Y_0\right|^2 + (12 + 9K^2T)E\left[\int_0^t \|Z_s\|^2 ds\right] + 9T\int_0^t E\left[\left|\overline{f_s}\right|^2\right] ds \\ &\quad +9T\int_0^t K^2 E\left[|Y_s^n|^2\right] ds. \end{aligned}$$

Posons

$$a = 3\left|Y_0\right|^2 + (12 + 9K^2T)\, E\int_0^t \left[\|Z_s\|\right]^2 ds + 9T\int_0^t E\left[\left|\overline{f_s}\right|^2\right] ds \text{ et } b = 9TK^2.$$

Or, a est fini d'après les hypothèses sur $\overline{f_s}$ et Z_s, ceci nous donne

$$\begin{aligned} E\left[|Y_s^n|^2\right] &\leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_s^n|^2\right] \\ &\leq a+b\int_0^t E\left[|Y_s^n|^2\right]ds. \end{aligned} \tag{1.20}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$E\left[|Y_t^n|^2\right] \leq a\exp(bt). \tag{1.21}$$

Comme

$$|Y_t^n|^2 \geq 0 \text{ et } |Y_t^n|^2 \nearrow |Y_t|^2\ ,$$

le lemme de Fatou nous donne

$$E\left[|Y_t|^2\right] \leq a\exp(bt). \tag{1.22}$$

Pour l'équation

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_0^t Z_s dB_s,$$

comme précédemment, on obtien

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] &\leq a+b\int_0^t E\left[|Y_s|^2\right]ds \\ &\leq a\exp(bt) \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{1.23}$$

En utilisant le lemme (1.1), on sait que pour

$$M_t = \int_0^t Y_s Z_s dB_s.$$

(M_t) est martingale uniformément intégrable.
D'où

$$\begin{aligned} E\left[M_T - M_t\right] = 0 \quad \forall t \quad \text{et} \\ E\left[\int_t^T Y_s.Z_s dB_s\right] = 0 \quad \forall t. \end{aligned} \tag{1.24}$$

On applique la formule d'Itô à l'application $x \mapsto |x|^2$ entre t et T , ceci nous donne

$$\begin{aligned} |Y_T|^2 &= |Y_t|^2 + \int_t^T 2(Y_s,dY_s) + \int_t^T d\langle Y\rangle_s, \\ |\xi|^2 &= |Y_t|^2 - 2\int_t^T (Y_s, f(s,Y_s,Z_s))ds + 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s + \int_t^T \|Z_s\|^2 ds. \end{aligned} \tag{1.25}$$

D'après l'hypothèse H4, on a

$$\begin{aligned}(Y_s - 0, f(s,Y_s,Z_s) - f(s,0,Z_s)) &\leq \mu\,|Y_s|^2\,, \\ (Y_s, f(s,Y_s,Z_s)) &\leq \mu\,|Y_s|^2 + (Ys, f(s,0,Z_s)).\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse H3, on obtient

$$|f(s,0,Z_s)| \leq |f(s,0,0)| + K\,\|Z_s\|\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}(Y_s, f(s,Y_s,Z_s)) &\leq \mu\,|Y_s|^2 + |Y_s|\,|f(s,0,0)| + K|Y_s|\,\|Z_s\| \\ &\leq \mu\,|Y_s|^2 + |Y_s|\,|f(s,0,0)| + \left(K|Y_s|\sqrt{2}\right)\left(\frac{\|Z_s\|}{\sqrt{2}}\right) \\ &\leq \mu\,|Y_s|^2 + \frac{|Y_s|^2}{2} + \frac{|f(s,0,0)|^2}{2} + K^2\,|Y_s|^2 + \frac{\|Z_s\|^2}{4} \\ &\leq \left(\mu + \frac{1}{2} + K^2\right)|Y_s|^2 + \frac{|f(s,0,0)|^2}{2} + \frac{\|Z_s\|^2}{4}\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}|Y_T|^2 + \int_t^T \|Z_s\|^2\,ds \;\leq\; & |\xi|^2 + \left(\mu + \frac{1}{2} + K^2\right)\int_t^T |Y_s|^2\,ds \\ & + \int_t^T |f(s,0,0)|^2\,ds + \frac{1}{2}\int_t^T \|Z_s\|^2\,ds - 2\int_t^T Y_s Z_s dB_s.\end{aligned} \tag{1.26}$$

On pose

$$C = 2\mu + 2K^2 + 1 \text{ et } A = E\left[|\xi|^2\right] + E\left[\int_t^T |f(s,0,0)|^2\,ds\right].$$

Alors, en prenant l'espérance dans la formule (1.26), on obtient

$$E\left[|Y_t|^2\right] + \frac{1}{2}\int_t^T E\left[\|Z_s\|^2\right]ds \leq A + C\int_t^T E\left[|Y_s|^2\right]ds,$$

d'où l'inégalité suivante

$$E\left[|Y_t|^2\right] \leq A + C\int_t^T E\left[|Y_s|^2\right]ds. \tag{1.27}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$E\left[|Y_t|^2\right] \leq A\exp(C(T-t)). \tag{1.28}$$

En outre, à l'aide de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy appliquée à la martingale M_t introduite précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\le t\le T}\int_t^T Y_s.Z_s dB_s\right] &= E\left[\sup_{0\le t\le T}(M_t - M_T)\right]\\
&\le kE\left[\sqrt{\langle M\rangle_T}\right] - E\left[M_T\right]\\
&\le kE\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\le kE\left[\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\le \frac{1}{4}E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\right] + k^2 E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right].
\end{aligned}$$

On prend alors l'espérance de la borne supérieure dans l'équation (1.26), on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] &= E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\sup_{0\le t\le T}\int t^T \|Z_s\|^2 ds\right]\\
&\le A' + CE\left[\sup_{0\le t\le T}\int_t^T |Y_s|^2 ds\right] + 2E\left[\sup_{0\le t\le T} - \int_t^T Y_s.Z_s dB_s\right]\\
&\le A' + CE\int_0^T |Y_s|^2 ds + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + 2k^2\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] \le 2A' + 2CE\left[\int_0^T |Y_s|^2 ds\right] + 4k^2 E\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right].$$

Or

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] &\leq 2A' + 2CE\left[\int_0^T |Y_s|^2 ds\right] \\
&\leq 2A' + 2C\left[\int_0^T E|Y_s|^2 ds\right] \\
&\leq 2A' + 2C\left[\int_0^T A' \exp(C(T-s))ds\right] \\
&\leq 2A' \exp(CT).
\end{aligned}$$

Donc

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] \leq 2(4k^2+1)A' \exp(CT).$$

Posons

$$\begin{aligned}
C' &= 2(4k^2+1)\exp(CT) \text{ et} \\
A' &= \sup_{0\leq t\leq T} A = E\left[|\xi|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right]?
\end{aligned}$$

où C' dépend seulement de T, μ et K.

On trouve finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right] \leq C'E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right]. \tag{1.29}$$

■

1.4 Cas lipschitzien

Ici, nous allons rappeler un résultat d'existence et d'unicité pour la solution de l'EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Nous commençons par le cas où f ne dépend ni de y ni de z. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ dans $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \ , \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.30}$$

Lemme 1.2. [3]
Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^k)$. l'EDSR (1.30) possède une unique solution.
Démonstration
Prenons l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$ dans l'équation (1.30), ceci nous donne

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{1.31}$$

D'après le théorème de Fubini, et comme F est progressivement mesurable, l'expression

$$\int_0^t F_s ds,$$

est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté, de plus il est dans S_c^2 car F est de carré intégrable. Ainsi, on a

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds = M_t - \int_0^t F_s ds \ , \ \forall t \in [0, T] \ , \tag{1.32}$$

où M_t est une martingale brownienne.

D'après le théorème de représentation des martingales brownienne, on construit un processus $Z \in \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^{k \times d})$ tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée et comme $Y_T = \xi$, on obtient

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds\right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

L'unicité est obtenue à l'aide de l'inégalité de Gronwall.

■

Considérons maintenant le cas où f dépend de y et de z, i.e., l'EDSR s'écrit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \ , \ \forall t \in [0, T] \ .$$

Supposons que f est uniformément Lipschitzienne en y

H4'.

$$\mathbb{P} - p.s. \ \forall (t, y, z) \quad |f(t, y, z) - f(t, y', z)| \le K|y - y'| \tag{1.33}$$

Théorème 1.1. [9]

Sous les hypothèses H1, H2, H3, H4' et H5 L'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s \ , \ \forall t \in [0,T] \ , \tag{1.34}$$

admet une unique solution $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \le t \le T}$.

Démonstration

La preuve repose sur le théorème du point fixe.

Nous allons construire une applicaion ψ dont le point fixe serait la solution de l'EDSR.

A cet effet, nous allons construire l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ \mathbb{B}^2 & \longrightarrow & \mathbb{B}^2 \\ (U,V) & \mapsto & (Y,Z) = \psi(U,V), \end{array}$$

où l'espace de Banach $\mathbb{B}^2 = S^2(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Posons

$$Y_t = E\left[\xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \ , \ \forall t \in [0,T] \ . \tag{1.35}$$

Le processus (Z_t) est donné par le théorème de représentation des martingales d'Itô appliqué à la variable aléatoire de carré intégrable

$$\alpha = \xi + \int_0^T f(s, U_s, V_s)ds.$$

Il existe un processus $(Z_t) \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ tel que

$$\alpha = E[\alpha] + \int_0^T Z_s dB_s.$$

Ceci nous donne

$$\xi + \int_0^T f(s, U_s, V_s)ds = E\left[\xi + \int_0^T f(s, U_s, V_s)ds\right] + \int_0^T Z_s dB_s. \tag{1.36}$$

En remplaçant l'expression (1.36) dans la formule de Y_t de (1.35) et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $(\mathcal{F}_t)$, on obtient

$$\begin{aligned} Y_t + E\left[\int_0^t f(s,U_s,V_s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] &= E\left[\xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds\right] + E\left[\int_0^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\ \Leftrightarrow Y_t + \int_0^t f(s,U_s,V_s)ds &= \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_0^T Z_s dB_s + \int_0^t Z_s dB_s \\ \Leftrightarrow Y_t + \int_0^t f(s,U_s,V_s)ds &= \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \end{aligned}$$

d'où

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

Ainsi pour $(Y,Z) \in \mathbb{B}^2$, on a

$$(Y,Z) \text{ point fixe de } \psi \Leftrightarrow Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

i.e., le couple (Y,Z) est solution de l'EDSR (1.34).

Maintenant il nous reste à montrer que l'application ψ admet un seul point fixe.

Soit $(U,V) \in \mathbb{B}^2, (Y,Z) = \psi(U,V)$, on a

$$Y_t = \xi + \int_0^T f(s,U_s,V_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

comme précédemment, on obtient

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] \leq 3E\left[|\xi|^2\right] + 3TE\left[\int_0^T |f(s,U_s,V_s)|^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right].$$

Or par l'hypothèse H2, on a

$$|f(s,U_s,V_s)|^2 \leq 3(\overline{f_s}^2 + 3K^2(|U_s|^2 + \|V_s\|^2)\ .$$

Ainsi comme $\xi \in L^2, (U_s,V_s) \in \mathbb{B}^2$ et $Z \in \mathbb{M}^2$, on a

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

On sait d'après le lemme (1.1) que

$$\int_0^t Y_s Z_s dB_s,$$

est une martingale.

Soient $(U,V),(U',V') \in \mathbb{B}^2$ et $(Y,Z) = \psi(U,V),(Y',Z') = \psi(U',V')$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Posons $(\overline{U},\overline{V}) = (U-U',V-V'),(\overline{Y},\overline{Z}) = (Y-Y',Z-Z')$

soit $g(t,x) = \exp(\gamma t)\|x\|^2$. On applique la formule d'Ito à g et au processus $\overline{Y_t}$ entre t et T ceci nous donne

$$e^{\gamma T}\left|\overline{Y_T}\right|^2 = e^{\gamma t}\left|\overline{Y_t}\right|^2 + \int_t^T \gamma e^{\gamma s}\left|\overline{Y_s}\right|^2 ds + \int_t^T 2e^{\gamma s}\overline{Y_s}d\overline{Y_s} + \int_t^T e^{\gamma s}d\langle\overline{Y}\rangle_s.$$

Comme

$$d\overline{Y_s} = (f(s,U'_s,V'_s) - f(s,U_s,V_s))ds + \overline{Z_s}dB_s.$$

On obtient

$$d\langle\overline{Y}\rangle_s = \left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds \text{ et } \overline{Y_T} = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} e^{\gamma t}\left|\overline{Y_t}\right|^2 = & -\int_t^T \gamma e^{\gamma s}\left|\overline{Y_s}\right|^2 ds + \int_t^T 2e^{\gamma s}\overline{Y_s}(f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s))ds \\ & -\int_t^T 2e^{\gamma s}\overline{Y_s}.\overline{Z_s}dB_s - \int_t^T e^{\gamma s}\left\|\overline{Z_s}\right\|^2 ds. \end{aligned} \tag{1.37}$$

En prenant l'espérance dans la formule (1.37) que l'on notera $(*)$, on obtien

$$\begin{aligned} & E\left[e^{\gamma t}\left|\overline{Y_t}\right|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left(\gamma\left|\overline{Y_s}\right|^2 + \left\|\overline{Z_s}\right\|^2\right)ds\right] \\ = \;& 2\int_t^T e^{\gamma s}E\left[\overline{Y_s}(f(s,U_s,V_s) - f(s,U'_s,V'_s))\right]ds. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses H3 et H4', on a

$$\begin{aligned} |f(s,U'_s,V'_s) - f(s,U_s,V_s)| &\le |f(s,U'_s,V'_s) - f(s,U'_s,V_s)| + |f(s,U'_s,V_s) - f(s,U_s,V_s)| \\ &\le K|U'_s - U_s| + K\|V'_s - V_s\| \\ &\le K(|\overline{U_s}| + \|\overline{V_s}\|). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (*) &\le 2E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\overline{Y_s}K(|\overline{U_s}| + \|\overline{V_s}\|)ds\right] \\ &\le E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left(2\sqrt{2}K\overline{Y_s}\right)\frac{(|\overline{U_s}| + \|\overline{V_s}\|)}{\sqrt{2}}ds\right] \\ &\le 4K^2E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left|\overline{Y_s}\right|^2 ds\right] + \frac{1}{4}E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left(|\overline{U_s}| + \|\overline{V_s}\|\right)^2 ds\right] \\ &\le 4K^2E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left|\overline{Y_s}\right|^2 ds\right] + \frac{1}{2}E\left[\int_t^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{U_s}\right|^2 + \left\|\overline{V_s}\right\|^2\right)ds\right]. \end{aligned}$$

On choisit $\gamma = 4K^2 + 1$ et $t = 0$

$$\begin{aligned} E\left[\left|\overline{Y_0}\right|^2\right] + E\left[\int_0^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{Y_s}\right|^2 + \left\|\overline{Z_s}\right\|^2\right) ds\right] &\leq \frac{1}{2} E\left[\int_0^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{U_s}\right|^2 + \left\|\overline{V_s}\right\|^2\right) ds\right] \\ E\left[\int_0^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{Y_s}\right|^2 + \left\|\overline{Z_s}\right\|^2\right) ds\right] &\leq \frac{1}{2} E\left[\int_0^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{U_s}\right|^2 + \left\|\overline{V_s}\right\|^2\right) ds\right]. \end{aligned}$$

On met une norme sur $\mathbb{B}^2$ définit par

$$\|(Y,Z)\|_\gamma = \left(E\left[\int_0^T e^{\gamma s}\left(\left|\overline{Y_s}\right|^2 + \left\|\overline{Z_s}\right\|^2\right) ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.38}$$

D'où

$$\left\|(\overline{Y}, \overline{Z})\right\|_\gamma \leq \frac{1}{2}\left\|(\overline{U}, \overline{V})\right\|_\gamma. \tag{1.39}$$

Pour cette norme, ψ est une contraction, donc par application du théorème du point fixe dans un espace de Hilbert, donc, on a l'existence et l'unicité du point fixe, et par suite de la solution de l'EDSR (1.34) ■

1.5 Cas Monotones

Comme dans le cas lipschitzien, nous allons donner un résultat dû à **Peng [10]** d'existence et d'unicité de la solution de l'EDSR en s'affranchissant de la condition de lipschitz en y. Ce résultat repose sur la proposition suivante :

Proposition 1.3. [13]

Soit $V \in \mathbb{M}^2(0,T)$. Il existe un seul couple de proc. prog. mes. (Y,Z) à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ tel que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, V_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

avec

$$E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty.$$

En utilisant cette proposition on peut donner le résultat suivant.

Théorème 1.2. [10]

Sous les hypothèses H1-H5, l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s\ ,\ \forall t \in [0,T], \tag{1.40}$$

admet une solution unique.

Démonstration

1- Unicité.

Soient (Y,Z) et (Y',Z') deux solution de l'EDSR (1.40). On applique la formule d'Itô à l'application $x \mapsto |x|^2$ où $x(t) = Y(t) - Y'(t)$. Ceci nous donne

$$|Y_T - Y'_T|^2 = \left|Y_t - Y'_t\right|^2 + \int_t^T 2\Big(Y_s - Y'_s, d(Y_s - Y'_s)\Big) + \int_t^T d\langle Y - Y'\rangle_s. \tag{1.41}$$

Or

$$Y_t - Y'_t = \int_t^T \Big(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)\Big)ds - \int_t^T (Z_s - Z'_s)dB_s,$$

et donc

$$\begin{aligned} d(Y_s - Y'_s) &= (-f(s, Y_s, Z_s) + f(s, Y'_s, Z'_s))ds + (Z_s - Z'_s)dB_s, \\ d\langle Y - Y'\rangle_s &= \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} |Y_t - Y'_t|^2 &= 2\int_t^T (Y_s - Y'_s, f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds \\ &\quad -2\int_t^T (Y_s - Y'_s, (Z_s - Z'_s)dB_s) - \int_t^T \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Prenons l'espérance dans l'expression (1.42), on obtient

$$E\left[|Y_t - Y'_t|^2\right] + E\left[\int_t^T \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds\right] = 2E\left[\int_t^T (Y_s - Y'_s, f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds\right].$$

D'après les hypothèses H3 et H4 on obtient

$$\begin{aligned} |f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)| &\le |f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)| \\ &\quad + |f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)|. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$(Y_s - Y'_s, f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y'_s, Z'_s)) \le \mu\,|Y_s - Y'_s|^2 + K|Y_s - Y'_s|.\|Z_s - Z'_s\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left[|Y_t - Y'_t|^2 + \int_t^T \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds\right] &\le 2E\left[\mu\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2\, ds + K\int_t^T |Y_s - Y'_s|\|Z_s - Z'_s\|ds\right] \\ &\le 2\mu E\left[\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2\, ds\right] + K^2 E\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2\, ds \\ &\quad + E\left[\int_t^T \|Z_s - Z'_s\|^2\, ds\right]. \end{aligned}$$

Il vient

$$E\left[\int_t^T |Y_t - Y'_t|^2\, ds\right] \le (2\mu + K^2)E\left[\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2\, ds\right],$$

et d'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$E\left[\int_t^T |Y_t - Y'_t|^2\, ds\right] \le 0.$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}-p.s.\ \ Y_t = Y'_t$$

En reportant ceci dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{P}-p.s.\ \ Z_t = Z'_t$$

d'où l'unicité de la solution.

2- Existence.

Considérons les processus

$$\overline{Y_t} = e^{\lambda t} Y_t,\ ,\ \overline{Z_t} = e^{\lambda t} Z_t \text{ et } \overline{f'_t} = e^{\mu t}\overline{f_t}, \tag{1.43}$$

et l'application

$$f' : (t,y,z) \mapsto e^{\lambda t} f(t, e^{-\lambda t} y, e^{-\lambda t} z) - \lambda y. \tag{1.44}$$

Il est claire, d'après (1.43), que le couple $(\overline{Y},\overline{Z})$ est progressivement mesurable puisque (Y,Z) l'est et en outre $\overline{Z} \in \mathbb{M}^2[0,T]^{k\times d}$.

Nous allons montrer que $(\overline{Y},\overline{Z})$ est solution de l'EDSR de générateur f' et de condiion finale $e^{\lambda T}\xi$ si et seulement si (Y,Z) est solution de l'EDSR (1.40).

Soit $(\overline{Y},\overline{Z})$ solution de l'EDSR $(e^{\lambda T}\xi, f')$. En utilisant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
Y_t &= e^{-\lambda t}\overline{Y_t} \\
&= e^{-\lambda T}\overline{Y_T} + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s}\overline{Y_s} ds - \int_t^T \lambda e^{-\lambda s} d\overline{Y_s} \\
&= \xi + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s}\overline{Y_s} ds + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s} f'(s,\overline{Y_s},\overline{Z_s}) ds - \int_t^T \lambda e^{-\lambda s}\overline{Z_s} dB_s \\
&= \xi + \int_t^T \lambda Y_s ds + \int_t^T (f(s,Y_s,Z_s) - \lambda Y_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s \\
&= \xi + \int_t^T (f(s,Y_s,Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Donc (Y,Z) est solution de l'EDSR (1.40). La réciproque s'obtient exactement de la même façon.

Posons $\lambda = \mu$ on vérifie alors que si f satisfait les hypothèses H1-H5, alors f' satisfait H1,H2,H3,H4" et H5, suivante.

Il est clair que $\overline{f'_t}$ est un processus progressivement mesurable appartient à $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^+)$, de plus on a

H1. $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}\quad f'(.,y,z)$ est progressivement mesurable.

H2.

$$\begin{aligned}
|f'(t,y,z)| &\leq e^{\mu t}\left(\overline{f_t} + K\left(|e^{-\mu t} y| + \|e^{-\mu t} z\|\right)\right) + \mu|y| \\
&\leq \overline{f'_t} + K'(|y| + \|z\|),\ \ K' = K + \mu,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $K' = K + \mu$

H3.

$$\begin{aligned}|f'(t,y,z)-f'(t,y,z')| &= |e^{\mu t}|.|f(t,e^{-\mu t}y,e^{-\mu t}z)-f(t,e^{-\mu t}y,e^{-\mu t}z')|\\ &\leq K|e^{\mu t}|.\|e^{-\mu t}z-e^{-\mu t}z'\|\\ &\leq K\|z-z'\|\\ &\leq K'\|z-z'\|,\end{aligned}$$

H4".

$$\begin{aligned}(y-y',f'(t,y,z)-f'(t,y',z)) &= e^{\mu t}(y-y',f(t,e^{-\mu t}y,e^{-\mu t}z)-f(t,e^{-\mu t}y',e^{-\mu t}z))\\ &\quad -\mu\left|y-y'\right|^2\\ &\leq e^{2\mu t}\mu\left|e^{\mu t}y-e^{-\mu t}y'\right|^2-\mu\left|y-y'\right|^2\\ &\leq \mu\left|y-y'\right|^2-\mu\left|y-y'\right|^2\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

H5. $\mathbb{P}-p.s.$ $f'(t,y,z)$ est continue.

On se ramène donc au cas où la fonction f satisfait ces 5 dernières hypothèses.

Introduisons la même application ψ définie eu cas lipschitzien, d'après la proposition (1.3), on montre de manière similaire que ψ admet un point fixe et celui-ci est unique et il est notre solution.

1.6 Estimation de différences de solutions

On se donne deux conditions finales ξ et ξ' et deux générateurs f et f' satisfaisant les conditions H1-H5, et on note (Y,Z) et (Y',Z') les solutions des EDSR associées.

Théorème 1.3. [5]

Il existe une constante C qui dépend seulement des constantes de lipschitz et de monotonie de f' telle que

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t-Y'_t|^2+\int_0^T\|Z_t-Z'_t\|^2\,dt\right]\leq C.E\left[|\xi-\xi'|^2+\int_0^T|f(s,Y_s,Z_s)-f'(s,Y_s,Z_s)|^2\,ds\right].$$

Pour la démonstration voir **[5]**.

1.7 Rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui de l'intégrale stochastique est de rendre le processus Y adapté à la filtration du mouvement brownien et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 1.4. [12]

Soit $\{(Y_t,Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDSR

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s, t\in[0,T]. \tag{1.46}$$

Supposons que pour un temps d'arrêt $\tau \leq T$, on a
(i) ξ est $\mathcal{F}_\tau$ − mesurable.
(ii) $f(t,y,z) = 0$ dés que $t \geq \tau$.
Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.

Démonstration

Posons $t = \tau$, d'après (i) l'équation (1.46) s'écrit

$$Y_\tau = \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s. \tag{1.47}$$

En prenant l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\begin{aligned} Y_\tau &= E(\xi \mid \mathcal{F}_\tau) \\ &= \xi. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\int_\tau^T Z_s dB_s = 0.$$

Comme $Z \in \mathbb{M}^2$, on obtient

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \|Z_s\|^2\right] = 0.$$

et finalement, on a

$$Z_\tau \chi_{s\geq\tau} = 0.$$

Si $t \geq \tau$, il s'en suit que

$$Y_t = Y_\tau.$$

En effet

$$\begin{aligned} Y_\tau &= Y_t + \int_\tau^t f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_\tau^t Z_s dB_s \\ &= Y_t + 0 - 0. \end{aligned}$$

■

1.8 EDSR linéaire

Les EDSR linéaires sont apparues en 1973 dans un article **[1]** en théorie de contrôle stochastique, (voir **[6]**). comme pour les équations différentielles ordinaires, si f est linéaire, on peut donner une formule explicite de la solution de l'EDSR linéaire. Pour simplifier prenons $k = 1$, ainsi Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et Z est une matrice de taille $1 \times d$.

Proposition 1.5. [3]

soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné. Soient $\{(c_t)\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $\mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$−mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.

l'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_r Y_r + b_r.Z_r + c_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r,\ 0 \le t \le T, \tag{1.48}$$

admet une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^d)$ et Y est donné explicitement par la formule suivante

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right),\ t \in [0,T], \tag{1.49}$$

où pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_r.dB_r + \int_0^t \left(a_r - \frac{1}{2}|b_r|^2\right) dr\right).$$

Démonstration

Commençons par remarque que Γ appartient à S^2 car b est borné et vérifie

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t.dB_t)\ ,\ \Gamma_0 = 1. \tag{1.50}$$

De plus les hypothéses de la proposition assurent l'existence d'une unique solution $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ de l'EDSR linéaire ; En effet, comme le générateur f est donné par

$$f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t.$$

alors il est facile de vérifier les hypothèses H1-H5 et Y appartient à S^2 d'après la proposition (1.1).

D'autre part, la formule d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle Y, \Gamma\rangle_t \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t dB_t. \end{aligned}$$

Ce qui montre que le processus

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r\Gamma_r dr,$$

est une martingale locale qui est en fait une martingale. Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r\Gamma_r dr = E\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_r\Gamma_r dr \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ce qui donne conclut la démonstration. ■

Remarque 1.2

Notons qui si $\xi \ge 0$ et $c_t \ge 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \ge 0$. Cette remarque va nous permettred d'obtenir le théorème de comparaison suivant.

1.9 Théorème de comparaison

Le résultat nous permet de comparer les soluions de deux EDSR.

Soient $(\xi, f), (\xi', f')$ des paramètres vérifiant les hypothèses H1-H5 et $(Y, Z), (Y', Z')$ les solutions des EDSR associées.

Théorème 1.4. [11]

Si $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi \le \xi'$ et $dt \times d\mathbb{P}-p.s$ $f(t,y,z) \le f'(t,y,z)$, alors $\mathbb{P}-p.s$ $Y_t \le Y'_t$.

Si de plus $Y_0 = Y'_0$ alors $\mathbb{P}-p.s.$ $Y_t < Y'_t$.

En particulier quand on a en outre $\mathbb{P}-p.s$ $\xi < \xi$ ou $dt \times d\mathbb{P}-p.s$ $f(t,y,z) < f'(t,y,z)$, alors $Y_0 < Y'_0$.

Démonstration

La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR linéaires.

En effet, pour la première étape on va construire (α, β) comme suit.

On pose

$$\alpha_t = \begin{cases} (Y'_t - Y_t)^{-1} \left(f(t, Y'_t, Z_t) - f(t, Y_t, Z_t) \right) & \text{si } \; Y'_t \neq Y_t \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.51}$$

et

$$\beta^i_t = \begin{cases} (Z'^i_t - Z^i_t)^{-1} \left(f(t, Y'_t, Z^{(i)}_t) - f(t, Y'_t, Z^{(i-1)}_t) \right) & \text{si } \; Z'^i_t \neq Z^i_t \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.52}$$

où le vecteur $Z^{(i)}_t, i \in \mathbb{N}_d$, de dimention d, dont les i premières composantes sont celles de Z'_t et les $d-i$ autres celles de Z_t, i.e.,

$$Z^{(i)}_t = (Z'^1_t, Z'^2_t, ..., Z'^i_t, Z'^{i+1}_t, ..., Z^d_t) \,.$$

On montre que

1. α_t et β_t sont progressivement mesurables (d'après les propriétés de Y_t et Z_t)

2. α_t et β_t sont bornés. En effet, par l'hypothèse H4 on a

$$(Y'_t - Y_t, f(t, Y'_t, Z_t) - f(t, Y_t, Z_t)) \le \mu \left| Y'_t - Y_t \right|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_t &= (Y'_t - Y_t)^{-1} \left(f(t, Y'_t, Z_t) - f(t, Y_t, Z_t) \right) \le \mu \quad && \text{si } \; Y'_t \neq Y_t \\ \alpha_t &= 0 \le \mu && \text{sinon.} \end{aligned}$$

D'où $\alpha_t \le \mu$.

D'après l'hypothèse H3, on a

$$\left| f(t, Y'_t, Z^{(i)}_t) - f(t, Y'_t, Z^{(i-1)}_t) \right| \le K \left\| Z^{(i)}_t - Z^{(i-1)}_t \right\| = K \left| Z'^i_t - Z^i_t \right|,$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|\beta_t^i| &\leq \left| \left(Z_t'^i - Z_t^i \right)^{-1} \left(f(t, Y_t', Z_t^{(i)}) - f(t, Y_t', Z_t^{(i-1)}) \right) \right| \leq K \quad \text{si} \quad Z_t'^i \neq Z_t^i \\
|\beta_t^i| &= 0 \leq K \quad \text{sinon.}
\end{aligned}
$$

Ainsi on a $|\beta_t| \leq K$.

Maintenant posons

$$\begin{aligned} (\overline{Y_t}, \overline{Z_t}) &= \Big(Y'_t - Y_t, Z'_t - Z_t\Big), \\ \overline{\xi} &= \xi' - \xi, \\ U_t &= f'(t, Y'_t, Z'_t) - f(t, Y'_t, Z'_t). \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{Y_t}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \overline{Y_t} &= \overline{\xi} + \int_t^T \Big(f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s)\Big)ds - \int_t^T \overline{Z_s} dB_s \\ &= \overline{\xi} + \int_t^T U_s ds + \int_t^T (f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s))ds - \int_t^T \overline{Z_s} dB_s. \end{aligned}$$

Comme

$$f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s) = f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z_s) + f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s),$$

où

$$f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s) = \alpha_s \overline{Y_s}.$$

Ains, on a

$$\begin{aligned} f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z_s) &= f(s, Y'_s, Z_s^{(d)}) - f(s, Y'_s, Z_s^{(0)}) \\ &= \sum_{i=1}^d \Big(f(s, Y'_s, Z_s^{(i)}) - f(s, Y'_s, Z_s^{(i-1)})\Big) \\ &= \sum_{i=1}^d \overline{Z_s}^i \beta_s^i \\ &= \beta_s.\overline{Z_s}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\overline{Y_t} = \overline{\xi} + \int_t^T U_s + \alpha_s \overline{Y_s} + \beta_s.\overline{Z_s} ds - \int_t^T \overline{Z_s} dB_s. \tag{1.53}$$

et donc $(\overline{Y_t}, \overline{Z_t})$ est solution de l'EDSR linéaire.

En outre, puisque les processus α et β sont progressivement mesurables et bornés de plus le processus U est progressivement mesurable donc d'après la proposition (1.5). L'EDSR linéaire (1.53) admet une unique solution $\overline{Y_t}$ telle que

$$\overline{Y_t} = \Gamma_t^{-1} E\left(\overline{\xi}\Gamma_T + \int_t^T U_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{1.54}$$

où pour tout $s \in [0, T]$

$$\Gamma_s = \exp\left\{\int_0^s \left(\alpha_u - \frac{1}{2}|\beta_u|^2\right) du + \int_0^s \beta_u dB_u\right\}. \tag{1.55}$$

D'après la remarque (1.2), on montre ainsi que $\overline{Y_t}$ donné par (1.54)

$$\overline{Y_t} \geq 0 \ , \ i.e., \ Y'_t \geq Y_t, \tag{1.56}$$

dés que

$$\overline{\xi} = \xi - \xi \geq 0 \quad \text{et} \quad U_s = f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z'_s) \geq 0.$$

Pour la seconde passertion du théorème, par hypothèse on a $\overline{Y_t} = 0$ et nous allons raisoner par l'absurd. Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $Y'_t > Y_t$ soit $\overline{Y_t} > 0$. Alors

$$E\left(\overline{\xi}\Gamma_T^0 + \int_0^T U_s \Gamma_s ds\right) = 0.$$

D'où lon obtient

$$\overline{\xi} = 0 \text{ et } U_s = 0 \quad \forall s.$$

Ainsi, on a

$$\overline{Y_t} = E(0) = 0 \quad \forall t \ .$$

Enfin, si $\mathbb{P}-p.s.$ $\xi < \xi'$ ou $dt \times d\mathbb{P}-p.s$ $d(t, y, z) < f'(t, y, z)$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors par contraposée $Y_0 < Y'_0$. ■

Chapitre 2

Cadre Markovien des EDSR

Dans ce chapitre nous verrons que la propriété de Markov pour les EDS se transfère aux EDSR.

2.1 Modèle et propriétés

2.1.1. Hypothèses et Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien W d–dimensionnel. On note par $\{\mathcal{F}_t^w\}_t \geq 0$ la filtration naturelle de W .

Soient deux fonctions continues $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$.

On suppose qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^n$, on a

(i) $$|b(t,x) - b(t,x')| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')\| \leq K|x - x'|,$$

(ii) $$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + |x|),$$

Sous ces hypothèses, on peut construire, étant données un réel $t \in [0,T]$ et une variable aléatoire $\theta \in L^2(\mathcal{F}_l)$, $\{X_u^{t,\theta}\}_{t\leq u\leq T}$ la solution de l'EDS

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b(r, X_r^{t,\theta})dr + \int_t^u \sigma(r, X_r^{t,\theta})dW_r \ , \ \ t \leq u \leq T. \tag{2.1}$$

On convient, que si $0 \leq u \leq t$ on pose

$$X_u^{t,\theta} = \mathbb{E}(\theta \,|\, \mathcal{F}_u).$$

Considérons deux fonctions continues $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^k$.

Soient les hypothèses suivantes ; il existe des réels K, μ et $p \geq 1$ tels que, on a

(h1). La fonction $f(t,x,y,.)$ est lipschitzienne, *i.e.*,

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall t,x,y,z,z' \quad |f(t,x,y,z)-f(t,x,y,z')| \leq K\|z-z'\|,$$

(h2). La fonction $f(t,x,.,z)$ est monotone, *i.e.*,

$$\mathbb{P}-p.s.\ \forall t,x,y,y',z \quad (y-y', f(t,x,y,z)-f(t,x,y',z)) \leq \mu|z-z'|^2,$$

(h3). Les fonctions f et g vérifient

$$|g(x)|+|f(t,x,y,z)| \leq K(1+|x|^p+|y|+\|z\|),$$

Sous ces hypothèses, si θ appartient à $L^{2p}(\mathcal{F}_t)$, on sait d'après le théorème (1.2) du chapitre 1 l'EDSR suivante

$$Y_u^{t,\theta} = g(X_T^{t,\theta}) + \int_u^T f(r, X_r^{t,\theta}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta})dr - \int_u^T Z_r^{t,\theta} dW_r \ , \ 0 \leq u \leq T. \tag{2.2}$$

admet une unique solution.

Dans toute la suite, nous supposerons que les hypothèses précédentes sur les coefficients b, σ, f et g sont satisfaites. Parfois, nous supposerons de plus que g et f sont $K-$lipschitziennes en x uniformément en (t,y,z). Nous désignerons cette hypothèse par (h4).

2.1.2. Rappels sur les EDS

-Propirétés du flot des EDS

On va travailler ici avec des conditions initiales déterministes ce qui permet de prendre comme filtration naturelle du mouvement brownien $\{\mathcal{F}_u^W\}_{t\geq 0}$. On suppose que les fonctions b et σ vérifient les hypothèses classique du théorème d'existence et d'unicité pour les EDS, on peut alors construire pour $(t,\theta) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ la solution de l'EDS suivante

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b(r, X_r^{t,\theta})dr + \int_t^u \sigma(r, X_r^{t,\theta})dW_r \ , \ t \leq u \leq T. \tag{2.3}$$

et on pose $X_u^{t,\theta} = E(\theta|\mathcal{F}_u)$ si $0 \leq u \leq t$.

Dans le cas déterministe, si $\sigma = 0$, le flot de l'équation défférentielle, noté $\varphi_u^{t,\theta}$ dans ce cas, possède les propriétés, en particulier

- $\varphi_u^{t,\theta}$ est Lipschitzienne en (t,θ,u)
- pour $r \leq t \leq u, \varphi_u^{r,\theta} = \varphi_u^{l,\varphi_t^{r,\theta}}$

Dans le cas stochastique, $X_u^{t,\theta}$ possède aussi des propriétés du même type.

- De plus il existe une constante C telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et $\theta,\theta' \in L^q(\mathcal{F}_t)$ $q \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}\right|^q\right] &\leq C(1+E[|\theta|^q]), \\ E\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}-X_u^{t,\theta'}\right|^q\right] &\leq CE[|\theta-\theta'|^q]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dans le même esprit, on a

$$E\left[\sup_{0\le u\le T}\left|X_u^{t,x}-X_u^{t',x'}\right|^q\right]\le C\left\{|x-x'|^q+|t-t'|^{\frac{q}{2}}\left(1+|x|^q\right)\right\}. \tag{2.5}$$

Proposition 2.1. [5]

Si $\theta\in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$, l'EDSR (2.2) possède une unique solution $\{(Y_u^{t,\theta},Z_u^{t,\theta})\}_{0\le u\le T}$, de plus il existe une C telle que, pour tout t et pour toute variable aléatoire $\theta\in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$,

on a

$$E\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}\right\|^2dr\right]\le C(1+E[|\theta|^{2q}]). \tag{2.6}$$

La démonstration repose sur les estimations à priori de chapitre 1 et la proposition (1.2).

Proposition 2.2. [5]

Si θ_n converge vers θ dans $L^{2p}(\mathcal{F}_t)$, alors

$$E\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}-Y_u^{t,\theta_n}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}-Z_r^{t,\theta_n}\right\|^2dr\right]\to 0 \text{ si } n\to\infty. \tag{2.7}$$

Sous l'hypothèse (h4), si θ et θ' sont $\mathcal{F}_t$−mesurables et de carré intégrable

$$E\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}-Y_u^{t,\theta'}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}-Z_r^{t,\theta'}\right\|^2dr\right]\le CE[|\theta-\theta'|^2]. \tag{2.8}$$

La démonstration s'aquie sur le théorème 1.3 et la proposition 2.1.

2.2 Propriété de Markov

Dans ce paragraphe, nous allons établir que la propriété de Markov des solutions de l'EDS se transfère aux solutions de l'EDSR. Nous commençons par montrer que $Y_t^{t,x}$ est une quantité déterministe. Si $t\le u,\mathcal{F}_u^t=\sigma(W_r-W_t,t\le r\le u)$.

Proposition 2.3. [3]

Soit $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Le couple $\{(X_u^{t,x},Z_u^{t,x})\}_{0\le u\le T}$ qui vérifie

$$\begin{cases} X_u^{t,x}= & x+\int_t^u b(r,X_r^{t,x})dr+\int_t^u\sigma(r,X_r^{t,x})dW_r\ ,\ t\le u\le T,\\ Y_u^{t,x}= & g(X_T^{t,x})+\int_u^T f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr-\int_u^T Z_r^{t,x}dW_r\ ,\ t\le u\le T,\end{cases} \tag{2.9}$$

est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t\le u\le T}$.

En particulier, $Y_t^{t,x}$ est déterministe.

On peut choisir une version de $\{Z_u^t\}_{t\le u\le T}$ adaptée par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t\le u\le T}$.

Démonstration

Consédérons le processus $\{B_u\}_{u\ge0}$ définie par $B_u=W_{t+u}-W_t$ et $\{G_u\}_u$ sa filtration naturelle et on a de plus $G_u=\mathcal{F}_{t+u}^t$.

Soit $\{X_u\}_{0\le u\le T-t}$ la solution $\{G_u\}_u$−adaptée de l'EDS

$$X_u = x + \int_0^u b(t+r, X_r)dr + \int_0^u \sigma(t+r, X_r)dB_r,\ 0 \le u \le T-t.$$

En particulier, pour tout $v \in [t,T]$, on a

$$X_{v-t} = x + \int_0^{v-t} b(t+r, X_r)dr + \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)dB_r.$$

Dans les deux intégrales, on fait le changement de variable $s = r+t$ pour obtenir

$$\int_0^{v-t} b(t+r, X_r)dr = \int_t^v b(s, X_{s-t})dset \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)dB_r = \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})dW_s,$$

et par suite

$$X_{v-t} = x + \int_t^v b(s, X_{s-t})ds + \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})dW_s,\ t \le v \le T. \tag{2.10}$$

D'autre part, le processus $X^{t,x}$ est solution de l'équation

$$X_v^{t,x} = x + \int_t^v b(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^v \sigma(s, X_s^{t,x})dW_s,\ t \le v \le T. \tag{2.11}$$

L'EDS de coefficients b, σ et de condition initiale x en t possède deux solutions : X_{v-t} et $X_v^{t,x}$; par unicité des solutions des EDS à coefficients lipschitziens on a : $\forall v \in [t,T]$, et $X_{v-t} = X_v^{t,x}$ $\mathbb{P}-p.s.$ En particulier, $X_v^{t,x}$ est $G_{v-t}-$mesurable puisqu'il en est ainsi pour X_{v-t}. Or $G_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$, donc pour $v=t$ on a le résultat.

Le résultat pour les EDSR se déduit de celui que nous venons d'établir pour les EDS.

En effet, on considère la solution $\{(X_u^{t,x}, Y_u^{t,x})\}_{0\le u\le T-t}$ G_u-adapté de l'EDSR

$$Y_u = g(X_{T-t}) + \int_u^{T-t} f(t+r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_u^{T-t} Z_r dB_r,\ 0 \le u \le T-t, \tag{2.12}$$

d'où

$$Y_{v-t} = g(X_{T-t}) + \textstyle\int_{v-t}^{T-t} f(t+r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_{v-t}^{T-t} Z_r dB_r,\ t \le v \le T.$$

On effectue le changement de variable $s = t+r$ dans les deux intégrales, pour obtenir

$$Y_{v-t} = g(X_{T-t}) + \textstyle\int_v^T f(s, X_{s-t}, Y_{s-t}, Z_{s-t})ds - \int_v^T Z_{s-t} dW_s,\ t \le v \le T.$$

Il s'en suit que $\{(Y_{v-t}, Z_{v-t})\}_{t\le v\le T}$ est solution sur $[t,T]$ de l'EDSR (2.2) pour $\theta = x$ puisque nous savons déjà que $X_{v-t} = X_v^{t,x}$. L'unicité des solutions des EDSR, nous donne

$$\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v\in[t,T]} = \{Y_v^{t,x}, Z_v^{t,x}\}_{v\in[t,T]}, \tag{2.13}$$

et la mesurabilité recherchée car $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v\in[t,T]}$ est adapté par rapport à $G_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$.

Pour compléter la démonstration, justifions le changement de variable dans les intégrales stochastiques, $i,e.$, si $\{h(r)\}_{0\le r\le T-t}$ est un processus de carré intégrable et G_r-adapté

$$\int_0^u h(r)dB_r = \int_t^{t+u} h(s-t)dW_s,\ 0 \le u \le T-t, \tag{2.14}$$

où $B_r = W_{t+r} - W_t$. Le résultat est immédiat si $h(r) = h_a \chi_{]a,b]}(r)$ avec h_a une v.a bornée et G_a-mesurable. En effet, on a

$$\int_0^u h(r)dB_r = h_a(B_{u\wedge b} - B_{u\wedge a}) = h_a(W_{t|u\wedge b} - W_{t|u\wedge a}),$$

comme $G_a \subset \mathcal{F}_{t+a}$

$$\int_t^{t+u} h(s-t)dW_s = \int_t^{t+u} h_a\chi_{]t+a,t+b]}(s)dW_s = h_a(W_{t+u\wedge t+b} - W_{t+u\wedge t+a}).$$

Maintenant si, h est un processus de carré intégrable et G_u−adapté, il existe une suite de processus simples h_n qui est G_u−adaptés, tels que

$$E\left[\int_0^{T-t} |h_n(r) - h(r)|^2\right] dr \to 0. \tag{2.15}$$

On déduit imidiatement que

$$E\left[\int_t^T |h_n(s-t) - h(s-t)|^2\right] ds \to 0.$$

Comme $G_s \subset \mathcal{F}_{t+s}$, $\{h_n(s-t)\}_s$ et $\{h(s-t)\}_s$ sont $\mathcal{F}_s$−progressivement mesurables.
Pour finir, il suffit de noter que, d'une part on a

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq T-t}\left|\int_0^u (h_n(r) - h(r))dB_r\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_0^{T-t} |h_n(r) - h(r)|^2 dr\right]. \tag{2.16}$$

D'autre part on a

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq T-t}\left|\int_t^u (h_n(s-t) - h(s-t))dW_s\right|^2\right] \leq 4E\left[\int_t^T |h_n(s-t) - h(s-t)|^2 ds\right].$$

Ce qui achève la démonstration.
Puisque nous savons que $Y_t^{t,x}$ est une quantité déterministe, on définit la fonction u en posant

$$\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n,\ u(t,x) = Y_t^{t,x}. \tag{2.17}$$

■

Proposition 2.4.
La fonction u est continue et à croissance polynomiale . On a

$$\forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n,\ |u(t,x)| \leq C(1+|x|^p). \tag{2.18}$$

Sous l'hypothèse (h4), la fonction u vérifie de plus, pour tout $(t,x),(t',x')$,

$$|u(t,x) - u(t',x')| \leq C\left(|x-x'| + |t-t'|^{\frac{1}{2}}(1+|x|)\right). \tag{2.19}$$

Pour la démonstration voir **[3]**.
A l'aide de cette fonction, nous établisserons la propriété de Markov pour les EDSR.

Théorème 2.1. [5]
Soient $t \in [0,T]$ et $\theta \in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$. On a

$$\mathbb{P} - p.s.\ Y_t^{t,\theta} = u(t,\theta) = Y_t^{t,\cdot} \circ \theta \tag{2.20}$$

Démonstration
Supposons tout d'abord que θ soit une variable aléatoire étagée, *i.e.*, $\theta = \sum_i^l x_i \chi_{A_i}$ où $(A_i)_{1\leq i\leq l}$ est $\mathcal{F}_t$−mesurable de Ω et $x_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1,.,l$. Notons $(X_r^i, Y_r^i, Z_r^i)_{0\leq r\leq T}$ à la place de $(X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})_{0\leq r\leq T}$. On a alors, pour $t \leq r \leq T$

$$X_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} X_r^i\ ,\ Y_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} Y_r^i\ ,\ Z_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} Z_r^i. \tag{2.21}$$

En effet, par définition, pour tout i, si $r \geq t$

$$X_r^i = x_i + \int_t^r b(u, X_u^i) du + \int_t^r \sigma(u, X_u^i) dW_u,$$

et en multipliant par χ_{A_i} et faisant la somme sur i, on obtient

$$\sum_i \chi_{A_i} X_r^i = \theta + \int_t^r \sum_i \chi_{A_i} b(u, X_u^i) du + \int_t^r \sum_i \chi_{A_i} \sigma(u, X_u^i) dW_u, \tag{2.22}$$

il s'en suit que

$$\sum_i \chi_{A_i} X_r^i = \theta + \int_t^r b\left(u, \sum_i \chi_{A_i} X_u^i\right) du + \int_t^r \sigma\left(u, \sum_i \chi_{A_i} X_u^i\right) dW_u.$$

Par unicité des solutions d'EDS à coefficients lipschitziens, on a

$$\mathbb{P}\text{−}p.s \quad X_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} X_r^i\ \ \forall t \leq r \leq T \tag{2.23}$$

De la même façon, on a pour tout i, si $t \leq r \leq T$

$$Y_r^i = g\left(X_T^i\right) + \int_r^T f(u, X_u^i, Y_u^i, Z_u^i) du - \int_r^T Z_u^i dW_u,$$

et multipliant par χ_{A_i}, et faisant la somme sur i, on montre d'une façon similaire que

$$(Y_r', Z_r') = \left(\sum_i \chi_{A_i} Y_r^i, \sum_i \chi_{A_i} Z_r^i\right),$$

est solution sur $[t,T]$ de l'EDSR

$$Y_r' = g\left(X_T^{t,\theta}\right) + \int_r^T f\left(u, X_u^{t,\theta}, Y_u', Z_u'\right) du - \int_r^T Z_u' dW_u,$$

dont $(Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta})$ est également solution par défintion. L'unicité des solutions des EDSR donne

$$\mathbb{P}\text{−}p.s \quad \forall t \leq r \leq T \quad Y_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} Y_r^i \ \text{ et } \mathbb{P}\otimes m - p.p \quad Z_r^{t,\theta} = \sum_i \chi_{A_i} Z_r^i \text{ sur } \Omega \times [t,T]$$

En particulier, pour $r = t$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\text{-}p.s \quad Y_t^{t,\theta} &= \sum_i \chi_{A_i} Y_t^i = \sum_i \chi_{A_i} Y_t^{t,x_i} = \sum_i \chi_{A_i} u(t,x_i) = u\left(t, \sum_i \chi_{A_i} x_i\right) \\ &= u(t,\theta).\end{aligned}$$

Avant de traiter le cas général, examinons ce qui se passe sous l'hypothèse (h4). Considérons une suite de v.a θ_n est $\mathcal{F}_t$-étagées, qui converge vers θ dans $L^{2p}(\mathcal{F}_t)$.

La proposition (2.2), fournit l'estimation

$$E\left[\left|Y_t^{t,\theta_n} - Y_t^{t,\theta}\right|^2\right] \leq CE\left[|\theta - \theta'|^2\right].$$

D'après la proposition (2.4), $u(t,.)$ est lipschitzienne, ceci nous donne

$$E\left[|u(t,\theta_n) - u(t,\theta)|^2\right] \leq CE\left[|\theta_n - \theta|^2\right]. \tag{2.24}$$

Or, d'après l'étape précédente, pour tout $n, u(t,\theta_n) = Y_t^{t,\theta_n}$. On en déduit directemment que

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad u(t,\theta) = Y_t^{t,\theta}. \tag{2.25}$$

Dans le cas générale, considérons une suite de v.a θ_n $\mathcal{F}_t$-étagées, qui converge vers θ dans L^{2p} $(\mathcal{F}_t)$. La proposition (2.2), entraîne toujours que

$$Y_t^{t,\theta_n} \to Y_t^{t,\theta} \quad \text{dans} \quad L^2 \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

et de plus, la continuité de l'application $u(t,.)$ implique en particulier, la convergence de $u(t,\theta_n)$ vers $u(t,\theta)$ en probabilité.

La proposition (2.4), montre que $|u(t,x)|$ est majorée par $C(1 + \|x\|^p)$ et donc

$$|u(t,\theta_n)|^2 \leq C(1 + |x|^{2p}). \tag{2.26}$$

Ce qui montre que $\left(|u(t,\theta_n)|^2\right)_n$ est une suite équi-intégrable et donc

$$u(t,\theta_n) \to u(t,\theta) \quad \text{en probabilité}, \tag{2.27}$$

et comme

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad u(t,\theta_n) = Y_t^{t,\theta_n}.$$

On obtient

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad u(t,\theta) = Y_t^{t,\theta}. \tag{2.28}$$

■

Corollaire 2.1.

Soient $t \in [0,T]$ et $\theta \in L^{2p}(\mathcal{F}_t)$, pour tout $s \in [t,T]$, on a

$$\mathbb{P}\text{-}p.s. \quad Y_s^{t,\theta} = Y_s^{s,X_s^{t,\theta}} = u\left(s, X_s^{t,\theta}\right). \tag{2.29}$$

Pour la démonstration voir **[13]**.

Chapitre 3

Liens entre les EDSR et les EDP

Les liens entre les processus de diffusion et les équations aux dérivées partielles du second ordre sont au centre des travaux de Kolmogorov des années 1930. En fait, beaucoup de solutions des EDP linéaire du second ordre peuvent s'écrire comme l'espérance d'une fonctionnelle d'un processus de diffusion.

3.1 Cas Parabolique

Soit $(X_s^{t,x})_{t\leq s\leq T}$ de la solution de l'EDSR

$$X_s^{t,x} = \int_t^s b(r, X_r^{t,x})dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})dW_r \ , \ t \leq s \leq T, \tag{3.1}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ des fonctions mesurables et lipschitziennes en x uniformément par rapport à t et localement bornées.

On considère maintenant l'EDSR rétograde

$$Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr - \int_s^T Z_r^{t,x}dW_r \ , \ 0 \leq s \leq T, \tag{3.2}$$

où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $f : [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ sont des fonctions continues et vérifient les hypothèses suivantes : il existe K, μ et $p > 0$ tels que

R1. f et g vérifient

$$|f(t,x,y,z)| + |g(x)| \leq K(1 + |x|^p + |y| + \|z\|),$$

R2. $f(t,y,.)$ est lipschitzienne, *i.e.*,

$$\mathbb{P}-p.s. \ \forall t,y,z,z' \quad |f(t,x,y,z) - f(t,x,y,z')| \leq K\|z - z'\|,$$

R3. $f(t,.,z)$ est monotone, *i.e.*,

$$\mathbb{P}-p.s. \ \forall t,y,y',z \quad (y - y', f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z)) \leq \mu\,|y - y'|^2,$$

sous les hypothèses R1-R3, on sait d'après le théorème (1.2) du chapitre 1, que l'EDSR (3.2) admet une unique solution.

3.1.1. Lien avec un système des EDP paraboliques

Introduisons l'opérateur de la diffusion $(X_s^{t,x})_{t\leq s\leq T}$ définit par

$$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On considère le système d'EDP rétrogrades semi linéaires paraboliques suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) + L_t u_i(t,x) + f_i(t,x,u(t,x),((\nabla u)^* \sigma)(t,x)) = 0, \\ \qquad\qquad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d,\ \ \forall 0\leq i\leq k, \\ u(T,x) = g(x)\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous allons d'abord montrer qu'il, fournit une solution de l'EDSR (3.2).

Théroème 3.1. [8]

Si $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ est une solution classique du système (3.3) vérifiant : il existe $C, q > 0$ tel que

$$|u(t,x)| + |\nabla_x u(t,x)| \leq C(1 + |x|^q). \tag{3.4}$$

Alors, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, le couple $(u(s, X_s^{t,x}), ((\nabla u)^* \sigma)(s, X_s^{t,x}))_{t \leq s \leq T}$ est solution de l'EDSR (3.2).

En particulier on a $u(t,x) = Y_t^{t,x}$.

Démonstration

Comme $u \in C^{1,2}$, la formule d'Itô nous donne

$$u(t,x) = g(X_T^{t,x}) + \int_t^T f(r, X_r, u(r, X_r), ((\nabla u)^* \sigma)(r, X_r))dr - \int_t^T ((\nabla u)^* \sigma)(r, X_r))dW_r.$$

On obtient, en particulier que $Y_t^{t,x} = u(t,x)$.

La démarche que nous avons eue précédemment consiste à étudier l'EDP, puis en déduire les solutions de l'EDSR. Mais on peut également étudier l'EDSR et en déduire la construction de la solution de l'EDP sans supposer les coefficients réguliers. Pour cela nous utiliserons la notion de solution de viscosité d'EDP dont nous rappelons rapidement la définition. Cependant, pour que la notion de solution de viscosité du système d'EDP (3.3) ait un sens, on est obligé de supposer que la i^ecoordonnée fi de la fonction f ne dépend que de la i^e ligne de la matrice z ce qui fait que f_i ne dépend que du gradient de u_i. Le système (3.3) devient alors

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) + L_t u_i(t,x) + f_i(t, x, u(t,x), ((\nabla u)^* \sigma)(t,x)) = 0.$$

Définition 3.1

$-u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ est appelée une solution de viscosité du système (3.3) si

$$u_i(T,x) \leq g_i(x) \quad \forall i, x, \tag{3.5}$$

et pour tout $i = 0,..k \quad \phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et si $(t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ maximum local de $u_i - \phi$, on a

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0) - L_t\phi(t_0,x_0) - f_i(t_0,x_0,u(t_0,x_0),((\nabla\phi)^* \sigma)(t_0,x_0)) \leq 0. \tag{3.6}$$

$-u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ est appelée une solution de viscosité de (3.3) si

$$u_i(T,x) \geq g_i(x) \quad \forall i, x,$$

et pour tout $i = 0,..k \quad \phi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ et si $(t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ minimum local de $u_i - \phi$, on a

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0) - L_t\phi(t_0,x_0) - f_i(t_0,x_0,u(t_0,x_0),((\nabla\phi)^* \sigma)(t_0,x_0)) \geq 0.$$

Une solution de viscosité est à la fois une solution et une sur-solution de viscosité.

Théorème 3.2. [8]

Sous les hypothèses précédentes, la fonction u définie par

$$u(t,x) = Y_t^{t,x}, \tag{3.7}$$

est une fonction continue en t,x à croissance polynomiale et c'est une solution de viscosité de (3.3).

Démonstration

-la continuité et la croissace polynomiale se démontrent par la proposition (3.4)

-Montrons que u est une solution de viscosité

Remarqons que la fonction u est continue et vérifie de plus $u_i(T,.) = g_i(.)$. Nous montrons seulement que u est solution de viscosité.

Soit $i \in \mathbb{N}_k$, $\phi \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ telle que $u_i - \phi$ possède en $(t_0,x_0) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ un maximum local.

On suppose que $u_i(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0)$. Nous allons supposer que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0,x_0) - L_t\phi(t_0,x_0) - f_i(t_0,x_0,u(t_0,x_0),((\nabla\phi)^*\sigma)(t_0,x_0)) = -\delta < 0,$$

et montrer que l'on aboutit è une contradiction.

Considérons le temps d'arrêt τ

$$\tau = \inf\{u \geq t_0; |X_u^{t_0,x_0} - x_0| > \alpha\} \wedge t_0 + \alpha. \tag{3.8}$$

Posons

$$(Y_u, Z_u) = \left(\left(Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)^i, \chi_{u\leq\tau}\left(Z_u^{t_0,x_0}\right)^i\right)_{t_0\leq u\leq t_0+\alpha}, \tag{3.9}$$

et pour $t_0 \leq u \leq t_0+\alpha$, on a

$$\begin{aligned} Y_u &= Y_{t_0+\alpha} + \int_u^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} f_i\left(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r^{t_0,x_0}, (Z_r^{t_0,x_0})^i\right) dr \\ &\quad - \int_u^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} Z^{t_0,x_0} dW_r \\ &= \left(Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)^i. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme $t_0 + \alpha \wedge \tau = \tau$, on obtient

$$\left(Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)^i = \left(Y_\tau^{t_0,x_0}\right)^i + \int_{u\wedge\tau}^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} f_i\left(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r^{t_0,x_0}, (Z_r^{t_0,x_0})^i\right) dr - \int_{u\wedge\tau}^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} Z_r^{t_0,x_0} dW_r.$$

En utilisant la propriété de Markov pour tout $t_0 \leq r \leq t_0+\alpha$, on obtient

$$\left(Y_\tau^{t_0,x_0}\right)^i = \left(Y_r^{r,X_r^{t_0,x_0}}\right)^i = u_i(r, X_r^{t_0,x_0}). \tag{3.11}$$

Par l'unicité des solutions des l'EDSR, on obtient

$$Y_{t_0+\alpha} = \left(Y_\tau^{t_0,x_0}\right)^i = u_i(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}) \quad \tau \leq t_0 + \alpha. \tag{3.12}$$

L'expression (3.10) devient alors

$$Y_u = u_i(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}) + \int_{u\wedge\tau}^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} f_i\left(r, X_r^{t_0,x_0}, Y_r^{t_0,x_0}, (Z_r^{t_0,x_0})^i\right) dr - \int_{u\wedge\tau}^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} Z_r^{t_0,x_0} dW_r.$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $\phi(r, X_{r\wedge\tau}^{t_0,x_0})$ entre $t_0 \leq u \leq t_0 + \alpha$ et $t_0 + \alpha \wedge \tau = \tau$, ceci nous donne

$$\begin{aligned}
Y'_u &= \phi\left(u, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right) \\
&= \phi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) - \int_u^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + L_t\phi\right)(r, X_r^{t_0,x_0})\, dr - \int_u^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} D\phi\sigma\,(r, X_r^{t_0,x_0})\, dW_r \\
&= \phi\left(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\right) - \int_u^{t_0+\alpha} \chi_{r\leq\tau} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + L_t\phi\right)(r, X_r^{t_0,x_0})\, dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z'_r dW_r,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $Y'_u = \phi\left(u, X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\right)$ et $Z'_r = D\phi\sigma\left(r, X_r^{t_0,x_0}\right)$.

En appliquant le théorème de comparaison à (Y_u, Z_u) et (Y'_u, Z'_u) qui sont solutions des EDSR, on obtient

$$u(t_0, x_0) = Y_{t_0} < Y'_{t_0} = \phi(t_0, x_0)\,, \tag{3.13}$$

ceci est impossible puisque

$$u(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)\,.$$

u est donc bien une solution de viscosité, on montre de manière similaire qu'elle est une sur-solution de viscosité d'où le résultat.

3.2 Exemple : Formule de Feynman & Kac

Le résultat précédent donne une formule de représentation probabiliste pour la solution d'une EDP parabolique semi-linéaire.

On va établir la relation entre le couple $\{Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\}_{0\leq r\leq T}$ solution de l'EDSR

$$Y_r^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_r^T f(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x})du - \int_r^T Z_r^{t,x} dW_u \ , \ 0 \leq r \leq T,$$

où $\{X_r^{t,x}\}_{0\leq r\leq T}$ est la solution de l'EDSR

$$X_r^{t,x} = x + \int_t^T b(u, X_u^{t,x})du + \int_t^T \sigma(u, X_u^{t,x})dW_u \ , \ t \leq r \leq T,$$

et la solution u de l'EDP parabolique suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + L_t u(t,x) + f_i(t,x,u(t,x),((\nabla u)^* \sigma)(t,x)) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ u(T,.) = g(.) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.14}$$

où L_t est l'opérateur de la diffusion $(X_r^{t,x})_{t\leq s\leq T})$ définit par

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Prenons $f(t,x,y,z) = c(t,x)y + h(t,x)$ où c et h sont deux fonctions continues bornées.

L'EDSR est alors linéaire, alors on a

$$\begin{cases} -dY_r^{t,x} = (c(r, X_r^{t,x})Y_r^{t,x} + h(r, X_r^{t,x}))dr - Z_r^{t,x} dW_r. \\ \quad Y_T^{t,x} = g(X_T^{t,x}) \end{cases} \tag{3.15}$$

D'après la théorème (1.4) du chapitre 1, l'EDSR linéaire admet une solution explicite

$$u(t,x) = Y_t^{t,x} = E\left[\begin{array}{c} g(X_T^{t,x}) \exp\left(\int_t^T c(r, X_r^{t,x})dr \right) \\ + \int_t^T \exp\left(\int_t^T c(s, X_s^{t,x})ds \right) h(r, X_r^{t,x})dr \end{array} \right]$$

3.3 Cas Elliptique

On s'intéresse au cas des EDP elliptiques sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $(X_t^x)_{t\geq 0}$ la solution de l'équation

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dB_s \ , \ t \geq 0, \tag{3.16}$$

où $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ sont des fonctions lipschitziennes.

On considère l'EDSR suivante

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T f(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x)ds - \int_t^T Z_s^x dB_s \ , \ 0 \leq t \leq T, \tag{3.17}$$

où la fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ est continue vérifiant pour touts K, K', μ et p les hypothèses suivantes

P1. $|f(x,y,z)| \leq K'(1 + |x|^p + |y| + \|z\|)$,

P2. $f(t,y,.)$ est lipschitzienne, *i.e.*,

$$\mathbb{P} - p.s. \ \forall t, y, z, z' \quad |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K\|z - z'\|,$$

P3. $f(t,.,z)$ est monotone, *i.e.*,

$$\mathbb{P} - p.s. \ \forall t, y, y', z \quad (y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq \mu\, |y - y'|^2,$$

On suppose en outre, qu'il existe $\lambda > 2\mu + K^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'on a

$$E\left[\int_0^\infty e^{\lambda t} |f(X_t^x, 0, 0)|^2 \, dt\right] < \infty,$$

sous les hypothèses précédentes, l'EDSR (3.17) admet une unique solution au sens du théorème (1.6).

Soit l'opérateur du processus de la diffusion (X_t^x) défint par

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^*)_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.18}$$

On considère le système d'EDP semi linéaire rétrograde sur $\mathbb{R}^d$

$$Lu_i(x) + f_i(x, u(x), ((\nabla u)^* \sigma)(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall 0 \leq i \leq k. \tag{3.19}$$

Théorème 3.3. [7]
Soit $u \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ une solution classique du système des EDP (3.19) telle que

$$E\left[\int_0^\infty e^{\lambda t} \left\| \left((\nabla u)^* \sigma \right)(X_t^x) \right\|^2 dt \right] < \infty \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(u(X_t^x), ((\nabla u)^* \sigma)(X_t^x))$ est la solution de l'EDSR (3.17).
En particulier on a $u(x) = Y_0^x$.

Démonstration
Il sufit d'appliqer la formule d'Itô ceci nous donne

$$Y_t^{x,i} = Y_T^{x,i} + \int_t^T f_i(X_s^x, Y_s^x, Z_s^x) ds - \int_t^T (Z_s^x dB_s)^i , \tag{3.20}$$

alors (Y_t^x, Z_t^x) est solution de l'EDSR (3.20). En particulier on a $Y_0^x = u(X_0^x) = u(x)$.

■

Nous allons maintenant prouver que $u(x) = Y_0^x$ est une solution de viscosité du système des EDP (3.19). Cependant, pour que la notion de solution de viscosité ait un sens,on est obligé de supposer que, pour tout i, f_i dépend seulement de la i^e ligne de la matrice z.

La i^e ligne de $(\nabla u)^* \sigma$ est le vecteur $(\nabla u_i)^* \sigma$, le système devient

$$L u_i(x) + f_i(x, u(x), ((\nabla u_i)^* \sigma)(x)) = 0. \tag{3.21}$$

Définition 3.2.
$-u \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ est applée une solution de vicosité du système d'EDP (3.19), si $\forall i = 0, ..k, \phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ maximum local de $u_i - \phi$, on a

$$- L\phi(x_0) - f_i(x_0, u(x_0), ((\nabla u_i)^* \sigma)(x_0)) \geq 0. \tag{3.22}$$

$-u \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)$ est applée une sur-solution de vicosité du système d'EDP (3.19), si $\forall i = 0, ..k, \phi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ maximum local de $u_i - \phi$, on a

$$-L\phi(x_0) - f_i(x_0, u(x_0), ((\nabla u_i)^* \sigma)(x_0)) \leq 0.$$

Une solution de viscosité est à la fois une solution et une sur-solution de viscocité.

Théorème 3.4. [5]
Sous les hypothèses ci-dessus, $u(x) = Y_0^x$ est une fonction continue qui satisfait

$$|Y_0^x| \leq \sqrt{c}\sqrt{E\left[\int_0^{\infty} e^{\lambda t}\left|f(X_t^x, 0, 0)\right|^2 dt\right]}\ ,\ \forall \lambda > 2\mu + K^2, \tag{3.23}$$

et c'est une solution de viscosité du système d'EDP (3.19).

Démonstration

- Pour la continuité de u, on applique le théorème (1.3).
- Pour l'inégalié, on applique le théorème (1.6), avec $\tau = \infty$ et $\xi = 0$.
- La démonstration de u solution de viscosité est similaire au cas parabolique.

Chapitre 4

Application des EDSR en Mathématiques Financières

4.1 Présentation de la finance mathématique

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [Bac00] intitulée Théorie de la spécualtion et soutenue à la Sorbonne en 1900, où il a découvert l'objet mathématique appelé aujourd'hui "mouvement brownien". Mais elle a pris une dimension nouvelle à partir de 1973 avec les travaux de Black et Scholes **[2]** sur l'évaluation ("pricing" en anglais). Ils sont les premiers à avoir proposé une méthode rigoureuse permettant aux banques de vendre à moindre risques les produits financiers appelés options. Qu'est ce qu'une option ?

Considérons une entreprise européenne, par exemple Airbus, qui vend des avions. Sa comptabilité s'effectue en euros. Cependant les avions sont réglés le plus souvent en dollars à la date de livraison T. Les sommes mises en jeu étant considérables, cette entreprise doit savoir de combien d'euros elle disposera à cette date. Or l'évolution incertaine de taux d'échanges euros/dollars peut provoquer des lourdes pertes (ou des gains importants). Si à la date $T = 0$, Airbus vend un avion à 1 milliard de dollars et si, à cette date $1\,euro = 1\,dollar$, l'entreprise espère alors gagner 1 milliard d'euros. Supposons qu'à la livraison, deux ans plus tard ($T = 2ans$), le cours ayant évolué, on ait $1\,euros = 2\,dollars$, l'entreprise ne perçoit que $1{=}2$ milliards d'euros, soit deux fois moins que la somme espérée deux ans plut tôt.

Les options servent à palier ce genre d'inconvénient. Ce sont des contrats qui donnent à leur possesseur le droit et non pas l'obligation de vendre ou d'acheter une certaine quantité d'actifs à une date future T à un prix fixe K appelé le strike, négocié à T' antérieure à T. Le possesseur de cette option a le choix de l'exercer ou non.

Reprenons le cas de l'exemple ci-dessus. L'option négociée entre Airbus et la banque offre la possibilité à l'acheteur de l'option de changer à la date $T = 2$, 1 milliard de dollars à un cours fixé K négocié à la date $T = 0$ (on parle alors d'options "at the money"). A la date $T = 2ans$, deux situations sont possibles :

- le cours est avantageux pour Airbus (par exemple $2\,euros = 1\,dollar$). L'entreprise choisit donc de ne pas exercer son option et change son argent au cours actuel. Elle perçoit deux milliards d'euros.

- L'évolution du cours est néfaste à Airbus ($1euro = 2doallars$). L'entreprise choisit d'exercer son option et récupére ainsi 1 milliard d'euros au lieu de 1=2 milliard.

La banque fait payer un prix pour cette option, prix que l'on peut comparer à une prime d'assurance. Ce prix est déterminé à la date T' et dépend de K, de T et d'autres paramètres visant à modéliser l'évolution du cours dollar/euro.

La banque cherche à se couvrir contre une évolution défavorable des cours. Black et Scholes ont introduit une méthode d'évaluation des prix d'options utilisant un modèle aléatoire mais permettant, en principe, à la banque de se couvrir.

Leurs hypothèses sont les suivantes : ils considèrent un mouvement brownien (c'est un processus aléatoire qui évoque souvent le chaos), et supposent que le cours obéit à une dynamique décrite par une exponentielle d'un brownien. Si P est le prix de l'actif, ils obtiennent qu'il existe un choix de processus $(H_t; t \geq 0)$ telque (on suppose ici que le taux d'intérêt sans rique est nul).

$$f(P_T) = E[f(P_T)] + \int_0^T H_t dP_t.$$

La fonction f dépend du type d'options et pour l'option évoquée plus haut on prendra $f(x) = (K-x)^+$ (on appelle cette fonction payoff). Ce payofff rend compte du fait que si le cours est supérieur à K Airbus aura intérêt à vendre ces dollars sur le marché et donc à ne pas exercer son option. Le premier terme de la somme est déterministe, c'est le prix de l'option. Le deuxième terme est une intégrale stochastique. L'intégrant représente la quantité d'actifs à détenir à chaque instant reproduire exactement ce que promet l'option, que l'on appelle la couverture. Les problèmes essentiels sont de calculer le prix et la couverture de l'option.

4.2 Terminologie financière

Notre étude est principalement centrée sur le problème des options, qui a été le moteur de la théorie et reste l'exemple le plus frappant de la pertinence des méthodes du calcul stochastique en finance.

4.2.1 Options

une option est un titre (produit dérivé en finance de marché) donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achet ou de vente) une quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance, dans une optique de spéculation ou d'assurance.

La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- la *nature de l'option* : on parle, suivant la termonologie anglo-saxone, de
  call : pour une option d'achat.
  put : pour une option de vente.
- l'*actif sous-jacent*, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc. On note Pt le prix de l'actif jous-jacent à l'instant t.

- le *montant*, c'est à dire la quantité d'actif sous jacent à acheter ou à vendre.
- Le *prix d'exercice* (strike en anglais), noté K, qui est le prix fixé d'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.
- L'*échéance* ou date d'expiration, notée T, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut etre exercée qu'à l'échéance , on parle d'une ***option européenne*** et si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédent l'échéance, on parle d'une ***option américaine.***

La problèmatique des Options

L'option, elle même, a un prix, appelé la prime (ou premium en anglais). Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le probléme du calcul du prime se pose. Et, même pour une option cotée, il peut etre intéressant de disposer d'une formule ou d'un modéle permettant de détecter d'éventuelles anomalies du marché.

Examinons pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance T, sur une action dont le cours à la date t est donné par P_t. Soit K le prix de l'exercice. Il est clair que si, à léchéance T, le prix K est supérieur au cours P_T , le détenteur de l'option n'a pas interêt à exercer. Par contre, si $P_t > K$, l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à $P_T - K$, en achetant l'action au prix K et la revendant sur le marché au cours P_T. On voit qu'à l'échéance, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(P_T - K)^+ = \max(P_T - K, 0).$$

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix K, et, par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale 4.2 Terminologie financière 66 à $(P_T - K)^+$. Au moment de la vente de l'option, qu'on prendra pour origine des temps, le cours P_T est inconnu et deux questions se posent :

1. Combien faut-il faire payer à l'acheteur de l'option, autrement dit comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(P_T - K)^+$ disponible à la date T ? C'est le problème du pricing.
2. Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant 0, parviendra-t-il à produire la richesse $(P_T - K)^+$ à la date T ? C'est le problème de couverture.

4.2.2 Modélisation mathématique : le modèle de Black et Scholes

La réponse aux deux questions qui précèdent ne peut se faire qu'à aprtir d'un minimum d'hypothèses de modélisation. l'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est que, dans un marché suffisamment fluide, il n'ya pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il est impossible de faire des profits sans faire face à des risques ; on le note souvent (AOA) pour désigner *Absence d'Opportunité d'Arbitrage.* De plus, on a besoin de modéliser de façon plus précise l'évolution des cours. Black et Scholes ont été les premiers à proposer un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call européen sur une action ne donnant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui, dans le cadre de modèle, permet au vendeur de l'option de se couvrir parfaitement, c'est à dire d'éliminer totalement le risque. Le prix du call est, dans le modèle de Black-Scholes, la somme d'argent dont on doit disposer intialement pour pouvoir suivre la stratégie de couverture et produire ainsi exactement la richesse $(P_T - K)^+$ à l'échéance.

Le modèle d'incertain.

Précisons la structure aléatoire qui affecte la dynamique des titres. L'espace de probabilité de référence est constitué de :

— l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \mathbb{P})$.
  - l'ensemble Ω, qui représente tous les états du monde.
  - la tribu $\mathcal{F}$, qui représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
  - une filtration croissante, (continue à droite si nécessaire), qui décrit l'information disponible à tous les agents du marché à la date t. (le caractère croissant de cette filtration traduit le fait que le marché n'oublie rien).
  - la classe $\mathcal{N}$ de tous les événements de $\mathcal{F}$ que le marché considère comme impossibles.
  - une probabilité $\mathbb{P}$, qui donne les probabilités à priori des événemetns considérés. C'est la probabilité historique ou objective.

— une constante positive T dite l'horizon de gestion du marché (échéance).

Nous supposons que $(m+1)$ actifs, les titres de bases $P^0, P^1, ..., P^m$ sont négociés entre les dates 0 et T. P_t^i désigne le prix de l'actif i à la date t. Tous les processus prix sont supposés positifs et continus en temps.

— L'actif P^0 est souvent le cash, c'est à dire le produit fiancier qui décrit la valeur de 1 Euro, capitalisé au jour à la banque. Il est alors considéré comme sans risque puisque son rendement rtdt dans un intervalle de temps $[t, t+dt]$ est connu à la date t de l'opération.

— L'information disponible à la date t englobe la connaissance du mouvement des actifs entre 0 et t : les prix des titres sont adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, (P_t^i est $\mathcal{F}_t$ mesurable).

— En général, nous supposerons que les aléas de l'économie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont engendrés par un brownien (W_t) d-dimensionnel, dont les composantes W_t^j sont des browniens réels indépendants.

— Nous supposons aussi que le titre sans risque P^0 vérifie

$$dP_t^0 = P_t^0 r_t dt.$$

— les actifs risqués $(P^i)_{1\leq i\leq m}$ sont supposés être des fonctions aléatoires d'Itô satisfaisant :

$$dP_t^i = P_t^i\left[\mu_t^i dt + \textstyle\sum_{j=1}^d \sigma_j^i(t)dW_t^j\right]$$

Nous désignons par

— $(\mu_t)_{t\leq T}$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$, processus adapté, de composantes μ_t^i ; c'est le vecteur des taux de rendement des titres de base.

— la matrice des volatilités des actifs est la matrice $(\sigma_t)_{t\leq T}$ de dimension $m \times d$, processus adapté, de terme général $\sigma_j^i(t)$.

Nous supposerons en général que ces procesus sont bornés. Cette même hypothèse est aussi souvent faite sur le processus $(r_t)_{t\leq T}$.

4.2.3 Portefeuille autofinançant

a) Stratégie de portefeuille

Nous modélisons le comportement d'un invistisseur, qui dispose d'un capital initial de x Euros, l'investit dans les actifs de base du marché. À la date t, son portefeuille se compose de δ_t^i parts de l'actif $i(i = 0, 1, ..., m)$; où $(\delta = \delta_t^0, \delta_t^1, ..., \delta_t^m)_{t\leq T}$ Les parts peuvent être positives ou négatives suivant qu'elles correspondent à un achat ou à une vente.

Une *stratégie de portefeuille* est la donnée des processus $\{(\delta_t^i)_{t\leq T}; i \in [0, m]\}$, représentant les quantités investies dans chacun des titres. Nous allons définir pour commencer les stratégies simples, pour lesquelles la composition du portefeuille ne change qu'un nombre fini de dates appellées *dates de trading*. En temps discret, une stratégie quelconque est une stratégie simple ; dans le cas général, ce sont les stratégies qui permettent de faire la transition entre le discret et le continu.

Définition 4.2.1

Une *stratégie simple de portefeuille* écrite sur les titres de base est la donnée d'un ensemble fini de dates de trading :

$$\Theta = \{(t_i)_{i=0}^n ; 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T\}$$

et de $m+1$ processus $\{(\delta_t^i)_{t\leq T}; i \in [0, m]\}$ qui donnent la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps

$$\delta_t = n_0^i 1_{[0,t_1]}(t) + ... + n_k^i 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + ... + n_{n-1}^i 1_{]t_{n-1},t_n]}(t)$$

où les variables n_k^i sont $\mathcal{F}_{tk}$-mesurables.

La valeur financière (liquidative) du portefeuille δ est notée $V^\delta = (V_t^\delta)_{t\leq T}$. A la date t, elle vaut

$$V_t^\delta =< \delta_t, P_t >= \sum_{i=0}^m \delta_t^i P_t^i.$$

Remarque 4.2.2

Pour tout t de l'intervalle $]t_k, t_{k+1}], \delta_t^i = \delta_{tk+1}^i = n_k^i$; la partie investie de l'actif i est donc $\mathcal{F}_{tk}$-mesurable, c'est à dire ne dépend que des informations disponibles à la date de négociation précédente.

On dit que le processus $(\delta_t^i)_{t\leq T}$ est *prévisible*.Le processus $(V_t^\delta)_{t\leq T}$ est adapté. En temps continu, comme les prix des actifs sont continus par hypothèse, et que les stratégies simples de portefeuille sont des processus continus à gauche, la valeur financière d'un portefeuille simple est continue à gauche.

b) Autofinancement

Entre les dates t_k et t_{k+1}, un investisseur qui suit la stratégie δ place n_k^i unités dans l'actif P^i. Juste avant une renégociation, à la date t_{k+1}, la valeur du portefeuille vaut : $< n_k, P_{tk+1} >$: A l'instant t_{k+1}, l'investissuer forme un nouveau portefeuille, c'est à dire une répartition différente des poids des différents actifs, à partir des informations disponibles à la date t_{k+1}. Supposons qu'aucune somme n'est investie (ou désinvestie) de manière exogène à l'instant t_{k+1} ; la condition d'autofinacement se traduit par :

$$< n_k, P_{tk+1} >=< n_{k+1}, P_{tk+1} >,$$

soit encore en mettant en évidence la variation des actifs entre les deux dates de renégociation

$$V_{t\ k+1}^\delta - V_k^\delta =< n_k, P_{tk+1} - P_{tk} >.$$

Les variations d'un portefeuille autofinançant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs.

Remarque 4.2.3

La condition d'autofiancement implique que la valeur du portefeuille n'a pas de sauts aux instants de renégociation. Dans un modèle en temps continu, cela entraîne que c'est un processus continu. Notons d'ailleurs que la condition d'autofinancement est une condition nécessaire et suffisante pour la continuité du processus de valeur d'un portefeuille. Ces propriétés sont synthétisées ci-dessous.

c) Condition d'autofinancement

Définition 4.2.4

(i) Soit (θ, δ) une stratégie simple de trading autofinançante. La valeur du portefeuille s'écrit alors comme l'intégrale stochastique par rapport aux pris des actifs de base $(P^i)_{0\leq i\leq m}$ de la stratégie simple de trading δ. Elle est caratérisée par :

$$\begin{cases} V_t^\delta =< \delta_t, P_t >, \\ V_t^\delta - V_0^\delta = \displaystyle\int_0^t < \delta_s, dP_s > . \end{cases}$$

(ii) **Extension**

Si nous supposons maintenant que les prix des actifs de base sont des processus d'Itô et que δ est un processus vectoriel adapté, pour lequel l'intégrale stochastique (vectorielle) par rapport aux actifs de base est bien définie, le processus δ est une stratégie de portefeuille autofiançante, de valeur V_t^δ si la condition d'autofinacement est satisfaite.

Le cas des processus d'Itô

Nous avons une description plus précise de la valeur de la dynamique d'un portefeuille autofinançant en termes de vecteur rendement et de matrice de volatilité.

$$\begin{aligned}dV_t^\delta &= \sum_{i=0}^{m} \delta_t^i dP_t^i \\ &= \delta_t^0 P_t^0 r_t dt + \sum_{i=1}^{m} \delta_t^i P_t^i \mu_t^i dt + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} \delta_t^i P_t^i \mu_t^i \sigma_t^{i,j} dW_t^j \\ &= \delta_t^0 P_t^0 r_t dt < (\delta P)_t, \mu_t > dt + < (\delta P)_t, \sigma_t dW_t > .\end{aligned}$$

Il reste à éliminer δ_t^0 en utilisant l'équation d'autofinancement pour en déduire que la valeur du portefeuille est solution de l'équation suivante :

$$dV_t = V_t r_t dt + < (\delta P)_t, \mu_t - r_t \mathbf{1} > dt + < (\delta P)_t, \sigma_t dW_t > .$$

Posons $\pi_t = (\delta P)_t$ le vecteur de composants $(\delta_t^i P_t^i)^m i = 1$, soit le vecteurs qui décrit les montants investis dans les titres risqués.

1 est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Par conséquent,

$$dV_t = dV_t^\pi = r_t V_t dt + < \pi_t, \mu_t - r_t \mathbf{1} > dt + < \pi_t, \sigma_t dW_t > . \quad (4.1)$$

Réciproquement, un processus $(V_t)_{t \le T}$, solution de l'équation (4.2.1) est la valeur financière d'un portefeuille autofinançant, correspondant à un investissement de $(\delta_t^i)^m i = 1$ dans les actifs risqués et de $\frac{1}{P_t^0}(V_t^\delta - \sum_{i=0}^m \delta_t^i P_t^i)$ dans le titre sans risque.

Remarque 4.2.5

L'équation différentielle linéaire (4.2.1) ayant une unique solution, la connaissance de l'investissement initial et de la quantité investie dans les actifs risqués suffit à caractériser complétement la valeur d'un portefeuille.

d) Stratégie admissible et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur les signes des quantités δ_t^i. Dire que $\delta_t^i < 0$, signifie qu'on a des dettes libellées en actifs à risques (par suite de ventes à découvert). Les emprunts et les ventes à découvert sont donc permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout instant.

Définition 4.2.6

Une stratégie de portefeuille (V, π) est dite **admissible** si elle est autofinancée et si $\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, $\int_0^T |\pi_s^i|^2 ds < \infty$ et $V_t \ge 0$ pour tout t dans l'interval $[0; T]$.

L'investisseur doit étre en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans aucun risque en particulier sans mise initiale. Cela se traduit par la définition suivante lorsqu'on suppose que l'investisseur intervient durant la période $[0, T]$.

Définition 4.2.7

Une stratégie d'**opportunité d'arbitrage** est une stratégie de portefeuille admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

$$\begin{cases} V_0^\pi = 0, \\ \mathbb{P}[V_T^\pi \ge 0] = 1, \\ \mathbb{P}[\{V_T^\pi > 0\}] = 0. \end{cases}$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit.

On imagine sans peine que les gens qui tendent de réguler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tardera pas à «exploser». Une hypothèse commune faite est donc celle d'absence d'oppotunité d'arbitrage.

Dans les modèles continus, des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sont nécessaires pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage, car il existe des intégrales stochastiques qui sont des arbitrages.

Nous supposons que l'ensemble $\mathcal{A}$ des stratgies admissibles est un espace vectoriel, qui contient les stratégies constantes, et qui est stable par recollement au sens ou deux stratégies peuvent être recollées sur un même ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_t$ en une stratégie admissible.

Il faut que l'ensemble $\mathcal{A}$ soit assez riche pour permettre l'évaluation de nombreux produits dérivés, et pas trop gros pour éviter les opportunités d'arbitrage. Des hypothèses de type carré intégrable, sur la valeur de portefeuille et les martingales associées sont en général suffisantes.

4.3 Exemple

Un problème fréquent en finance consiste à donner un prix aux options. Une option européenne d'achat, un "Call", de maturité et de prix d'exercice K, est un contrat qui donne le droit, mais non l'obligation à son détenteur d'acheter une part de l'action au prix d'exercice K à la date T. Le vendeur de l'option s'engage donc à payer à son détenteur la somme ξ telle que :

$$\xi = (S_T - K)^+ \tag{4.2}$$

qui représente le profit que permet l'exercice de l'option. Plus généralement on peut imaginer un actif contingent dont le bénéfice est une variable aléatoire positive ξ qui dépend de $(S_t)_{0\leq t\leq T}$. A quel prix v vendre l'option ? Le vendeur doit s'assurer qu'en vendant l'option au prix v à la date $t = 0$, il disposera de la somme ξ à la date $t = T$

Pour trouver v, l'idée fondamentale est la duplication : le vendeur vend l'option au prix v et investit cette somme dans le marché. Il peut investir soit dans l'action qui suit le cours

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dW_r \ , \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.3}$$

soit dans un placement sans risque, dont le taux de rendement est fixe, égale à r, d'où le prix d'une part est donné par

$$R_t = R_0 e^{rt}. \tag{4.4}$$

Donc sa richesse à l'instant t est V_t, telle que

$$V_t = q_t S_t + p_t R_t, \tag{4.5}$$

où q_t est le nombre des parts d'actions, et p_t est celui d'actif sans risque, il s'en suit

$$\begin{aligned} dV_t &= q_t dS_t + p_t dR_t \\ &= r p_t R_t dt + q_t S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

L'évolution de la richesse ne dépend que de la variation des prix, et comme

$$p_t R_t = V_t - q_t S_t.$$

On obtient

$$dV_t = rV_t dt + \sigma q_t S_t \tfrac{\mu - r}{\sigma} dt + q_t S_t \sigma dW_t.$$

Notons

$$Z_t = +\sigma q_t S_t \text{ et } \theta = \tfrac{\mu - r}{\sigma}.$$

On a

$$dV_t = rV_t dt + \theta Z_t dt + Z_t dW_t, \tag{4.7}$$

et le vendeur veut obtenir $V_T = \xi$. L'EDSR (4.7), devient alors

$$V_t = \xi + \int_t^T (-rV_s - \theta Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{4.8}$$

On obtient ici une EDSR linéaire que l'on peut résoudre explicitement, d'où

$$V_t = E^{\mathcal{F}_t}\left[\xi \exp\left(-\theta(W_T - W_t) + \frac{\theta^2}{2}(T-t) - r(T-t)\right)\right], \tag{4.9}$$

et comme $v = V_0$, on a

$$v = E\left[e^{-rT}\xi \exp\left(-\theta W_T + \frac{\theta^2}{2} T\right)\right]. \tag{4.10}$$

On peut calculer cette espérance et on obtient la formule de Black-Scholes suivante

$$\begin{aligned} v &= S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T}) \text{ , où} \\ d &= \tfrac{\ln(\frac{S_0}{K}) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \text{ , et } \quad \Phi(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} c^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned} \tag{4.11}$$

■

Conclusion

Les EDSR est une importantes classes des EDS dont le champ d'application est vraiment immense et les mathématiques financière sont l'un de ces branches d'applications. Notre future objet d'étude en doctorat est l'étude des EDSR rigit par un mouvement Brownien fractionnaire.

Bibliographie

[1] **J. M. Bismut**. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Appl.*, 44(2) :384-404, 1973.

[2] **F. Black et M. Scholes**. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3) :637-654, 1973.

[3] **P. Briand**. Équations différentielles stochastiques rétrogrades, cours. *Univ. Paul Sabatier*, Mars 2001.

[4] **R. W. R. Darling and E. Pardoux**. Backwards sde with random terminal time and applications to semilinear elliptic pde. *The Annals of Probability*, 25(3) :1135- 1159, 1997.

[5] **N. El Karoui, S. Peng, M. C. Quenez**. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical finance*, 7(1) :1-71, 1997.

[6] **W.H. Fleming, H.M. Soner**. Con trollcd markov processes and viscosity solutions, 1993.

[7] **A. Matoussi**. Backward stochastic differential equations and applications in pdes and in finance. *Mathematical Modeling in Finance*, October, 3-7 2005.

[8] **E. Pardoux**. Quelques méthodes probabilistes pour les équations aux dérivées partielles. In ESAIM : *Proceedings*, volume 6, pages 91-109. EDP Sciences, Septembre 1998.

[9] **E. Pardoux and S. Peng**. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters*, 14(1) :55-61, 1990.

[10] **S. Peng**. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics and stochastics reports (Print)*, 37(1-2) :61-74, 1991.

[11] **S. Peng**. Stochastic hamilton-jacobi-bellman equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30(2) :284-304, 1992.

[12] **A. Popier**. *Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec condition finale singulière.* PhD thesis, Ecole Doctorale Physique et Sciences de la Matière (Marseille), Décembre 2004.

[13] **S. Rainero**. Mémoire de DEA. *Univ. Paris-Dauphine*, septembre 2001.