

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ AMMAR TELIDJI DE LAGHOUAT



Faculté des sciences

Département mathématique et informatique

Mémoire de Master

Domaine : MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE (MI).

Filière : MATHÉMATIQUE .

Option : ANALYSE MATHÉMATIQUE.

Mémoire de fin d'étude en vue d'obtention de diplôme : Master en Mathématique

PRÉSENTÉ PAR :BAHLOUL SOULEYMAN

THÈME :

Sous espace invariant par le shift

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

MR	Y.BELABACI	M.C.A	PRÉSIDENT
MR	A.CHETTIH	M.A.A	EXAMINATEUR
MR	A.YAGOUB	M.A.A	EXAMINATEUR
MR	F.KORRICH	M.C.B	ENCADREUR
MR	Z.BENDAOUED	M.C.A	CO-ENCADREUR

Année Universitaire 2016/2017

Remerciement

*Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de mathématique a l'université de Laghouat sous la direction de Mademoiselle **F.Korrichi** et Madame **Z.Bendaoued**. Je tien a les remercier pour leurs disponibilité et leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.*

*Mes remerciement s'adresse a Madame **Z.Bendaoud** directrice du laboratoire de mathématique pure et appliquée d'avoir disponibilité tous les moyens du laboratoire durant la période de la préparation de ce projet.*

*Je remercie les membres de jury Monsieur **Y.Belabaci** président de jury, Monsieur **A.Chettih** et Monsieur **A.Yagoub** examinateurs, pour avoir accepter d'examiner ce projet.*

Ainsi que tous les enseignants qui mon enseigner le long de mon cursus en MI.

Dédicace

Pour ceux qui ne peuvent pas mots pour les exprimer à mes chers parents.

Pour mes frères et sœurs.

Pour toute ma famille.

Tous les enseignants.

Tous les amis.

Pour tous mes amis étudiants en mathématiques.

Je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction	5
1 Préliminaire	8
1.1 Espace de Banach	8
1.2 Espace de Hilbert	10
1.3 Théorie des opérateurs	14
2 Sous-Espaces Invariant	24
2.1 Les espaces L^1 et L^2	24
2.2 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$	25
2.3 Produit de Blaschke	27
2.4 Les fonctions intérieures - Les fonctions extérieures	29
2.5 Sous-espaces invariants	30
3 Sous-Espaces Invariant Par le Shift	36
3.1 Espaces modèles	36
3.2 Sous-espaces invariants par le shift	43
3.3 Le shift sur ℓ^2 et $H^2(D)$: définition et propriétés spectrales	43
3.3.1 Le shift sur ℓ^2	43
3.3.2 Le shift sur $H^2(\mathbb{D})$	45
Bibliographie	49

\mathbb{R}	LA DROITE RÉEL.
\mathbb{K}	UN CORPS.
\mathbb{C}	LE PLAN COMPLEXE.
\mathbb{D}	LE DISQUE UNITÉ OUVERT DU PLAN COMPLEXE \mathbb{C} .
$\bar{\mathbb{D}}$	LE DISQUE UNITÉ FERMÉ DU PLAN COMPLEXE \mathbb{C} .
\mathbb{T}	LE CERCLE UNITÉ.
$\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$	L'ESPACES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS \mathbb{D} .
μ	UNE MESURE POSITIVE.
\mathcal{M}	UN TRIBU DANS UN ENSEMBLE Ω .
$L^\infty(\mathbb{T})$	L'ESPACES DES FONCTIONS BORNÉE DANS \mathbb{T} .
\langle, \rangle	PRODUIT SCALAIRE DE $L^2(\mathbb{T})$.
$L(E, F)$	L'ENSEMBLE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS DE E DANS F .
$L(E)$	L'ENSEMBLE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS DE E DANS E .
H	L'ESPACE DE HILBERT.
H^2	L'ESPACE DE HARDY.
H^∞	L'ESPACE DES FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉS.
u	FONCTION INTÉRIEURE.
p	PROJECTION ORTHOGONALE DE L^2 SUR H^2 .
$\hat{f}(n)$	N-ÈME COEFFICIENT DE FOURIER DE f .
f^*	LA LIMITE RADIALE DE f SUR \mathbb{T} .

Introduction

1. Notations et rappels

Soit X un espace vectoriel sur \mathbb{C} complet. Notons par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires continues (ou bornées) de X dans X .

Les éléments de $\mathcal{L}(X)$ sont souvent appelés des opérateurs. Lorsque $T \in \mathcal{L}(X)$ on désignera par $\sigma(T)$ le spectre de T défini par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non inversible}\}$$

Rappelons que si $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)$ est un compact de \mathbb{C} non vide. Le spectre ponctuel de T , noté $\sigma_p(T)$, est l'ensemble des valeurs propres de T . Autrement dit, par définition,

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ non injective}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}.$$

Si X est de dimension finie, étant donnée que dans ce cas toute application linéaire est inversible si et seulement si elle est injective, on a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$. Par contre dès que X est de dimension infinie, on peut simplement affirmer que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ et $\sigma_p(T)$ peut être vide comme nous le verrons dans la suite. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$ on définit $\text{Lat}(T)$ comme l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels fermés M invariants par T , c'est-à-dire tels que $TM \subset M$. Automatiquement, pour $T \in \mathcal{L}(X)$, les sous-espaces vectoriels fermés $\{0\}$ et X sont des éléments de $\text{Lat}(T)$. On les appelle les sous-espaces invariants triviaux de T .

Tout élément de $\text{Lat}(T)$ différent de $\{0\}$ et X est appelé un sous-espace invariant non trivial de T . Les opérateurs $T \in \mathcal{L}(X)$ tels que

$$\text{Lat}(T) = \{\{0\}, X\}$$

sont appelés les opérateurs transitifs. En d'autres termes un opérateur transitif est un opérateur sans sous-espace invariant non trivial.

2. Le problème du sous-espace invariant

1. Si X est un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension finie au moins égale à deux, tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ n'est pas transitif. En effet, dans ce cas, T est une matrice finie à coefficients complexes admettant des valeurs propres. Soit λ une valeur propre de T et soit x un vecteur propre associé la valeur propre λ . Le sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{C}x$ étant de dimension 1, il est différent de $\{0\}$ et X . De plus, comme $Tx = \lambda x$, $\mathbb{C}x$ est invariant par T .

2. De façon plus générale, si $T \in \mathcal{L}(X)$ (avec X de dimension infinie ou finie au moins égale à deux) est tel que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$, alors T est non transitif.

3. Si X est un espace vectoriel complet sur \mathbb{C} non séparable (i.e. contenant une partie dense non dénombrable), tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ n'est pas transitif. En effet, pour $x \in X \setminus \{0\}$, soit M la fermeture de l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs du type $T^n x$ avec $n \in \mathbb{N}$. Par construction M est un sous-espace vectoriel fermé de X différent de $\{0\}$ puisque $x \neq 0$ appartient à M . D'autre part, M est invariant par T et $M \neq X$ puisque M est séparable tandis que X ne l'est pas par hypothèse.

Grâce aux travaux de Peter Enflo [11, 12], Charles Read [2, 3, 4, 5, 6], Bernard Beauzamy [1], on sait qu'il existe des opérateurs transitifs $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que X est un espace vectoriel sur \mathbb{C} complet de dimension infinie et séparable tel que \mathcal{L}^1 . Cependant tous les exemples d'opérateurs transitifs que l'on connaît ont été construits sur des espaces de Banach complexes non hilbertiens.

Ce qu'on appelle communément le Problème du Sous-Espace Invariant est un des problèmes les plus célèbres de théorie des opérateurs et il est ouvert depuis plus d'un demi-siècle. Son énoncé est le suivant : Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} séparable et de dimension infinie. Existe-t-il un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ transitif ?

Il existe de très nombreux théorèmes donnant des conditions suffisantes pour que $T \in \mathcal{L}(H)$ ne soit pas transitif et les outils utilisés sont extrêmement variés, ce qui

rend ce sujet de recherche particulièrement intéressant [6]. A titre d'exemple, signalons deux résultats basés sur des techniques tout à fait différentes. Le premier utilise un théorème ancien d'existence de point fixe (du à Schauder, 1934) et le second est basée entre autre sur un procédé d'approximation (du à S. Brown [13]) qui permet de conclure à la surjectivité d'une application bilinéaire.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1. (Normes)

Soit E un espace vectoriel sur le corps, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$$

Définition 1.1.2. (Espaces Normés)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Proposition 1.1.1. Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable.

Preuve. Pour tout x, y de E , on définit la fonction ρ tel que

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E , on a

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\rho(x, y)$ est symétrique

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Définition 1.1.3. (Suites de Cauchy)

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q \geq N_\epsilon ; \text{On a } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

Proposition 1.1.2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite $(x_{n_k})_{n \geq 0}$ convergente vers x alors la suite (x_n) est aussi convergente vers le même élément x .

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q \geq N_\epsilon ; \text{On a } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\epsilon$ on a

$$\forall p, n_k \geq N_\epsilon \quad \|x_p - x_{n_k}\| < \epsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\epsilon, \|x_{n_k} - x\| < \epsilon$$

D'où la convergence de la suite (x_n) vers l'élément x ,

$$\forall p, n_k \geq N_\epsilon \quad \|x_p - x\| = \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| < \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \epsilon$$

Définition 1.1.4. (Espaces complets)

Un espace vectoriel normés $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suites de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E . Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\epsilon, \text{on a } \|x_p - x_q\| < \epsilon$$

Implique l'existence d'un élément x de E tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Définition 1.1.5. (Espace de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

Définition 1.1.6. (Espace produit)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y), \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

est un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} ; par l'une des normes produits suivantes

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \|x\|_E + \|y\|_F, \quad \forall x \in E, y \in F \\ \|(x, y)\|_p &= (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in E, y \in F, 1 < p < \infty \\ \|(x, y)\|_\infty &= \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}, \quad \forall x \in E, y \in F \end{aligned}$$

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1. (Espace de Hilbert)

On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien (espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.) H complet au sens de la métrique associée à sa norme.

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Remarque 1.2.1. Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable (lorsque ses éléments peuvent être listés sans omission ni répétition dans une suite indexée par les entiers). partout dense dans H et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Théorème 1.2.1. (Riesz-Fischer)

Soit $\{\varphi_k\}$ tel que $k \in \mathbb{N}$ un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et

soient les Valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots$ dans \mathbb{R} telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, Alors on peut trouver un vecteur $f \in H$ tel que $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \varphi_k$ et

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et te plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

Preuve. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles donnée par

$$f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

De la convergence de la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

On déduit que la suite (f_n) est de Cauchy, bien entendu pour des valeurs entiers p et q assez grandes, telles que $p \leq q$ on a :

$$\|f_p - f_q\|^2 = \sum_{i=p+1}^q |\alpha_i|^2 < \epsilon$$

L'espace H étant de Hilbert, alors la suite (f_n) est une suite convergente vers un élément f de H . D'où de la relation $f = f_n + (f - f_n)$, et de la composition du système $\{\varphi_k\}$ avec les deux membres, on obtient

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle + \langle f - f_n, \varphi_i \rangle$$

Le second terme de la somme $\langle f - f_n, \varphi_i \rangle$ de la somme figurant au second membre tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ et cela due à la continuité du produit scalaire, car

$$|\langle f - f_n, \varphi_i \rangle| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|$$

tandis que le premier terme $\langle f_n, \varphi_i \rangle$ de la somme figurent au second membre coïncide avec la valeurs $\alpha_i, \forall i \leq n$ d'où la relation $\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle = \alpha_i$ pour tout $i \leq n$ Ce qui entraîne

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

Passant a la limite quand $n \rightarrow \infty$; on obtient l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Théorème 1.2.2. Soit $\{\varphi_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$.

Preuve. Soit f un élément de H , orthogonal à tous les vecteurs du système complet $\{\varphi_k\}$, alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls, $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots$. le système $\{\varphi_k\}$ étant complet donc fermé. D'où l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

qui implique que $f = 0$.

Inversement, si le système $\{\varphi_k\}$ n'est pas complet il existerait dans H un vecteur non nul g qui réalise l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|g\|^2.$$

et d'après le théorème de **Riesz-Fischer**, on peut trouver un élément f de H tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

il est aisé de voir que le vecteur non nul $f - g$ est orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ d'où la condition suffisante.

Théorème 1.2.3. *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert séparable, il existe alors un système orthonormé et complet $\{\varphi_k\}$ tel que, pour tout vecteur $f \in H$ il existe une suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ de coefficients de Fourier telle que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

Cette condition nous affirme que la suite $(\alpha_k)_k$ est un élément de l^2

Réciproquement, soit (α_k) une suite d'éléments de l^2 ; c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

il existe alors, d'après le théorème de Riesz-Fischer un vecteur f de H tel que,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

d'où l'existence d'un isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables et l'espace l^2 .

En effet, si les éléments f, g de H ayant pour coefficient de Fourier respectivement les suites $(\alpha_k), (\beta_k)$ alors les vecteurs $f + g$ et λf de H ont comme coefficients de Fourier respectives $\{\alpha_k + \beta_k\}$ et $\{\lambda\alpha_k\}$, de plus, on a

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k$$

car d'après l'égalité de Parseval

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2, \quad \langle g, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2$$

et

$$\langle f + g, f + g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)(\overline{\alpha_k + \beta_k})$$

on a

$$\langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_k \beta_k + \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2$$

D'où l'égalité au dessus, en d'autres termes, l'isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables H et l'espace de Hilbert l^2 , signifie qu'il existe une application bijective entre H et l^2 , de plus, la somme des vecteurs, la multiplication des vecteurs par un nombre λ et le produit scalaire dans H sont les mêmes que la somme des coordonnées des vecteurs, la multiplication des coordonnées des vecteurs par un nombre et le produit scalaire dans l^2

Remarque 1.2.2. Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n , alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l^2 .

1.3 Théorie des opérateurs

Définition 1.3.1. (Opérateur continu)

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 Si on a, la propriété suivante : Pour toute suite $(x_n)_n$ de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)) = A(x_0)$$

Remarque 1.3.1. L'opérateur A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.3.1. Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en un point x_0 de G .

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers x alors cette suite peut s'écrire comme sous la forme

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) = y_n + (x - x_0).$$

Il est clair que la suite est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim_n y_n = \lim_n [x_0 + (x_n - x)] = x_0$$

la composition des deux membres par l'opérateur A ; donne

$$A(x_n) = A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) = A(y_n) + A(x - x_0).$$

L'opérateur A étant continu an point alors, il vient

$$\lim_n A(x_n) = \lim_n A(y_n) + A(x - x_0) = A(x_0) + A(x) - A(x_0) = A(x)$$

Définition 1.3.2. (Opérateur bornés)

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E \quad (1)$$

Proposition 1.3.1. La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| < 1} \|A(x)\|_F \quad (2)$$

Preuve. En effet, de la relation (1), les constantes C s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0$$

D'où, il est voir que la plus petite des constantes C est appelée $\|A\|$ S'écrit comme suite

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

de plus, on écrit

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$$

pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

de plus pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$, on écrit

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$$

Passons au supremum sur la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F$$

Proposition 1.3.2. La norme $\|A\| = \sup\|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.

Preuve. Supposons que la norme n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément de x de E , tel que

$$\|x\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sup\|A(x)\|_F = \infty$$

Ou encore il existe une suite de telle que

$$\|x_n\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|A(x_n)\|_F = \alpha_n$$

Avec

$$\lim_n \alpha_n = \infty$$

Définissons la suite $(y_n)_n$ par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire : D'où, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(y_n)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1$$

Contradiction avec le fait que A est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim_n y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A(y_n)\|_F = 0.$$

Ce qui affirme que la constante est finie pour tout opérateur $c = \|A\|$ linéaire et continu.

Théorème 1.3.2. Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Preuve. .

Condition suffisante

Supposons que l'opérateur A est borné alors, on a

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Ou encore

$$\|A(x) - A(0)\|_F \leq C\|x - 0\|_E$$

D'où la continuité de l'opérateur A au point 0, Autrement dit, $\lim A(x) = A(0)$ lorsque $\lim x = 0$ Ce qui entraîne la continuité partout.

Condition nécessaire

Soient x et y deux éléments de tels que

$$x \in \overline{B}(0, 1) = \{x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$$

et

$$y \in S(0, 1) = \{y \in E, \|y\|_E = 1\}$$

il est clair que L'on a la relation

$$\|A(y)\|_E \leq \sup \|A(x)\|_F = \|A\|$$

D'autre part, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, on a $\frac{x}{\|x\|_E} \in S(0, 1)$ cela veut dire que l'on a

$$\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq \|A\|,$$

Ou encore

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|A(x)\|_F \leq \|A\|$$

Ce qui implique la relation

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \|x\|_E$$

D'où l'opérateur A est borné, car la constante $\|A\|$ est toujours finie pour les opérateurs A continus.

Définition 1.3.3. (Espaces isomorphes)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que et sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F , c'est à dire

- 1). A est bijectif sur E dans F .
- 2). A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Définition 1.3.4. (Espaces isométriques)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ Deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \quad \forall x \in E$$

Remarque 1.3.2. La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphe.

Définition 1.3.5. (Normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

Théorème 1.3.3. Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve. Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E , alors pour tout élément $x \in E$ on écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in K, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considérons sur E deux normes $(E, \|\cdot\|)$ et (E, N) , alors pour tout $x, y \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ on a la relation

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) = N\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) = N\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| N(e_i)$$

Cette inégalité entraîne la continuité de la norme N sur E car on a,

$\lim N(x) = N(y)$ lorsque $\lim x = y$ Étant donné que la sphère $S(0, 1) = \{x \mid \|x\| = 1\}$ est compact comme un ensemble fermé et borné dans un espace de dimension finie et $N(x)$ une fonction continue positive, alors cette fonction est uniformément continue et atteint ses bornes sur la sphère, c'est à dire

$$\exists M > 0, \exists m > 0, \text{ telle que } m < N\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq M$$

Ou encore

$$m \|x\| \leq N(x) \leq M \|x\|$$

Proposition 1.3.3. Tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est complet.

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E alors la suite est bornée dans un espace de dimension finie. D'où on peut extraire une sous suite convergente vers un élément x de E ce qui implique que la suite x_n converge aussi vers le même élément x de E . d'où la complétude de l'espace E .

Proposition 1.3.4. Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet. En effet, F est de dimension finie toute ses normes sont équivalente. De plus F est isomorphe à \mathbb{K}^n qui est complet et par conséquent F est complet dans E .

Proposition 1.3.5. Tout espace Banach $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergente vers x , alors x_n est une suite de Cauchy dans un espace complet E . D'où x_n est convergente dans F .

Proposition 1.3.6. Tout sous espace F complet d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.

En effet, soit $x_0 \in \bar{F}$ alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de F convergente vers x_0 dans E , la suite convergente x_n est de Cauchy dans F complet ce qui implique que la suite x_n est convergente dans F , la limite étant unique.

D'où $x_0 \in F$ Autrement dit, $F = \bar{F}$ ou encore F fermé.

Proposition 1.3.7. Tout sous espace de dimension finie d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermé.

En effet, il est clair que l'espace de dimension finie est complet et par conséquent F est fermé.

Remarque 1.3.3. Tout sous espace F de dimension infinie d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas nécessairement fermé.

En effet, il suffit de prendre $E = C([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme uniforme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|$$

Et soit F l'ensemble des polynômes qui est un sous espace de $C([a, b])$; non fermé car d'après Weierstrass on a, toute fonction continue sur $[a, b]$ est une limite d'une suite uniformément convergente de Polynômes.

Autrement dit, la fermeture de \bar{F} coïncide avec $C([a, b])$.

Théorème 1.3.4. Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs A linéaires continus sur E dans F muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

Preuve. — Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|A\| = 0$; la relation de la continuité

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$$

Nous donne la nullité de l'opérateur A ; c'est à dire

$$A(x) = 0, \quad \forall x \in E$$

D'où la relation

$$A = 0.$$

— Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ alors, on a $A_1 + A_2 \in L(E; F)$; c'est à dire

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1 + A_2\| \|x\|$$

De plus on a, aussi

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| \|x\| + \|A_2\| \|x\| \leq (\|A_1\| + \|A_2\|) \|x\|$$

Notons que $\|A_1 + A_2\|$ est une borne supérieure.

Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$$

— Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, on a λA c'est à dire

$$\|\lambda A(x)\| \leq \|\lambda A\| \|x\|$$

De plus on a, aussi

$$\|\lambda A(x)\| = |\lambda| \|A(x)\| \leq |\lambda| \|A\| \|x\|$$

Notons que $\|\lambda A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|$$

D'autres parts on a, la relation

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$$

Où encore

$$\|A(x)\| = \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A(x)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\| \|x\|$$

Notons que $\|A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|A\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|$$

Où encore

$$|\lambda| \|A\| \leq \|\lambda A\|$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité

$$|\lambda| \|A\| = \|\lambda A\|$$

Théorème 1.3.5. Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Preuve. En effet, soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, q \geq N_\epsilon : \|A_p - A_q\| < \epsilon$$

alors pour tout $x \in E$ on a

$$\|A_p(x) - A_q(x)\| = \|(A_p - A_q)(x)\| \leq \|A_p - A_q\| \|x\| < \epsilon \|x\|$$

D'où, on tire que $(A_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach F ; alors $A_n(x)$ converge dans F vers un opérateur $A(x)$. Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|A_p(x) - A_q(x)\| = \|A(x) - A_q(x)\| < \epsilon \|x\|, \forall p \geq N_\epsilon$$

D'où l'opérateur $B(x) = A(x) - A_q(x)$ est borné donc continu de E dans F , il est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ c'est à dire

$$\|A(x) - A_q(x)\| \leq \|A - A_q(x)\| \|x\|$$

Notons que est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|A - A_q(x)\| < \epsilon$$

Ce qui prouve la convergence de la suite A_q vers A dans $\mathcal{L}(E, F)$ L'opérateur A est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ comme différence de deux opérateurs continus

$$A(x) = B(x) - A_q(x) \in \mathit{mathscr}L(E, F)$$

Définition 1.3.6. (Dual topologique)

On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Remarque 1.3.4. Le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est inclus dans le dual algébrique $E^+ = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 1.3.7. (Opérateurs dual dans les espaces normés)

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, pour tout $\varphi \in E$ et $\psi \in F$, on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{K})$ et $V \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suit

$$F^* : F \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$U : \psi \longmapsto U(\psi)$$

et

$$E^* : E \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$V : \varphi \longmapsto V(\varphi)$$

L'opérateur noté A^* défini sur F dans E est dit opérateur adjoint de A si l'on a, pour tout $U \in F^*$ et $V \in E^*$

$$A^* : F^* \longrightarrow E^*$$

$$A^* : U \mapsto A^*(U) = U(A(\varphi)) = V(\varphi);$$

Définition 1.3.8. (Opérateurs linéaires Adjointes dans les espaces de Hilbert)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H_1 à valeurs dans un espace de Hilbert H_2 , l'opérateur linéaire noté A défini de H_1 dans H_2 est dit opérateur adjoint de A si l'on a pour tout $\varphi \in H_1$ et $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}$$

Définition 1.3.9. (Opérateurs auto adjoints)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A est dit opérateur auto adjoint si, on a la relation

$$A = A^*$$

ou encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle$$

Définition 1.3.10. (Opérateurs antiauto adjoints)

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur antiauto adjoint si, on a la relation

$$A = -A^*$$

ou encore, pour tout $\varphi, \psi \in H$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Chapitre 2

Sous-Espaces Invariant

2.1 Les espaces L^1 et L^2

L'espace \mathcal{L}^1 :

Définition 2.1.1. $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ L'espace vectoriel des fonctions (mesurables) intégrables par rapport à μ , On supposera qu'il s'agit des fonctions réelles ou complexes.

Pour toute $f \in \mathcal{L}^1$ on introduit le nombre :

$$N_1(f) = \int |f| d\mu < +\infty$$

et on vérifie immédiatement que l'application $N_1(\cdot) : \mathcal{L}^1 \rightarrow [0, \infty)$ est une semi norme, c'est-à-dire que l'on a

$$N_1(f) \geq 0; \quad N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f); \quad N_1(f) \leq N_1(f) + N_1(g)$$

pour $f, g \in \mathcal{L}^1$ quelconques.

De plus $N_1(f) = 0$ équivaut à $f = 0$ μ pp, c'est-à-dire à $f \in \mathcal{N}$ où \mathcal{N} est le sous-espace des fonctions (intégrables) négligeables.

L'espace \mathcal{L}^2 :

Définition 2.1.2. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\mu) = \mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$.A coté de \mathcal{L}^1 on introduit aussi l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $|f|^2 \in \mathcal{L}^1$, noté \mathcal{L}^2 ,

On dit que \mathcal{L}^2 est l'espace des fonctions (mesurables) de carré intégrable.

Les espaces L^1 et L^2

On désigne par L^1 (resp. L^2) l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions de \mathcal{L}^1 (resp. \mathcal{L}^2) modulo l'égalité μ pp.

C'est aussi l'espace vectoriel quotient $\mathcal{L}^1/\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{L}^2/\mathcal{N}$).

2.2 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées par le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. .

1. Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$.

Dans ce cas $\|f\|_2 = (\sum_{n \geq 0} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

2. Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ (f^* la limite radiale de f) et le $n^{ième}$ coefficient de Fourier de f^* est a_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Rappelons que f^* est la limite radial de f sur \mathbb{T} et $f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$.

De plus

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(se^{it})|^2 dt = 0$$

3. L'application $f \rightarrow f^*$ est un isomorphisme isométrique de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T}) := \{g \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{g}(n) = 0, n < 0\}$. (\widehat{g} La limite radiale de g sur \mathbb{T})

4. $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) - f(se^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt$$

Preuve. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. On a donc, pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(re^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{int}$.

D'après le théorème de **Plancherel-Parseval**, On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$$

Par convergence monotone discrète, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$$

Comme $\|f\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$, On obtient f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2^2 = (\|f\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$,

Ce qui termine la preuve de 1.

On a $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ si $f \in H^2(\mathbb{D})$ d'après proposition 4.4.2. voir [8]

Supposons $f \in H^2(\mathbb{D})$ et pour $0 < s < 1$ on définit les fonctions f_s sur \mathbb{T} par $f_s(e^{it}) = f(se^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n s^n e^{int}$.

Comme $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$ le **théorème de Riesz-Fischer** nous garantit l'existence d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\hat{g}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$.

Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1 - s^n)a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$.

Une nouvelle application de l'égalité de Plancherel-Parseval donne :

$$\|g - f_s\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} (1 - s^n)^2 |a_n|^2$$

Par convergence monotone décroissante discrète

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} (1 - s^n)^2 |a_n|^2 = 0$$

On a donc $\|g - f_s\|_2 = 0$. Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D(0, 1/s)$. On a donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_T \frac{f_s(\xi)}{\xi - z}$$

La fonction f_s étant en particulier harmonique sur $D(0, 1/s)$, on a aussi, pour

$$z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, f_s(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it})$$

L'inégalité de Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) \leq \frac{1+r}{1-r}$, nous donne

$$|f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt| = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) (f_s(e^{it}) - g(e^{it})) dt| \leq \frac{1+r}{1-r} \|f_s - g\|_2$$

et

$$|f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2i\pi} \int_T \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi| = |\frac{1}{2i\pi} \int_T \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi| \leq \frac{1+r}{1-r} \|f_s - g\|_2$$

Comme $\lim_{s \rightarrow 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, on a donc

$$f(re^{i\theta}) = \lim_{s \rightarrow 1^-} f_s(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi} \int_T \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie de la mesure μ , m définie par $d\mu(t) = g(e^{it})dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. On a $f^*(e^{it}) = g(e^{it})$ m-presque partout. On en déduit que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n \leq 0$. Enfin on a aussi :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)f^*(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi} \int_T \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}} d\xi$$

Ce qui termine la preuve de 2.

Puisque $\lim_{s \rightarrow 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, on a $\|f\|_2 = \lim_{s \rightarrow 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2$.

Comme $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, l'application $\Phi : f \rightarrow f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$. Par définition l'application Φ est linéaire. Étant isométrique, elle est automatiquement injective. Enfin, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, g est de la forme

$$g(e^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{int}$$

avec

$$\|g\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$$

Alors la fonction f définie sur \mathbb{D} par $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1.

L'application Φ est donc surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

Par définition, $\langle f, f \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$

. Comme $\|f^*\|_2^2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé.

De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet. Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

2.3 Produit de Blaschke

Théorème 2.3.1. soit $(\alpha_n)_n$ une suite dans $U \in \mathbb{C}$ telle que $\alpha_n \neq 0$ et

$$\sum_n (1 - |\alpha_n|) < \infty \quad (1)$$

pour un entier k non négatif et

$$B(z) = z^k \prod \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (2)$$

la fonction $B \in H^\infty$ et elle ne possède pas d'autre zéros que les points (outre l'origine si $k > 0$).

Cette fonction B est appelée un produit de Blaschke on notera que certaine des α_n peuvent être répétés, ce qui fournit un zéro multiple pour B en ce point.

Remarque 2.3.1. On notera encore que chaque facteur de (2) a une valeur absolue égale à 1 sur T .

Le terme " produit de Blaschke " Pourra être utilisé par le cas d'une nombre fini de facteur et éventuellement s'il n'y a pas de facteur du tout posant $B(z) = 1$.

Preuve. Pour $|z| \leq r$, le n-ième terme de la série

$$\sum_n \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$$

Vaut

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n|z}{(1 - \bar{\alpha}_n z)\alpha_n} \right| (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r} (1 - |\alpha_n|)$$

$B \in H^\infty$ et B n'a pas d'autre zéros que ce prescrits.

Puisque chaque facteur de (2) a une valeur inférieure à 1 dans $U \in \mathbb{C}$ on en déduit $|B(z)| < 1$, ce qui termine la démonstration.

2.4 Les fonctions intérieures - Les fonctions extérieures

Les fonctions intérieures

Définition 2.4.1. Une fonction intérieure est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que

$$|U^*(e^{it})| = 1, m - \text{presque partout.}$$

Les fonctions extérieures

Définition 2.4.2. une fonction extérieure est une fonction $Q \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme

$$Q(z) = ce^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \varphi(e^{it}) dt}$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive mesurable telle que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Le Théorème de Plancherel

Puisque la somme de Lebesgue de R^1 est infinie, l'espace L^2 n'est pas inclus dans L^1 et la définition de la transformé de Fourier n'est pas directement applicable à toute fonction f de L^2 , toutefois cette définition convient lorsque f appartient à $L^1 \cap L^2$ et il se trouve que appartient aussi à L^2 .

De fait $\|f\|_2 = \|f^*\|_2$. cette isométrie de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 sur L^2 se prolonge en une isométrie de L^2 sur L^2 et le prolongement permet de définir la transformée de Fourier (quelquefois appelée la transformé de Plancherel).

Pour tout fonction f dans L^2 la théorie au sens L^2 qui en ré suite et bien plus symétrique que la théorie au sens L^1 puisque dans L^2 les fonctions f et f^* jouent exactement le même rôle.

Théorème 2.4.1. à chaque fonction f de L^2 On peut associer une fonction f^* de L^2 de sorte que les propriété soient satisfaites :

- a) Lorsque f appartient à $L^1 \cap L^2$, f^* est la transformée de Fourier de f .
- b) Pour tout f dans L^2 , on a $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$.
- c) L'application $f \rightarrow f^*$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert de L^2 sur L^2 .
- d) Entre f et f^* existent les relations symétrique suivantes :

En posant

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{+A} f(x)e^{-ixt} dm(x)$$

et

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|\varphi_A - f\|_2 = 0$$

et

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \|\psi_A - f^*\|_2 = 0$$

Théorème 2.4.2. (Plancherel-Parseval)

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(C_n), n \in \mathbb{Z}$ est la suites de ses coefficients de Fourier

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int} dt$$

alors :

$$\|f\|_2^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n|^2$$

. De plus f est la somme de sa série de Fourier $(S_n(f)_{n \geq 0})$ avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2 = 0$$

2.5 Sous-espaces invariants

Considérons un opérateur linéaire borné S sur un espace de Banach X c'est à dire une application linéaire bornée de X dans X un sous- espace fermé Y de X est un sous espace invariant de S ou S -invariant si

$$S(Y) \subset Y$$

Les sous espaces invariant de sont précisent ceux qui contiennent leur image par S . connaître les sous-espace invariante d'un opérateur S aide à concevoir son mode d'action (ceci est principale générale - et donc assez vague : dans l'étude d'une quelconque transformation).

Par exemple , si S est un opérateur linéaire sur espace vectoriel de dimension n qui possède n vecteur propre linéairement indépendants x_1, x_2, \dots, x_n chaque espace

vectorel à une dimension engendré par chacun des x_i est un invariant par S .

Pour décrire S , on obtient un schéma très simple en ce plaçant sur la base de X fournie par x_1, x_2, \dots, x_n . Nous allons décrire les sous-espaces invariants de l'opérateur de déplacement S sur ℓ^2 .

Rappelons que ℓ^2 désigne l'espace des suites complexes

$$x = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\} \quad (1)$$

Pour lesquelles

$$\|x\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2)$$

L'opérateur de déplacement S envoie un élément $x \in \ell^2$ donnée sous la forme (1), sur l'élément

$$Sx = \{0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots\}$$

S est bien sûr un opérateur linéaire et borné sur ℓ^2 et $\|S\| = 1$. Quelques sous-espaces S -invariant apparaissent à première vue : pour tout $K \geq 0$, l'ensemble Y_K des $x \in \ell^2$. Dont les x premières coordonnées sont nulles est un S -invariant.

Pour en trouver d'autres, on peut utiliser l'isomorphisme d'espace de Hilbert entre ℓ^2 et H^2 qui transforme l'opérateur de déplacement S en un opérateur de multiplication sur H^2 . L'avantage est d'obtenir un opérateur qui est d'analyse plus facile (tenant compte de la structure riche de comme espace de fonction Holomorphe) que l'opérateur original si l'espace de suites ℓ^2 . à chaque $x \in \ell^2$ fourni par (1) on associe la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n, (z \in U)$$

Théorème 2.5.1. ceci définit une correspondance linéaire et injective de ℓ^2 sur H^2 .

$$y = \{\eta_n\}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n z^n, (z \in U)$$

et si le produit intérieur (scalaire) dans H^2 est défini par

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) \overline{g^*(e^{i\theta})} d\theta$$

Le Théorème de Parseval montre que $(f, g) = (x, y)$ nous disposons donc d'un isomorphisme d'espace de Hilbert entre ℓ^2 et H^2 .

l'opérateur de déplacement S devient un opérateur de multiplication sur H^2 encore noté S :

$$(Sf)(z) = zf(z), (f \in H^2, z \in U)$$

Les sous-espaces S -invariants que nous avons précédemment notés Y_k correspondent aux espaces de fonctions possédant un zéro d'ordre au moins k à l'origine . voilà un indice.

Pour tout ensemble fini $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset U$ l'espace Y de toutes les fonctions $f \in H^2$ telles que $f(\alpha_1) = \dots = f(\alpha_n) = 0$ est invariant par S . si et seulement si $f/B \in H^2$. Par suite, $Y = BH^2$.

Ce résultat suggère que les produits de Blaschke infinis donneront aussi des sous-espaces invariants. Ou encore, plus généralement, que l'on peut remplacer les produits de Blaschke par des fonctions intérieure arbitraires φ , Il n'est pas difficile de montrer en effet que φH^2 est un sous espace fermé invariant par S de H^2 , c'est un résultat beaucoup plus profond que de montrer que tout sous-espace fermé invariant par S est de la forme décrite.

Théorème 2.5.2. (Théorème de Beurling)

a) pour tout fonction intérieure φ , l'espace

$$\varphi H^2 = \{\varphi f : f \in H^2\}$$

est un sous-espace de H^2 fermé et invariant par S .

b) si φ_1 et φ_2 sont des fonctions intérieures et si $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$ alors φ_1/φ_2 est une constante.

c) Tout sous-espace fermé Y de H^2 , autre que $\{0\}$ et S -invariant contient une fonction intérieure φ de telle sorte que $Y = \varphi H^2$.

Preuve. H^2 est une espace de Hilbert pour la norme

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 d\theta^{\frac{1}{2}}$$

si φ est une fonction intérieure, on a $|\varphi^*| = 1$ p.p L'application

$$f \longrightarrow \varphi f$$

est donc une isométrie de H^2 dans H^2 en tant que isométrie, son image est un sous-espace fermé de H^2 (pour la démonstration , on remarque que si $\varphi f_n \rightarrow g$ dans H^2 la suite $\{\varphi f_n\}$ est de Cauchy et, par suite il en est même pour $\{f_n\}$. Donc f_n converge vers f dans H^2 et $g = \varphi f \in H^2$). L'invariance Par S de φH^2 est triviale puisque

$$z.\varphi f = \varphi.zf$$

. Par suite (a) est vérifiée.

Si $\varphi_1 H^2 = \varphi_2 H^2$, on a $\varphi_1 = \varphi_2 f$ pour une certaine fonction f de H^2 et donc $\varphi_1/\varphi_2 \in H^2$.

De même $\varphi_2/\varphi_1 \in H^2$.

Définissons la fonction $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$ et $h = \varphi + (1/\varphi)$.

Puisque $h \in H^2$ et puisque $|\varphi^*| = 1$ p.p sur T , la fonction h^* est une fonction réelle p.p sur T .

Mais alors, h étant l'intégrale de Poisson ($h = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt$) de h^* se trouve également être réelle sur U ce qui implique que h est une fonction constante , il en est de même pour φ ce qui démontre (b).

La démonstration de (c).

Soit Y un sous-espace fermé de H^2 ,non réduit à 0 et invariant par S , il existe un plus petit entier k tel que Y contienne une fonction f de la forme

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n Z_n, \quad C_k = 1$$

Par suite, $f \notin zY$ où zY désigne l'ensemble des g de la forme $g(z) = zf(z)$ où $f \in Y$. On en déduit que zY est un sous-espace fermé propre de Y (fermé puisque vaut le même raisonnement que dans la démonstration de (a), il existe dans Y un vecteur non nul orthogonale à zY .

Il existe donc $\varphi \in Y$ telle que $\|\varphi\|_2 = 1$ $\varphi \perp zY$ on aussi $\varphi \perp z^n Y$ pour $n = 1, 2, \dots$

Grâce à la définition du produit scalaire sur H^2 ,ceci signifie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^*(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Ces relation sont conservées si l'on remplace chaque nombre de gauche par son expression conjuguée c'est à dire si l'on change n en $-n$ dans (1).

Ainsi tous les coefficients de Fourier de la fonction $|\varphi^*|^2 \in L^1(\mathbb{T})$ sont nul correspondant à $n = 0$, qui vaut 1.

On en déduit $|\varphi^*| = 1$ p.p sur T puisque les fonctions de L^1 sont caractérisé presque partout par leur coefficient de Fourier.

Mais $\varphi \in H^2$ de sorte que φ est l'intégrale de Poisson de φ^* et ainsi $|\varphi| \leq 1$.

Ainsi φ est une fonction intérieure.

puisque $\varphi \in Y$ et puisque Y est invariant par S , on a $\varphi z^n \in Y$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Par suite,

$\varphi P \in Y$ pour tout polynôme P . Mais les polynômes sont dense dans H^2 (par le théorème de Parseval, les sommes partielles de la série entière d'une quelconque fonction f de H^2 convergente vers f au sens de la norme H^2).

Puisque Y est fermé $|\varphi| \leq 1$ on en déduit que $\varphi H^2 \subset Y$. Nous devons montrer que l'inclusion n'est pas propre.

Puisque φH^2 est fermé, est il suffit de montrer que les hypothèses $h \in Y$ et $h \perp \varphi z^n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ ou encore

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta}) \overline{\varphi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Si $h \in Y$, on a $z^n h \in zY$ avec $n = 1, 2, \dots$ et le choix de φ montre que $z^n h \perp \varphi$ ou encore

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^*(e^{i\theta}) \overline{\varphi^*(e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0, (n = -1, -2, -3, \dots)$$

comme tous les coefficients de Fourier de $h^* \bar{\varphi}^*$ sont nuls, cette fonction est p.p nulle sur T et comme $|\varphi^*| = 1$ presque partout on a bien $h^* = 0$ p.p c'est à dire $h = 0$ et la démonstration est achevée.

Théorème 2.5.3. Soient M_f le facteur intérieur d'une fonction $f \in H^2$ et Y le plus petit sous-espace fermé de H^2 invariants par S et qui contienne f . On a

$$Y = M_f H^2$$

En particulier, $Y = H^2$ si et seulement si f est une fonction extérieure.

Preuve. Soit $f = M_f Q_f$ la factorisation de f en facteur intérieur et extérieur, Il est clair que $f \in M_f H^2$ puisque $f = M_f H^2$ est fermé et invariant par S on a

$Y \subset f = M_f H^2$.

D'autre part le théorème de Beurling montre qu'il existe une fonction intérieure φ telle que : $Y = \varphi H^2$.

Puisque $f \in Y$, il existe une fonction $h = M_h Q_h \in H^2$ telle que

$$M_f Q_f = \varphi M_h Q_h \quad (1)$$

. puisque les fonctions intérieure ont un module égal à 1 p.p sur T , la relation (1) implique $Q_f = Q_h$ et donc $M_f = \varphi M_h \in Y$.

par conséquent, Y doit contenir le plus petit sous-espace fermé invariant par S qui contienne M_f . Ainsi $M_f H^2 \subset Y$, et la démonstration est achevée. Il peut être intéressant de résumer ces résultats à partir de deux questions auxquelles les théorèmes précédents répondent :

- f étant une fonction donnée de H^2 , Quelles sont les fonctions g de H^2 qui peuvent être approchées en norme H^2 par des fonctions de la forme fP , lorsque P parcourt les polynômes ?

La réponse est : ce sont les fonctions g telles que $g/M_f \in H^2$. - Pour quelles fonctions f dans H^2 l'ensemble fP est-il dense dans H^2 ?

la réponse est : ce sont précisément les fonctions f telles que :

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta$$

.

Chapitre 3

Sous-Espaces Invariant Par le Shift

3.1 Espaces modèles

Nous allons maintenant rappeler de nombreux résultats classiques sur les sous-espaces invariants par l'opérateur de multiplication par z sur l'espace de Hardy H^2 . Avant cela, on peut remarquer que H^2 est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$, en effet

$$\mathcal{F} : f(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n \longrightarrow (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

est clairement une isométrie bijective de H^2 à $\ell^2(\mathbb{N})$. On note S (shift) l'opérateur linéaire continu suivant :

$$\begin{aligned} S : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ (\xi_0, \dots, \xi_n, \dots) &\longmapsto (0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \end{aligned}$$

S est alors une isométrie non surjective et son adjoint S^* vérifie :

$$\begin{aligned} S^* : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ (\xi_0, \dots, \xi_n, \dots) &\longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \end{aligned}$$

Ainsi $S^*S = I_{\ell^2(\mathbb{N})}$. Enfin, on a pour tout $f \in H^2$ $\mathcal{F}(M_z f) = S\mathcal{F}(f)$ Ainsi, regarder l'action de l'opérateur de multiplication sur H^2 revient à regarder l'action de l'opérateur de déplacement S sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

On note alors simplement S . La multiplication par z sur H^2 .

Une question classique relative au shift est de chercher les sous-espaces invariants

par celui-ci.

En interprétant ces sous-espaces de $\ell_2(\mathbb{N})$ invariant par l'opérateur de déplacement comme des sous-espaces de H^2 invariant par le shift, on peut tous les décrire, et ce, de façon élégante.

Résultats classiques

Les sous-espaces de H^2 invariants par l'opérateur de multiplication par z peuvent être caractériser en termes des fonctions intérieures qui sont associées au zéros communs des fonctions de ce sous-espaces.

Le théorème classique et incontournable suivant exprime ce fait .

Corollaire 3.1.1. Les sous-espaces fermés Y de H^2 tels que $Y \neq H^2$ invariants par S^* sont de la forme

$$Y = H^2 \ominus \varphi H^2 \quad (1)$$

où φ est une fonction intérieure.

Réciproquement tous les espaces de la forme (1) sont S^- -invariants.

Preuve. Soient T est un opérateur sur un espace de Hilbert E et F un sous-espace de E , alors l'équivalence suivante est classique

$$T^*F^\perp \subset F^\perp \Leftrightarrow TF \subset F$$

et, associé au théorème elle permet de conclure. On utilise également la notation classique suivante

$$K_\varphi = H^2 \cap (\varphi H^2)^\perp = H^2 \ominus \varphi H^2$$

On dit que K_φ est l'espace modèle associé à la fonction intérieure φ .

Espaces modèles de dimension finie.

Les similitudes entre $C[X]$ et l'ensemble des fonctions intérieures sont flagrantes dans ce qui suit.

Nous allons définir la notion de divisibilité entre deux fonctions intérieures.

Cela permet de définir le ppcm de deux fonctions intérieures comme on le fait classiquement entre deux polynômes P et Q de $C[X]$ soit par divisibilité, soit en utilisant un générateur de l'idéal principal $PC[X] \cap QC[X]$.

Soient θ_1, θ_2 deux fonctions intérieures, on dit que θ_1 divise θ_2 si et seulement si $\theta_2 \mid \theta_1 \in H^2$.

On remarque alors que $\theta_2/\theta_1 \in H^2$ est nécessairement intérieure. De cette façon, on peut donc définir le ppcm de deux fonctions intérieures, au sens suivant : $\theta = ppcm(\theta_1, \theta_2)$ si θ_1 et θ_2 divisent θ et, si elles divisent une autre fonction intérieure θ' alors θ divise θ' .

De même que sur l'algèbre des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , le ppcm n'est pas unique cependant les propriétés qui nous intéressent n'en sont en rien affectées car nous ne regarderons que les espaces de la forme θH^2 .

Corollaire 3.1.2. Soient θ_1 et θ_2 deux fonctions intérieures alors

- * θ_1 divise $\theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 H^2 \subset \theta_1 H^2$
- * $\theta_1 H^2 \subset \theta_2 H^2 = \theta H^2$ tel que $\theta = ppcm(\theta_1, \theta_2)$

Preuve. a) si $\theta_2 = \theta_1$ avec g une fonction intérieure alors

$$\theta_2 H^2 = \theta_1 g H^2 \subset \theta_1 H^2$$

Réciproquement, si $\theta_2 H^2 \subset \theta_1 H^2$ alors $\theta_2 \in \theta_1 H^2$ et $\theta_2 \mid \theta_1 \in H^2$.

b) Le sous espace $\theta_1 H^2 \cap \theta_2 H^2$ est clairement invariant par S et comme ce dernier contient $\theta_1 \theta_2$, il est non trivial et donc de la forme θH^2 où θ est une fonction intérieure.

De plus par a), $\theta H^2 \subset \theta_1 H^2$ implique que θ_1 divise θ et de même θ_2 divise θ . Enfin si θ' est divisible par θ_1 et θ_2 alors, encore par a), on a $\theta' H^2 \subset \theta_1 H^2$, et $\theta' H^2 \subset \theta_2 H^2$ et ainsi $\theta H^2 \subset \theta_1 H^2 \cap \theta_2 H^2 = \theta H^2$. On peut alors conclure que θ divise θ' .

Ce corollaire implique en particulier que si l'on considère un produit de Blaschke B alors la suite $(K_{B^n})_{n>0}$ est croissante pour l'inclusion, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n divise B^{n+1} et donc $B^n H^2 \supset B^{n+1} H^2$ et $K_B^n \subset K_B^{n+1}$.

Cette remarque nous sera utile dans la généralisation du théorème de Szegö à des

suite d'espaces modèles de ce type.

Nous allons montrer que les espaces modèles de dimensions finies sont engendrés par les produits de Blaschke finis. Pour cela on donne le lemme de Beurling ; le résultat désiré en sera alors une conséquence.

Lemme 3.1.1. (Beurling)

a) Le spectre ponctuel de S^* est donné par l'égalité : $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$ et pour $|\lambda| < 1$, la fonction $x_\lambda = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$ est un vecteur propre de S^* associé à λ .

b) Pour tout entier $n, n > 1$, on a

$$\ker(S^* - \bar{\lambda}I)^n = \frac{P(z)}{1 - \bar{\lambda}z}^n, P \in C_{n-1}[X]$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, on a $\ker(S^* \bar{\lambda}I)^n = (b_\lambda^n H^2)^\perp = K_{b_\lambda^n}$. En particulier, $k_{b_\lambda^n}(b_\lambda^n H^2)^\perp =$ est de dimension finie n .

Preuve. a) En comparant les coefficients de Taylor, on obtient que $f \in H^2 \mid 0$ et $\lambda \in C$ sont tels que $S^*f = \bar{\lambda}f$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, \hat{f}(n) = \bar{\lambda}^n \hat{f}(0)$.

Mais une telle fonction f existe dans H^2 si et seulement si $|\lambda| < 1$.

On peut remarquer qu'alors f est de la forme

$$f(z) = \frac{A}{1 - \bar{\lambda}z} = AK_\lambda(z)$$

Ainsi, il est clair que $D \subset \sigma_p(S^*)$ et que x_λ est un vecteur propre associé à λ , pour $|\lambda| < 1$. Maintenant, compte tenu du fait que $\lambda \in \sigma_p(S^*) \Rightarrow |\lambda| \leq \|S^*\| = 1$, on a l'égalité voulue.

b) On utilise la relation :

$$S^* - \bar{\lambda}I = (S\bar{\lambda}I)^*$$

On a alors :

$$\ker(S^* - \bar{\lambda}I)^n = H^2 \ominus (S - \lambda I)^n H^2 = H^2 \cap ((S - \lambda I)^n H^2)^\perp$$

puis

$$(S - \bar{\lambda}I)^n H^2 = \{f \in H^2, f(\lambda) = \dots f^{n-1}(\lambda) = 0\}$$

. Comme on a remarqué à la fin de la partie que l'ensemble de droite est égal à

$$((S - \bar{\lambda}I)^n H^2)^\perp = \text{vect}\left\{\frac{j!(-z)^{j+1}}{1 - \bar{\lambda}z}, 0 \leq j \leq n - 1\right\}^\perp$$

Ainsi on a bien

$$\ker(S^* - \bar{\lambda}I)^n = \text{vect}\{z^j(1 - \bar{\lambda}z^{-j-1}), 0 \leq j \leq n-1\}$$

ce qui vaut clairement $\{\frac{P(z)}{(1-\bar{\lambda}z)}^n, P \in C_{n-1}[X]\}$.

En utilisant (le théorème 1.13 et l'équation (2.2)).voir[9], il est clair que $f \in (s - \lambda I)^n H^2$ si et seulement si $f = b_\lambda^n g$ où $g \in H^2$.

Comme par b)

$$\dim \ker(s^* - \lambda I)^n = n$$

on a bien $K_{b_\lambda^n} = (b_\lambda^n H^2)^\perp$ est de dimension finie.

On peut remarquer que si $\lambda = 0$, on retrouve l'égalité triviale suivante

$$K_{z^n} = \text{vect}z^k, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

On peut maintenant démontrer le lemme suivant qui donne des conditions équivalentes pour que K_φ soit de dimension finie.

Proposition 3.1.1. Soit φ une fonction intérieure Alors $\dim K_\varphi < \infty \Leftrightarrow \varphi$ est un produit de Blaschke fini. En particulier, dans ce cas

$$\dim K_\varphi = |z(\varphi)|$$

Là encore, on peut comparer ce résultat à celui bien connu qui établit que la codimension dans l'ensemble des polynômes de l'ensemble J de ceux qui s'annulent aux points λ d'une suite finie $(\lambda_i)_{i \in I}$ coïncide avec le cardinal de la partie I.

Avant de démontrer ce résultat, on rappelle un lemme classique sur les espaces euclidiens : soient $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de sous-espaces vectoriels alors

$$(\cap_{0 \leq k \leq n} A_k)^\perp = \sum_{k=0}^n A_k$$

où $\sum_{k=0}^n A_k$ est l'espace vectoriel somme.

Preuve. (\Leftarrow) Si φ est un produit fini de Blaschke, alors

$$\varphi = \prod_{\lambda \in H^2} b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)}$$

où $W(\varphi)$ est défini à la remarque 1.12.voir[9] Par le corollaire 2.3 voir[9], on peut écrire

$$\varphi H^2 = \bigcap_{\lambda \in W(\varphi)} b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)} H^2$$

car le ppcm des $b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)}$ est $\prod_{\lambda \in H^2} b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)}$ Maintenant, comme

$$K_\varphi = (\bigcap_{\lambda \in W(\varphi)} b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)} H^2)^\perp = \sum_{\lambda \in W(\varphi)} (b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)} H^2)^\perp$$

par le b) du lemme 2.4.voir[9] on a

$$K_\varphi = \bigoplus_{\lambda \in W(\varphi)} (b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)} H^2)^\perp$$

.

Enfin le c) du même lemme donne $\dim(b_\lambda^{m(\varphi, \lambda)} H^2)^\perp = m(\varphi, \lambda)$ donc

$$\dim K_\varphi = \sum_{\lambda \in W(\varphi)} m(\varphi, \lambda) = z|\varphi| < \infty$$

(\Rightarrow)

Comme $S^* K_\varphi \subset K_\varphi$, S^* induit sur K_φ un endomorphisme. Rappelons le lemme des noyaux classique : Soit G un endomorphisme d'un espace E de dimension finie alors il existe une partie finie W de \mathbb{C} telle que

$$E = \bigoplus_{\lambda \in W} \ker(G - \lambda I)$$

Dans notre cas comme k_φ est de dimension finie par le lemme des noyaux, k_φ peut s'écrire

$$K_\varphi = \bigoplus_{\lambda \in W} \ker(S^* - \bar{\lambda} I)^{\sigma(\lambda)}$$

où $\sigma(\lambda) \in \mathbb{N}^*$ et W est une partie finie de $\sigma p(S^*) = D$

. Par le lemme 2.4.voir[9].

c), on peut écrire

$$K_\varphi = \bigoplus_{\lambda \in W} k_{b_\lambda^{\sigma(\lambda)}}$$

et ainsi

$$\varphi H^2 = \bigcap_{\lambda \in W} b_\lambda^{\sigma(\lambda)} H^2$$

En utilisant le corollaire 2.3.voir[9] on a donc φ est le ppcm de la famille $\{b_\lambda^{\sigma(\lambda)}\}_\lambda \in W$ qui n'est autre que $\prod_{\lambda \in W} k_{b_\lambda^{\sigma(\lambda)}}$ On obtient, dans le lemme 2.4.voir[9], une base de K_φ ,

celle-ci n'est pas orthogonale sauf si $\varphi = b_0^n = z^n$. Les noyaux reproduisant associés aux produits de Blaschke permettent d'en construire une qui soit orthonormée pour tout produit de Blaschke. On verra plus loin que cette dernière a des propriétés très proches de $z^n, n > 0$. On sait que la dimension de K_B est le nombre (avec multiplicité) de zéros de B.

On reprend alors les mêmes notations qu'au lemme précédent. Il est naturel de chercher à construire une base de K_B à partir des bases de $K_{b_\lambda^{m(B,\lambda)}}$ tel que $\lambda \in W(B)$. Il est clair que la famille

$$S_\lambda = \{k_\lambda, b_\lambda k_\lambda, \dots, b_\lambda^{m(B,\lambda)-1} k_\lambda\}$$

est incluse dans $K_{b_\lambda^{m(B,\lambda)}}$, et que son cardinal vaut $m(B, \lambda)$. Pour remarquer qu'il s'agit d'une base de $K_{b_\lambda^{m(B,\lambda)}}$, il suffit de montrer que S_λ est une famille orthogonale. Soit $1 \leq i \leq j \leq m(B, \lambda) - 1$, on remarque alors que $b_\lambda^j = b_\lambda^i b_\lambda^{j-i}$ et comme b_λ^i est intérieure, la multiplication par b_λ^i est une isométrie, elle conserve donc le produit scalaire et on a

$$\langle b_j k_\lambda, b_i k_\lambda \rangle = \langle b_{j-i} k_\lambda, k_\lambda \rangle$$

Maintenant comme b_λ^{j-i} est intérieure et que $k_\lambda \in H^2, b_\lambda^{j-i} k_\lambda \in H^2$ et

$$\langle b_\lambda^i k_\lambda^j, b_\lambda^i k_\lambda \rangle = (1 - |\lambda|)^{\frac{1}{2}} b_\lambda^{j-i} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On a ainsi construit des bases orthogonales de $K_{b_\lambda^{m(B,\lambda)}}$, pour chaque $\lambda \in W(B)$. Maintenant, il suffit de remarquer que par définition $K_{b_\lambda^{m(B,\lambda)}}$, est orthogonal à $b_\lambda H^2$ ainsi si on numérote les éléments de $W(B)$, il est clair que S_{λ_1} est orthogonal à $b_{\lambda_1}^{m(B,\lambda_1)} S_{\lambda_2}$ et que $b_{\lambda_1}^{m(B,\lambda_1)} S_{\lambda_2}$.

En continuant ainsi, on obtient la famille

$$S_{\lambda_1} b_{\lambda_1}^{m(B,\lambda_1)} S_{\lambda_2} b_{\lambda_1}^{m(B,\lambda_2)} b_{\lambda_1}^{m(B,\lambda_3)} S_{\lambda_3}, \dots, \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}^{m(B,\lambda_k) S_{\lambda_{|W(B)|}}}$$

Cette construction est résumée dans la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. Malmquist-Walsh)

Soient B un produit de Blaschke. On note, pour $1 \leq i \leq p$,

$$\beta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \beta_i = \prod_{k=1}^{i-1} b_{\lambda_k}$$

Alors $B = \beta_i k_{\lambda_i}, \quad 1 \leq i \leq p$ est une base orthonormée de K_B .

3.2 Sous-espaces invariants par le shift

Introduction

Dans la suite nous allons étudier en détail les sous-espaces vectoriels fermés invariants par un opérateur très particulier appelle “shift” ou l’opérateur de déplacement sur l’espace de Hilbert ℓ^2 . Historiquement c’est précisément cette étude qui a suggéré la définition de l’espace de Hardy $H^2(D)$.

3.3 Le shift sur ℓ^2 et $H^2(D)$: définition et propriétés spectrales

3.3.1 Le shift sur ℓ^2

Soit $\ell^2 := \{(a_n)_{n \geq 0} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty\}$.

Rappelons que l’espace de Hilbert ℓ_2 est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|(a_n)_{n \geq 0}\|_2 = \left(\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

et Soit T l’application linéaire de ℓ_2 dans ℓ_2 définie par $T((a_n)_{n \geq 0}) = (a_{n-1})_{n \geq 0}$ avec la convention $a_{-1} = 0$.

L’application linéaire T est appelée le shift sur ℓ_2 .

Proposition 3.3.1. Le shift sur ℓ^2 , T , est un opérateur de ℓ^2 isométrique. Par conséquent $\|T\| = 1$.

De plus $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \overline{D}$.

Preuve. Si $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$, comme $T(a) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$, il est clair que $\|T(a)\|_2 = \|a\|_2$, ce qui prouve que T est une isométrie. Comme

$$\|T\| = \sup_{a \in \ell^2 : \|a\|_2 \leq 1} \|T(a)\|_2 = \sup_{a \in \ell^2 : \|a\|_2 = 1} \|T(a)\|_2$$

automatiquement $\|T\| = 1$.

Pour déterminer $\sigma_p(T)$, on cherche à résoudre $Ta = \lambda a$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a = (a_n)_{n \geq 0} \in$

$\ell^2, a \neq 0$.

Comme $Ta = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$ on a donc $0 = \lambda a_1, a_0 = \lambda a_1, a_1 = \lambda a_2, \dots$

En étudiant séparément le cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$, on obtient $a_n = 0, n \geq 0$, ce qui implique $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Ainsi pour tout $\lambda \in C, T - \lambda Id$ est injective.

De ce fait $\lambda \in C$ est un élément de $\sigma(T)$ si et seulement si $T - \lambda Id$ est non surjective.

Soient $(e_n)_{n \geq 0}$ la base canonique de ℓ^2 , i.e., $e_k = (a_n)_{n \geq 0}$ avec $a_n = 0$ si $n \neq k$ et $a_n = 1$ si $n = k$. Il est clair que $T - \lambda Id$ est surjectif si et seulement si, pour tout $n \in N, e_n \in (T - \lambda Id)\ell^2$. Comme toute suite appartenant à $T\ell^2$ a comme première coordonnée 0, $e_0 \in (T - \lambda Id)\ell^2$. De ce fait T n'est pas surjectif et donc $0 \in \sigma(T)$. Soit $\lambda \neq 0, |\lambda| \leq 1$. Alors $e_0 \in (T - \lambda Id)\ell^2$. En effet, soit $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ tel que $(T - \lambda Id)a = e_0$. On a donc

$$-\lambda a_0 = 1, a_0 - \lambda a_1 = 0, a_1 - \lambda a_2 = 0, a_2 - \lambda a_3 = 0 \dots$$

Finalement $a_n = -\frac{1}{\lambda^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$. Comme $|\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0$, il est clair que $a \notin \ell^2$. Finalement $\overline{D} \subset \sigma(T)$. Supposons à présent $|\lambda| > 1$. Nous allons montrer que dans ce cas $T - \lambda Id$ est surjectif.

Pour cela, on fixe $n \in N$ et on cherche $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ tel que $(T - \lambda Id)a = e_n$.

On a donc

$$-\lambda a_0 = 0, a_0 - \lambda a_1 = 0, \dots, a_{n-2} - \lambda a_{n-1} = 0, a_{n-1} - \lambda a_n = 1, a_n - \lambda a_{n+1}$$

On a donc $a_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $a_k = -\frac{1}{\lambda^{k-n+1}}$ si $k \geq n$. Comme $|\lambda| > 1$, la suite a est de carré sommable, c'est bien un élément de ℓ^2 . Finalement $\sigma(T) = \mathbb{D}$.

Remarque 3.3.1. Soit X un espace de Banach sur C . Sachant que pour tout opérateur $A \in L(X), \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \|A\|$, on pouvait tout de suite dire que $\sigma(T) \subset D$. De plus, sachant que le spectre est un compact de $C, D \subset \sigma(T)$ implique $\overline{D} \subset \sigma(T)$.

Autrement dit, modulo les deux résultats théoriques que l'on vient de rappeler (vrais en toute généralité), pour montrer que $\sigma(T) = \overline{D}$, comme $\|T\| = 1$, il suffisait de vérifier que $D \subset \sigma(T)$.

Le spectre ponctuel de T est vide mais cependant il n'est pas difficile de trouver des sous-espaces vectoriels fermés de ℓ^2 non triviaux invariants par T .

Prenons par exemple $\{M = (a_n)_{n \leq 0} \in \ell^2 \mid a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{n_0} = 0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. Par contre il n'est pas du tout évident de décrire tous les éléments de $Lat(T)$. C'est dans ce but que nous allons introduire l'opérateur shift sur $H^2(D)$, espace de fonctions analytiques où il sera plus facile de raisonner.

3.3.2 Le shift sur $H^2(\mathbb{D})$

l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

avec $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$. De plus $\|f\|_2 = (\sum_{n \geq 0} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|a\|_2$. Une formulation immédiate de ceci est la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. Soit $\varphi : \ell^2 \rightarrow H^2(\mathbb{D})$ défini par $\varphi(a) = f_a$ avec $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ et $f_a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Alors φ est un isomorphisme isométrique. Nous allons à présent introduire l'opérateur shift sur $H^2(\mathbb{D})$.

Proposition 3.3.3. L'application linéaire continue S de $H^2(\mathbb{D})$ dans lui-même définie par $S = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ est l'isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $Sf = \alpha f$ avec $\alpha(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Preuve. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ définie par $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$. On a donc $\varphi^{-1}(f) = a$ et $T \circ \varphi^{-1}(f) = (a_{n-1})_{n \geq 0}$ avec $a_{-1} = 0$. Finalement $S(f) = g$ avec $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-1} z^n = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n = z \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^{n-1} = z f(z)$. Comme $S - \lambda Id = \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1}$ avec φ et φ^{-1} inversibles, il est clair que $T - \lambda Id$ est inversible si et seulement si $S - \lambda Id$ est inversible. De ce fait $\sigma(S) = \sigma(T) = \mathbb{D}$. D'autre part, comme $(S - \lambda Id)f = 0 \Leftrightarrow \varphi \circ (T - \lambda Id) \circ \varphi^{-1} f = 0$, l'injectivité de $T - \lambda Id$ et le fait que φ^{-1} soit injective, nous garantit que $S - \lambda Id$ est injective et donc $\sigma_p(S) = \emptyset$. Compte tenu du lien entre T et S , on en déduit :

Proposition 3.3.4. $Lat(T) = \{\varphi^{-1}(M) : M \in Lat(S)\}$.

Preuve. Comme φ^{-1} est une application linéaire isométrique, si M est un sous-espace vectoriel fermé, il en est de même pour $\varphi^{-1}(M)$ (si V est une isométrie

linéaire sur X et si $(x_n) \subset X$ est de Cauchy, alors $(V(x_n))_n$ est elle aussi de Cauchy puisque $\|V(x_n) - V(x_p)\| = \|V(x_n - x_p)\| = \|x_n - x_p\|$. De plus, si $M \in Lat(S)$, on a $(\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(M) \subset M$ et donc $T\varphi^{-1}(M) \subset \varphi^{-1}M$. Par conséquent nous avons $\varphi^{-1}(M) : M \in Lat(S) \subset Lat(T)$. D'autre part, si $N \in Lat(T)$, posons $M = \varphi(N)$. On remarque que

$$S(M) = (\varphi \circ T \circ \varphi^{-1})(M) = (\varphi \circ T)(N) \subset \varphi(N) = M$$

.

Description de tous les sous-espaces invariants du shift sur $H^2(\mathbb{D})$

D'après le Lemme 5.2.3. voir [9], nous obtiendrons une description complète de $Lat(T)$ si et seulement si on peut décrire entièrement $Lat(S)$. Nous allons tout d'abord vérifier que $\phi H^2(\mathbb{D})$ tel que ϕ fonction intérieure $\subset Lat(S)$.

Proposition 3.3.5. Soit ϕ une fonction intérieure. Alors

$$\phi H^2(\mathbb{D}) = \{\phi f : f \in H^2(\mathbb{D})\} \text{ est un élément de } Lat(S).$$

Preuve. Il est clair que $\phi H^2(\mathbb{D})$ est un sous-espace vectoriel de $H^2(\mathbb{D})$. Pour vérifier que $\phi H^2(\mathbb{D})$ est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$, notons que $\phi H^2(\mathbb{D})$ est l'image de $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur M défini par $M(f) = \phi f, f \in H^2(\mathbb{D})$. Comme

$$\|\phi f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|\phi^* f^*\|_{L^2(T)} = \|f^*\|_{L^2(T)} = \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$$

, M_ϕ est une isométrie, son image est fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi $\phi H^2(\mathbb{D})$ est bien un sous-espace vectoriel fermé dans $H^2(\mathbb{D})$. Remarquons que

$$S(\phi H^2(\mathbb{D})) = \alpha \phi f : f \in H^2(\mathbb{D}) \subset \phi g : f \in H^2(\mathbb{D}) = \phi H^2(\mathbb{D}),$$

étant donné que si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $\alpha f \in H^2(\mathbb{D})$ puisque

$$\|\alpha f\|_H^2(\mathbb{D}) = \|\alpha^* f^*\|_{L^2(T)}^2 = \|f^*\|_L^2(T) = \|f\|_H^2(\mathbb{D}).$$

.

Finalement $\varphi H^2(\mathbb{D}) := \varphi f : f \in H^2(\mathbb{D}) \in Lat(S)$ dès que φ est une fonction

intérieure.

Le résultat suivant nous dit qu'à une constante unimodulaire près il y a unicité de la "représentation" de tout élément de $Lat(S)$ de la forme $\varphi H^2(\mathbb{D})$ tel que φ est une fonction intérieure.

Proposition 3.3.6. Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions intérieures telles que $\varphi_1 H^2(\mathbb{D}) = \varphi_2 H^2(\mathbb{D})$. Alors il existe $c \in T$ tel que $\varphi_1 = c\varphi_2$.

Preuve. D'après le Théorème 4.4.1, voir [9] il existe $c_1, c_2 \in T, B_1$ et B_2 deux produits de Blaschke associées à deux suites $(\alpha_n^1)_{n \geq 0}$ et $(\alpha_n^2)_{n \geq 0}$ de D (satisfaisant $\sum_{n \geq 0} |1 - \alpha_n^i \varphi| < \infty$ pour $i = 1, 2$) et deux mesures μ_1, μ_2 positives et singulières par rapport à la mesure de Lebesgue tels que

$$\varphi_i(z) = c_i B_i(z) S_{\mu_i}(z)$$

avec

$$S_{\mu_i}(z) = e^{-\frac{-1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_i(t)} \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots$$

Rappelons que les fonctions intérieures singulières S_{μ_1} et S_{μ_2} ne s'annulent pas sur D . L'égalité $\varphi_1 H^2(\mathbb{D}) = \varphi_2 H^2(\mathbb{D})$ implique qu'il existe $f_1, f_2 \in H^2(\mathbb{D})$ telles que

$$C_1 \cdot B_1 \cdot S_{\mu_1} \cdot f_1 = C_2 \cdot B_2 \cdot S_{\mu_2} \text{ et } C_1 \cdot B_1 \cdot S_{\mu_1} \cdot f_1 = C_2 \cdot B_2 \cdot S_{\mu_2} \cdot f_2$$

En particulier $B_1(z) = 0$ implique $B_2(z) = 0$ et réciproquement. De ce fait B_1 et B_2 ont la même suite de zéros avec même multiplicité et donc $B_1 = B_2$. Nous en déduisons

$$C_1 \cdot S_{\mu_1} \cdot f_1 = C_2 \cdot S_{\mu_2} \text{ et } C_1 \cdot S_{\mu_1} = C_2 \cdot S_{\mu_2} \cdot f_2$$

Comme S_{μ_1} et S_{μ_2} sont des fonctions intérieures, $|f_i^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout pour $i = 1, 2$. Comme $f_i \in H^2(D)$ pour $i = 1, 2$, d'après le Théorème 4.4.2, voir [9] pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$f_i(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_i^*(e^{it}) dt.$$

Par conséquent $f_i(z) \leq 1$ pour $z \in D$ et $i = 1, 2$.

On en déduit que $S_{\mu_1(z)} \leq S_{\mu_2(z)}$ et $S_{\mu_2(z)} \leq S_{\mu_1(z)}$ pour $z \in \mathbb{D}$. Ainsi $S_{\mu_1(z)} = S_{\mu_2(z)}$

pour $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}}$ étant holomorphe sur l'ouvert simplement connexe \mathbb{D} et ne s'annulant pas, d'après le Théorème 1.2.1, voir [9] il existe $\ell \in \mathcal{H}ol(D)$ tel que $\frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}} = e^\ell$ sur D . En particulier on obtient $R(L(z)) = \log \frac{S_{\mu_1}}{S_{\mu_2}} = 0$ pour tout $z \in D$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Im(l(z)) = \lambda$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Finalement $S_{\mu_1} = e^{i\lambda} S_{\mu_2}$ et donc il existe $c \in T$ tel que $\varphi_1 = c\varphi_2$. Nous allons à présent vérifier que tous les éléments de $Lat(S)$ différents de 0 sont de la forme $\varphi H^2(\mathbb{D})$ tel que φ est une fonction intérieure donne.

Bibliographie

- [1] B. Beauzamy. , *Propriétés spectrales d'un opérateur sans sous-espace invariant. J. Operator Theory*, 16 :349–353, 1986.
- [2] C. Read. *A solution to the invariant subspace problem*,. Bull. London Math. Soc., 16 :337–401, 1984.
- [3] C. Read. *A solution to the invariant subspace problem on the space l^1* . Bull. London Math. Soc., 17 :305–317, 1985.
- [4] C. Read. J. London Math. *A short proof concerning the invariant subspace problem*. Soc., 34(2) :335–348, 1986,
- [5] C. Read. *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators*, Israel J. Math., 63(1) :1–40, 1988.
- [6] C. Read. Proc. London Math. *The invariant subspace problem on some Banach spaces with separable dual*. Soc., 58(3) :583–607, 1989.,
- [7] H. Bauchwalter, *Le calcul intégral*, Université de Bordeaux ,1991.
- [8] I. Chalendar, *Analyse Fonctionnelle*, Université Lyon1, 2008.
- [9] M. Bernoit Barrusseau, *Thèse Doctorat*, Université Bordeaux, 20 mai 2010.
- [10] M. Nadhir, *Cours d'analyse fonctionnelle* , université de M'sila, Alger, 2004.
- [11] P. Enflo. *On the invariant subspace problem in Banach spaces. In Espaces L^p , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*, Séminaire Maurey-Schwartz (1975 - 1976). 1976.
- [12] P. Enflo. *A On the invariant subspace problem in Banach spaces*, cta Math., 158 :213– 313, 1987.

- [13] S. Brown .*Some invariant subspaces for subnormal operators. Integral Equations and Operator Theory*, 1 :310–333, 1978..
- [14] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. . Masson, 1991.