REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــة الـعـلـــوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et application

Présenté par :

KAZOUAI Sara

THEME

Le problème d'évolution relatif aux équations de Navier-Stockes non linéaire avec des conditions aux limites Dirichlet-Neumann homogènes (cas la dimension n=2)

Soutenance publique devant le jury composé de :

Mr. RAHMOUNE Abita	*M.C.A*	*Président*
Mr. MOSBAH Kaddour	*M.C.B*	*Encadreur*
Mr. SAF Salim	*M.C.B*	*Examinateur*

Année Universitaire 2023/2024

Remerciements

Je remercie dieu pour m'avoir donné la force, le courage et le temps qui m'ont été nécessaires pour que je puisse mener à bien mon travail et ainsi terminer ce mémoire.

D'abord je remercie mon encadreur ***Mr. Mosbah Kaddour*** *pour avoir pris le temps d'encadrer et de superviser ce travail, pour sa patience et sa disponibilité durant tout le temps de préparation de ce mémoire.*

Ensuite je remercie ***Mr. Rahmoune Abita*** *qui nous a fait l'honneur d'avoir accepter de présider le jury de cette soutenance.*

Je remercie aussi ***Mr. Saf Salim*** *pour avoir prit le temps de lire et d'examiner ce travail.*

Je tiens à particulièrement remercier les enseignants du département de maths et informatique ***Mr. Yazid Fares, Mr. Rahmoune Abdelaziz, Mr. Yagoub Ameur, Mr. Ouchenane Djamel , Mme .Abdesselam Nawal, Mr. Ameur Mohamed Amine et*** *le responsable de la bibliothéque* ***Mr.Aissa Attiyat*** *qui m'ont beaucoup aidé durant mon cursus, pour leurs temps et leurs conseils précieux, ce fut un honneur d'étudier auprés de vous.*

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur; celle qui a tout sacrifié pour me voir réussir, mon eternel fierté « maman » que j'adore.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi « papa ».

A ma grand-mére Aouissi Elhachmia

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, qui m'ont motivé à toujours faire de mon mieux mes frères Salah, Abdelsatar, Cherif
mes sœurs Belkis et Alaa, ma belle sœur et amie Bouchra Benchohra
mon beau frère Oudane Youcef et mes nièces Takoua Amina, Tasbih Elzahraa, Ahmed Yacine.

A mes amies Bahidja Rouane et Louiza Dehbi avec lesquelles j'ai toujours passé d'agréables moments qui m'ont toujours soutenu quelque soit les circonstances, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études.

A toute la famille Kazouai et Krobba.

A tous ceux qui m'ont toujours soutenu.

Abstract

The main goal of this memory is the theorical study of the boundary non-linear problem in a bounded Domain in R^n with a regular boundary Γ.

The results obtained for this reason are related to existence and uniqueness of a weak solution.

This thesis is from the following chapter:

It refers to the problem of evolution governed by the equations of Navier-Stockes in the case of homogeneous boundary conditions of Dirichlet-Neumann and initial conditions. We search first the variational formulation of this problem we are studying the existence of a week solution to this problem for which dimension Domain $n\ in\ R^n$ basing the Faedo-Galarkin techniques methods and the method of compactness, and for dimensions domain $n = 2$ we study the uniqueness of a weak solution to this problem.

Key words: Navier-Stockes equations, Green formulation, variational formulation, Faedo-Galarkin techniques method, method of compactness, weak solution, strong solution.

ملخص

العمل المنجز هو دراسة نظرية لمشكل الخاص بمسألة التطور المتعلقة بمعادلات نافي- ستوكس Navier-Stockes وغير خطية في ميدان محدود Ω من R^n ذو حافة منتظمة في الشروط الحدية من نوع ديريكلي - نيومان Direchlet-Neumann المتجانسة (حالة بعد الميدان n=2) مع الشروط الأولية.

النتائج المتحصل عليها لأجل هذه المسألة متعلقة بالوجود ،الوحدانية ،حيث نبحث اولا عن الشكل التغييري لهذه المسألة ، وندرس وجود الحل الضعيف لهذه المسألة من أجل أي بعد n للميدان Ω من R^n وذلك باستخدام طريقة فادو- كلاركين Faedo-Galarkin وطريقة التراص، ثم ندرس من أجل البعد n=2 وحدانيـة الحل الضعيف لهذه المسألة .

كما نشير بالذكر أن هذا العمل قد أنجز من طرف Jean -Louis .Lions[11] في الشروط الحدية من نوع ديريشلي Direchlet على حافة منتظمة Γ .

الكلمات الأساسية: معادلات نافي- ستوكس Navier-Stockes ، الشكل التغييري، طريقة Faedo-Galarkin، طريقة التراص ، الحل الضعيف، الحل القوي.

Table des matières

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par

Ω frontiére topologique de Ω (bord de Ω)

$\partial\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $\overline{\Omega}$ l'athérence de Ω.

Γ la frontière de Ω , supposée souvent réguliére.

Γ_i $(i = 0, 1)$ une partie de la frontière Γ.

$\mathrm{mes}(\Gamma_0)$ la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_0.

ν la normale unitaire sortante à Γ.

v_ν , v_τ les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v sur $\overline{\Omega}$.

$\mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des fonctions réelles continue sur $\overline{\Omega}$.

$W^{m\ ,\ p}\left(\Omega\right)$ l'espace de Sobolev de paramétres m et p.

$H^m\left(\Omega\right)$ l'espace de Sobolev de paramétres m et $p = 2$. $H^m\left(\Omega\right) = W^{m\ ,\ 2}\left(\Omega\right)$.

$W^{1-\frac{1}{p}\ ,\ p}\left(\Gamma\right)$ l'espace de traces d'ordre p.

$H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$ l'espace de traces d'ordre $p = 2$. $H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right) = W^{\frac{1}{2}\ ,\ 2}\left(\Gamma\right)$.

$H^{\ -\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$ le dual topologique de l'espace $H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$.

$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)^n$.

$H_\Gamma^{'}$ le dual topologique de l'espace H_Γ. $H_\Gamma^{'} = H^{\ -\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)^n$.

γ l'application trace.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations :

$H^{'}$ le dual topologique de l'espace H.

$H^{\ n}$ $= \{\ x = (x_i)\ \ /\ \ x_i \in H,\ i = \overline{1, ..., n}\ \}$.

$H_s^{\ n\times n}$ $= \{\ x = (x_{ij})\ \ /\ \ x_{ij}\ =\ x_{ji} \in H\ \ ,\ \ i\ ,\ j = \overline{1, ..., n}\ \}$.

$(.\ ,\ .)_H$ le produit scalaire de l'espace H.

$(.\ ,\ .)_{H'\times\ H}$ le produit de dualité entre l'espace $H^{'}$ et l'espace H.

$\|.\|_H$ la norme de l'espace H.

2^H l'ensemble de toutes les parties de H.

$x_n\ \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.

$x_n\ \rightharpoonup x$ la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.

Si X, Y deux espaces de Hilbert et $0 \leq \theta \leq 1$, on note par :

$[X, Y]_\theta$ l'espace intermédiare d'indice θ.

Si de plus $]0, T[$ est un intervalle de temps, on note par :

$L^p\left(0, T; H\right)$ l'espace des fonctions mesurables de : $]0, T[\ \rightarrow H$ telles que

$\int\limits_0^T \|u\left(t\right)\|_H^p\ dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de f par rapport à la i-éme composante x_i.

$f^{\ '}$ la dérivée de f par rapport au temps.

$\frac{Df}{Dt}$ la dérivée particulaire de f .
∇f le gradient de f .
$\div(f)$ la divergence de f.
∂f le sous-différenciel de f. $p.p$ presque partout.
$|\,.\,|$ la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$
$''\,.\,''$ le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^n$
$x = (x_1, ..., x_n)$ un point générique (vecteur) de $\mathbb{R}^n$.
∇u vecteur gradient de la fonction u.
Δu opérateur laplacien de la fonction vectorielle u.
$div(u)$ opérateur divérgeance de la fonction u.
$(u.\nabla)u$ le terme bilinéaire qui apparait dans l'équation de Navier-Stockes.
$supp(u)$ support de la fonction u, $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$
$(\tau_h u)(x) = u(x+h)$ la translaté de la fonction u
$C^k(\Omega)$ espace des fonctions k-fois continûment différentiable sur Ω
$C_c(\Omega)$ espace des fonctions continues à support compact dans Ω
$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
E espace de Banach
$C^k(]0, T[, E)$ espace des fonctions k-fois continûment différentiable de $]0, T[$ dans E
$C_c(\Omega)$ espace des fonctions continues à support compactde $]0, T[$ dans E
$D(\Omega)$ espace des fonctions dérivables dans Ω
$D'(\Omega)$ espace des fonctions dérivables au sens des distributions dans Ω

Historique

La mécanique des fluides est l'étude du comportement de fluides (liquides et gaz).Leur étude remonte à l'Antiquité, avec Archimède (287-212 av .j.-c), on peut cité aussi Héron d'Alexendrie qui a étudie la pression des gaz .
Aprés une longue interruption, l'étude des fluides reprend un essor véritable au XVème siècle, avec Leonardo da vinci (1452-1519) .
En 1738 enfin, Daniel Bernoulli étudie les fluides non visqueux. Parallèlement, une nouvelle théorie mathématique est en train de naitre qui va entre autres révolutionner la compréhension mathématique du mouvement des corps, solides et liquides. Il s'agit du calcule différentiel, avec d'abord Leibniz, Bernoulli, Newton et d'Alembert.
Jean d'Alembert mathématicien et philosophe français soumet en 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique (dont le manuscrit a aujourd'hui disparu), on doit néanmoins à d'Alembert, dans ce manuscrit, d'avoir introduit dans l'étude de la dynamique des fluides les notions suivantes :
-dérivées partielles
-champ de vitesse
-pression interne d'un fluide.
la première modélisation mathématique de l'écoulement d'un fluide parfait et visqueux remonte à Euler au XVIII siécle. Il publie en 1755 un traité dans lequel apparaissent les équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles voilà les équations d'Euler

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = -\nabla p \\ div\ u = 0 \end{cases}$$

Par la suite plusieurs approches ont surgi pour donner la naissance aux équations de Navier-Stokes, on doit à Navier (mathématicien et ingénieur français) l'idée ; en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u = 0$$

où ν est un coefficient de viscosité du fluide.
Stokes (mathématicien irlandais) en 1845 propose le modèle suivant pour d'écrire l'évolution d'un fluide visqueux

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u = -\nabla p \\ div\ u = 0 \end{cases}$$

Les chercheurs de l'époque de Navier et de Stokes se sont rapidement convaincus que cette démarche était vouée à l'échec.L'étape suivante a alors consisté de chercher à construire des solutions approchées, par exemple sous forme de série de fonctions polynomiales, à la manière de Cauchy.

Introduction générale

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes incompressible, c'est des équations décrivent l'évolution temporelle d'un fluide incompressible dans un domaine Ω borné de R^2. Ce fluide peut être de l'eau, ou de l'air. Diverses variantes de ces équations se retrouvent en météorologie, océanographie, magnétohydrodynamique...
On rappelle que les équations de Navier-Stokes incompressible sur un domaine Ω borné de R^2 traduisent le mouvement d'une particule de fluide visqueux incompressibles et s'expriment de la façon suivante :

$$N-S\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)u-\nu\Delta u+\nabla p=f,\ dans\ \Omega,\\ divu=0, dans\ \Omega,\\ u=0, sur\ \partial\Omega,\\ u(t=0)=u_0.\end{cases}$$

où ν est le coefficient de viscosité de fluide, u est sa vitesse (inconnue), p sa pression (inconnue), f une force extérieur (donnée). Et grâce à l'incompressibilité du fluide div u =0.
Ces équations doivent être complétées par une donnée initiale u_0 et une donnée au bord u=0.
Pour étudier ce système, il faut déterminer un espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution.
Ce travail concerne essentiellement, l'étude théorique d'un problème d'évolution relatif aux équations Navier-Stockes non linéaire dans un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière Γ telle que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ soit une partition à Γ (i.e. $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ et $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$).
À ce problème on associe des conditions aux limites mixtes, Dirichlet-Neumann dans le cas homogène. Dans le cas du problème d'évolution des conditions initiales seront prises en considération. Ce travail est consacré à l'étude de l'existence et d'unicité d'une solution faible de problème aux limites de Navier-Stockes. Les techniques utilisées sont celle de J.-L Lions [11] qui a étudié de même problème avec des conditions aux limites de Dirichlet.
En utilisant le théorème de Rham, on démontre sous certaines hypothèses que ce problème est équivalent à un problème variationnelle. Les techniques de Faedo-Galerkin, en tenant compte du théorème de compacité nous assure l'existence d'une solution faible. En suite on obtiendra l'unicité dans le cas bi-dimensionnel en se basant sur des résultats importants. Dans le premier chapitre on fait rappel de quelques des principaux résultats d'analyse fonctionnelle qu'on a utilisé dans ce mémoire. Aussi on précise quelques principaux fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev dans différents domaines et qui nous permettent de mieux comprendre le continu de ce travail, surtout les espaces de Sobolev relatifs à un ouvert Ω dans différents cas.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et outils mathématiques

Dans ce chapitre nous rappelerons quelques notions de bases en mathématiques. Nous commençerons par introduire quelques outils mathématiiiques puis nous fairons un rappel d'analyse fonctionnel dont nous aurons besoin pour la suite du travail.

1.1 Outils mathématiques :

Dans ce travail on va donner quelque outils mathématique utilisable à travers ce travail.

Définition 1.1.1 ***(Espace de Banach)***
Un espace de Banach X, est un espace linéaire normé qui est un espace métrique complet avec respect de la métrique dérivée de sa norme, où

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to d(x, y) = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2 ***(Espace de Hilbert)***
On dit que l'espace de Banach X est un espace d'Hilbert si sa norme induite par la métrique $d(\omega, \omega)$ satisfait la loi du parallélogramme, c'est-à-dire

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|x\|^2.$$

De plus, cette norme définit un produit scalaire $\langle \omega, \omega \rangle$.

Définition 1.1.3 ***(Espace de Sobolev)***
L'espace de Sobolev, noté $\mathcal{H}(\Omega)$ est constitué des fonctions dans $L^p(\Omega)$ qui ont des dérivées faibles jusqu'à l'ordre k et qui appartiennent à $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{H}^\kappa(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)/u, u', \ldots, u^{(\kappa)} \in L^2(\Omega) \right\},$$

muni de la norme et le produit scalaire :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^\kappa} = \left(\int_\Omega \left\{ |u|^2 + |u'|^2 + \ldots + |u^{(\kappa)}|^2 \right\} \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \left\{ \overline{u}v + \overline{u}'v' + \overline{u}^{(\kappa)}v^{(\kappa)} \right\} \, dx.$$

Proposition 1.1.4 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***
Soit $f, g \in L^2(I)$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par

$$|f.g|_{L^p(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}.\|g\|_{L^2(I)}.$$

Proposition 1.1.5 ***(Inégalité de Hölder)***
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné, et $0 < p \leq \infty, f \in L^p(I), g \in L^p(I)$,avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p\prime} = 1$. Alors

(1) Si $1 \leq p \leq \infty$:

$$\int_I |f.g| \ dx \leq \|f\|_{L^p(I)}.\|g\|_{L^{p'}(I)}. \tag{1.1}$$

(2) Si $0 < p < 1$:

$$\int_I |f.g| \ dx \geq \|f\|_{L^p(I)}.\|g\|_{L^{p'}(I)}. \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.6 ***(Inégalité de Young)***
Soit $0 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p\prime} = 1$ alors pour tout $a, b \geq 0$, on a

(1) Premièrement, pour tout $p \geq 1$:

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'}. \tag{1.3}$$

(2) Deuxièmement, pour $0 < p < 1$:

$$a.b \geq \frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'}. \tag{1.4}$$

Lemme 1.1.1 :(Inégalité de Friedrichs-Poincaré) :
Soit p un réel, $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ inclus dans la bande $Bd(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ a < \langle x, h\rangle < b\}$, alors on a :

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow C \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{(L^P(\Omega))^n},$$

où :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \ \ et \ \ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

Ceci permet de munir $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'une norme équivalente à sa norme usuelle

$$u \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.1 :(Plongement de Sobolev) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné et soit $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$Si \ 1 \leq p < n \ alors\,; \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où}\,; \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

$$Si \ \ p = n \ \ alors\,; \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[\,.$$

$$Si \ p > n \ \ alors\,; \ W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega).$$

Avec injection continues.
Preuve : (voir Haim Brezis [1] , p 168)**.**

Lemme 1.1.2 : *Pour $u \in V$, la forme linéaire*

$$v \to b(u, u, v)$$

est continue sur

$$V_s = \text{ adhérence de } \{\varphi/\varphi \in (D(\Omega))^n, div\varphi = 0\},$$

On a

$$b(u, u, v) = (g(u), v)_\Omega, g(u) \in V_s^{/}, \text{ avec } \|g(u)\|_V \leq C \ \|u\|^2_{(L^P(\Omega))^n},$$

où

$$(\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, p < q, \text{ et } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}), avec\ s = \frac{n}{2}.$$

Preuve : (voir *Jacques-Louis Lions* [11], p.72).
Théorème 1.1.2 :(Dualité de *D-Rham*) : *Soit L une opérateur continue sur V, on peut représenter L (de façon non unique) par ;*

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} (L_i, v_i), \quad L_i \in H^{-1}(\Omega),$$

L est nule sur $V = \{\varphi/ \ \varphi \in (D(\Omega))^n, div\varphi = 0\}$, d'après le théorème de dualité de Rham :

$$L_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \ S \in D'(\Omega),$$

Alors $S \in L^2(\Omega)$ est dans ces conditions on a

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, v_i\right) = -(S, divv) = 0, \forall v \in V,$$

Où

$$V = \left\{v/ \ v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n, divv = 0\right\}.$$

Preuve : (voir *Jacques-Louis Lions* [11], p.67 *où G. de Rham* [1] *,Variétés différentiables*).
Lemme 1.1.3 : ((Plongement de Sobolev) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, on a :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ où ; } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \ Si\ n \geq 3.$$

De façon générale, on a :

1. $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *Si* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{n} > 0.$
2. $H^s(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ *Si* $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{n} < 0.$
3. $H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q$ *fini si* $\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{n} = 0.$
   Avec injection continues.
   Preuve : (voir *Lions, Jaques-Louis, Magenes ,E.*[11] , p 06, p 045)**.**

Théorème 1.1.3 : (Théoréme de trace) : *Si* $m = 1$, *et on suppose l'ouvert* Ω $1-$*régulier* $\Big(\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *i.e,si* Ω *est borné et si sa frontière* Γ *est une variété de classe* C^1 *de dimension* $n-1\Big)$, *alors* $D(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$ *et l'application*

$$\gamma_0 : v \longrightarrow \gamma_0(v) = v\backslash_{\Gamma}$$

qui est bien définie pour $v \in D(\overline{\Omega})$, *admet un prolongement*

$$\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

qui est linéaire et continue , de plus

a) *Le Noyau de* γ_0 *est bien* $H^1_0(\Omega)$, *i.e,* $Ker\ \gamma_0 = H^1_0(\Omega)$.

b) γ_0 *est surjective .*

Si m *entier* ≥ 2, *on a l'application* $\underset{v \longrightarrow \partial^j v \diagup_{\partial x_n^j / x_n=0}}{D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^{n-1})}$, *admet un prolongement par continuité en une application* γ_j *linéaire continue de* $H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{m\ -\ j\ -\ \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, *lorsque* $0 \leq j \leq m-1$. *De plus l'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_j & : & H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m\ -\ j\ -\ \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}), \textit{ linéaire et continue.} \\ v & \longrightarrow & \gamma_j v = (\gamma_0 v, \gamma_1 v, ..., \gamma_{m-1} v) \end{array}$$

Notation : *Soit* p *un réel ,* $1 \leq p < \infty$, s *un réel ,* $0 < s < 1$, *et on note :*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^P(\Omega) \ \ / \ \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\ dx\ dy < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{H^s} = \|u\|^p_{L^P} + \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy.$$

En particulier pour $p = 2, s = \dfrac{1}{2}$

$$H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \ / \ \iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+1}}\ dx\ dy < +\infty \right\}.$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ u \in L^2(\Gamma) \ \ / \ \iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\|x-y\|^{n}}\ d\Gamma(x)\ d\Gamma(y) < +\infty \right\},$$

où $\dim\Gamma = n-1$).

Preuve : **(**voir *Gagliardo* [1], [7]**).**

Théorème 1.1.4 :*En identifiant* $H^0(\Gamma)$ *à son dual, on a*

$$(H^s(\Gamma))' = H^{-s}(\Gamma) \ \ \textit{et} \ \ \Big(H^{-s}(\Gamma)\Big)' = H^s(\Gamma), \ s > 0 \ ,$$

Pour $s \geq 0$, on a $D(\Gamma)$ est dense dans $H^s(\Gamma)$.
Notation : *pour s un réel de signe quelconque :*

$$H^s(\Gamma) = \left\{ u \ / \ \varphi_j^*(\alpha_j u) \in H^s(\mathbb{R}_y^{n-1}) \quad j = 1, ..., n \right\},$$

où : les fonctions $\{\alpha_j\}$ une partition de l'unité sur Γ , et la prolongement $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ sur $\mathbb{R}_y^{n-1}$.
Preuve : (voir *Lions, Jaques-Louis, Magenes ,E.*[11] , *p* 40 *volume* 1)**.**
Lemme 1.1.4 : (Lemme de Gronwall) : *Si on a $f \in L^\infty(0,T)$ et $g \in L^1(0,T)$, $f(t) \geq 0$ p.p.en t, $g(t) \geq 0$ p.p.en t , et si*

$$f(t) \leq C + \int_0^t f(s).g(s)ds, \ \ p.p.t, \tag{1.5}$$

Alors f vérifie

$$f(t) \leq C \exp\left(\int_0^t g(s) \ ds\right).$$

Preuve : Comme $f \in L^\infty(0,T)$ et $g \in L^1(0,T)$, la fonction :

$$F(t) = C + \int_0^t f(s) \ g(s) \ ds,$$

est absolument continue, d'où

$$F^{'}(t) = f(t) \ g(t) \ \ p.p.t,$$

Ceci joint à l'inégalité (1) donne :

$$F^{'}(t) \leq g(t) \ F(t) \text{ p.p.t.}$$

Soit :

$$F(t) \ \leqslant exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right) \leq Cte,$$

$$\Rightarrow f(t) \leq F(t) \leq Cexp\left(\int_0^t g(s) \ ds\right).$$

Lemme 1.1.5 :
i) Soit X un espace de Banach.

$$Sif \in L^p(0,T,X) \ et \ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T,X), (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

alors f est d'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$,continue de $[0,T] \to X$
ii) Soit V un sous espace de Banach et H un espace de Hilbert telle que $V \in H$, avec injection continue et que $V \subset H \subset V'$

$$si \begin{cases} u \in L^p(0,T,V) \\ u' = \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T,V), \end{cases}$$

alors l'application $[0, T] \to H$ continue.
Preuve : (voir Lions, Jacques-Louis[11].p.07).

Théorème 1.1.5 Soit H un espace de *Hilbert* sur $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) , *a une forme sesquilinéaire continue sur* H*, alors il existe un opérateur* A *linéaire continu de* H *dans* $H^{'}$*, telle que*

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_{H^/ \times H}, \forall (u, v) \in H^2 \ .$$

Preuve :
1.Pour tout u de H, l'application de

$$H \to \Bbbk, v \to \ a(u, v)$$

est antilinèaire continue d'où il existe un unique f de $H^{'}$.tel que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^/ \times H},$$

On définit ainsi une application A de H dans $H^{'}$de la façon suivante :

$$A : H \to H^{'}, u \to A(u)$$
$$A(u) : \ H \to \mathbb{C}, v \to \langle A(u), v \rangle_{H^/ \times H} = \langle f, v \rangle_{H^/ \times H},$$

2. Comme $a(u, v)$ est sesquilinéaire continue , on en déduit facilement que A est linéaire continue.

1.2 Rappels d'analyse fonctionnelle :

Dans ce paragraphe on démontre quelques résultats qui interviennent dans la suite de cette section On introduit les notations suivantes :

$$\nabla \mathrm{P} \ = \text{grad (P)} = (\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial P}{\partial x_n}),$$

$$\text{div } u = \sum_{i=1}^{n} D_i u_i = (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}),$$

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} (u_i (D_i v_j) w_j)_{(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx,$$

pour tout $u, v, w \in V$, où V désigne le sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^n$ défini par

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[\text{ p.p, div } v = 0\},$$

On commence par le :

Lemme 1.2.1 - *La forme bilinéaire* $a(u, v)$ *est symétrique, continue et coercive sur* $V \times V$*.*
- *La forme trilinéaire* $b(u, v, w)$ *est continue sur* $V \times V \times (V \cap L^n(\Omega)^n)$*.*

Preuve :
dans les deux cas la linéarité est trivial, il suffit donc de montre les autres propriétés soit u,v $\in v$,en utilisant l'inégalité de $cauchy - schwartz$, on a

$$\begin{cases} |a(u,v)| = \left|\sum_{i,j}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx\right| \leq \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|dx \\ \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{cases}$$

on a donc la continuité de la forme bilinéaire a(u,v) sur $V \times V$.

$$\begin{cases} |b(u,v,w)| = \left|\sum_{ij=1}^{n}\int_{\Omega}u_i(D_iv_j)w_jdx\right| \leq \\ \leq C\left(\int_{\Omega}|u_i|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\Omega}|D_iv_j|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|w_j|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}, \end{cases}$$

si $n \leq 3$, en utilisant le théorème de plongement de Sobolev suivant :

$$H^s(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ si } \frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{1}{n} > 0, \ (s = \frac{n}{2}),$$

pour $s = 1$, ona

$$H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \text{ si } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{n} > 0, \forall n > 1,$$

et comme

$$V \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega),$$

alors pour tout u,v dans V on a

$$|b(u,v,w)| = \left|\sum_{ij=1}^{n}\int_{\Omega}u_i(D_iv_j)w_jdx\right| \leq C\|u\|_V\|v\|_V\|\|w\|_{(L^n(\Omega))^n},$$

D'où la continuité de la forme b(u,v,w) sur $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Lemme 1.2.2 *(1)* - $\forall\ (v,p) \in V \times D'(\Omega),\ (\mathrm{grad}(p),v)_\Omega = 0.$
(2) - $\forall\ u,v,w \in V,\ b(u,v,w) = -b(u,w,v) + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma_2} u_iw_jv_j\ d\Omega_2.$
Avec div $p = \sum_{i=1}^{n}(D_ip)$ *avec* $D_ip = \frac{\partial p}{\partial x_i}$.

Preuve :
1. Soit $v \in V$; alors $v \in (D(\Omega))^n$ et on a

$$\begin{cases} (\mathrm{grad}\ (p),v)_\Omega = \int_{\Omega}\mathrm{grad}\ (p)vdx = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}(D_ip)v_{i(x)}dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}(D_ip)v_{i(x)}dx \\ = \sum_{i=1}^{n}(D_ip,v_i)_\Omega = -\sum_{i=1}^{n}(p,D_iv_i)_\Omega = -(p,\mathrm{div}\ v), \end{cases}$$

Comme div $p = 0$ dans Ω, donc

$$(\text{grad }(p), v)_\Omega = 0 \text{ dans } (D'(\Omega))^n.$$

2. Soient $u, v, w \in V$, on a

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i(D_i v_j) w_j = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (u_i w_j) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx,$$

Par intégration par partie, on obtient

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma u_i w_j v_j dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_i(u_i w_j) v_j dx,$$

et comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, et $v = 0$ sur Γ_1, on en déduit

$$\begin{cases} b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2 - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_i(u_i w_j) v_j dx \\ = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2 - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (D_i u_i) w_j v_j dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i D_i(w_j) v_j dx, \end{cases}$$

et comme div $u = 0$ dans Ω, (i.e. $\sum_{i,j=1}^{n} D_i u_i = 0$), donc

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j \; \mathrm{d}\Gamma_2 - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i D_i(w_j) v_j dx,$$

d'où le résultat suivant

$$b(u,v,w) = -b(u,v,w) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j \; \mathrm{d}\Gamma_2.$$

Lemme 1.2.3 *Si $v \in V$,Alors on a*

$$b(v,v,v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Preuve :
on a

$$b(v,v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i(D_i v_j) v_j dx = \sum_{i,j=1}^{n} (v_i(D_i v_j), v_j), \forall v \in V,$$

En tenant compte du fait que

$$(v_i(D_i v_j), v_j) = (D_i(v_i v_j), v_j) - ((D_i v_i) v_j, v_j),$$

Il vient

$$b(v,v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} (D_i(v_i v_j), v_j) - \sum_{i,j=1}^{n} ((D_i v_i) v_j, v_j),$$

Et comme div $v = \sum_{i,j=1}^{n}(D_i v_i) = 0$, il en le résultat

$$b(v,v,v) = \sum_{i,j=1}^{n}(D_i(v_i v_j), v_j) = -\sum_{i,j=1}^{n}((v_i v_j), D_i v_j),$$

En utilisent l'égalité

$$\sum_{i,j=1}^{n}((v_i v_j), D_i v_j) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i v_j (D_i v_j) dx = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} v_i (D_i v_j) v_j \ dx,$$

On trouve

$$b(v,v,v) = -b(v,v,v), \forall v \in V,$$

D'où le résultat.

Lemme 1.2.4 *Si $n = 2$, il existe une constante $C(\Omega)$ telle que*

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leqslant C(\Omega) \cdot ||v||_V^{\frac{1}{2}} \cdot ||v||_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V.$$

Preuve : *soit $v \in D(\Omega)$,en utilisant une intégration par parties,on obtient*

$$\int_{-\infty}^{x_1} v(D_1 v) dy_1 = [v^2(y_1,x_2)]_{\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} v(y_1,x_2)\frac{\partial v(y_1,x_2)}{\partial y_1} dy_1,$$

donc

$$v^2(x_1,x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(D_1 v) dy_1.$$

de même on obtient

$$v^2(x_1,x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(D_2 v) dy_2.$$

D'ou on peut écrire

$$v^2(x) = 2\int_{-\infty}^{x_1} v(D_i v) dy_i, i = 1,2.$$

on a

$$| v^2(x) | \leqslant 2\int_{-\infty}^{x_1} | v || D_1 v | dy_1 \leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} | v || D_1 v | dy_1,$$

En posant

$$v_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} | v || D_1 v | dx_1, v_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} | v || D_2 v | dx_2,$$

on obtient

$$\begin{cases} v^2(x) \leqslant 2v_1(x_2), \\ v^2(x) \leqslant 2v_2(x_1), \end{cases}$$

Donc

$$v^2(x)v^2(x) \leqslant 4v_1(x_2)v_2(x_1) \leqslant 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mid v \mid\mid D_1v \mid dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mid v \mid\mid D_2v \mid dx_2\right),$$

et par conséquent

$$\begin{cases} ||v||_{L^4(R^2)} = \int_{R_2} v^4(x)dx \leqslant 4\int_{R_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_1v|dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |v||D_2v|dx_2\right)dx_1dx_2 \\ \leqslant 4\left(\int_{R^2} |v||D_1v|dx\right)\left(\int_{R^2} |v||D_2v|dx\right), \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il résulte

$$\int_{R^2} |v||D_1v|dx \leqslant \left(\int_{R^2} |v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^2} |D_1v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{R^2} |v||D_2v|dx \leqslant \left(\int_{R^2} |v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^2} |D_2v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

Alors

$$\int_{R^2} v^4(x)dx \leqslant 4\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|D_1v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|D_2v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

Moyennant l'inégalité $2ab \leq a^2+b^2$*, on trouve*

$$\|D_1v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|D_2v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{2}\Big(\|D_1v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|D_2v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big),$$

D'où il vient

$$\int_{R^2} v^4(x)dx \leqslant 2\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|D_iv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right),$$

et par conséquent

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\left(\sum_{i=1}^{2}\|D_iv\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{1.6}$$

De même, on a

$$\sum_{i=1}^{2}\|D_iv\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{1.7}$$

Comme $V \subset H_0^1(\Omega)$*, en utilisant l'inégalité de Poincaré ; on déduit l'existence d'une constante positive* $C^1(\Omega) > 0$ *vérifiant*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C^1(\Omega)\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{1.8}$$

Moyennant les inégalités (1.7), (1.8) et (1.9), on tire

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}}C'(\Omega)\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall v \in V,$$

D'où l'inégalité

$$||v||_{L^4(\Omega)} \leq C'(\Omega)\|v\|_V^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in V.$$

Lemme 1.2.5 *Soit* $n = 2$.
Soit $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n)$ *alors* $\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u \in L^2(0,T,V')$.

Preuve : *En posant* $A = \sum_{i=1}^{n}(u_i D_i u)$, *on va essayer de majorer la norme suivante :*

$$\|A\|_{V'} = \sup_{V \neq 0} \frac{|(\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u, v)_\Omega|}{\|v\|_V}, \ \forall v \in V,$$

Soit $v \in V$, *d'aprés le Lemme 1.2.2, on a*

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2, \ \forall u,v,w \in V,$$

d'où il résulte

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u, v\right)_\Omega = b(u,u,v) = -b(u,v,u) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i v_j u_j d\Gamma_2,$$

et par conséquent

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u, v\right)_\Omega\right| \leq |b(u,v,u)| + \left|\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} u_i v_j u_j d\Gamma_2\right| = I + II,$$

or que

$$I = |b(u,v,u)| = \left|\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_i v_j) u_j dx\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i u_j (D_i v_j) dx\right|,$$

En utilisant l'intégralité de Hölder, on trouve

$$I \leq C \sum_{i,j=1}^{2} \left(\int_\Omega |u_i|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega |u_j|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega |D_i v_j|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_1 ||u||_{L^4(\Omega)} ||u||_{L^4(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{2} \|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq C_1 ||u||^2_{(L^4(\Omega))^2} \sum_{i,j=1}^{2} \|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\|_{(L^2(\Omega))^2},$$

En tenant compte du lemme 1.2.4 ; on voit que

$$I = |b(u,v,u)| \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{2} \|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\|_{(L^2(\Omega))^2},$$

et par conséquent

$$I = |b(u,v,u)| \leq C_2 \|u\|_v^2 \|u\|_V \ \forall v \in V.$$

D'autre part, on a

$$II = \left|\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} u_i v_j u_j d\Gamma_2\right| \leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_i v_j u_j| d\Gamma_2,$$

d'où il vient

$$II \leq C \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_i v_j|^2 d\Gamma_2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_j|^2 d\Gamma_2\right)^{\frac{1}{2}} = C \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_i|^2 |v_j|^2 d\Gamma_2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_j|^2 d\Gamma_2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou encore

$$II \leq C_1' \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_i v_j|^2 d\Gamma_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_2} |u_j|^2 d\Gamma_2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$II \leq C_2' \|u\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u\|_{L^2(\Gamma_2)},$$

et d'après le théorème de trace, on a

$$l'injection\ V \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \in L^2(\Gamma)\ est\ continue.$$

d'où il résulte

$$II \leq C_3 \|u\|_V^2 \|u\|_V, \forall v \in V.$$

donc

$$\begin{cases} \left| \sum_{i=1}^{n} (u_i D_i u, v)_\Omega \right| \leq I + II \leq \left[C_2 \|u\|_V^2 \|v\|_v \right] + \left[C_3 \|u\|_V^2 \|v\|_V \right] \\ \leq C_4 \|u\|_V^2 \|v\|_V, \forall v \in V, \end{cases}$$

On obtient donc

$$\|A\|_{V'} = sup \frac{|(\sum_{i=1}^{n} u_i D_i u, v)_\Omega|}{\|v\|_V} \leq C_4 \|u\|_V^2, \forall v \in V\ \ et\ v \neq 0,$$

et comme

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)\ \ et\ V \subset H_0^1(\Omega) \subset V'$$

donc

$$A = \sum_{i=1}^{n} (u_i D_i u) \in L^2(0, T, V')$$

Lemme 1.2.6 *Soit $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \xi \to p(\xi)$, une application continue telle que pour $\rho > 0$ convenable, on ait*

$$\langle p(\xi), \xi \rangle_\Omega \geqslant 0,\ \ \forall\ \xi\ telque\ |\xi| = \rho$$

Si $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ / $\langle \xi, \eta \rangle_\Omega = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i, |\xi| = (\xi, \xi)_\Omega^{\frac{1}{2}},$
Alors $\exists\ \xi, |\xi| \leqslant \rho$, tel que

$$p(\xi) = 0.$$

Preuve :
On raisonne par l'absurde ; si $p(\xi) \neq 0$ dans la boule $K = \{|\zeta| ; |\zeta| \leq \rho\}$, on peut considérer l'application

$$\zeta \to -\ p(\xi) \frac{\rho}{|p(\xi)|} \tag{1.9}$$

de K dans K qui est alors continue, le Théorème du point fixe de brouwer donne alors l'existence d'un ζ tel que

$$\zeta = -\ p(\xi) \frac{\rho}{|p(\xi)|} \tag{1.10}$$

d'où $|\zeta| = \rho$ et prenant le produit scalaire des deux membres de (1.11) par ζ :
$(p(\xi), \xi)_\Omega = -\rho\, |p(\xi)| < 0$, ce qui contredit (1.10).

Chapitre 2

Le problème d'évolution relatif aux équations de Navier-Stockes non linéaire avec des conditions aux limites Dirichlet-Neumann homogènes (cas la dimension n=2).

Dans ce chapitre, on considère un problème d'évolution gouverné par les équations de Navier-Stockes. On associe à ce problème des conditions au limites mixtes Dirichlet-Neumann homogènes et des conditions initiales. En cherche la formulation variationnelle du problème et l'application des techniques de la méthode de Faedo-Galerkin, ainsi que la méthode de compacité, on démontre que le problème considéré possède au moins une solution variationnelle. Pour la dimension $n = 2$ en utilisant des résultats mathématiques on démontre l'unicité de la solution.

2.1 Position du problème (Problème principal) :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ borné, de frontière Γ régulière (i.e de classe C^1), on désigne par u un vecteur $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, où $\forall$i, $u_i : Q = \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}$. soit Γ_1, Γ_2 une partition de Γ, i.e : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. On pose que $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[$, où T est un réel fini. Le problème considéré dans ce paragraphe consiste à chercher la vitesse $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$;
$u : Q = \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}^n$ et une fonction scalaire $P : Q = \Omega \times]0, T[\to \mathbb{R}$, $(P \geq 0)$ vérifiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u = f - grad(p), (v > 0), \tag{2.1}$$

$$\text{div } u = 0, \tag{2.2}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[, \tag{2.4}$$

$$u(x, 0) = u(0) = u_0(x) \in (L^2(\Omega))^n \text{ dans } \Omega, (i.e. u_i(x, 0) = u_{0_i}(x), x \in \Omega). \tag{2.5}$$

Où :
ν : est appelée viscosité cinématique du fluide.

$p: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, est une fonction scalaire sur Ω, et appelée la pression du fluide .
$\overrightarrow{u}(x):$ est le vecteur vitesse de l'écoulement de fluide, représenté par $u = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$.
$x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ désigne les coordonnées d'Euler de la particule considérée.
$f(x) = \{f_i(x)\}$ est la densité volumique des forces extérieures agissant sur le fluide (en général, ce sont des forces de pesanteur).
On dénote par u la vitesse d'écoulement de fluide, ν sa viscosité qui produit des frottements, $\nu.\Delta u$ sont des forces de frottement, qui en générale
dépendent de la vitesse. La somme des forces extérieures est égale à la masse par l'accélération, les extérieures $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{gradP}$ (proviennent des parois).
L'équation (2.1) est l'équation de *Navier-Stockes*, qui décrit l'écoulement d'un fluide incompressible, homogène dans le cas d'évolution
L'équation (2.2) est la loi d'état d'un milieu incompressible, c'est la conversation du fluide, i.e : la conservation locale des quantités du fluide.
L'équation (2.3) désigne la condition aux limites de *Dirichlet* qui assure que le fluide est immobile (statique) sur la parois $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$.,
la relation (2.4) représente la condition aux limites de *Neumann* indiquant que la vitesse d'écoulement ne dépond pas de la forme de Γ_2.
Les relations (2.5) représentent les conditions initiales.

2.2 Formulation variationnelle (Problème variationnelle) :

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude variationnelle du problème considéré en basant sur des résultats d'analyse fonctionnelle très importants. On démontre à la fin de ce paragraphe que le problème considéré est équivalent à un problème variationnelle qui nous permet d'étudier l'existence et l'unicité de la solution faible (au sens de distribution) par la proposition 2.2.1 suivant :

Proposition 2.2.1 *Sous les hypothéses*

$$f \in L^2(0,T,V'), \tag{2.6}$$

$$u_0 \in (L^2(\Omega))^n, \tag{2.7}$$

Le problème (2.1)-(2.5) est équivalent au problème variationnelle (P.V) suivant

$$(P.V): \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap (L^n(\Omega))^n \text{ tels que} \\ (u',v)_\Omega + \nu a(u,v) - b(u,u,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2 = (f,v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \\ u(x,0) = u(0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

Où V désigne le sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^n$ défini par :

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0,T[\text{ p.p, div } v = 0\}.$$

preuve :
Soit u est une solution du problème (2.1)-(2.5), on multiple l'équation (2.1) par $v \in C^2(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ (i.e. on utilise le produit scalaire) et on intègre sur Ω, il vient

$$\int_\Omega u'vdx - \nu\int_\Omega (\Delta u)vdx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega (u_i D_i u)vdx = \int_\Omega fvdx - \int_\Omega \text{grad } (p)vdx, \tag{2.8}$$

En utilisant la formule de Green, et comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, on voit que

$$\nu\int_\Omega (-\Delta u)vdx = \nu\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \nu\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\Gamma_1 - \nu\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\Gamma_2, \tag{2.9}$$

En tenant compte des conditions aux limites $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur Γ_2, de (2.9) on tire

$$\int_\Omega u'vdx - \nu\int_\Omega (\Delta u)vdx = \int_\Omega u'vdx + \nu a(u,v) - \nu\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\Gamma_1, \ \forall u,v \in H^1(\Omega), \tag{2.10}$$

D'après le lemme 1.2.2, on a

$$\begin{cases} (grad(p),v)_\Omega = \int_\Omega \text{grad } (p)vdx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (D_i p) v_{i(x)} dx, \\ = \sum_{i=1}^{n} (D_i p, v_i)_\Omega = -\sum_{i=1}^{n} (p, D_i v_i)_\Omega = -(p, \text{ div } v). \end{cases} \tag{2.11}$$

Et d'après le lemme 1.2.2, on a

$$\begin{cases} b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} (u_i(D_i v_j), w_j)_\Omega = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i(D_i v_j), w_j dx = \\ = -b(u,w,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} u_i w_j v_j d\Gamma, \ \forall u,v,w \in (H^1(\Omega))^n. \end{cases}$$

Moyennant (2.10), (2.11), il découle

$$\begin{cases} (u',v)_\Omega + \nu a(u,v) - b(u,u,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma} u_i u_j v_j d\Gamma = \\ = (f,v)_\Omega - (p, \ \text{div } v) - \nu \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma_1, \forall u,v \in (H^1(\Omega))^n, \end{cases} \tag{2.12}$$

Pour $v = 0$ sur Σ_1, div $v = 0$, moyennant (2.5) de (2.12) on tire

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap (L^n(\Omega))^n \text{ tels que} \\ (u',v)_\Omega + \nu a(u,v) - b(u,u,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2 = (f,v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n \\ u(x,0) = u(0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

Où ;

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^n, v = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0,T[\text{ p.p, div } v = 0\}.$$

Réciproquement. Soit u une solution du problème variationnelle (P.V), on a

$$(u',v)_\Omega + \nu a(u,v) - b(u,u,v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2 = (f,v)_\Omega, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

Ou encore en utilisant la formule de Green

$$\int\limits_{\Omega} u' v dx + \nu \int\limits_{\Omega} (-\Delta u) v dx + \nu \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \ d\Gamma + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (u_i D_i u) v dx = \int\limits_{\Omega} f v dx, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \tag{2.14}$$

pour $v = \varphi \in D(\Omega)$, (2.14) devient

$$\int_{\Omega} u' \varphi dx + \nu \int_{\Omega} (-\Delta u) \varphi dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (u_i D_i u) \varphi dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \tag{2.15}$$

En posant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u - f = S,$$

De (2.15) on conclut

$$(S,\varphi)_\Omega = 0, \forall \varphi \in D(\Omega), \tag{2.16}$$

D'aprés le théorème de dualité de Rham,de (2.16) il résulte

$$S = \text{- grad } (p), p \in D'(\Omega).$$

D'où l'équation (2.1).Comme les équations (2.2),(2.3),(2.5) sont vérifiées,il nous reste que de vérifier (2.4) :
D'après (2.14) on a

$$\nu \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma = 0, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

On tenant compte de (2.3),il vient que

$$\int_{\Gamma 2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma_2 = 0, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

D'ou la condition (2.4), et par conséquent u est une solution du problème (2.1)-(2.5).

Proposition 2.2.2 *la condition (2.5) a un sens .*
***preuve** :*
on a $u_0 \in (L^2(\Omega))^n$, *on a*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i D_i u - = f\text{- } grad\ (p), \, dans\ Q = \Omega \times]0, T[,$$

ou encore sous forme variationnelle

$$(u', v) + \nu a(u, v) - b(u, v, u) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma 2} u_i v_j u_j d\Gamma_2 = (f, v), \forall u, v \in V \cap (L^n(\Omega))^n.$$

D'où;

$$(u', v) = -\nu a(u, v) + b(u, v, u) + (f, v) - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma 2} u_i u_j v_j d\Gamma_2, \forall u, v \in V \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{2.17}$$

Et d'après les lemmes 1.2.1,et 1.2.4, on a

$$\mid a(u, v) \mid \leqslant C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{2.18}$$

$$|b(u, v, w)| \leqslant C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{(L^n(\Omega))^n}, \forall u, v, w \in V \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{2.19}$$

$$|(f, v)_\Omega| \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n. \tag{2.20}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2 \right| \leq C \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\int_{\Gamma_2} |u_i v_j| d\Gamma_2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Gamma_2} |w_j| d\Gamma_2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ , \forall u, v, w \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

et par conséquent

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i w_j v_j d\Gamma_2 \right| \leq C \|u\ v\|_{L^2(\Gamma_2)} \|w_j\|_{L^2(\Gamma_2)} \ , \forall u, v, w \in V \cap (L^n(\Omega))^n.$$

Et d'après la théorème de trace, l'application

$$H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

$$u \to u/_{\Gamma}$$

est linéaire continue et surjective.

De plus on a la majoration suivante :

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \ , \forall v \in V,$$

d'où il vient

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2 \right| \leq C_4 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \forall u, v \in V \cap (L^n(\Omega))^n, \tag{2.21}$$

Moyennant (2.18)-(2.21)de(2.17), pour tout $u, v \in V \cap (L^n(\Omega))^n$ *il vient*

$$\begin{cases} |(u', v)_\Omega| = \left| -\nu a(u,v) + b(u,u,v) + (f,v)_\Omega - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2 \right| \\ \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^n(\Omega)^n} \\ + C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C_4 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{cases}$$

Ou encore

$$|(u', v)_\Omega| \leq \left(C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} + C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^n(\Omega)^n} + C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_4 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

D'où

$$|(u', v)_\Omega| \leq Cte \|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall u, v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

Et par conséquent

$$\|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte, \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

On obtient

$$u' \in L^2(0, T, V'). \tag{2.22}$$

Comme

$$V \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega), V' \subset H^{-1}(\Omega) \text{ avec injection continue},$$

Et d'après le lemme 1.1.5 :
Soit V un espace de Banach.

$$\text{comme } u \in L^2(0, T, V) \text{ et } u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, V),$$

on a

$$u : [0, T] \to H^{-1}(\Omega) \text{ continue en } t = 0$$

Il résulte que (2.5) a un sens .

2.3 Existence et unicité du problème

2.3.1 Existence

Nous démontrons l'existence pour une dimension "n" quelconques du domaine $\Omega \subset R^n$. En utilisant les techniques de Faedo-Galerkin, ainsi que la méthode de Compacité, on démontre que le problème considéré possède au moins une solution variationnelle .

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.6),(2.7),le problème (P.V) admet au moins une solution u pour T fini quelconque ,vérifie*

$$u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n),$$
$$u' \in L^2(0,T,V').$$

Preuve :
Les techniques de Faedo-Galerkin sera décomposer par quatre étapes suivants :
Solution approchées.
Estimation a priori (I).
Estimation a priori (II).
Passage à la limite.

Solution approchées
Soit l'espace $(H^s(\Omega))^n$, $s=\dfrac{n}{2}$, muni du produit scalaire

$$(u,v)_s=\sum_{i=1}^{n}(u_i,v_i)_{H^s(\Omega)},\ \forall v\in H^s(\Omega), \tag{2.23}$$

Avec cette notation, on a le problème spectrale
$((w,v))_s=\lambda(w,v)$, $\forall v\in V_s$= adhérence de $\{\mathit{\Phi}/\mathit{\Phi}\in(D(\Omega))^n,\ \operatorname{div}\mathit{\Phi}=0\}$ dans $(H^s(\Omega))^n$
qui admet une suite des solutions non nulles sont des vecteurs propres w_j associées aux valeurs propres λ_j,

$$((w_j,v))_s=\lambda_j(w_j,v),\ \forall v\in V_s,\ \lambda_j>0. \tag{2.24}$$

où :

$$V=\{v\in(H^1(\Omega))^n/v=0 \text{ sur } \Sigma_1=\Gamma_1\times]0,T[\text{ p.p, div } v=0\}.$$

Comme l'espace V c'est un espace séparable fermé (car $H^1(\Omega)$ est séparable) il existe une base prés-hilbertienne$\{w_1,w_2,...,w_m\}$ partout dense dans V.
On considère la base $Hilbertienne\{w_1,w_2,...,w_m\}$, d'éléments de V telle que
(1) $\{w_1,w_2,...w_m\}$ est orthonormale, i.e. $\|w_k\|=1$, $\forall k$ et $(w_i,w_j)=0$, $\forall i,j,\ i\neq j$,
(2) l'espace V_m engendré par $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ est dense dans V.
Comme base spéciale dans la méthode de $Faedo-Galerkin$. On définit la solution approchée d'ordre "m" par $u_m(t)\in\{w_1,w_2,...w_m\}$, telle que :

$$u_m(t)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{m,k}(t)w_k$$

D'après (2.13), on a pour tout $v\in V_m$

$$\begin{cases}(u'_m(t),v)_\Omega+\nu a(u_m(t),v)-b(u_m(t),u_m(t),v)=\\=(f,v)_\Omega-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma 2}(u_m(t))_i(u_m(t))_j\ v_j d\Gamma_2,\end{cases} \tag{2.25}$$

De (2.25), en remplaçant v par w_k, $\forall k=1,...,m$, on obtient

$$\begin{cases}(u'_m(t),w_k)_\Omega+\nu a(u_m(t),w_k)-b(u_m(t),u_m(t),w_k)=\\=(f,w_k)_\Omega-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma 2}(u_m(t))_i(u_m(t))_j\ (w_k)_j d\Gamma_2,\end{cases} \tag{2.26}$$

Comme $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante, le systéme (2.26) admet au moins une solution u_m dans V_m,

$$\begin{cases} u_m(0) \to u_{m,0}, u_m(0) \in \{w_1, w_2, ..., w_m\} \\ u_{m,0} \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Estimation a priori (l).
Comme $u_m \in V_m = < w_1, w_2, ..., w_m >$, on multiplie l'équation (2.25) par $\lambda_{m,k}(t)$ et l'on somme en k dans (2.25), on obtient

$$\begin{cases} (u'_m(t), u_m(t))_\Omega + \nu a(u_m(t), u(t)) + b(u_m(t), u_m(t), u(t)) = \\ = (f, u_m(t))_\Omega - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma 2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j \ (u_m(t))_j d\Gamma_2. \end{cases} \tag{2.27}$$

avec

$$V_m = < w_1, w_2, ..., w_m >, \forall u_m \in V_m, u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{m,k}(t) w_k.$$

On va vérifier que

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n). \tag{2.28}$$

De (2.13), on a pour tout $v_m \in V_m$ la formulation variationnelle

$$(u'_m, v_m)_\Omega + \nu a(u_m, v_m) - b(u_m, u_m, v_m) = (f, v_m) - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma 2} u_{mi} u_{mj} v_{mj} d\Gamma_2 \ ,$$

Relativement à cette formulation on a au sens de distribution que :
Comme $u_m(t) \in L^2(0, T, V)$, $u'_m(t) \in L^2(0, T, V')$, on a

$$\begin{cases} (u'_m(t), u_m(t))_\Omega = \int_\Omega u'_m(t) u_m(t) dx = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_m(t)\|_V^2) dx = \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \|u_m(t)\|_V^2 \ dx \right), \end{cases}$$

donc :

$$(u'_m(t), u_m(t))_\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2. \tag{2.29}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{cases} |(f(t), u_m(t))_\Omega| \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\nu} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\nu} \|u_m(t)\|_V, \end{cases}$$

Moyennant l'inégalité de $Young$, il résulte

$$|(f(t), u_m(t))_\Omega| \leq \frac{1}{2} \frac{C^2}{\nu} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \nu \|u_m(t)\|_V^2. \tag{2.30}$$

Aussi d'après le lemme 1.2.1., on a

$$|\nu a(u_m(t), u_m(t))| \leq \nu \|u_m(t)\|_V \|u_m(t)\|_V = \nu \|u_m(t)\|_V^2. \tag{2.31}$$

Et d'après le lemme 1.2.2., on a

$$b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = -b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (u_m(t))_j d\Gamma_2,$$

D'où ;

$$b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (u_m(t))_j d\Gamma_2, \tag{2.32}$$

En remplaçant (2.32) dans (2.27), on obtient

$$\begin{cases} (u'_m(t), u_m(t)) + \nu\ a(u_m(t), u_m(t)) = (f, u_m(t))_\Omega - \\ \dfrac{3}{2} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (u_m(t))_j d\Gamma_2, \end{cases} \tag{2.33}$$

En posant

$$I = \left| -\frac{3}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (u_m(t))_j d\Gamma_2 \right|,$$

il vient

$$\begin{cases} I \leq C_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Gamma_2} |(u_m(t))_i| \sum_{j=1}^{n} |(u_m(t))_j (u_m(t))_j| d\Gamma_2 \right) \leq \\ \leq C_1 \displaystyle\sup_{x \in \Gamma_2} \left(\sum_{i=1}^{n} |(u_m(t))_i| \right) \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^{n} |(u_m(t))_j (u_m(t))_j| d\Gamma_2, \end{cases}$$

d'où

$$I \leq C_2 \int_{\Gamma_2} |u_m(t)|^2 d\Gamma_2 \leq C_2 \|u_m(t)\|^2_{L^2(\Gamma_2)},$$

Et d'après le théorème de trace, on a

$$I \leq C_2 \|u_m(t)\|^2_V. \tag{2.34}$$

Par intégration entre 0 et t, l'égalité (2.27) en valeur absolue en utilisant (2.29),(2.30),(2.31),(2.34), il découle

$$\begin{cases} \|u_m(t)\|^2_V + 2\ \nu \displaystyle\int_0^t \|u_m(s)\|^2_V\ ds \leq \\ \leq \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{C^2}{\nu} \displaystyle\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\ ds + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2_V\ ds + 2C_2 \int_0^t \|u_m(s)\|^2_V\ ds, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \|u_m(t)\|^2_V +\ \nu \displaystyle\int_0^t \|u_m(s)\|^2_V\ ds \leq \\ \leq \|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{C^2}{\nu} \displaystyle\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\ ds + 2C_2 \int_0^t \|u_m(s)\|^2_V\ ds, \end{cases}$$

Moyennant $f \in L^2(0, T, V'), u_{m,0} \to u_0$ dans $L^2(\Omega), u_{m,0} \in V$, il en résulte

$$\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C^2}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq C_3,$$

donc

$$\|u_m(t)\|^2_V \leq \|u_m(t)\|^2_V + \nu\ \int_0^t \|u_m(s)\|^2_V ds \leq C_3 + 2C_2 \int_0^t \|u_m(s)\|^2_V ds,$$

d'après le lemme de Gronwall, on a

$$\|u_m(t)\|_V^2 \leq C_4 \text{ indépendant de } m, \tag{2.35}$$

et par conséquent

$$\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq C_5,$$

On obtient donc le résultat

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,(L^2(\Omega)^n).$$

Estimation a priori (II)
Le but de ce paragraphe est de démontrer que

$$u_m' \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T,V'). \tag{2.36}$$

Soient P_m le projecteur orthogonal défini par

$$\begin{cases} V \to V_m \\ h \to P_m(h) = \sum_{i=1}^m (h, w_i)_\Omega w_i \end{cases}$$

Dans le problème (2.1)-(2.5) (de même (P.V)), toutes les hypothèses du théorème (voir théorème 1.1.5) et par conséquent il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(V, V')$, telle que pour tous u, v dans V, on a

$$a(u,v) =< A(u), v >_{V' \times V} .$$

d'où de (2.26) on tire

$$\begin{cases} (u_m'(t), w_k)_\Omega + \nu \left\langle A(u_m(t), w_k) \right\rangle_{V' \times V} + b(u_m(t), u_m(t), w_k) \\ = (f, w_k)_\Omega - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (w_k)_j d\Gamma_2, \end{cases} \tag{2.37}$$

On multiplie (2.37) par w_k et l'on somme sur k, on obtient

$$\begin{cases} P_m(u_m'(t)) + v\ P_m(A(u_m(t))) + \sum_{k=1}^m (b(u_m(t), u_m(t), w_k) w_k) \\ = P_m(f(t)) - \sum_{k=1}^m \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} (u_m(t))_i (u_m(t))_j (w_k)_j w_k d\Gamma_2, \end{cases} \tag{2.38}$$

Grâce au lemme 1.2.4 , pour $n = 2$, de

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n)$$

il vient

$$u_m \in L^4(0,T,(L^{\frac{p}{2}}(\Omega)^n) = L^4(0,T,(L^2(\Omega))^n),$$

où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{4}$.

d'après le théorème 1.1.5 , de

$$\begin{cases} Si\ u_m \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n) \\ \text{alors } A(u_m) \in L^2(0,T,V') \end{cases} \tag{2.39}$$

et que

$$\begin{cases} Si\ f \in L^2(0,T,V') \text{ alors} \\ P_m(f) \in L^2(0,T,V'). \end{cases} \tag{2.40}$$

Grâce aux lemmes 1.2.4., 1.2.5., cités dans le premier chapitre on a

$$\left|\sum_{k=1}^{m}(b(u_m(t),u_m(t),w_k)w_k)\right| \le C\|u_m\|_V\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\|w_k\|_V\|w_k\|_V \le Cte,$$

Il résulte

$$\sum_{k=1}^{m}(b(u_m(t),u_m(t),w_k)w_k) \in L^2(0,T,V'). \tag{2.41}$$

Reste à avoir la majoration de

$$II = \left| -\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma_2}(u_m(t))_i(u_m(t))_j(w_k)_j w_k d\Gamma_2\right| \le Cte. \tag{2.42}$$

On a

$$II \le \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\Gamma_2}(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i)(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_j(w_k)_j)w_k d\Gamma_2\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\Gamma_2}(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i)(u_m(t)w_k)w_k d\Gamma_2\right|$$

$$II \le \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\Gamma_2}(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i u_m(t),w_k)_\Omega w_k d\Gamma_2\right| \le \left|\int_{\Gamma_2}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i)(u_m(t),w_k)_\Omega w_k\right) d\Gamma_2\right|,$$

Et comme P_m est linéaire sur $(L^2(\Omega))^n$, on obtient

$$II \le \left|\int_{\Gamma_2} P_m\left((\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i u_m(t))\right) d\Gamma_2\right|,$$

d'où ;

$$II \le \int_{\Gamma_2}\left|\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i\right||P_m(u_m(t))|d\Gamma_2 \le \sup_{x\in\Gamma_2}\left|\left(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i\right)\right|\int_{\Gamma_2}|P_m(u_m(t))|d\Gamma_2,$$

i.e ;

$$II \le \int_{\Gamma_2}\left|\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i\right||P_m(u_m(t))|d\Gamma_2 \le \sup_{x\in\Gamma_2}\left|\left(\sum_{i=1}^{n}(u_m(t))_i\right)\right|\int_{\Gamma_2}|P_m(u_m(t))|d\Gamma_2,$$

Et comme P_m est continue de V sur V, on en déduire que

$$II \le C\int_{\Gamma_2}\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)}\|u_m\|_V d\Gamma_2,$$

Et comme on a $u_m \in V_m \subset V$ et Γ_2 est fermé, on trouve

$$\int_{\Gamma_2}\|u_m\|_V\ d\Gamma_2 \le C,$$

d'où ;

$$II \leq Cte.$$

Finalement d'aprés les résultats précédents (2.17),(2.18), (2.19) et (2.20) dans (2.38), on obtient

$$u'_m \in L^2(0, T, V').$$

D'où ;

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V').$$

Passage à la limite :
Comme

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V') \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n),$$

on peut extraire une sous suite u_μ telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0, T, V) \text{ faible },\tag{2.43}$$

Puisque

$$L^\infty(0, T, L^2(\Omega)^n) = (L^1(0, T, L^2(\Omega)^n))'.$$

il vient

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)^n) \text{ faible*},\tag{2.44}$$

Et en particulier

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)^n) \text{ faible*}.\tag{2.45}$$

De (2.43), (2.45), il résulte

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0, T, V) \text{ faible }.\tag{2.46}$$

Et comme l'injection

$$V \subset H^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \; est \; compact,$$

donc

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n) = (L^2(Q))^n \text{ fort et p.p dans Q}.\tag{2.47}$$

Comme

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T, V'),$$

alors

$$u'_\mu \to u' \text{ dans } L^2(0, T, V') \text{ faible},\tag{2.48}$$

On déduit de (2.43),(2.48) que

$$u_\mu(0 \to u(0) \text{ dans } V' \text{ faible}),$$

d'où ;

$$u(0) = u_0 \text{ a un sens }.\tag{2.49}$$

Et comme

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, L^2(\Omega)^n),$$

Et d'aprés le lemme 1.2.4., de

$$u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^n)$$

on tire

$$u \in L^4(0, T, (L^p(\Omega))^n)$$

où : $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{4}$.
De lemme (1.2.4), on a

$$(u_\mu)(u_\mu) \text{ est borné dans } L^4(0, T, (L^{\frac{p}{2}}(\Omega))^n),$$

On pose : $\dfrac{p}{2} = p'$, donc $p = 2p'$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\|(u_\mu)_i(u_\mu)_j\|^2_{L^{p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |(u_\mu)_i(u_\mu)_j|^{p'} dx\right)^{\frac{2}{p'}} \leq \left(\int_\Omega (|(u_\mu)_i|^{p'})^2 dx\right)^{\frac{2}{2p'}} \left(\int_\Omega (|(u_\mu)_j|^{p'})^2 dx\right)^{\frac{2}{2p'}}$$

où encore

$$\|(u_\mu)_i(u_\mu)_j\|^2_{L^{p'}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |(u_\mu)_i|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_\Omega |(u_\mu)_j|^p dx\right)^{\frac{2}{p}},$$

d'où ;

$$\begin{aligned}\int_0^T \|(u_\mu)_i(u_\mu)_j\|^2_{L^{\frac{p}{2}}(\Omega)} ds &\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |(u_\mu)_i|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_\Omega |(u_\mu)_j|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} ds \\ &\leq \int_0^T \|(u_\mu)_i\|^2_{L^p(\Omega)} \|(u_\mu)_j\|^2_{L^p(\Omega)} ds,\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on a

$$\int_0^T \|(u_\mu)_i(u_\mu)_j\|^2_{L^{\frac{p}{2}}(\Omega)} ds \leq \int_0^T \|(u_\mu)\|^4_{L^p(\Omega)} ds$$

Et comme $(u_\mu)_i, (u_\mu)_j$ appartiennent à $L^4(0, T, L^4(\Omega)^n)$, alors

$$\int_0^T \|(u_\mu)_i(u_\mu)_j\|^2_{L^2(\Omega)} ds < +\infty,$$

d'où ;

$$(u_\mu)_i(u_\mu)_j \text{ est borné dans } L^2(0, T, (L^2(\Omega))^n). \tag{2.50}$$

Donc, on peut supposer que

$$(u_\mu)_i(u_\mu)_j \to X_{i,j} \text{ dans } L^2(0, T, (L^{\frac{p}{2}}(\Omega))^n) \text{ faible },\tag{2.51}$$

Par ailleurs (2.47) donne

$$(u_\mu)_i \to u_i \text{ dans } L^2(\mathrm{Q}) \text{ fort},$$

et

$$(u_\mu)_j\varphi \to u_j\varphi \text{ dans } L^2(\mathrm{Q}) \text{ fort}, \forall \varphi \in D(Q),$$

donc,

$$\int_0^T ((u_\mu)_i(u_\mu)_j\varphi)_\Omega ds \to \int_0^T (u_i, u_j\varphi)_\Omega ds, \ \forall \varphi \in D(Q),$$

d'où ;

$$\int_Q (u_\mu)_i(u_\mu)_j\varphi(x) dxds \to \int_Q u_i, u_j\varphi(x) dxds, \ \forall \varphi \in D(Q),$$

Donc

$$(u_\mu)_i(u_\mu)_j \to u_iu_j \text{ dans } D'(Q),\tag{2.52}$$

Moyennât (2.51),(2.52), on trouve

$$X_{i,j} = u_i u_j,$$

Comme

$$L^2(0,T) \hookrightarrow D'(0,T).$$

Par passage à la limite on obtient que

$$b(u_\mu, u_\mu, w_k) \to b(u, u, w_k) \text{ faible dans } L^2(0,T), \tag{2.53}$$

donc

$$\int_0^T b(u_\mu, u_\mu, w_k)\varphi ds \to \int_0^T b(u, u, w_k)\varphi ds, \forall \varphi \in L^2(0,T). \tag{2.54}$$

Et comme

$$\begin{cases} (u'_\mu, w_k)_\Omega \to (u', w_k)_\Omega \text{ dans } D'(0,T), \\ \\ a(u_\mu, w_k)_\Omega \to a(u, w_k)_\Omega \text{ dans } D'(0,T), \\ \\ \displaystyle\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} (u_\mu(t))_i (u_\mu(t))_j (w_k)_j d\Gamma_2 ds \to \\ \\ \displaystyle\to \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} (u(t))_i (u(t))_j (w_k)_j d\Gamma_2 ds \text{ dans } D'(0,T), \end{cases} \tag{2.55}$$

Moyennant (2.53)-(2.55), de (2.26) il découle

$$(u', w_k)_\Omega + \nu\ a(u, w_k) + b(u, u, w_k) = (f, w_k)_\Omega - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} u_i u_j (w_k)_j d\Gamma_2\ ,\ \forall k = 1, ..., m,$$

tenant compte de la densité de V_m dans V on conclut

$$(u', v)_\Omega + \nu\ a(u, v) + b(u, u, v) = (f, v)_\Omega - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_2} u_i u_j v_j d\Gamma_2\ ,\ \forall v \in V \cap (L^n(\Omega))^n,$$

Ce qui prouve l'existence de la solution du problème (2.1)-(2.5)

2.3.2 Unicité

Dans cette sous section , et pour la dimension $n = 2$, en utilisant les résultats des lemmes 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 dans le premier chapitre, on démontre l'unicité de la solution.

Théorème 2.3.2 *Si la dimension $n = 2$, la solution du problème variationnelle (P.V), si elle existe est unique.*

Preuve : Soient u_1 et u_2 deux solutions différentes du problème (P.V), on a

$$(u'_1, v)_\Omega + \nu a(u_1, v) - b(u_1, u_1, v) + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma 2} (u_1)_i (u_1)_j v_j d\Gamma_2 = (f, v)_\Omega,\ \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \tag{2.56}$$

$$(u_2', v)_\Omega + \nu a(u_2, v) - b(u_2, u_2, v) + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma 2} (u_2)_i (u_2)_j v_j d\Gamma_2 = (f, v)_\Omega, \ \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \quad (2.57)$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, \dfrac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times]0, T[, \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0 \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

En posant $w = (u_1 - u_2)$, pour tout $v \in V \cap (L^2(\Omega))^2$, on a

$$(w', v)_\Omega + \nu a(w, v) + b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j v_j d\Gamma_2 = 0, \ \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \quad (2.58)$$

D'autre part, de la trilinéarité de la fonction $b(u, u, v)$, il résulte

$$b(u_2, u_2, v) = b(u_2, u_2 - u_1 + u_1, v) = b(u_2, (u_2 - u_1), v) + b(u_2, u_1, v),$$

donc

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(u_1, u_1, v) - b(u_2, (u_2 - u_1), v) - b(u_2, u_1, v),$$

ou encore

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(u_1 - u_2, u_1, v) - b(u_2, (u_2, u_2 - u_1), v),$$

d'où il vient

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(w, u_1, v) - b(u_2, -w, v),$$

on en déduit

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(w, u_1, v) - b(-(u_1 - u_2), w, v) + b(u_1, w, v) = b(w, u_1, v) + b(w, w, v) + b(u_1, w, v),$$

donc

$$b(u_1, u_1, v) - b(u_2, u_2, v) = b(w, u_1, v) - b(w, w, v) + b(u_1, w, v), \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2 \quad (2.59)$$

Moyennant(2.59) de (2.58) il découle

$$\begin{cases} (w', v)_\Omega + \nu a(w, v) + b(w, u_1, v) - b(w, w, v) + b(u_1, w, v) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j v_j d\Gamma_2 = 0, \\ \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \end{cases} \quad (2.60)$$

Grâce au théorème 2.3.1., on a

$$u_k' \in L^2(0, T, V'), \ k = 1, 2,$$

donc

$$w' \in L^2(0, T, V').$$

Pour $v = w(t)$, (2.60) devient

$$\begin{cases} (w', w)_\Omega + \nu a(w, w) - b(w, u_1, w) + b(w, w, w) + \\ +b(u_1, w, w) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 = 0 \ , \ \forall v \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \end{cases} \quad (2.61)$$

Et d'après le lemme 1.2.3 on a

$$b(w,w,w) = b(u_1,w,w) = 0,\ \forall w(t) \in V \cap (L^2(\Omega))^2. \tag{2.62}$$

On en déduit

$$(w',w)_\Omega + \nu a(w,w) + b(w,u_1,w) + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j w_j d\Gamma_2 = 0,\ \forall w \in V \cap (L^2(\Omega))^2, \tag{2.63}$$

Comme $w \in L^2(0,T,V)$, $w' \in L^2(0,T,V')$, on a

$$\begin{cases} (w',w)_\Omega = \displaystyle\int_\Omega w'w dx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w(t)|^2)dx = \\ \displaystyle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (|w(t)|^2)dx\right), \end{cases}$$

donc

$$(w',w)_\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}),\ \forall w \in V \in (L^2(\Omega))^n. \tag{2.64}$$

Et d'après le lemme 1.2.1., on a

$$\begin{cases} |a(u,v)| = \left|\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx\right| \le \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right| dx \\ \le \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \left(\int_\Omega |\frac{\partial u_j}{\partial x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial v_j}{\partial x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et comme la norme sur V est équivalente à la norme sur $H^1(\Omega)$, il résulte

$$|a(w(t)),w(t)| \le C\|w\|_V\|w\|_V = C_1\|w\|^2_V\ ,\forall w \in V \cap (L^2(\Omega))^n. \tag{2.65}$$

Et par intégration entre 0 et t, de (2.63), on tire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t (w',w)_\Omega ds + \int_0^t \nu a(w,w)ds = -\int_0^t b(w,u_1,w)ds - \\ \displaystyle -\sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j w_j d\Gamma_2 ds,\ \forall w \in V \cap (L^2(\Omega))^n, \end{cases} \tag{2.66}$$

D'après les lemmes 1.2.1., 1.2.4., dans le premier chapitre, on a

$$|b(u,v,u)| \le C_2\|u\|^2_{(L^4(\Omega))^2}\|v\|_{H^1(\Omega)}\ ,\forall v \in V,$$

et

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} \le C(\Omega)\|v\|_V^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\ ,\forall v \in V\ (pour\ n = 2),$$

et par conséquent

$$|b(u,v,u)| \le C\|u\|_V\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\|v\|_V\ ,\forall v \in V,$$

il résulte que

$$\left|\int_0^t b(w,u_1,w)\right| \le \int_0^t C_2\|w(s)\|_V\|w(s)\|_{L^2(\Omega)}\|\|u_1(s)\|_V ds,\ \forall v \in V, \tag{2.67}$$

Reste à vérifier la majoration suivante :

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j w_j d\Gamma_2 ds \right| \leq Cte.$$

On a

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j w_j d\Gamma_2 ds \right| \leq \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} |(w)_i| (\sum_{j=1}^{2} (w)_j (w)_j|) d\Gamma_2 ds,$$

Et comme on a aussi

$$\sum_{j=1}^{2} |(w)_j (w)_j| = \sum_{j=1}^{2} |(w)_j|^2 = |w(s)|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.68}$$

est une norme euclidienne dans R^2, donc

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant C \int_0^t \int_{\Gamma 2} |w(s)| |w(s)|^2_{L^2(\Gamma_2)} d\Gamma_2 ds,$$

et d'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant C \int_0^t \int_{\Gamma 2} \frac{1}{2} \left(|w(s)|^2 + (|w(s)^2_{L^2(\Gamma_2)})^2 \right) d\Gamma_2 ds,$$

donc

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant \frac{C}{2} \int_0^t \left(\int_{\Gamma 2} |w(s)|^2 d\Gamma_2 + \int_{\Gamma 2} |w(s)|^4_{L^2(\Gamma_2)} d\Gamma_2 \right) ds$$

Et comme w est borné dans $L^2(0, T, V)$, on a

$$\|w(s)\|^4_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant C \|w(s)\|^2_{L^2(\Gamma_2)}, \tag{2.69}$$

d'où ;

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant C \int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(\Gamma_2)} ds + C \int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(\Gamma_2)} ds$$

donc

$$\left| - \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant C \int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(\Gamma_2)} ds,$$

Et comme w est dans $L^2(0, T, V)$,donc d'après le théorème de trace ,l'application

$$V \subset H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset L^2(\Gamma_2) \textit{ est linéaire et continue.}$$

d'où la majoration

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_2)} \leqslant \|v\|_V, \forall v \in V,$$

Et comme

$$w/_{\Gamma_2} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$$

En utilisant la densité de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ dans $L^2(\Gamma_2)$, on trouve

$$\left| -\sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \int_{\Gamma 2} (w)_i (w)_j (w)_j d\Gamma_2 ds \right| \leqslant C_3 \int_0^t \|w(s)\|_v^2 ds. \tag{2.70}$$

Moyennant aux inégalités (2.63),(2.64),(2.66),(2.69), la valeur absolue de (2.62) donne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2\Omega}^2 - \frac{1}{2}\|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leqslant C_1\nu \int_0^t \|w\|_V^2 \ ds + C_2 \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u_1(s)\|_V \ ds + C_3 \int_0^t \|w(s)\|_V^2 ds, \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \end{cases}$$

Comme $u_1 \in L^2(0, T, V), w \in L^2(0, T, V)$ et

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|v\|_V, \forall v \in V,$$

Il en résulte

$$\|w(t)\|_V^2 \leqslant (C_1 C \ \nu + C_2 C + C_3 C) \int_0^t \|w(s)\|_V^2 ds,$$

d'où

$$\|w(t)\|_V^2 \leqslant 0 + \int_0^t C_4 \|w(s)\|_V^2 ds \tag{2.71}$$

avec $C_4 = (C_1 C \ v + C_2 C + C_3 C)$, et comme

$$w = (u_1 - u_2) \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^2),$$

donc

$$w \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega))^2),$$

Et d'après le lemme de Gronwall (voir lemme 1.1.4), on obtient

$$\|w(t)\|_V^2 \leqslant 0 \times e^{\int_0^t C_4 ds}, \tag{2.72}$$

d'où

$$\|w(t)\|_V^2 = 0.$$

Ce qui preuve l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.5).

Conclusion

Le travail réalisé est une étude théorique du problème (2.1)-(2.5) de la question de l'évolution relatif aux équations Navier-Stockes non-linéaire dans un domaine Ω de R^n à une frontière régulière avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann homogène (cas la dimension n=2).
Les résultats obtenus dans ce problème sont liés à l'existence et à l'unicité d'une solution faible,où j'ai d'abord cherché la forme variationnelle du problème principal et deuxièmement j'ai étudié l'existence d'une solution faible pour n'importe quelle dimension "n" du domaine Ω de R^n par l'utilisation de la méthode Fadeo-Galerkin et la méthode de compacité.
Ensuite, j'ai étudié pour la dimension du domaine Ω "$n = 2$" uniquement l'unicité de la solution faible.

Nous soulignons également que ce travail a été réalisé par Jacques-Louis.Lions [11] sous des conditions aux limites de Dirichlet sur une frontière régulière Γ uniquement.

Bibliographie

[1] Brezis. Haim., Analyse fonctionnelle-Théorie et applications Masson, Paris, 1983.

[2] Cartan. H., Fonction analytique Hermann, Paris, 1967.

[3] Ciarlet P.G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, 1982.

[4] Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M., Analysis Manifolds and Physics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New-York,Oxford 1977.

[5] Dunford N., Schwartz J.T., Linear operators, 3 volumes, Interscience, 1958.

[6] Duvaut G., Lions J.L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[7] Gagliardo E.,[1] Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili Rend. Sem. Mat pavoda. 27 (1957).

[8] Jerome Droniou et Cyril Imbert., Solutions de viscosité et solutions variationnelles pour EDP non-linéaires 17 mais 2004.

[9] Kôsaku Yosida., Functional Analysis, 6 th edition, Springer Verlag, New York, 1980.

[10] Kaddour Mosbah., Benyattou Benabderrahmane., Etude théorique de quelques problèmes aux limites non linéaires gouvernés par les équations de Navier-Sockes, Mémoire de Magister, Département d'infotmatique, Université Amar Telidji de Laghouat, 19 novembre 2009.

[11] Lions, Jacques-Louis., Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linèaires, Dunod Gauthier-villars, Paris, 1969.

[12] Lions, Jacques-Louis., Magnes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.1, unod, Paris, 1968.

[13] Lions, Jacques-Louis, Magnes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol.2, unod, Paris, 1968.

[14] Marie-Thérèse, Lacroix-Sonrier., Distributions Espaces De Sobolev Applications, Ellipses, édition marketing, S.A., 1998.

[15] Raviart P.A., Thomas J.M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, New York, Barcelone, Mialn, Mexico, Sao Paulo, 1983.

[16] Robert Dautray., Jacques-Louis, Lions., Analyse mathématique et calcul numérique, pour mes sciences et les techniques, Modéles Physiques, Tome 1,2,3,4, Masson Paris 1987.

[17] Rudin Walter., Functional analysis, Mc-Graw-Hill Book Comapny, New-York, 1973.

[18] Schwartz Laurent., Théorie des distributions, Tomes 1 et 2,Hermann, Paris, 1957.

[19] Sibony M., Analyse numérique III, Itérations et approximations, Hermann, 1988.

[20] Smon J., Equations de Navier-Stockes, Cours de D.E.A, 1994-1995.

[21] Tosio Kato., Perturbation Theory for linear opertors, Springer Verlag, New York, 1980.

[22] Vo-Khac Khoan., Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome 1 et 2, Vuibert, Paris 1972.