الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــةالـعـلــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: AnalyseMathématique

Par:
GHRIS Amar

THEME

Produit tensoriel et Opérateurs idéaux

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. ALLAOUI Saleh Eddine	*M.C.A*	*Président*
Mr. OUCHENANE Djamel	*M.C.B*	*Examinateur*
Mr. BOUGOUTAIA Amar	*M.A.A*	*Examinateur*
Mr. BELACEL Amar	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2017/2018

Remerciement

Au nom d'**Allah**, le Miséricordieux, le Compatissant.

Je remercie les membres de jury Dr. Allaoui Saleh Eddine président de jury, Dr. Ouchenane Djamel et Bougoutaia Amar examinateurs, pour avoir accepter d'examiner ce projet.
Dr. Belacel Amar. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.
Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi,« Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».
J'adresse mes sincères remerciements à tous enseignants, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.
Je remercie mes frères et mes sœurs
Enfin, je remercie tous mes amis que j'aime tant, pour leur sincère amitié et confiance, et à qui je dois ma reconnaissance et mon attachement.
À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Dédicace

Je dédie ce travail a celle qui ma donné la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, a ma mère.
A mon père, école de mon enfance qui a été mon ombre durant toutes les années des études qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner de l'aide et a me protéger.
A mes frères et mes sœurs.
A toute ma famille ma grand-mère, mes oncles, mes tentes, mes cousins et mes cousines.
A mes amis.
A tous mes enseignants qui m'ont enseigné le long de mon parcours éducatif,

Je dédie ce travail .

ملخص

لقد درسنا الجداء الموتري بين فضاءين. وأعطينا بعض الخصائص الجبرية والطوبولوجية، خاصة الثنوي، ولقد مثلنا بعض المثل بالجداء الموتري.

الكلمات المفتاحية

الجداء الموتري ، الفضاء الثنوي، مثالي.

Résumé

Nous avons étudié le produit tensoriel entre deux espaces. Nous avons donné quelques propriétés algébriques et topologiques, notamment, le dual. Nous avons représenté quelques idéaux par des produits tensoriels.

Abstract

We studied the tensor product between two spaces. We have given some algebraic and topological properties, notably, the dual. We have presented some ideals by tensor products.

Table des matières

Introduction

Le sujet de ce mémoire est l'étude du produit tensoriel de deux espaces dans le cas au espaces vectoriels et espaces de Banach. Où divisons-nous ce travail en quatre chapitres :

- Dans **le premier chapitre**, nous rappelons la définition des applications linéaires et applications bilinéaires et donnons certaines de leurs propriétés, et la définition de l'espace dual.
- Le but du **le deuxième chapitre** est de définir un produit tensoriel de deux espaces vectoriels, nous donnons quelques propriétés et un example. Nous caractérisons son dual algébrique.
- Dans **le troisième chapitre**, nous étudions le produit tensoriel projectif, où nous démontrons que son dual topologique est isométriquement isomorphe avec l'espace des applications linéaires nucléaires.
- Et dans **le quatrième chapitre**, nous étudions le produit tensoriel injectif, et prouvons que son dual topologique est isométriquement isomorphe avec l'espace des formes bilinéaires intégrales.

Notations

$L(X,Y)$	L'espace vectoriel des applications linéaires de X dans Y.
$X' = L(X,\mathbb{K})$	Le dual algébrique de X.
$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y.
$X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$	Le dual topologique de X.
$L(X)$	L'espace vectoriel des applications linéaires de X dans X.
$F(X_1 \times X_2, Y)$	L'espace de toutes les applications de $X_1 \times X_2$ dans Y.
$B(X_1 \times X_2, Y)$	L'espace des applications bilinéaires de $X_1 \times X_2$ dans Y.
$\mathcal{B}(X_1 \times X_2, Y)$	L'espace des applications bilinéaires continues de $X_1 \times X_2$ dans Y.
$B(X_1 \times X_2)$	L'espace des formes bilinéaires de $X_1 \times X_2$ dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$	L'espace des formes bilinéaires continues de $X_1 \times X_2$ dans $\mathbb{K}$.
$X \otimes Y$	le produit tensoriel de deux espaces X et Y.
$X \otimes_\pi Y$	L'espace $X \otimes Y$ muni de la norme π.
$X \hat{\otimes}_\pi Y$	Complétion de $X \otimes_\pi Y$.
$X \otimes_\varepsilon Y$	L'espace $X \otimes Y$ muni de la norme ε.
$X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$	Complétion de $X \otimes_\varepsilon Y$.
$\mathcal{B}_I(X \times Y)$	L'espace des formes bilinéaires bornées intégrales.
$\mathcal{N}(X,Y)$	L'espace des applications nucléaires de X dans Y.

Chapitre 1

Applications linéaires et bilinéaires

1.1 Applications linéaires

Définition 1.1. *Soient X et Y deux ensembles, on dit que U est une application de X dans Y. Si $E \subset X$ et $F \subset Y$, l'image $U(E)$ de E et l'image réciproque $U^{-1}(F)$ de F sont définies par :*

$$U(E) = \{U(x) : x \in E\}, \quad U^{-1}(F) = \{x : U(x) \in F\}$$

Définition 1.2. *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. On dit qu'une application U de X dans Y est linéaire, si, pour tout couple (x,y) de vecteurs de X et pour tout couple (α, β) des scalaires,*

$$U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

On dit aussi que U est un morphisme d'espaces vectoriels.
On appelle forme linéaire sur X une application linéaire $U : E \to \mathbb{K}$.

Notation 1.1. *$L(X, Y)$, l'espace des application linéaires de X vers Y.*

Définition 1.3. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel :*

$$L(X, \mathbb{K})$$

des applications linéaires de X vers $\mathbb{K}$, est appelée le dual algébrique de X, et noté X'.

Définition 1.4. *Soient X et Y deux espaces normés sur le corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire $U : X \to Y$ est bornée si :*

$$\exists c > 0, \forall x \in X, \|U(x)\| \leq c\|x\|.$$

Proposition 1.1. *X et Y deux espaces normés sur $\mathbb{K}$ et $U \in L(X, Y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) U est continue sur X.

2) U est continue en 0.

3) U est bornée sur la boule unité fermée B_X.

4) $\exists c > 0, \forall x \in X$:

$$\|U(x)\| \leq c\|x\|.$$

Démonstration.

1 ⇒ 2) On a U continue sur X donc U est continue en 0.

2 ⇒ 3) On a U continue en 0, donc

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|U(x)\| \leq 1.$$

Soit $x \in B_X$, donc

$$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|\alpha x\| \leq \alpha \Rightarrow \|U(\alpha x)\| \leq 1.$$

Or U est linéaire, alors

$$\alpha\|U(x)\| \leq 1 \Rightarrow \|U(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

On déduit que U est bornée sur B_X.

$3 \Rightarrow 4)$ On a U bornée sur B_X, donc

$$\exists c > 0, \forall x \in X, \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|U(x)\| \leq c.$$

Soit $x \in X/\{0\}$, alors

$$\|\frac{1}{\|x\|}x\| = 1 \Rightarrow \|U(\frac{1}{\|x\|}x)\| \leq c.$$

Or U est linéaire, alors

$$\frac{1}{\|x\|}\|U(x)\| \leq c \Rightarrow \|U(x)\| \leq c\|x\|.$$

La relation reste valable pour $x = 0$, donc

$$\forall x \in X, \|U(x)\| \leq c\|x\|.$$

$4 \Rightarrow 1)$ On a :

$$\forall x, y \in X, \|U(x-y)\| \leq c\|x-y\|.$$

Or U est linéaire, donc

$$\forall x, y \in X, \|U(x) - U(y)\| \leq c\|x-y\|.$$

D'où U est lipschitzienne sur X. On déduit que U est continue sur X. $\square$

Notation 1.2. *$\mathcal{L}(X,Y)$, l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.*

Définition 1.5. *Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. L'espace :*

$$\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

des formes linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$, est appelée le dual topologique de X, et on le note par X^*.

Exemple 1.1. *On a :*

$$\forall \in f \in \mathcal{C}([0,1]), |f(0)| \leq \|f\|_\infty,$$

donc l'application linéaire $f \mapsto f(0)$ est continue sur $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$

Proposition 1.2. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Si X est de dimension finie alors toute applications linéaires de X dans Y est continue.*

Démonstration. X est de dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes sur X donc on peut considérer X muni de la norme $\|\|_\infty$.

- Si $X = \{0\}$ alors $U = 0$ donc U est continue sur X.
- Sinon, soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de X et $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in X$ donc :

$$\|U(x)\| = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U(e_k)\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \|U(e_k)\| \leq (\sum_{k=1}^{n} \|U(e_k)\|) \|x\|_\infty.$$

D'où U est continue sur X. □

Définition 1.6. *On dit qu'un espace normé X est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X. Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach.*

Définition 1.7. *Soit X un espace de Banach.*

- *La topologie faible est la topologie la plus faible sur X rendant continues toutes les applications $\varphi \in X^*$. On la note $\sigma(X; X^*)$.*

- *La topologie faible$-*$ est la topologie la plus faible sur X^* rendant continues toutes les applications $\varphi_x, x \in X$. On la note $\sigma(X^*; X)$.*

Théorème 1.1. *L'ensemble*

$$B_{X^*} = \{\varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}$$

est compact pour la topologie faible$-*$ $\sigma(X^*; X)$.

1.2 Applications bilinéaires

Définition 1.8. *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application B de $X \times Y$ dans un espace vectoriel Z sur $\mathbb{K}$ est bilinéaire si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

a) Pour tout élément x de X, l'application $x \longmapsto$ B(x,y) est une application linéaire de X dans Z;

b) Pour tout élément y de Y, l'application $y \longmapsto$ B(x,y) est une application linéaire de Y dans Z.
Lorsque Z=$\mathbb{K}$, on retrouve la notion d'une forme bilinéaire.

Exemple 1.2. *soit $L(X)$ L'espace vectoriel des endomorphismes d'un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$. L'application (U, V)$\longmapsto$ UV est une application bilinéaire de $L(X)\times L(X)$ dans $L(X)$.*

Définition 1.9. *Soient X et Y deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle espace normé produit $(X \times Y, \|.\|_{X\times Y})$ l'espace vectoriel $X \times Y$ des couples $(x, y) \in X \times Y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, muni des opérations usuelles*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

et avec la norme

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max(\|x\|, \|y\|).$$

Définition 1.10. *Soient X, Y et Z trois espaces normés sur le corps $\mathbb{K}$, et $X \times Y$ muni de la norme produit. Une application bilinéaire $B : X \times Y \to Z$ est bornée si :*

$$\exists c > 0, \forall x \in X, \forall y \in Y, \|B(x,y)\| \leq c\|x\|\|y\|.$$

Proposition 1.3. *Soient X, Y et Z trois espaces normés sur $\mathbb{K}$ et $B : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire. On considère $X \times Y$ muni de la norme produit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) B est continue sur $X \times Y$.

2) B est continue en (0,0).

3) B est bornée sur la boule unité fermée $B((0,0),1)$.

4) $\exists c > 0, \forall x \in X, \forall y \in Y$:

$$\|B(x,y)\| \leq c\|x\|\|y\|.$$

Démonstration.

1⇒ 2) On a B continue sur $X \times Y$ donc B est continue en (0, 0).

2⇒ 3) On a B continue en (0 ,0) donc

$$\exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in X \times Y, \|(x,y)\| \leq \alpha \Rightarrow \|B(x,y)\| \leq 1.$$

Soit $(x,y) \in B((0,0),1)$ donc

$$\|(x,y)\| \leq 1 \Rightarrow \|\alpha(x,y)\| \leq \alpha \Rightarrow \|B(\alpha(x,y)\| \leq 1.$$

Or B est bilinéaire sur $X \times Y$ donc

$$\alpha^2\|B(x,y)\| \leq 1 \Rightarrow \|B(x,y)\| \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

On déduit que B est bornée sur $B((0,0),1)$.

3⇒ 4) On a B bornée sur $B((0,0),1)$ donc

$$\exists k>0, \forall (x,y)\in X\times Y, \|(x,y)\|\leq 1 \Rightarrow \|B(x,y)\|\leq k.$$

Soit $(x,y)\in X\times Y$. Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$ alors

$$\|(\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y)\| = \max(\frac{\|x\|}{\|x\|}, \frac{\|y\|}{\|y\|}) = 1.$$

Donc

$$\|B(\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y)\| \leq k.$$

Or B est bilinéaire sur $X\times Y$ donc

$$\frac{1}{\|x\|\|y\|}\|B(x,y)\| \leq k \Rightarrow \|B(x,y)\| \leq k\|x\|\|y\|.$$

Si $x=0$ ou $y=0$ alors $B(x,y)=0$ car B est bilinéaire donc

$$\|B(x,y)\| = 0 \leq k\|x\|\|y\|.$$

On déduit que

$$\forall (x,y)\in X\times Y, \|B(x,y)\| \leq k\|x\|\|y\|.$$

4⇒ 1) Soit $(x,y)\in X\times Y$ et $(x_n,y_n)\in (X\times Y)$, $n\in\mathbb{N}$ telle que $(x_n,y_n)\to(x,y)$ donc $yx_n\to x$ et $y_n\to y$. On a

$$\begin{aligned} B(x_n,y_n)-B(x,y) &= B(x_n,y_n)-B(x_n,y)+B(x_n,y)-B(x,y) \\ &= B(x_n,y_n-y)+B(x_n-x,y). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|B(x_n,y_n)-B(x,y)\| &\leq \|B(x_n,y_n-y)\|+\|B(x_n-x,y)\| \\ &\leq k\|x_n\|\|y_n-y\|+k\|y\|\|x_n-x\|. \end{aligned}$$

Or $x_n\to x$ et $y_n\to y$ donc $x_n-x\to 0$, $y_n-y\to 0$ et (x_n) bornée donc $\|B(x_n,y_n)-B(x,y)\|\to 0$ d'où B est continue en (x, y). On déduit que B est continue sur $X\times Y$. □

Exemple 1.3.

1) Soit X espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Le produit externe sur X, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, est une application bilinéaire continue sur $\mathbb{K} \times X$. Car :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

2) Soit X un espace pré-hilbertien réel. Le produit scalaire, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, est continue sur X^2. En effet, c'est une application bilinéaire sur X^2 et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in X, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

3) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normé sur $\mathbb{K}$. Le produit sur $\mathcal{A}$,$(x, y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathcal{A}^2$. En effet, c'est une application bilinéaire sur $\mathcal{A}^2$ et :

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Proposition 1.4. *Soient X, Y et Z trois espaces vectoriels normés. Si X et Y sont de dimension finies alors les applications bilinéaires de $X \times Y$ dans Z sont continues sur $X \times Y$.*

Démonstration. X et Y sont de dimensions finies donc par équivalence de normes sur chaque espace on peut considérer X et Y munis de la norme $\|.\|_\infty$.
Soit $B : X \times Y \to Z$ bilinéaire. Si $X = \{0\}$ ou $Y = \{0\}$ alors $B = 0$ donc B est continue sur X. Sinon, soit $(x_1, ..., x_n)$ une base de X, $(y_1, ..., y_m)$ une base de Y ;

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in X, \quad y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \in Y$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|B(x,y)\| &= \|B(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i)\| \\
&\leq \|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_k\mu_i B(x_k, y_i)\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_k||\mu_i|\|B(x_k, y_i)\| \\
&\leq (\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\|B(x_k, y_i)\|)\|\|x\|_\infty\|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où B est continue sur $X \times Y$. □

Proposition 1.5.

1. *Pour tout espace vectoriel Y sur $\mathbb{K}$, les applications bilinéaires de $X_1 \times X_2$ dans Y constituent un sous-espace vectoriel, noté $B(X_1 \times X_2, Y)$, de l'espace vectoriel $F(X_1 \times X_2, Y)$ de toutes les applications de $X_1 \times X_2$ dans Y.*
   Lorsque Y=$\mathbb{K}$, par $B(X_1 \times X_2)$.

2. *Soient Y et Z deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, B une application bilinéaire de $X_1 \times X_2$ dans Y, et U une application linéaire de Y dans Z. Alors $U \circ A$ est une application bilinéaire de $X_1 \times X_2$ dans Z.*

3. *Soient $X_1^{'}$ et $X_2^{'}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, B une application bilinéaire de $X_1 \times X_2$ dans un espace vectoriel Y sur $\mathbb{K}$, U_1 une application linéaire de $X_1^{'}$ dans X_1 et U_2 une application linéaire de $X_2^{'}$ dans X_2. Alors l'application qui à tout élément $(x_1^{'}, x_2^{'})$ de $X_1^{'} \times X_2^{'}$ associe l'élément $A(U_1(x_1^{'}), U_2(x_2^{'}))$ de Y est une application bilinéaire de $X_1^{'} \times X_2^{'}$ dans Y.*

Chapitre 2

Produit Tensoriel

2.1 Espaces quotients

Définition 2.1. *Soit X un espace vectoriel et G un sous-espace de X. Alors le quotient de groupes abéliens X/G, dont l'ensemble est $\{x + G \mid x \in X\}$, est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, appelé espace quotient, muni de la loi interne :*

$$\begin{aligned} + : X/G \times X/G &\to X/G \\ (x + G, x' + G) &\mapsto (x + G) + (x' + G) := (x + x') + G \end{aligned}$$

et de la loi externe

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times X/G &\to X/G \\ (\lambda, x + G) &\mapsto \lambda \cdot (x + G) := (\lambda x) + G. \end{aligned}$$

Le homomorphisme

$$\begin{aligned} \pi : X &\to X/G \\ x &\mapsto x + G \end{aligned}$$

est appelé application quotient ou projection canonique.

2.2 Définition du produit tensoriel

Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On note $[X \times Y]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des combinaisons linéaires d'éléments du produit $X \times Y$. Plus précisément :

$$[X \times Y] = \{ \sum_{(x,y)\in A} \lambda_{(x,y)}(x,y)/A \text{ partie finie de } X \times Y,\ \lambda_{(x,y)} \in \mathbb{K}\}.$$

On note G le sous-espace vectoriel de $[X \times Y]$ engendré par les éléments de la forme :

$$(\sum_{(x\in A_1} \lambda_x x, \sum_{y\in A_2} \mu_y y) - \sum_{(x,y)\in A} \lambda_x \mu_y (x,y).$$

Nous allons identifier ces éléments à zéro, c'est-à-dire qu'on définit :

$$X \otimes Y = [X \times Y]/G.$$

Définition 2.2. *L'espace vectoriel $X \otimes Y$ est appelé le produit tensoriel de X par Y sur le corps $\mathbb{K}$.*

Notons alors ϕ l'application qui à (x,y) fait correspondre sa classe, qu'on note encore $x \otimes y$. Soit ϕ la restriction à $X \times Y$ de la surjection canonique de $[X \times Y]$ sur son quotient $X \otimes Y$.

Proposition 2.1. *Soit A_1(resp. A_2) une partie finie de X (resp. de Y).*

(1) les éléments $x \otimes y$ forment un système de générateurs de $X \otimes Y$.

(2)

$$(\sum_{x\in A_1} \lambda_x x) \otimes (\sum_{y\in A_2} \mu_y y) = \sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} \lambda_x \mu_y (x \otimes y).$$

La relation (2) peut encore s'exprimer en disant que l'application ϕ est bilinéaire. En particulier d'après la relation (2) on peut écrire :

$$(\lambda x) \otimes (\mu y) = \lambda\mu(x \otimes y),$$

ce qui, sachant que les éléments $x \otimes y$ engendrent $X \otimes Y$, nous permet d'écrire tout élément de $X \otimes Y$ sous la forme :

$$u = \sum_{(x,y)\in A} x \otimes y;$$

où A est une partie finie de $X \otimes Y$. Cette écriture n'est pas unique comme :

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y.$$

Proposition 2.2. *L'application ϕ, avec*

$$\begin{array}{rcl} \phi : X \times Y & \to & X \otimes Y \\ (x, y) & \mapsto & x \otimes y \end{array}$$

est une application bilinéaire vérifie :

(i) Distributivité par rapport à la somme :
$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall y \in Y$ *:*

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$\forall x \in X, \forall y_1 \in Y, \forall y_2 \in Y$ *:*

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

(ii) Associativité relative à la loi externe :

$$\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$$

(iii) $\forall x \in X, \forall y \in Y$ *:*

$$0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$$

2.3 Applications bilinéaires et produits tensoriels

Nous en arrivons alors au cœur du sujet, c'est-à-dire la correspondance entre application bilinéaires sur $X \times Y$ et application linéaire sur $X \otimes Y$. Nous allons noter $L(X \otimes Y, Z)$ l'ensemble des applications linéaires de $X \otimes Y$ dans Z.

Théorème 2.1. *L'application Ψ définie sur $L(X \otimes Y, Z)$ par $\Psi(b) = b \circ \phi$ est un isomorphisme de $L(X \otimes Y, Z)$ dans $B(X \times Y, Z)$.*

Démonstration. Soit $b \in L(X \otimes Y, Z)$ et $B = \Psi(b) = b \circ \phi$. B est une application bilinéaire et que l'application Ψ est linéaire. Cette application est injective, en effet, si $\Psi(b) = 0$, c'est que

$$b \circ \phi(x, y) = 0; \quad \forall x \in X, y \in Y,$$

c'est-à-dire

$$b(x \otimes y) = 0; \quad \forall x \otimes y \in X \otimes Y.$$

Comme ces derniers éléments engendrent l'espace $X \otimes Y$, c'est que

$$b = 0$$

L'application Ψ est aussi surjective. En effet, soit $B \in B(X \times Y, Z)$. Pour tout élément $u \in X \otimes Y$ définissons $b(u)$ de la façon suivante : on prend une représentation de u sous la forme $u = \sum_{(x,y)\in A} \lambda_{x,y} x \otimes y$ et on pose

$$b(u) = \sum_{(x,y)\in A} \lambda_{x,y} B(x, y).$$

cette façon de définir $b(u)$ est bien indépendante de la représentation choisies pour u en vertu de la définition de G. On a bien trouvé b tel que

$$\Psi(b) = B.$$

□

Ainsi le produit tensoriel de X et de Y est un espace vectoriel T qui vérifie :

Proposition 2.3. *Il existe une application bilinéaire ϕ de $X \times Y$ dans T de telle sorte que :*

(1) $\phi(X \times Y)$ engendre T ;

(2) pour tout espace vectoriel Z, l'application Ψ de $L(T, Z)$ sur $B(X \times Y, Z)$ définie par $\Psi(b) = b \circ \phi$ est un isomorphisme.

Cette propriété donne lieu au résultat universel suivant :

Théorème 2.2. *Soit V un espace qui vérifie Proposition 2.3 c'est-à-dire qu'il existe une application bilinéaire θ de $X \times Y$ dans V de telle sorte que :*

(1) $\theta(X \times Y)$ engendre V ;

(2) pour tout espace vectoriel Z, l'application ξ de $L(V, Z)$ sur $B(X \times Y, Z)$ définie par $\xi(c) = c \circ \theta$ est un isomorphisme . Alors V est isomorphe à $X \otimes Y$.

Démonstration. Soit θ l'application bilinéaire de $X \times Y$ dans V donnée par Proposition 2.3. Si on prend $W = X \otimes Y$ et si on considère l'application bilinéaire $\phi \in B(X \times Y, X \otimes Y)$, alors par hypothèse il existe une application linéaire c unique de V dans W telle que

$$c \circ \theta = \phi.$$

Par ailleurs, d'après ce qu'on a démontré sur les produits tensoriels, on sait qu'il existe une unique application linéaire ν de $X \otimes Y$ dans V telle que

$$\nu \circ \phi = \theta.$$

En conséquence

$$\nu \circ c \circ \theta = \theta.$$

Mais par hypothèse, $\theta(X \times Y)$ est une partie génératrice de V. Donc l'application $\nu \circ c$ est l'identité sur V. Pour la même raison $c \circ \nu$ est l'identité sur $X \otimes Y$. Donc c est un isomorphisme d'inverse ν. □

Le théorème suivant donne une autre interprétation de l'espace des applications linéaires définies sur $X \otimes Y$ à valeurs dans Z.

Théorème 2.3. *L'espace $L(X \otimes Y, Z)$ est isomorphe à l'espace $L(X, L(Y, Z))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $B(X \times Y, Z)$ est isomorphe à $L(X, L(Y, Z))$. Pour cela, on définit l'application τ qui à toute application bilinéaire B de $X \times Y \to Z$ associe l'application linéaire $U = \tau(B)$ de X dans $L(Y, Z)$ définie par :

$$U(x)(y) = B(x, y).$$

La linéarité de B par rapport à y implique bien la linéarité de l'application $U(x)$ ce qui preuve que $U(x)$ est dans $L(Y, Z))$. La linéarité de B par rapport à x implique la linéarité de U. l'application τ a bien un noyau réduit à $\{0\}$ c'est-à-dire qu'elle est injective. De plus si $f \in L(X, L(Y, Z))$ on peut construire

$$\tilde{f}(x, y) = f(x)(y),$$

qui est bien une application bilinéaire de $X \times Y$ dans Z vérifiant

$$\tau(\tilde{f}) = f,$$

c'est-à-dire que τ est surjective. □

Corollaire 2.1. *Dans le cas où Z est le corps $\mathbb{K}$, on obtient la formule suivante sur les duaux :*

$$(X \otimes Y)^{'} \simeq L(X, Y).$$

Le symbole " $\simeq$ " signifie l'isomorphisme.

Conclusion. *On se retrouve avec 3 espaces isomorphes :*

$$L(X \otimes Y, Z) \simeq B(X \times Y, Z) \simeq L(X, L(Y, Z)).$$

2.4 Propriétés d'algèbre linéaire du produit tensoriel

Lemme 2.1. *Soient $y_1, y_2, ..., y_n$ des éléments de Y linéairement indépendants. Si*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0;$$

alors $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Démonstration. Soit $\phi \in X^*$ une forme linéaire sur X. considérons l'application linéaire f définie sur $[X \times Y]$ par :

$$f(x, y) = \phi(x)y,$$

comme f(G)=0 cette application nous permet de définir une application linéaire $\tilde{f}$ de $X \otimes Y$ dans Y telle que :

$$\tilde{f}(x \otimes y) = f(x, y) = \phi(x)y.$$

On a alors :

$$\tilde{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)y_i = 0,$$

et comme les y_i sont linéairement indépendants les $\phi(x_i)$ sont nuls. Ceci a lieu pour toute forme linéaire ϕ, ce qui permet de conclure que les x_i sont nuls. □

Théorème 2.4. *Soient A_1 une famille libre de X et A_2 une famille libre de Y. Alors la famille*

$$(x \otimes y)_{(x,y)\in A_1\times A_2}$$

est une famille libre de $X \otimes Y$.

Démonstration. On suppose que $\sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} \lambda_{(x,y)}(x \otimes y)$ est une combinaison linéaire et que cette combinaison est nulle. On peut alors écrire :

$$\sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} \lambda_{(x,y)}(x \otimes y) = \sum_{y\in A_2} (\sum_{x\in A_1} \lambda_{(x,y)}x) \otimes y = 0.$$

Comme la famille $(y)_{y\in A_2}$ est libre on conclut que pour tout $y \in A_2$:

$$\sum_{x\in A_1} \lambda_{(x,y)}x = 0.$$

Ce qui compte tenu du fait que la famille $(x)_{x\in A_1}$ est libre implique que pour tout $x \in A_1$ le coefficient $\lambda_{(x,y)}$ est nul. Alors pour tout x et tout y on a $\lambda_{(x,y)} = 0$. □

Théorème 2.5. *Si A_1 est une famille génératrice de X et A_2 une famille génératrice de Y, alors la famille $(x \otimes y)_{(x,y)\in A_1\times A_2}$ est une famille génératrice de $X \otimes Y$.*

Démonstration. On constate en effet que tout élément $x \otimes y$(où $x \in X$ et $y \in Y$) s'écrit :

$$\begin{aligned} x \otimes y &= (\sum_{\upsilon\in A_1} \lambda_\upsilon \upsilon) \otimes (\sum_{\upsilon\in A_1} \mu_\nu \nu) \\ &= \sum_{(\upsilon,\nu)\in A_1\times A_2} (\lambda_\upsilon \mu_\nu)(\upsilon \otimes \nu). \end{aligned}$$

□

Comme conséquence des deux théorèmes précédents on a le résultat suivant :

Théorème 2.6. *Si A_1 est une base de X et A_2 une base de Y alors la famille $(x \otimes y)_{(x,y)\in A_1\times A_2}$ est une base de $X \otimes Y$.*

Corollaire 2.2. *Si X et Y deux espaces vectoriels de dimensions respectives m et n , sur le même corps* $\mathbb{K}$*, alors* $dim(X \otimes Y) = dim(X)dim(Y) = m \times n$.

Corollaire 2.3. *Tout élément* $u \neq 0$ *de* $X \otimes Y$ *s'écrit sous la forme d'une somme finie non vide :*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,$$

où les x_i *sont linéairement indépendants et les* y_i *sont non nuls.*

Démonstration. Soit $(x_i)_i$ une base de X et $(f_i)_i$ une base de Y. la famille $(x_i \otimes f_i)_{i,j}$ est donc une base de $X \otimes Y$. Soit u un élément non nul de $X \otimes Y$. Il s'écrit :

$$u = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i \otimes f_i = \sum_i x_i \otimes (\sum_j \lambda_{i,j} f_i).$$

En posant $y_i = \sum_j \lambda_{i,j} f_i$ et en gardant dans la somme que les $x_i \otimes y_i$ où y_i est non nul on obtient le résultat voulu. □

Proposition 2.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour* $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ *:*

(i) *u=0.*

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$ *;* $\forall \varphi \in X', \forall \psi \in Y'$.

(iii) $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i = 0$ *;* $\forall \varphi \in X'$.

(iv) $\sum_{i=1}^{n} x_i \psi(y_i) = 0$ *;* $\forall \psi \in Y'$.

Démonstration. Soient φ, ψ deux formes linéaires sur X , Y respectivement.

(i) ⇒(ii) Supposons $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$, pour la forme bilinéaire $A(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, $u(A) = 0$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\psi(y_i)=0$, $\forall\psi\in Y^{'}$, donc

$$\psi(\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)y_i)=0,\forall\psi\in Y^{'}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)y_i=0$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) supposons $\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)y_i=0,\forall\varphi\in X'$, alors :

$$\psi(\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)y_i)=0,\forall\psi\in Y'\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\psi(y_i)=0$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\psi(y_i)=0$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Voir [7] $\square$

Proposition 2.5. *Si $Y=F_0\oplus F_1$ un somme direct, alors $X\otimes Y=(X\otimes F_0)\oplus(X\otimes F_1)$*

Démonstration. Il est clair que $X\otimes Y$ est engendré par les sous-espaces $X\otimes F_0$ et $X\otimes F_1$. Il suffit de montrer que $(X\otimes F_0)\cap(X\otimes F_1)=\{0\}$.
Soit $u\in(X\otimes F_0)\cap(X\otimes F_1)$, nous avons deux représentations de u :

$$u=\sum_{i=1}^{n}v_i\otimes y_i=\sum_{j=1}^{m}w_j\otimes z_j,$$

avec $y_i\in F_0$ et $z_j\in F_1$. alors

$$\forall\varphi\in X,u=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v_i)y_i=\sum_{j=1}^{m}\varphi(w_j)z_j.$$

Mais $F_0\cap F_1=\{0\}$, alors

$$u=\sum_{i=1}^{n}\varphi(v_i)y_i=0,\forall\varphi\in X,$$

donc u=0. $\square$

Unicité du produit tensoriel :

Démonstration. Si $\phi^{'} : X \times Y \to X \otimes^{'} Y$ est une autre application qui satisfait à la propriété universelle, alors il existe des applications linéaires (uniques) $j : X \otimes Y \to X \otimes^{'} Y$ et $j^{'} : X \otimes^{'} Y \to X \otimes Y$ vérifiant $j \circ \phi = \phi^{'}$ et $j' \circ \phi^{'} = \phi$, i.e. $j(x \otimes y) = x \otimes^{'} y$ et $j'(x \otimes^{'} y) = x \otimes y$. La linéarité entraîne

$$j(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes^{'} y_i, \quad j'(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes^{'} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \quad (x_i \in X, y_i \in Y).$$

D'après **théoreme 2.1**, on déduit que les applications j et j' sont bijectives, inverses l'une de l'autre. □

Théorème 2.7. *Pour $S \in L(X, E)$ et $T \in L(Y, F)$. On a :*

$$x \otimes y \mapsto (S \otimes T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty) \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

est une application linéaire sur $L(X \otimes Y, E \otimes F)$.

2.5 Extension au cas de plus de 2 espaces vectoriels

Théorème 2.8. *Si X, Y, Z sont trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors :*

$$(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$$

Démonstration. Nous allons définir un isomorphisme Γ de $(X \otimes Y) \otimes Z$ dans $X \otimes (Y \otimes Z)$ en définissant les valeurs de Γ sur une base.
Pour cela on prend une base $(x_i)_i$ de X, une base $(y_j)_j$ de Y et une base $(z_k)_k$ de Z. On sait qu'alors $(x_i \otimes y_j)_{i,j}$ est une base de $X \otimes Y$, et donc $((x_i \otimes y_j) \otimes z_k)_{i,j,k}$ est

une base de $(X \otimes Y) \otimes Z$. De même $(x_i \otimes (y_j \otimes z_k))_{i,j,k}$ est une base de $X \otimes (Y \otimes Z)$. On définit Γ en posant :

$$\Gamma((x_i \otimes y_j) \otimes z_k) = x_i \otimes (y_j \otimes z_k).$$

L'application linéaire Γ est un isomorphisme. $\square$

Soient $X_1, ..., X_n$, n espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. Notons $B(X_1 \times ... \times X_n, Y)$ l'espace des application n-linéaires de $X_1 \times ... \times X_n$ dans un espace vectoriel Z.

Théorème 2.9. *Nous avons l'isomorphisme suivant :*

$$L(X_1 \otimes ... \otimes X_n, Z) \simeq B(X_1 \times ... \times X_n, Z).$$

Démonstration. On peut faire une récurrence. On sait que le résultat est vrai pour 2 espaces. En utilisant les isomorphisme :

$$L(X \otimes Y, Z) \simeq B(X \times Y, Z) \simeq L(X, L(Y, Z))$$

et l'hypothèse de récurrence :

$$L(X_2 \otimes ... \otimes X_n, Z) \simeq B(X_2 \times ... \times X_n, Z).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} L(X_1 \otimes ... \otimes X_n, Z) &\simeq L(X_1, L(X_2 \otimes ... \otimes X_n, Z)) \\ &\simeq L(X_1, B(X_2 \times ... \times X_n, Z)) \\ &\simeq B(X_1 \times ... \times X_n, Z). \end{aligned}$$

$\square$

2.6 Dualité

Théorème 2.10. *L'espace $X' \otimes Y'$ peut être interprété comme un sous-espace de $(X \otimes Y)'$ par identification de l'élément $\varphi \otimes \psi$ de $X' \otimes Y'$ à la forme linéaire notée encore $\varphi \otimes \psi$ définie par :*

$$(\varphi \otimes \psi)(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y).$$

De plus on a l'égalité $X' \otimes Y'$ avec $(X \otimes Y)'$ si et seulement si l'un deux espaces X ou Y est de dimension finie.

Démonstration.

(1) Soit B_1 l'application bilinéaire définie sur $X' \times Y'$ à valeurs dans $B(X \times Y)$ par :

$$B_1(\varphi, \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

(2) Notons L la forme bilinéaire $B_1(\varphi, \psi)$.

(3) En vertu du théorème2.1, la forme bilinéaire L peut être considérée une forme linéaire l définie sur $X \otimes Y$ par :

$$l(x \otimes y) = \varphi(x)\psi(y).$$

(4) Mais alors B_1 apparaît comme une application bilinéaire de $X' \times Y'$ dans l'espace $(X \otimes Y)'$. On peut donc de nouveau appliquer théorème 2.1 qui permet de considérer B_1 comme une application linéaire b_1 de $X' \otimes Y'$ dans $(X \otimes Y)'$. On a alors :

$$b_1(\sum_{(\varphi,\psi)\in A} (\varphi \otimes \psi))(x \otimes y) = \sum_{(\varphi,\psi)\in A} \varphi(x)\psi(y).$$

L'application b_1 est injective. En effet, considérons un élément non nul de $X' \otimes Y'$. D'après Corollaire 2.3 cet élément peut s'écrire $\sum_{i\in I} \varphi_i \otimes \psi_i$ avec des ψ_i

linéairement indépendants et des φ_i non nuls. La forme linéaire correspondante $b_1(\sum_{i\in I}\varphi_i\otimes\psi_i)$ définie sur $X\otimes Y$ correspond à l'application linéaire de X dans Y' par $b_1(\sum_{i\in I}\varphi_i(x)\psi_i)$(cf. Corollaire 2.1). Cette application n'est pas identiquement nulle car les ψ_i sont linéairement indépendants et les φ_i non nuls. En conséquence le noyau de b_1 est réduit à $\{0\}$. Par la suite on identifie $b_1(\varphi\otimes\psi)$ à $\varphi\otimes\psi$ et on considère donc que :

$$X'\otimes Y'\subset(X\otimes Y)'$$

Si les deux espaces X et Y sont de dimensions finies respectives n et m, alors comme $X'\otimes Y'$ et $(X\otimes Y)'$ on même dimension $m\times n$ l'inclusion $X'\otimes Y'\subset(X\otimes Y)'$ se transforme à une égalité.

Supposons que les deux espaces soient de dimension infinie. Nous avons vu que tout élément u de $X'\otimes Y'$ peut être identifié à un élément de $(X\otimes Y)'$. Ainsi tout élément $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\otimes\psi_i$ de $X'\otimes Y'$ est un élément de $L(X\otimes Y,\mathbb{K})$ et peut être considéré aussi comme l'élément θ_t suivant de $L(X,Y')=L(X,L(Y,\mathbb{K}))$:

$$\theta_t : x\to\theta_t(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\psi_i.$$

L'image $\theta_t(X)$ est de dimension finie dans Y'. Mais dans $L(X,Y')=L(X,L(Y,\mathbb{K}))$ il existe des application dont l'image est de dimension infinie dans Y'. Donc $X'\otimes Y'$ ne peut coïncider avec :

$$(X\otimes Y)'\simeq L(X,Y').$$

Supposons maintenant que X soit de dimension finie. Tout élément $f\in(X\otimes Y)'$ est déterminé par ses valeurs sur les $x_i\otimes y_i$ où la famille $(x_i)_{i=1,..,n}$ est une base de X et $(y_j)_j$ une base (éventuellement infinie) de Y :

$$f(x_i\otimes y_j)=z_{i,j}$$

Soit $(\varphi_i)_{i=1,..,n}$ la base duale de $(x_i)_{i=1,..,n}$ et pour chaque $i \in \{1,..,n\}$ soit $\psi^{(i)} \in Y'$ telle que $\psi^{(i)}(y_j) = z_{i,j}$. Dans ces conditions :

$$(\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha \otimes \psi^\alpha)(x_i \otimes y_i) = z_{i,j},$$

ce qui preuve que :

$$f = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha \otimes \psi^\alpha \in X' \otimes Y'.$$

□

2.7 Produit de Kronecker

Soient de matrices A, de format (m,n) et B, de format (p,q)

$$A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,mj=1,\dots,n} \quad et \quad B = (b_{k,l})_{k=1,\dots,pl=1,\dots,q}$$

Le produit de Kronecker $A \otimes B$ est la matrice définie par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & a_{m3}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}, \textit{ de format } (mp, nq)$$

Exemple 2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 15 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 15 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Le produit n'est pas commutatif, mais il est distributif par rapport à l'addition des matrices

$$\begin{aligned} 0 \otimes B &= 0, A \otimes 0 = 0 \\ A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C. \end{aligned}$$

- pour tous réels a et b :

$$(aA) \otimes (bB) = ab(A \otimes B)$$

- Le transposé :

$$(A \otimes B)^t = (A^t \otimes B^t)$$

- Si A et B sont inversibles, $A \otimes B$ l'est aussi :

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$$

- Si A est de format (m, m) et B est de format (p, p), $A \otimes B$ est de format (mp, mp) et son déterminant est

$$det(A \otimes B) = (detA)^p (detB)^m$$

Chapitre 3

Produit tensoriel topologique projectif

3.1 La norme projectif

Soient X et Y deux espaces de Banach. On a

$$\|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\| \tag{3.1}$$

Soit $u \in X \otimes Y$. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ est une représentation de u, d'après inégalité triangulaire :

$$\|u\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|.$$

Et donc

$$\|u\| \leq inf \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \Big\},$$

on prend l'inf sur toutes les représentations de u.

Définition 3.1. *L'application π de $X \otimes Y$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\pi(u) = inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}, \tag{3.2}$$

*où l'*inf *sur tous les représentations de u, s'appelle la norme projective. Et notons aussi $\pi_{X,Y}(u), \pi(u; X \otimes Y)$*

Proposition 3.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach . Alors π est une norme de $X \otimes Y$ et $\pi(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$ pour tout $x \in X, y \in Y$.*

Démonstration.

(i) $\pi(\lambda u) = |\lambda|\pi(u)$.

C'est évident quand $\lambda = 0,$ supposons que $\lambda \neq 0$. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ est une représentation de u alors $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) \otimes y_i$, et donc on a :

$$\pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\|\|y_i\| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|.$$

Puisque elle est vrai pour toute représentation de u, alors

$$\pi(\lambda u) \leq |\lambda|\pi(u).$$

D'autre part :

$$\pi(u) = \pi(\lambda^{-1}\lambda u) \leq |\lambda^{-1}|\pi(\lambda u) \Rightarrow |\lambda|\pi(u) \leq \pi(\lambda u).$$

Alors $\pi(\lambda u) = |\lambda|\pi(u)$.

(ii) Inégalité triangulaire :$\pi(u + v) \leq \pi(u) + \pi(v)$.

Soient u et v $\in X \otimes Y$ avec $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, v = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \otimes z_j$ et soit $\varepsilon > 0$, telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| \leq \pi(u) + \varepsilon/2$$
$$\sum_{j=1}^{m} \|\omega_j\|\|z_j\| \leq \pi(v) + \varepsilon/2.$$

Alors $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \otimes z_j$ est une représentation de $u+v$ et donc :

$$\pi(u+v) \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| + \sum_{j=1}^{m} \|\omega_j\|\|z_j\| \leq \pi(u) + \pi(v) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Alors $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$.

(iii) $\pi(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Supposons que $\pi(u) = 0$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$ il existe une représentation $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ de u, telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, $\forall \varphi \in X^*, \psi \in Y^*$ on a :

$$|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)| \leq \varepsilon \|\varphi\|\|\psi\|.$$

Comme la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)$ est indépendante de la représentation de u, donc $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$

(iv) $\pi(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$

$$|\tilde{B}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\tilde{B}(x_i \otimes y_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)\psi(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|.$$

Ce qui implique que

$$|\tilde{B}(u)| \leq \pi(u), \forall u \in X \otimes Y$$

Donc $\tilde{B}$ est une forme linéaire bornée sur un espace normé $(X \otimes Y, \pi)$. Par conséquent :

$$\|x\|\|y\| = \tilde{B}(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y).$$

□

Notation 3.1. *Notons l'espace $X \otimes Y$ muni de la norme projective π par*

$$X \otimes_\pi Y.$$

Et on note l'espace de Banach par :

$$X \hat{\otimes}_\pi Y.$$

Soient $S \in \mathcal{L}(X, W)$ et $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On sait qu'il existe une application linéaire unique $S \otimes T : X \otimes Y \to W \otimes Z$ telle que

$$(S \otimes T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty); `\forall x \in X, y \in Y.$$

Soit $u \in X \otimes Y$ avec $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. Alors

$$\pi(S \otimes T(u)) = \pi(\sum_{i=1}^n (Sx_i) \otimes (Ty_i)) \leq \|S\|\|T\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|\|y_i\|,$$

et alors

$$\pi(S \otimes T(u)) \leq \|S\|\|T\|\pi(u).$$

Donc $S \otimes T$ est borné pour la norme projective sur $X \otimes Y$ dans $W \otimes Z$ et

$$\|S \otimes T\| \leq \|S\|\|T\|.$$

D'autre part : on a $S \otimes T(x \otimes y) = (Sx \otimes Ty)$. Alors

$$\|S\|\|T\| \leq \|S \otimes T\|.$$

Et par suite

$$\|S \otimes T\| = \|S\|\|T\|.$$

Proposition 3.2. *Soient $S : X \to W$ et $T : Y \to Z$ deux opérateurs. Alors il existe un unique opérateur $S \otimes_\pi T : X \hat{\otimes}_\pi Y \to W \hat{\otimes}_\pi Z$, tel que :*

$$(S \otimes_\pi T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty), \forall x \in X, y \in Y.$$

De plus,

$$\|S \otimes_\pi T\| = \|S\|\|T\|.$$

Soit X un espace de Banach. Soit ℓ_1 l'espace des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente. On munit ℓ_1 de la norme définie par :

$$\forall a = (a_n) \in \ell_1 : \quad \|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Pour $a \in \ell_1$ et $x \in X$, le tenseur élémentaire $a\otimes x$ correspond à la suite $(a_n x) \subset X$. Cette suite est absolument sommable, car :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x\| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)\|x\|.$$

En d'autres termes, $a \otimes x$ appartient à l'espace de Banach $\ell_1(X)$(l'espace des suites absolument sommables su X), muni de la norme :

$$\|(x_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Ainsi , il existe une application linéaire $J : \ell_1\otimes X \to \ell_1(X)$ vérifie $J(a\otimes x) = (a_n x)$. Si $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i$ est une représentation de $u \in \ell_1 \otimes X$, avec $a_i = (a_{in})_n$, alors

$$\begin{aligned} \|J(u)\|_1 &= \|(\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i)_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i)_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \|a_{in} x_i\| = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}|)\|x_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|\|x_i\|, \end{aligned}$$

donc

$$\|J(u)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|\|x_i\|.$$

Elle est vrai pour tout représentation de u, donc

$$\|J(u)\|_1 \leq \pi(u).$$

D'autre part, soit $\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i$, une représentation de u. Alors $J(u) = (u_n)$, avec $u_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i$, Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes u_n$ converge vers u sur

$\ell_1 \otimes_\pi X$, avec e_n base de ℓ_1 unitaire, notons $\prod_k$ la projection de ℓ_1 sur les premières coordonnées k, telles que $\prod_k(a) = \sum_{n=1}^k a_n e_n$ On a $\prod_k \to a$ quand $k \to \infty$

$$\begin{aligned}
\pi(u - \sum_{i=1}^{k} e_n \otimes u_n) &= \pi(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i - \sum_{n=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} e_n \otimes a_{in} x_i) \\
&= \pi(\sum_{i=1}^{m}(a_i \otimes x_i - \sum_{n=1}^{k} a_{in} e_n \otimes x_i)) \\
&= \pi(\sum_{i=1}^{m}(a_i - \prod_k a_i) \otimes x_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \|a_i - \prod_k a_i\| \|x_i\|,
\end{aligned}$$

Donc $\pi(u - \sum_{n=1}^{k} e_n \otimes u_n) \to 0$ quand k $\to \infty$. Alors on a :

$$\pi(u) = \pi(\sum_{i=1}^{\infty} e_n \otimes u_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u_n\| = \|J(u)\|_1.$$

Alors l'application linéaire $J : \ell_1 \otimes_\pi X \to \ell_1(X)$ est une isométrie.

3.2 L'espace dual de $X\hat{\otimes}_\pi Y$

Notation 3.2. *On note par $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ l'espace de Banach des applications bilinéaires de $X \times Y$ dans Z, muni de la norme*

$$\|B\| = \sup\{\|B(x,y)\| : x \in B_X, y \in B_Y\}.$$

Si $Z = \mathbb{K}$, noté par $\mathcal{B}(X \times Y)$.

Théorème 3.1. *Soit $B : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire bornée. Alors il existe un opérateur $\tilde{B} : X\hat{\otimes}_\pi Y \to Z$ satisfait*

$$\tilde{B}(x \otimes y) = B(x,y); \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Et l'espace $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}_\pi Y, Z)$.

Démonstration. Il existe une application linéaire unique $\tilde{B} : X \otimes Y \to Z$ satisfait

$$\tilde{B}(x \otimes y) = B(x, y); \forall x \in X, y \in Y.$$

Pour $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ on a :

$$\|\tilde{B}(u)\| = \|\sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)\| \leq \|B\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\|.$$

Elle est vrai pour toute représentation de u, alors

$$\|\tilde{B}(u)\| \leq \|B\|\pi(u).$$

Donc $\tilde{B}$ est bornée dans $X \otimes Y$ et satisfit

$$\|\tilde{B}\| \leq \|B\|.$$

D'autre part :

$$\|B(x, y)\| = \|\tilde{B}(x \otimes y)\| \leq \|\tilde{B}\|x\|\|y\|.$$

Donc

$$\|B\| \leq \|\tilde{B}\|.$$

Et par suite

$$\|B\| = \|\tilde{B}\|.$$

$\square$

Donc on a :

$$\mathcal{B}(X \times Y, Z) = \mathcal{L}(X \hat{\otimes}_\pi Y, Z).$$

Le symbole " = " signifie isométriquement isomorphisme entre les deux espaces. Si $Z = \mathbb{K}$:

$$\mathcal{B}(X \times Y) = (X \hat{\otimes}_\pi Y)^*.$$

La forme bilinéaire bornée B de $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ est une fonctionnelle linéaire sur $X \hat{\otimes}_\pi Y$ donnée par

$$\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i).$$

Cette dualité donne une nouvelle formule à la norme projective :

$$\pi(u) = sup\{|\langle u, B\rangle| : B \in \mathcal{B}(X \times Y), \|B\| \leq 1\}. \tag{3.3}$$

3.3 Définition des applications nucléaires

Définition 3.2. *Si X et Y sont des espaces de Banach. On note $\mathcal{N}(X,Y)$ le sous-espace $J(X^* \hat{\otimes}_\pi Y)$ de $\mathcal{L}(X,Y)$. Les éléments de $\mathcal{N}(X,Y)$ sont dits opérateurs nucléaires, avec J est un opérateur définie par :*

$$\begin{aligned} J : X^* \hat{\otimes}_\pi Y &\rightarrow \mathcal{L}(X,Y) \\ u &\mapsto L_u : X \rightarrow Y \end{aligned}$$

où

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \otimes y_n, \quad L_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) y_n.$$

L'espace $\mathcal{N}(X,Y)$ muni de la norme nucléaire :

$$\|T\|_N = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|\|y_n\| : T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) y_n\},$$

avec (φ_n) et (y_n) des suites bornées dans X^* et Y respectivement telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|\|y_n\| < \infty.$$

Et on a :

$$\mathcal{N}(X,Y) = X^* \hat{\otimes}_\pi Y / \ker J$$

où

$$\ker J = \{u \in X^*\hat{\otimes}_\pi Y : L_u(x) = 0 \quad \forall x \in X\}.$$

Proposition 3.3. *Soient* $S : X \to Y$ *un opérateur nucléaire,* $T \in \mathcal{L}(W, X)$ *et* $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Alors* $R \circ S \circ T$ *est un opérateur nucléaire et*

$$\|R \circ S \circ T\|_N \leq \|R\|\|S\|_N\|T\|.$$

Démonstration. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X^*\hat{\otimes}_\pi Y \arrow[r, "{}^*T \otimes R"] \arrow[d, "J"'] & W^*\hat{\otimes}_\pi Z \arrow[d, "J"] \\
\mathcal{L}(X, Y) \arrow[r, "(S \to R \circ S \circ T)"] & \mathcal{L}(W, Z)
\end{tikzcd}$$

(car les 2 applications de $X^*\hat{\otimes}_\pi Y$ dans $\mathcal{L}(W, Z)$ que définit ce diagramme sont continues, et coïncident pour $S_0 \in X^* \otimes_\pi Y$ de la forme $x' \otimes y$).
Donc, si S est nucléaire ; S_0 étant élément de $X\hat{\otimes}Y_\pi$ tel que $J(S_0) = S$, on a $({}^tT \otimes R)S_0 \in W^*\hat{\otimes}_\pi Z$ et

$$R \circ S \circ T = J(({}^*T \otimes R)(S_0)),$$

donc $R \circ S \circ T$ est nucléaire. compte tenu de ce que

$$\|{}^*T \otimes R\| = \|T\|\|R\|,$$

on a

$$\begin{aligned}
\|R \circ S \circ T\| &= \inf_{J(S_0)=S} ({}^tT \otimes R)(S_0) \\
&\leq \inf_{J(S_0)=S} \|R\|\|T\|\|S_0\| \\
&= \|R\|\|S\|_N\|T\|.
\end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Produit tensoriel topologique injectif

Définition 4.1. *Soient X, Y deux espaces de Banach et S un opérateur borné de X dans Y. L'adjoint de S, noté S^* est l'opérateur borné de Y^* dans X^* vérifiant*

$$\forall x \in X, \forall y^* \in Y^* : \quad \langle S(x), y^* \rangle = \langle x, S^*(x^*) \rangle.$$

Théorème 4.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'application de $\mathcal{L}X, Y)$ dans $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ qui à S associe son adjoint S^* est isométrique(i.e. :$\|S\| = \|S^*\|$ pour tout $S \in \mathcal{L}(X, Y)$).*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(x)\| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} (\sup_{\|y^*\| \leq 1} |\langle y^*, S(x) \rangle|) \\
&= \sup_{\|y^*\| \leq 1} (\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle S^*(y^*), x \rangle|) \\
&= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|S^*(y^*)\| \\
&= \|S^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}.
\end{aligned}$$

□

4.1 La norme injective

Si $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, la forme bilinéaire associée est donnée par

$$B_u(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i).$$

Définition 4.2. *L'application ε de $X \otimes Y$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :*

$$\varepsilon(u) = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)| : \varphi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*}\}, \tag{4.1}$$

s'appelle la norme injective.

Notation 4.1. *notons aussi $\varepsilon_{X,Y}(u)$ ou $\varepsilon(u; X \otimes Y)$.*

Notation 4.2. *Notons l'espace $X \otimes Y$ muni de la norme injective ε par*

$$X \otimes_\varepsilon Y.$$

Et on note l'espace de Banach par :

$$X \hat{\otimes}_\varepsilon Y.$$

Puisque $X \otimes_\varepsilon Y$ est un sous-espace de $\mathcal{B}(X^* \times Y^*)$, l'espace $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ est un fermé dans $\mathcal{B}(X^* \times Y^*)$, ou dans $\mathcal{L}(X^*, Y)$ ou dans $\mathcal{L}(Y^*, X)$. L'espace $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ peut être considéré comme un sous-espace de l'espace $\mathcal{B}(X^* \times Y^*)$, ou de l'un des espaces des opérateurs $\mathcal{L}(X^*, Y)$ ou $\mathcal{L}(Y^*, X)$.

$$X \hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset \mathcal{B}(X^* \times Y^*),\ \mathcal{L}(X^*, Y),\ ou\, \mathcal{L}(Y^*, X).$$

Proposition 4.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach.*

(a) $\varepsilon(u) \leq \pi(u), \quad \forall u \in X \otimes Y.$

(b) $\varepsilon(x \otimes y) = \|x\|\|y\|, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$

(c) Si $\varphi \in X^*, \psi \in Y^*$, alors $\varphi \otimes \psi$ est une forme linéaire bornée sur $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ et

$$\|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\|\|\psi\|.$$

Proposition 4.2. *Soient $S : X \to W$ et $T : Y \to Z$ deux opérateurs. Alors il existe une unique opérateur $S \otimes_\varepsilon T : X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \to W\hat{\otimes}_\varepsilon Z$ telle que :*

$$(S \otimes_\varepsilon T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

De plus

$$\|S \otimes_\varepsilon T\| = \|S\|\|T\|.$$

Démonstration. Soit l'opérateur $S \otimes T : X \otimes Y \to W \otimes Z$. Si $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{W,Z}((S \otimes T)(u)) &= \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \varphi(Sx_i)\psi(Ty_i)| : \varphi \in B_{W^*}, \psi \in B_{Z^*}\} \\
&= \sup\{|\sum_{i=1}^{n} (S^*\varphi)x_i(T^*\psi)y_i| : \varphi \in B_{W^*}, \psi \in B_{Z^*}\} \\
&\leq \|S^*\|\|T^*\|\varepsilon_{X,Y}(u) \\
&\leq \|S\|\|T\|\varepsilon_{X,Y}(u).
\end{aligned}$$

Donc $S \otimes T$ est bornée. D'autre part : $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir $x \in B_X$ et $y \in B_Y$ tels que :

$$\begin{aligned}
\|S\|(1-\varepsilon) &\leq \|Sx\| \\
\|T\|(1-\varepsilon) &\leq \|Ty\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x \otimes y) &\leq 1 \\
\|S\|\|T\|(1-\varepsilon)^2 &\leq \varepsilon((S \otimes T))(x \otimes y),
\end{aligned}$$

et donc

$$\|S\|\|T\| \leq \|S \otimes T\|.$$

Par conséquent

$$\|S \otimes T\| = \|S\|\|T\|.$$

□

L'opérateur $S \otimes T$ admet un unique extension, avec la même norme,au produit tensoriel complet, on définie $S \otimes_\varepsilon T$ pour être cette extension.

4.2 L'espace dual de $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$

La formule (4.1), nous permet d'écrire u comme une fonction continue sur le compact $B_{X^*} \times B_{Y^*}$. Donc, nous avons un monomorphisme de $X \otimes_\varepsilon Y$ dans $C(B_{X^*} \times B_{Y^*})$, ce monomorphisme prolonge à la complétion

$$X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset C(B_{X^*} \times B_{Y^*}).$$

Le théorème de Hahn-Banach nous permet de considérer une forme linéaire bornée sur $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ comme forme linéaire bornée sur l'espace des fonctions continues. Alors le théorème de représentation de Riesz montre que l'action de cette forme est donnée par intégrale par rapport à une mesure convenable. Pour voir ça, supposons B une forme bilinéaire bornée sur $X \times Y$, la forme linéaire $\tilde{B}$ est bornée pour la norme injective. Alors $\tilde{B}$ prolonge à une forme linéaire sur $C(B_{X^*} \times B_{Y^*})$ avec la même norme. Cette forme donnée par

$$\langle u, \tilde{B}\rangle = \int_{B_{X^*}\times B_{Y^*}} u(\varphi,\psi)d\mu(\varphi,\psi) \quad u \in X\hat{\otimes}_\varepsilon Y \tag{4.2}$$

où μ est mesure de Borel.
Et $\|\tilde{B}\| = \|\mu\|$, avec $\|\mu\|$ est la norme variation de μ. En particulier,

$$B(x,y) = \int_{B_{X^*}\times B_{Y^*}} \varphi(x)\psi(y)d\mu(\varphi,\psi) \quad \forall x \in X,\ y \in Y. \tag{4.3}$$

Inversement, si μ est une mesure de Borel régulière sur $B_{X^*} \times B_{Y^*}$, on peut définir une forme linéaire bornée sur $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ par (4.2) et la forme bilinéaire correspondant B satisfait (4.3). De plus,

$$\|\tilde{B}\| \leq \|\mu\|.$$

Proposition 4.3. *Soit B une forme bilinéaire sur $X \times Y$. Alors $\tilde{B}$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$ si et seulement si il existe une mesure de Borel régulière μ sur l'espace compact $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ telle que*

$$B(x,y) = \int_{B_{X^*}\times B_{Y^*}} \varphi(x)\psi(y)d\mu(\varphi,\psi) \quad \forall x \in X,\, \forall y \in Y.$$

De plus la norme de $\tilde{B}$ donnée par :

$$\|\tilde{B}\| = \inf \|\mu\|,$$

où on prend l'$\inf$ *sur l'ensemble des mesures qui correspondent à B.*

Une forme bilinéaire sur $X \times Y$ est dite intégrale si la forme linéaire sur $X \otimes Y$ ($\tilde{B}$) qui lui est associée est continue sur $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$. L'espace des formes bilinéaires intégrales est donc le dual de $X\hat{\otimes}_\varepsilon Y$. La norme intégrale définie par

$$\|B\|_I = \inf \|\mu\|,$$

L'inf sur tous les mesures de Borel régulières sur $B_{X^*} \times B_{Y^*}$ qui satisfont 4.3. L'espace de Banach des formes intégrales avec cette norme on le note par $\mathcal{B}_I(X \times Y)$. Ainsi, on a

$$(X\hat{\otimes}_\varepsilon Y)^* = \mathcal{B}_I(X \times Y).$$

Proposition 4.4. *Si B une forme bilinéaire intégrale dans $X \times Y$ et $S : W \to X$ et $T : Z \to Y$ deux applications linéaires bornées, alors la forme bilinéaire B' définie dans $W \times Z$ par :*

$$B'(w,z) = B(Sw, Tz),$$

est intégrale et

$$\|B'\|_I \leq \|B\|_I \|S\| \|T\|.$$

Bibliographie

[1] L. Chambadal, J. L. Ovaert, *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle*. Dunod. 1968.

[2] A. Defant, K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*. North-Holland. 1993.

[3] A. Delachet, *Le calcul tensoriel*. Presses Universitaires de France - PUF . 1974.

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et Espaces nucléaires*. American Mathematical Society - AMS. 1966.

[5] R. Rolland, *Produit tensoriel d'espaces vectoriels*. 2012.

[6] W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill. 1991.

[7] R. A. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer . 2002.

[8] L. Schwartz, *Séminaire Schwartz. vol 1(1953-1954)*. NUMDAM.