

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT  
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université Amar Téliidji de Laghouat  
Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



# PROJET DE FIN D'ETUDE (Licence)

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques

## Thème

---

*Résolution analytique de l'équation de la chaleur en dimension un*

---

**Présentée par :**

*M<sup>elle</sup> K. Saiad & M<sup>elle</sup> M. Gasmi*

**Encadré par : Dr. NOUIRI Brahim**

Année universitaire 2014/2015

# Remerciements

*Ce projet a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur NOURI Brahim, Maître de conférences à l'université de Laghouat. Je tien à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt. Mes remerciements s'adressent a Monsieur Lagraa Nacereddine chef de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce projet. Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce projet. Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien. Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet.*

# Dédicaces

*Je vous remercie premièrement mon Dieu qui me donne la santé, et la volante pour terminer cette travaille et deuxième je vous remercier mes Chères Parents qui a source de l'amour.*

*Je dédie ce travail à mes Sœur (K hadidja, F aiza, A bla, A ya, S ondous, H anane, A mel, L ina)*

*Ma cher tante F atoum*

*A mes frère (M ohammed ,D jilali, Bilal, A bd E lkader)*

*A mes cousines (N oussaiba, A mina, A tikā)*

*A tout ma familles spécialement la famille (S asmi, C hames eddine ,S aidani)*

*Ma binôme K arima et tous mes amies, surtout (A mina, F atima, A icha, S btissam, F atimaG, H ouda, S ness, N ihad, Bouchra, S men , H amra, S ouiad, S ara, A kila) A tout ce qui j'aime.*

*A toute la promotion 2015 de M athématique.*

*M aroua*

*Je vous remercie premièrement mon Dieu qui me donne la santé, et la volante pour terminer cette travaille et deuxième je vous remercier mes Chères Parents qui a source de l'amour.*

*Je dédie ce travail à mes Sœur (F atna, K hadidja ,F atiha, L arga, S ara, R ihab, B elkiss)*

*A mes frère (L adi, A bd E lkader, A bd E lhafid, M ohammed, T arzi, S brahim, A youb, D jemel)*

*A tout la famille S aiad*

*Ma binôme M aroua et tous mes amies, surtout (A mina, F atima, A icha, S btissam, F atimaG, H oda, S ness, N ihad, Bouchra, S men , H amra, S ouiad, H adjira, M amma, S ara, A kila)*

*A tout ce qui j'aime.*

*A toute la promotion 2015 de athématique.*

*K arima*

# Résumé

*D*ans ce projet, nous avons présenté la résolution analytique pour l'équation de la chaleur dans  $\mathbb{R}$  et dans un segment. Notre projet se décompose en deux chapitres :

- ↳ Équation de la chaleur dans  $\mathbb{R}$ ,
- ↳ Équation de la chaleur dans un segment.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Équation de la chaleur dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>2</b>
1.1	Transformation de <i>F</i> ourier . . . . .	3
1.1.1	Propriétés de transformation de <i>F</i> ourier . . . . .	3
1.2	Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Équation de la chaleur dans un segment</b>	<b>8</b>
2.1	Problème de Dirichlet . . . . .	9
2.2	Problème de Neumann . . . . .	13
2.3	Problème avec conditions Mixtes . . . . .	14
2.4	Problème avec condition de Dirichlet non homogène . . . . .	15
2.5	Unicité de la solution . . . . .	17
2.6	Équation de la chaleur non homogène . . . . .	19

# Introduction générale

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1811 par Jean Baptiste Joseph Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes en thermodynamique.

Dans ce projet de fin d'étude, nous avons étudié l'équation de la chaleur en une dimension d'espace qu'est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

où  $c^2$  est une constante donnée,  $u$  est une fonction inconnue réelle de deux variables réelles  $x$  et  $t$ . cette fonction  $u = u(x, t)$  représente la température dans un conducteur de dimension un. Notre projet se décompose en deux chapitres :

- ↳ Équation de la chaleur dans  $\mathbb{R}$ ,
- ↳ Équation de la chaleur dans un segment.

# Chapitre 1

## Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$

## 1.1 Transformation de Fourier

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de carré sommable c'est-à-dire  $f \in L^2(\mathbb{R})$  :

$$\|f\| := \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} < \infty.$$

**Définition 1.1.** La transformation de Fourier de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est définie par la formule suivante

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

On dit que  $\hat{f}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(x)$ .

**Définition 1.2.** Soit  $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ . La transformation inverse de Fourier de  $\hat{f}(\omega)$  est définie par la formule suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

On présente quelques propriétés de transformée de Fourier qui sont importants dans ce chapitre.

### 1.1.1 Propriétés de transformation de Fourier

1. Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-i\omega x} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega), \end{aligned}$$

où le terme intégré est nul en  $\pm\infty$ .

2. Par récurrence, nous avons :

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

3. Nous avons :

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) := \hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-i\omega x} dx = \mathcal{F}(-ixf(x))(\omega).$$

**Définition 1.3.** Soit  $f$  et  $g$  de carré intégrable. La convolution de  $f$  et de  $g$ , notée  $f * g$  est définie par la formule :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy.$$

On dit que  $f$  est convoluée avec  $g$ .

On voit que la convolution est commutative :

$$f * g = g * f.$$

En effet, par le changement de variable  $s = x - y$ , on a  $ds = -dy$  et

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(x - s) ds \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.1.** Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors, on a :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$$

*Démonstration.* Par définition de la transformée de Fourier de la convolution, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) e^{-i\omega x} dx dy \\ &\quad (\text{ posons } x - y = s \text{ et } dx = ds) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(s) e^{-i\omega(s+y)} ds dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i\omega s} ds \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.1.**

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = f(x) * g(x). \quad (1.1)$$

**Exemple 1.1.** Montrer que

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}, \quad a > 0.$$

*Démonstration.* Par définition et par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) &= \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx \\
 &= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} (-2ax) e^{-ax^2} dx \\
 &= \frac{2a}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (-ix) e^{-i\omega x} dx \\
 &= -\frac{2a}{\omega} \hat{f}'(\omega).
 \end{aligned}$$

Donc, on obtient l'équation différentielle séparable :

$$-2a\hat{f}'(\omega) = \omega\hat{f}(\omega),$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} &= -\frac{1}{2a}\omega \Leftrightarrow \ln\left(\hat{f}(\omega)\right) = -\frac{1}{4a}\omega^2 + k_1 \\
 &\Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = ke^{-\omega^2/(4a)}.
 \end{aligned}$$

où  $k$  est donné par :

$$k = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega 0} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx.$$

Pour déterminer la valeur de  $k$ , nous avons le changement de variables en coordonnées polaires :

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \sin(\theta)$$

d'où

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad dx dy = r dr d\theta$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-ar^2} dr \\
 &= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-ar^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{a} e^{-ar^2} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{\pi}{a}.
 \end{aligned}$$

Donc, on obtient la réponse en prenant la racine carrée :

$$k = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

□

**Exemple 1.2.** Montrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a\omega^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-x^2/(4a)}, \quad a > 0. \quad (1.2)$$

*Démonstration.* En utilisant Exemple 1.1, on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\right) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}. \quad (1.3)$$

On pose  $b = 1/4a$  dans (1.3), on obtient :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-b\omega^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi b}}e^{-x^2/(4b)}, \quad b > 0.$$

D'où (1.2). □

## 1.2 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$

**Exemple 1.3.** Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* La transformée de Fourier de l'équation de la chaleur par rapport à la variable  $x$  est une équation différentielle séparable en  $t$  avec paramètre  $\omega$  :

$$\hat{u}_t(\omega, t) = c^2 (-i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t).$$

On intègre cette équation et l'on emploie la transformée de Fourier de la condition initiale :

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Donc, on a :

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-c^2\omega^2 t}.$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de  $\omega$ , donc sa transformée de  $\mathcal{F}$ ourier inverse sera une convolution par les formules (1.1) et (1.2) :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \left( \mathcal{F}^{-1} \hat{f}(\omega) \right) * \left( \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-c^2 \omega^2 t} \right) \right) \\
 &= f(x) * \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{c^2 t}} e^{-x^2/(4c^2 t)} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{c^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/(4c^2 t)} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) G(x-y, t) dy.
 \end{aligned}$$

où

$$G(x-y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}}, \quad (1.5)$$

est appelée la valeur de Green pour l'équation de la chaleur.  $\square$

## Chapitre 2

### Équation de la chaleur dans un segment

## 2.1 Problème de Dirichlet

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$u_t = c^2 u_{xx}, 0 \leq x \leq l \text{ et } t > 0 \quad (2.1a)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, t > 0 \quad (2.1b)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad f(x) \in \mathbb{C}^2 \quad (2.1c)$$

Où (2.1a) équation de la chaleur, (2.1b) condition de Dirichlet et (2.1c) la condition initiale.

La résolution de problème (2.1a)-(2.1c) par la méthode de séparation des variables comporte trois étapes :

**Étape 1 : Séparation des variables.** Posons

$$u(x, t) = F(x) G(t) \quad (2.2)$$

on obtient :

$$u_t = G'(t) F(x)$$

$$u_{xx} = F''(x) G(t)$$

l'équation (2, 1) s'écrit alors :  $G'(t) F(x) = c^2 F''(x) G(t)$

$$\frac{G'(t) F(x)}{G(t) F(x)} = \frac{c^2 F''(x) G(t)}{G(t) F(x)} = \lambda$$

D'où

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda$$

nous donnent deux équation différentielles découplées :

$$\begin{cases} F''(x) - \lambda F(x) = 0 \\ G'(t) - c^2 \lambda G(t) = 0 \end{cases}$$

**Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres.**

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$= F(0) G(t) = 0$$

$$\Rightarrow F(0) = 0$$

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0$$

$$r^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = \lambda$$

si  $\lambda > 0$

$$r = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$F(0) = A + B = 0$$

$$F(l) = Ae^{\sqrt{\lambda}l} + Be^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

$$\Rightarrow A = B = 0$$

alors

$$F(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$$

si  $\lambda = 0$

$$F''(x) = 0$$

$$\Rightarrow F'(x) = C_1$$

$$\Rightarrow F(x) = C_1x + C_2$$

$$F(0) = C_2 = 0$$

$$F(l) = C_1l = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

alors

$$F(x) = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$$

si  $\lambda = 0$  et  $\lambda > 0$

$u(x, t)$  est nulle ce qui est exclu et contredit la condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$

si  $\lambda < 0$

$$\lambda = -p^2$$

$$r^2 = -p^2 \Rightarrow r = \mp iP$$

$$F(x) = A \cos Px + B \sin Px \quad (2.3)$$

$$F(0) = A \cos P(0) + B \sin P(0) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ et } F(0) = F(l) = 0$$

$$F(l) = B \sin Pl = 0 \Rightarrow Pl = k\pi; k = 1, 2, \dots$$

D'où les valeurs de  $P_k = \frac{k\pi}{l}$

puisque  $B$  sera multiple par la suite par une constante arbitraire, on peut prendre  $B = 1$ , donc :

$$F_k = \sin \frac{k\pi}{l} x \quad K \in \mathbb{Z}$$

De même de

$$G'(t) - C^2 \lambda G(x) = 0$$

On a

$$G'(t) + C^2 P^2 G(t) = 0$$

$$G'(t) = -C^2 P^2 G(t) = 0$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = -C^2 P^2 G(t) = 0$$

$$\frac{dG(t)}{G(t)} = -C^2 P^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \ln G(t) = -C^2 P^2 t + \ln A$$

$$G(t) = A e^{-C^2 P^2 t}$$

$$P_k = \frac{k\pi}{l}$$

$$-(P_k C)^2 = -\left(\frac{k\pi}{l} C\right)^2$$

$$G_k(t) = A_k e^{-C^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}$$

on a donc les fonction propres et les valeurs propres :

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= F_k(x) G_k(t) \\ &= \sin \frac{k\pi}{l} x A_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l} c\right)^2 t} \end{aligned}$$

**Etape 3 : Superposition des fonctions propres.** on satisfait la condition initial par superposition des fonction propres :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) G_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x e^{-\left(\frac{k\pi}{l} c\right)^2 t} \end{aligned}$$

pour que

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x)$$

puisque  $u(x, 0)$  est représenté par le développement de Fourier de sinus de la fonction  $f(x)$

alors les coefficient sont donnée par la formule :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l; \frac{\pi}{\omega} = l \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{l}$$

$$A_k = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x) \sin \left( \frac{k\pi}{l} x \right) dx$$

$$A_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx$$

## 2.2 Problème de Neumann

les condition :

$$\frac{du}{dx}(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0$$

d'après (2, 2)

$$\frac{du}{dx}(x, t) = F'(x) G(t)$$

$$\frac{du}{dx}(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0$$

$$\Rightarrow F'(0) G(t) = F'(l) G(t) = 0$$

$$F'(0) = F'(l) = 0$$

on a :

$$F(x) = A \cos Px + B \sin Px$$

$$F'(x) = -AP \sin Px + BP \cos Px$$

$$F'(0) = BP = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$F(x) = A \cos Px$$

La seconde équation  $F'(l) = 0$  permet alors de calculer A on trouve :

$$F'(l) = -AP \sin Pl = 0$$

$$Pl = k\pi$$

$k \in \mathbb{R}$

$$F(x) = A \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

et

$$G(t) = Ae^{-C^2 P^2 t}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-C^2 P^2 t} \\ &= A \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-C^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \end{aligned}$$

Les fonctions propres  $u_k(x, t)$  sont les solutions

$$u_k(x, t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-C^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$u(x, t) = \sum \left[ A_k \left\{ e^{-C^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \right\} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right]$$

$$A_k = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \left[ f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[ f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \right]$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \left[ f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \right]$$

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-C^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \int_0^l \left[ f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx \right]$$

## 2.3 Problème avec conditions Mixtes

les condition :

$$u(0, t) = \frac{du}{dx}(l, t) = 0$$

d'après (2, 2)

$$F(0)G(t) = F'(l)G(t) = 0$$

$$F(0) = F'(l) = 0$$

alors l'équation s'écrit sous la forme (2, 3)

$$F'(x) = -AP \sin(Px) + BP \cos(Px)$$

$$F'(l) = -AP \sin Pl + BP \cos Pl = 0$$

$$F(0) = A = 0$$

donc

$$F'(l) = BP \cos Pl = 0 \Rightarrow \cos Pl = 0$$

$$\Rightarrow Pl = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$$

les fonction propres  $u_k(x, t)$  sont les solution

$$P_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$$

$$F_k(x) = B \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$$

$$G_k(x) = A e^{-c^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2 t}$$

$$u_k(x, t) = C_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right) e^{-c^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2 t}$$

## 2.4 Problème avec condition de Dirichlet non homogène

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad t > 0$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0, t) = A \quad u(l, t) = B \quad t > 0 \quad (2.4)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (2.5)$$

On transforme le problème en deux problèmes connus exprimons  $u(x, t)$  comme la somme de deux fonctions  $v(x, t)$  et  $\varphi(x)$

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$$

telles que  $v$  et  $\varphi$  sont solution dans (2.1) et  $v$  satisfait les conditions aux limites homogènes

$$v(0, t) = 0$$

et

$$v(l, t) = 0$$

alors (2.1) devient

$$v_t = c^2 u_{xx} + c^2 \varphi''$$

et de (2.4) on a :

$$v(0, t) = u(0, t) - \varphi(0)$$

$$v(0, t) = A - \varphi(0)$$

et  $v(0, t) = 0$

alors  $\varphi(0) = A$  et

$$v_t = c^2 u_{xx} + c^2 \varphi''$$

et de (2.4) on a :

$$v(l, t) = u(l, t) - \varphi(l)$$

$$v(l, t) = B - \varphi(l)$$

et

$$v(l, t) = 0$$

Donc

$$\varphi(l) = B$$

pour que  $v$  soit solution de ce problème il faut que :

$$\varphi''(x) = 0 \implies \varphi(x) = \alpha x + \beta$$

On détermine  $\alpha$  et  $\beta$  au moyen des conditions aux limites sur  $\varphi(x)$  :

$$\varphi(0) = \beta = A \implies \beta = A$$

$$\varphi(l) = \alpha l + A = B \implies \alpha = \frac{B - A}{l}$$

ce qui donne :

$$\varphi(x) = \frac{B-A}{l}x + A$$

Enfin de la condition initiale (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \varphi(x, 0) = f(x) \\ -\frac{B-A}{l}x - A &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

puisque  $v$  est solution de (2.1) aux conditions aux limites  $v = 0$  en  $x = l$  alors

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\lambda_n^2 t} & \lambda_n &= \frac{cn\pi}{l} \\ A_n &= \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \left[ f(x) - \frac{B-A}{l}x - A \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

La solution est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{B-A}{l}x + A$$

## 2.5 Unicité de la solution

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad t > 0$$

la condition initial :

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < l$$

et la condition aux limite :

$$u(0, t) = u(l, t) \quad t \geq 0$$

On suppose que il y'a deux solution  $u_1(x, t)$  et  $u_2(x, t)$  tell que :

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

alors

$$v_t = c^2 v_{xx} \quad 0 \leq x \leq l \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0 & v(l, t) &= 0 & t &\geq 0 \\ v(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq l & & & \end{aligned}$$

on considère une fonction définie par l'intégral :

$$J(t) = \frac{1}{2c^2} \int_0^l v^2(x, t) dx$$

on a dérivé par rapport à  $t$  on obtient :

$$\begin{aligned} J'(t) &= \frac{1}{c^2} \int_0^l v_t v(x, t) dx \\ &= \int_0^l v_{xx} v(x, t) dx \\ &= [v v_x]_0^l - \int_0^l v_x^2 dx \end{aligned}$$

depuis

$$v(0, t) = v(l, t) = 0$$

$$J'(t) = - \int_0^l v_x^2 dx \leq 0$$

d'après la condition  $v(x, 0) = 0$  on a  $J(0) = 0$  cette condition et  $J'(0) \leq 0$   
 $J(t)$  est décroissante pour  $0 \leq x \leq l$  alors  $J(t) \leq 0$   
 mais par la définition de  $J(t)$   
 d'où

$$J(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

depuis  $v(x, t)$  est continue,  $J(t) = 0$  implique que  $v(x, t) = 0$   
 par conséquent

$$v(x, t) = 0 \Rightarrow u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0$$

$$\Rightarrow u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

Alors la solution est unique.

## 2.6 Équation de la chaleur non homogène

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx} + F(x) & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= A & u(l, t) = B & t > 0 \end{aligned}$$

On transforme le problème en deux problèmes connus exprimons  $u(x, t)$  comme la somme de deux fonctions  $v(x, t)$  et  $\varphi(x)$

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$$

on remplaçant  $u(x, t)$  dans cette problème ,alors

$$v_t = c^2 (v_{xx} + \varphi'') + F(x),$$

et si  $\varphi(x)$  satisfait l'équation

$$c^2 \varphi_{xx} + F(x) = 0,$$

sinon  $v(x, t)$  satisfait l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x, 0) + \varphi(x) = f(x) \\ u(0, t) &= v(0, t) + \varphi(0) = A, \\ u(l, t) &= v(l, t) + \varphi(l) = B. \end{aligned}$$

si  $\varphi(x)$  est une solution de problème

$$\begin{aligned} c^2 \varphi'' + F &= 0, \\ \varphi(0) &= A, \varphi(l) = B, \end{aligned}$$

sinon

$$\begin{aligned} v_t &= c^2 v_{xx}, \\ v(x, 0) &= f(x) - \varphi(x) \\ v(0, t) &= 0 & v(l, t) = 0 \end{aligned}$$

nous pouvons trouvé la solution de  $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A + (B - A) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l \left[ \frac{1}{c^2} \int_0^\eta F(\xi) d\eta \right] d\xi \\ &\quad - \int_0^x \left[ \frac{1}{c^2} \int_0^\eta F(\xi) d\xi \right] d\eta \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] G. Choquet. *Cours de Mathématiques de Gustave Choquet*. Ellipses, 2012.
- [2] T. Myint-U ; L. Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Fourth Edition, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [3] G. Giraud ; J-P. Dufour. *Mathématiques : résolution des équations aux dérivées partielles*. Cépaduès, 2004.
- [4] C. David ; P. Gosselet. *Équations aux dérivées partielles Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2012.
- [5] J.F. James. *A student's guide to Fourier transforms With applications in Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] El-Haj Laamri. *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions : Rappels de cours et exercices corrigés*. Dunod, 2007.
- [7] J. Peyrière. *Convolution, séries et intégrales de Fourier*. Ellipses, 2012.