

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE
DEPERTEMENT DE GENIE INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en
Mathématiques, Option : Mathématiques

Thème

Espace de Hilbert

Proposé et Encadré par :
Prof. BENABDERRAHMANE
Benyattou

Présenté par :
- TIMMAOUI Ahmed
- MADNI Belkacem

N° d'ordre :...../2011-PFE/DGI

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

کتابک ۱۴۱۷
کتابک ۱۴۱۸

Dédicaces

Mes très chers parents qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être. Qu'ALLAH leur assure une longue vie et bien travail pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur Ben Abderrahmane Benytattou.

Je dédie ce mémoire

AHMED_TIMMAOUI

Dédicaces

Mes très chers parents qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être. Qu'ALLAH leur assure une longue vie et bien travail pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur Ben Abderrahmane Benytattou.

Je dédie ce mémoire

BELKACEM_MADNI

REMERCIEMENTS

Nos vifs remerciements à notre encadreur Mr Ben Abderrahmane Benyattou, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particulièrement à Mr. Mokhtari Abdelkader, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour ces inestimables conseils, ainsi qu'aux Mrs. Belabbaci Youcef, Ouinten Youcef, Maitres de conférences en Mathématiques à l'université de Laghouat pour leurs précieuses aides ayant largement contribué à la conception de notre thèse.

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département de Génie Informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat.

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943), le premier à avoir introduit de manière systématique les espaces qui maintenant portent son nom, est connu pour les 23 fameux problèmes qu'il proposa au congrès international des mathématiciens en 1900. Ses idées ont profondément marqué l'ensemble des mathématiques jusqu'à l'heure actuelle, en particulier en introduisant des méthodes géométriques en Analyse, donnant ainsi naissance à un domaine important des mathématiques : l'Analyse fonctionnelle.

Les méthodes géométriques présentées dans ce mémoire sont basées sur la notion de produit scalaire et d'orthogonalité.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres, dans le premier, nous allons présenter un rappel concernant quelques notions d'algèbre linéaire. Dans le second chapitre, nous allons présenter aussi un rappel concernant quelques notions indispensables sur la théorie élémentaires des distributions.

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter une étude approfondie sur les espaces de Hilbert, ainsi que les principaux résultats qui sont vraie dans ces espaces.

On termine par un conclusion générale.

NOTATIONS

	Ouvert de \mathbb{R}^n .
$C^\infty(\)$	Espace des fonctions C^∞ dans $\ .$
$\mathcal{D}(\)$	Espace des fonctions C^∞ à support compact dans $\ .$
$\mathcal{D}'(\)$	Espace des distributions de L. Schwartz.
$L^2(\)$	Espace des fonctions carrées intégrables sur $\ .$
\cdot, \cdot	Paire de dualité.
\mathcal{D}^α	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
$ \alpha $	Longueur du multi-indice.
$\ \cdot \ _p$	$\{x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots), \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k ^p < \infty\}, 0 < p < \infty$.
$L^1(du)$	Ensemble des fonctions intégrables par rapport à u .
$F(A, X)$	$\{f: A \rightarrow X\}$.
$[A]$	Ensemble des combinaisons linéaires finies sur A .
$C(A)$	$\{f: A \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ continue}\}$.
e_k	$(\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots)$.
$X_1 \oplus X_2$	Somme directe de X_1 et X_2 .
$d(x, y)$	Distance métrique entre x et y .
$d(x_0, A)$	Distance de x_0 à A .
$\ x\ $	Norme de x .
$(E, \ \cdot\)$	Espace normé.
(x, y)	Produit scalaire de x et y .
$x \perp y$	x et y sont orthogonaux.

$A_1 \perp A_2$ A_1 est orthogonal à A_2 .

A^\perp Complémentaire orthogonale de A .

$H_s = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ $\{x; x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty\}$

$C_{x_0}(x)$ Coefficient de Fourier de x par rapport à x_0 .

$\sum_{i \in I} \alpha_i$ $\sup\{\sum_{k=1}^n \alpha_{i_k}; n \in \mathbb{N}\}$.

H_e $\{x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i; \sum_{i \in I} |\xi_i|^2 < \infty\}$

Table des matières

Introduction	I
Liste des Notation	II

CHAPITRE I : Quelques notions d'algèbre linéaire

I.1- Espace vectoriel	05
I.2- Sous-espace vectoriel	05
I.3- Application linéaire	06
I.4- Forme bilinéaire	06
I.5- Forme sesquilinéaire	07
I.6- Produit scalaire hermitien	07
I.7- Espaces vectoriels normés	08
I.8- Espaces complets	11
I.9- Ensemble dense	11
I.10- Ensemble total	12
I.11- Equipotence	12
I.12- Ensembles dénombrables	12
I.13- Espace métrique est séparable	12
I.14- Ensemble convexe	12

CHAPITRE II : Rappel sur la théorie élémentaire des distributions

II.1- Fonctions de base (Espace de fonctions tests)	14
II.2- Définition (Distribution)	16
II.3- Multiplication par une fonction C^∞	17
II.4- Dérivée des distributions	17
II.5- Fonction de Heaviside	17
II.6- Distributions associées à une fonction discontinue	18

II.7- Support d'une distribution	18
II.8- Convergence dans $\mathcal{D}'(\)$	20
II.9- Distributions tempérées	20

CHAPITRE III : Espace de Hilbert

III.1- Définitions, propriétés générales	24
III.2- Orthogonalité, décompositions orthogonales d'un espace de Hilbert	31
III.3- Bases orthonormales d'un espace de Hilbert	39
III.4- Isomorphisme des espaces de Hilbert, dimension hilbertienne	46

Conclusion.

Bibliographie.

CHAPITRE I :

**Quelques notions
d'algèbre linéaire**

I- INTRODUCTION :

Nous étudions dans ce chapitre quelques rappels d'algèbre linéaire qui seront utiles ultérieurement.

1. Espace vectoriel :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un espace vectoriel sur \mathbb{K} est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés vecteurs muni d'une opération binaire appelée addition $+: E \times E \rightarrow E$ et d'une multiplication scalaire $\cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ tel que $(E, +)$ est un groupe commutatif c'est-à-dire :

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E,$$

$$0 \in E: x + 0 = x, \quad \forall x \in E,$$

$$\forall x \in E, \quad -x \in E \quad x + (-x) = 0,$$

$$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in E;$$

La multiplication scalaire satisfaisant

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x, \quad \forall x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

2. sous-espace vectoriel :

Nous dirons qu'un sous-ensemble M de E est un sous-espace de E s'il est stable pour les opérations de E , autrement dit si

$$x + y \in M,$$

$$\alpha x \in M, \quad \forall x, y \in M, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Il s'ensuit que M est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire héritée de E .

3. Application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} . Une application $T: E \rightarrow F$ est dite linéaire si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ pour $x, y \in E$.
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pour $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

3.1 Noyau et l'image d'une application linéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , T est une application linéaire $T: E \rightarrow F$, l'ensemble $\{x \in E: Tx = 0\}$ est appelé le noyau de T et est noté $\text{Ker } T$. L'ensemble $\{Tx \mid x \in E\}$, noté $R(T)$, est l'image de T .

Lemme :

Si $T: E \rightarrow F$ est linéaire, alors $\text{Ker } T$ est un sous-espace de E et $R(T)$ un sous-espace de F .

3.2 L'espace vectoriel des applications linéaires:

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , on notera $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .

$E^* = \{\bar{f}: f \in L(E, \mathbb{K})\}$ est appelé le dual algébrique de E .

Rappelons que si $f: E \rightarrow \mathbb{K}$, alors sa fonctionnelle conjuguée est:

$$\bar{f}: E \rightarrow \mathbb{K} \quad x \mapsto \overline{f(x)}; \quad \bar{z} \text{ désignant le complexe conjugué de } z.$$

4. Forme bilinéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et une application

$$\varphi: E \times F \rightarrow \mathbb{K} \quad (x, y) \mapsto \varphi(x, y).$$

On dit que φ est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire et si pour tout $y \in F$, l'application $\varphi(\cdot, y)$ est linéaire.

Les formes sesquilinéaires sont définies lorsque le corps de base est \mathbb{C} .

Forme bilinéaire symétrique :

Soit φ une forme bilinéaire sur E . On dit que

- φ est symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
- φ est antisymétrique si pour tout $(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.

5. Forme sesquilinéaire :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{C} et Une application

$$\varphi: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y).$$

On dit que φ est une forme sesquilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x, \cdot)$ est linéaire et si pour tout $y \in F$, l'application $\varphi(\cdot, y)$ est anti-linéaire (i.e. pour tout $y, y' \in F, \varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $y \in F, \varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$).

5.1 Forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne :

Soit φ une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E sur \mathbb{C} . On dit que φ est à symétrie hermitienne si pour tout $(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

5.2 Formes hermitiennes :

On appelle forme hermitienne sur un espace vectoriel E sur \mathbb{C} , toute application de la forme

$$\Psi: E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi(x, x)$$

Où φ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne.

6. Produit scalaire hermitien:

Un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ qui est linéaire en première variable, sesquilinéaire en sa deuxième variable, à symétrie hermitienne et qui vérifie

$$x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ avec égalité si et seulement si } x = 0.$$

Exemple :

1) $E = \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

2) $E = C([a, b], \mathbb{R})$ avec $-\infty < a < b < +\infty$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Définit un produit scalaire sur E .

7. Espaces vectoriels normés :

La valeur absolue sur \mathbb{R} ou le module sur \mathbb{C} sont notés $|\cdot|$, chacun est une norme et induit donc une notion de distance sur leur espace respectif, ce qui permet des considérations de convergence et de continuité sur ces espaces. Nous allons étendre ce concept aux espaces vectoriels généraux.

7.1 Normes et semi-normes :

Définition :

Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Une norme sur E est une semi-norme, notée usuellement $\|\cdot\|$, qui vérifie de plus

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

Le couple (E, p) (respectivement $(E, \|\cdot\|)$) est alors appelé un espace vectoriel semi-normé (respectivement normé).

Lemme :

Si (E, p) est un espace vectoriel semi-normé, alors :

- $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), \quad x, y \in E,$
- le noyau $\text{Ker } p$ est un sous-espace de E .

- Si $T \in L(E, \mathbb{K})$, alors $p \circ T : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme sur E . Si, de plus, p est une norme, alors l'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto p(x - y)$$

est une distance sur E .

L'espace vectoriel E muni d'une distance d s'appelle espace métrique.

7.2 Convergence :

Si (E, p) est un espace vectoriel semi-normé, alors on dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers $x \in E$ (en abrégé $x_n \rightarrow x$) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n - x) = 0$.

Soit S un sous-ensemble de E , alors la fermeture de S dans E pour la semi-norme p est $\bar{S} = \{x \in E : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_n \rightarrow x \text{ dans } E\}$.

S est dit fermé si $S = \bar{S}$.

A noter que \bar{S} est toujours fermé.

Lemme :

Si (E, p) est un espace vectoriel semi-normé et M un sous-espace de E , alors \bar{M} est un sous-espace fermé de E .

7.3 Continuité :

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces vectoriels semi-normés et une application $T : E \rightarrow F$ (pas nécessairement linéaire). On dit que T est continu en $x \in E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall y \in E : p(x - y) < \delta \Rightarrow q(Tx - Ty) < \varepsilon.$$

T est dite continue si T est continu en tout point de E .

Théorème (1):

T est continu en x si et seulement si $x_n \rightarrow x$ dans E implique que $Tx_n \rightarrow Tx$ dans F .

Théorème (2) :

Si T est une application linéaire de E dans F , alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) T est continu en 0,
- 2) T est continu,
- 3) il existe une constante $K > 0$ telle que $q(T(x)) \leq Kp(x), \forall x \in E$.

7.3.1 L'ensemble des applications linéaires continues :

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces vectoriels semi-normés, alors on désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . C'est un sous-espace de $L(E, F)$, dont les éléments sont usuellement appelés opérateurs bornés de E dans F .

Théorème (3) :

Soient (E, p) et (F, q) deux espaces vectoriels semi-normés, alors pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose $|T| = \sup_{x \in E: p(x) \leq 1} q(T(x))$. Alors $|\cdot|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ et on a les égalités :

$$|T| = \sup_{x \in E: p(x)=1} q(T(x))$$

$$= \inf\{K > 0 \mid q(T(x)) \leq Kp(x), \forall x \in E\}.$$

Dès lors, on a $q(T(x)) \leq |T|p(x), \forall x \in E$. Enfin, si q est une norme, alors $|\cdot|$ est une norme.

7.3.2 Le dual topologique :

On note

$$E' = \{\bar{f} \mid f \in \mathcal{L}(E, K)\} = \{f \in E' \mid f \text{ est continue}\}.$$

le dual topologique de E . Grâce au théorème précédent, c'est un espace vectoriel normé, pour la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{v \in E: p(v) \leq 1} |f(v)|.$$

7.3.3 Normes équivalentes :

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$C_1 \|x'\| \leq \|x\| \leq C_2 \|x'\|, \forall x \in E.$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les notions de continuité et de convergence sont identiques pour deux normes équivalentes.

8. Espaces complets :

Soit (E, p) un espace vectoriel semi-norme. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } p(x_n - x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq N.$$

On dit que (E, p) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

9. Définition (Ensemble dense) :

Une partie G de H est dite dense dans H si

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon,$$

ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments g_n de G : $\|g_n - h\| \rightarrow 0$.

Théorème (4) :

Tout espace semi-normé (E, p) (respectivement normé) admet une complétion (F, q) , c'est-à-dire que (F, q) est un espace semi-normé complet (respectivement normé complet) et il existe une application linéaire injective I de E dans F vérifiant $R(I)$ est dense dans F et I préserve la semi-norme (respectivement norme) : $q(I(x)) = p(x)$, pour tout $x \in E$.

Théorème (5) :

Si (E, p) est un espace vectoriel semi-normé et (F, q) est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ et E sont des espaces de Banach.

10. Définition (Ensemble totale) :

Une partie F de H est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H .

11. Définition (Equipotence):

Deux ensembles sont dites équipotentes s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

12. Définition (Ensembles dénombrables):

Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à \mathbb{N} , et au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

13. Définition (Espace métrique est séparable) :

Un espace métrique est séparable s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense.

14. Définition : (Ensemble convexe)

Un ensemble U de E (espace vectoriel), est convexe si $x, y \in U$, $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$.

CHAPITRE II :

**Rappels sur la
théorie élémentaire
des Distributions**

II- INTRODUCTION :

En physique, on utilise souvent des fonctions singulières dont les propriétés sont contradictoire, ainsi par exemple, la fonction introduite par Dirac qui est définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

ϕ Une fonction régulière (Bonne fonction).

En particulier lorsque $\phi(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$.

Cette définition n'a aucun sens, car la fonction δ étant nulle presque partout son intégrale doit être nulle.

1. Fonctions de base (Espace de fonctions tests) :

Dans tout la suite $n \in \mathbb{N}$.

1.1 Définition (Support d'une fonction) :

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} ,

Le support de f , noté $\text{supp } f$, est l'ensemble fermé suivant :

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n ; f(x) \neq 0\}.$$

Remarque :

$\text{supp } f$ étant fermé par définition, donc par la suite on remplace support borné par support compact.

1.2 Définition (Fonctions de base) « Espace test » :

On appelle espace test sur \mathbb{R}^n qui l'on note $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions réelles ou complexes définie sur Ω indéfiniment dérivable à support compact c'est-à-dire :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R}; f \in C^\infty(\Omega), \text{supp } f = K \text{ compact}\}$$

$f \in \mathcal{D}(\Omega)$ est appelée fonction test.

Remarque :

$\mathcal{D}(\)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\} = \bar{B}(0,1) \text{ compact.}$$

Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$x \in \mathbb{R}^n: |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \text{ Norme euclidienne.}$$

1.3 Définition (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$) :

Soit (φ_n) une suite de $\mathcal{D}(\)$. On dit que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\)$ si :

- K compact ($K \subset \Omega$), $n \in \mathbb{N}$: $\text{supp } \varphi_n \subset K$.
- $\alpha \in \mathbb{N}$ un multi-indice : $\mathcal{D}^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ uniformément c'est-à-dire : $\sup_{x \in \Omega} |\mathcal{D}^\alpha \varphi_n(x)| \rightarrow 0$.

Remarque :

Soit (φ_n) une suite de $\mathcal{D}(\)$. On dit que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\)$ si et seulement si

$$\varphi_n - \varphi \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\).$$

1.4 Définition (Fonctionnelle continue) :

Une fonctionnelle $T: \mathcal{D}(\) \rightarrow \mathbb{K}$, est continue si et seulement si :

$$(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\)$$

$$\text{Si } \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\) \text{ alors } T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$$

Remarque :

Si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\)$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}$: $\mathcal{D}^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\)$.

2. Définition (Distribution) :

On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, c.-à-d. :

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K} \text{ linéaire et continue}\}$$

Exemple : (Distribution de Dirac)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), a \in \Omega$$

δ_a est une distribution appelée distribution de Dirac au point a .

Exemple : (Distribution régulière)

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} localement intégrable (c.-à-d. intégrable sur toute partie bornée de Ω) $L^1_{Loc}(\Omega)$.

On pose

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Alors T_f est une distribution sur $\mathcal{D}(\Omega)$ appelée distribution régulière associée à la fonction f .

Remarque :

Les distributions singulières sont des distributions que ne sont pas régulières.

Proposition :

La distribution de Dirac au point a est une distribution singulière, c.-à-d. il n'existe pas une fonction f localement intégrable telle que :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3. Multiplication par une fonction C^∞ :

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) / $f \in C^\infty$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors l'application fT définie par :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle$$

est bien définie une distribution sur Ω .

$$\text{supp}(f \cdot g) = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \cdot g(x) \neq 0\} = \text{supp}f \cap \text{supp}g$$

4. Dérivée des distributions :

Définition :

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la dérivée $D^\alpha T$ est définie par :

$$\langle \varphi, D^\alpha T \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Proposition :

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la dérivée $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

5. Fonction de Heaviside :

On appelle fonction de Heaviside la fonction

$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

H est localement intégrable sur \mathbb{R} donc :

$$\langle \varphi, D(\cdot) \rangle$$

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

On veut calculer $H' = ?$

$$\langle \varphi, D(\cdot) \rangle$$

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\varphi(x)|_0^{+\infty}$$

$$= -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

6. Distributions associées à une fonction discontinue :

Soit f une fonction indéfiniment différentiable sauf en un nombre fini de points

$x_j, j = 1, \dots, m$ si en chacun de ces points f est discontinue et si on désigne par h_j l'oscillation de faux points x_j

$$h_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$$

Alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^m h_j \delta_{x_j}$$

7. Support d'une distribution :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n

7.1 Définition (distribution nulle) :

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle dans Ω si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Exemple :

δ_a est nulle dans $\mathbb{R} - \{a\}$ car :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\}) : \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0. (a \notin \text{supp} \varphi \subset \mathbb{R} - \{a\})$$

7.2 Définition (distributions égaux):

$T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $T_1 = T_2$ dans Ω si $\langle T_1 - T_2, \varphi \rangle = 0$ dans Ω .

Exemple

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$T_1 = T_H, T_2 = T_f$$

Nous allons

$T_1 = T_2$ dans $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ car :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*) \rangle \\ \langle T_1 - T_2, \varphi \rangle &= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle \\ \int_0^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx - \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx - \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Remarque :

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Si $T = 0$ dans $\Omega_i, \forall i \in I$ $T = 0$ dans $\Omega_1 = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

7.3 Définition « support de T » :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose $\Omega_1 = \bigcup_{i \in I} \Omega_i / T = 0$ dans $\Omega_i, \forall i \in I$.

On appelle support de T , le fermé de $\Omega - \Omega_1$

$$\text{supp } T = \Omega - \Omega_1.$$

Exemple :

$$\text{supp } \delta_a = ?, \quad \text{supp } \delta_a = \{a\}$$

Nous avons $\langle \varphi, \mathcal{D}(\mathbb{R} - \{a\}) \rangle$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi(a) = 0 \quad (a \notin \text{supp } \varphi)$$

$$\Omega_1 = \mathbb{R} - \{a\}, \quad \text{supp } \delta_a = \mathbb{R} - \Omega_1 = \{a\}$$

$$\text{supp } T_H = ?$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \text{ presque par tout } x \in \mathbb{R}, T_f = 0 \text{ dans } \mathbb{R}, \quad \text{supp } T_f = \emptyset.$$

$$T_H, \varphi = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$$

$$T_H = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^*$$

$$\text{supp } T_H = \mathbb{R} - \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+$$

7.4 Propriétés :

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } T = \emptyset$ Alors $T, \varphi = 0$.
- $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$.

Nous avons

$$\diamond \text{supp } (T_1 + T_2) \subset \text{supp } T_1 \cup \text{supp } T_2.$$

$$\diamond \text{supp } (\alpha T_1) = \text{supp } T_1.$$

Remarque :

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\text{supp } T$ est compact $\iff \text{supp } T$ est borné.

Exemple :

$\text{supp } \delta_a = \{a\}$ Compact.

8. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

Soit (T_n) une suite des distributions sur Ω .

$T_n \rightarrow T$ Dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $T_n, \varphi \rightarrow T, \varphi$ simplement.

9. Distributions tempérées :

9.1 L'espace \mathfrak{S} (espace des fonctions à décroissance rapide) :

$$\mathfrak{S} = \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |x|^k D^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty \}$$

Exemples :

$$\varphi_1(x) = e^{-x^2}, \quad \varphi_2(x) = e^{-x^4}, \quad \varphi_3(x) = \frac{1}{ch x}$$

9.2 Convergence dans \mathfrak{S} :

Soit (φ_n) une suite de \mathfrak{S} ,

On dit que $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

$$\forall k \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |x|^k D^\alpha \varphi_n(x) \rightarrow 0 \text{ Uniformement.}$$

Lemme :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$$

9.3 Distributions tempérées :

$$\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n) = \{T: \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linéaire et continue}\}$$

T est continue $(\varphi_n): \varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \implies T(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Nous avons $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

9.4 Définition (fonctions à croissance lente à l'infinie) :

Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est dite à croissance lente à l'infini si :

$$m > 0, A > 0: |f(x)| \leq A|x|^m \text{ si } |x| \rightarrow \infty$$

Pour toute fonction à croissance lente à l'infinie on associe la distribution tempérée T_f définie par :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n): \langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Remarque :

L'inclusion $\mathfrak{S}' \subset \mathcal{D}'$ est stricte c'est-à-dire $T \in \mathcal{D}'$ et $T \notin \mathfrak{S}'$,

Si f une fonction localement intégrable $\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$

$$T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ mais } T_f \notin \mathfrak{S}'(\mathbb{R}).$$

Contre exemple :

$$f(x) = e^x \quad L_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cosh x} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} dx \quad .$$

CHAPITRE III :

Espaces de Hilbert

III- INTRODUCTION :

Dans ce paragraphe, nous introduisons l'espace de Hilbert avec ses propriétés élémentaires. Nous caractériserons les normes qui sont déduites d'un produit scalaire. S'il n'y a pas de spécification le corps \mathbb{K} est, comme auparavant, \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Définitions, propriétés générales

1.1 Définitions (produit scalaire) :

Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} . Un produit scalaire sur E est une application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, x_1, x_2, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(y, x)}$.
3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$
4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Remarque :

Les propriétés suivantes d'un produit scalaire induit par les axiomes 1) à 4) :

- i) $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$, pour tout $x \in E$.
- ii) $\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_j \langle x_i, y_j \rangle$,

Pour tout $x_i, y_j \in E, \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.

Exemple :

Considérons les suites $X = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ telles que pour un $p \in [1, \infty)$ fixé la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$$

Converge.

L'ensemble de ces suite est noté par ℓ_p .

Pour $p = 2$, l'application $\cdot, \cdot : \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n},$$

Où $X = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ et $Y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ est un produit scalaire.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}$ converge absolument puisque

$$|\xi_n \overline{\eta_n}| \leq \frac{1}{2} (|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)$$

Et que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2$ sont convergentes.

Exemple (*):

Soit Ω un ouvert de \mathbb{K}^n , et $p \in [1, +\infty[$

Rappelons que l'on définit

$L^p(\Omega) = \{f \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \mid |f|^p \text{ est Lebesgue intégrable sur } \Omega\}$,

Pour $p=2$, $L^2(\Omega)$ muni de l'application

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

est un produit scalaire. Et on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

Exemple ():**

Soit E l'ensemble de fonction continues et bornées sur \mathbb{R} .

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

est un produit scalaire sur E .

Théorème (1) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soit E un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

Démonstration :

On procède comme d'habitude, pour cette inégalité, on introduit un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. De la positivité du produit scalaire, on déduit

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mais, de la bilinéarité, on déduit :

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ce trinôme du second degré en λ reste toujours positif. Nécessairement, son discriminant est négatif ;

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

Ceci conduit à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème (2) :

Dans un espace préhilbertien E , l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \text{ pour tout } x \in E, \text{ est une norme pour } E.$$

Démonstration :

Nous avons $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

De plus

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle)^{1/2} = (|\lambda|^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} = |\lambda| \langle x, x \rangle^{1/2} = |\lambda| \|x\|.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2|x, y| + y^2 \\ & x^2 + 2x \cdot y + y^2 \\ & = (x + y)^2, \end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\|^2 = (x + y)^2$$

La norme $\|\cdot\|$ ainsi définie s'appelle la norme induite par le produit scalaire.

Remarque :

En utilisant la norme induite par le produit scalaire, les inégalités (1) et (2) deviennent respectivement

$$|x, y| \leq \|x\| \|y\|$$

et

$$|x, y| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Théorème (3) (Loi du parallélogramme) :

La norme induite par le produit scalaire satisfait l'égalité

$$(3) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration :

En effet,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Les égalités

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) = 4\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \\ \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2 &= 4\operatorname{Im} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Nous amènent à

$$(4) \quad 4 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Cette équation nous montre que deux produits scalaires différents sur E entraînent deux normes induites différentes.

Théorème (4) :

Un produit scalaire est une fonction continuée sur $E \times E$, par rapport à la norme induite.

Démonstration :

Soient $x_0, y_0 \in E$ et les suites $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ et $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ telles que

$x_n \xrightarrow{||} x_0$ et $y_n \xrightarrow{||} y_0$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &= |\langle x_n - x_0, y_n \rangle + \langle x_0, y_n - y_0 \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x_0, y_n \rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n - x_0\| \|y_n\| + \|x_0\| \|y_n - y_0\| \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle .$$

1.2 Définition : (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Exemple :

L'exemple (*) est un espace de Hilbert.

Exemple :

L'espace préhilbertien de l'exemple (***) n'est pas un espace de Hilbert.

Dans le prochain théorème, nous allons caractériser les normes qui sont induites par un produit scalaire.

Théorème (5) :

Soit E un espace de Banach. E est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in E$, on a

$$(5) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Le produit scalaire est unique, et on a

$$(6) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Démonstration :

La condition nécessaire est montrée dans le théorème (3) par les égalités (3) et (4).

Supposons donc qu'on ait (5) et soit $\langle x, y \rangle$ donné par (6).

a) Montrons d'abord que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

En posons $x = y$ dans (6), alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(4\|x\|^2 + i|(1+i)|\|x\|^2 - i|(1-i)|\|x\|^2) = \|x\|^2. \end{aligned}$$

b) Montrons maintenant que l'application $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ donnée par (6) vérifie les conditions du produit scalaire.

1) Evidemment $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 - i\|y + ix\|^2 + i\|y - ix\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2) \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} \end{aligned}$$

Puisque d'après (6)

$$Im \langle x, y \rangle = Re \langle x, iy \rangle$$

il suffit de montrer la linéarité de la première variable de $\varphi(x, y) = \Re \langle x, y \rangle$ pour la partie réelle.

- 3) Soient x_1, x_2 et $y \in E$ et posons $u_1 = (x_1 + x_2)/2$ et $u_2 = (x_1 - x_2)/2$,
et nous avons, en utilisant (5),

$$\begin{aligned} \Re \langle x_1, y \rangle + \Re \langle x_2, y \rangle &= \Re \langle u_1 + u_2, y \rangle + \Re \langle u_1 - u_2, y \rangle \\ &= \frac{1}{4} \{ \langle u_1 + u_2 + y, u_1 + u_2 + y \rangle - \langle u_1 + u_2 - y, u_1 + u_2 - y \rangle + \langle u_1 - u_2 + y, u_1 - u_2 + y \rangle - \langle u_1 - u_2 - y, u_1 - u_2 - y \rangle \} \\ &= \frac{1}{4} \{ \langle u_1 + u_2 + y, u_1 + u_2 + y \rangle + \langle u_1 - u_2 + y, u_1 - u_2 + y \rangle \} \\ &\quad - \frac{1}{4} \{ \langle u_1 + u_2 - y, u_1 + u_2 - y \rangle + \langle u_1 - u_2 - y, u_1 - u_2 - y \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle u_1 + y, u_1 + y \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \} - \frac{1}{2} \{ \langle u_1 - y, u_1 - y \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle \} \\ &= \{ \langle u_1 + y, u_1 + y \rangle - \langle u_1 - y, u_1 - y \rangle \} = 2\Re \langle u_1, y \rangle = 2\Re \left\langle \frac{x_1 + x_2}{2}, y \right\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, en posant $u_1 = u_2$ nous obtenons

$$\Re \langle 2u_1, y \rangle = 2\Re \langle u_1, y \rangle$$

ce qui entraîne l'additivité de φ par rapport à la première variable

- 4) De l'additivité, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \langle nx, y \rangle &= n \langle x, y \rangle \quad \text{et} \\ \langle x/n, y \rangle &= \langle x, y \rangle / n \end{aligned}$$

ce qui entraîne pour $\lambda = n_1/n_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ que

$$(7) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle.$$

D'autre part puisque d'après (6)

$$\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$$

(7) reste vrai pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et en utilisant la continuité de φ (respectivement des normes) aussi pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il nous reste à montrer (7) pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Il suffit de le montrer pour $\lambda = i$ puisque nous avons montré que $\lambda = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha + \beta i)x, y = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle ix, y \rangle.$$

D'après (6)

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle &= \frac{1}{4} (\langle ix + y, ix + y \rangle - \langle ix - y, ix - y \rangle + i \langle ix + iy, ix + iy \rangle - i \langle ix - iy, ix - iy \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x + iy, x + iy \rangle - \langle x - iy, x - iy \rangle + i \langle x + y, x + y \rangle - i \langle x - y, x - y \rangle) \\ &= i \langle x, y \rangle \quad \text{et le théorème est établi.} \end{aligned}$$

2. Orthogonalité, décompositions orthogonales d'un espace de Hilbert :

Ce paragraphe est dédié à l'orthogonalité et la projection orthogonale qui sont caractéristiques d'un espace de Hilbert. Plusieurs résultats de la première partie de ce paragraphe s'appliqueraient aussi à des espaces préhilbertiens. S'il n'y a pas de spécifications l'espace H est un espace de Hilbert sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1 Définition (vecteurs orthogonaux) :

Soit H un espace de Hilbert. De vecteurs $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Exemple :

Dans l'espace de Hilbert \mathbb{C}^n , les vecteurs $(1, 0, \dots, 0)$ et $(0, 1, \dots, 0)$ sont orthogonaux.

Exemple :

Dans l'espace de Hilbert $L^2\left(\frac{dx}{2\pi}\right)$ sur $[-\pi, \pi]$, les éléments e^{inx} et e^{imx} , $n, m \in \mathbb{Z}$ et $n \neq m$ sont orthogonaux. En effet,

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Remarque :

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.
- ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, symétrie
- iii) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- iv) $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n$
- v) $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $x_n \xrightarrow{\lambda_n \rightarrow 0} x_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$
- vi) Soit $\langle x_i, x_j \rangle = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$ alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Si on prend $n = 2$, dans vi) on obtient

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \text{ si } x_1 \perp x_2,$$

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , c'est le théorème de Pythagore.

2.2 Définition

Soient H un espace de Hilbert sur \mathbb{R} et $x, y \in H$. L'angle θ entre les deux vecteurs x et y est donné par

$$\cos \theta = \begin{cases} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0, \end{cases}$$

où $0 \leq \theta \leq \pi$.

D'après (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

on a bien

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1.$$

Si $\langle x, y \rangle = 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $\cos \theta = 0$, d'où $\theta = \pi/2$.

Théorème (6) :

Dans un espace de Hilbert H sur \mathbb{R} , la loi du cosinus vérifiée, *i.e.*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \|x\| \|y\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs x et y .

Démonstration :

D'après 2.2 on a $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$

et on a aussi

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2 \langle x, y \rangle$$

donc

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \|x\| \|y\| \cos \theta$$

2.3 Définition :

Considérons deux ensembles A_1 et A_2 non vides d'un espace de Hilbert H . Nous dirons que A_1 est orthogonale à A_2 , noté par $A_1 \perp A_2$, si pour tout $x \in A_1$ et pour tout $y \in A_2$ on a $\langle x, y \rangle = 0$, c-à-d $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème (7) :

Soit A un ensemble non vide d'un espace de Hilbert H et soit \bar{A} la cloture de A . S'il existe un $x \in \bar{A}$ tel que $x \perp A$, alors $x = 0$.

Démonstration :

Soit $x \in \bar{A}$. Il existe une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ qui converge en norme vers x . Donc, $\langle x_n, x \rangle = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle = 0$, c'est-à-dire $x = 0$.

Corollaire :

Soit A un ensemble dense dans un espace de Hilbert H si $x \in H$ est orthogonale à A , alors $x = 0$.

Théorème (8) :

Si A est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert H , alors

$$A^\perp = \{x; x \in H \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de H . A^\perp s'appelle le complémentaire orthogonal de A .

Démonstration :

Observons d'abord que $A^\perp \neq \emptyset$, puisque au moins $0 \in A^\perp$.

Soient $x_1, x_2 \in A^\perp, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y \in A$. Alors

$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0$, donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^\perp$ et A^\perp est un sous-espace vectoriel de H . Soit maintenant $x_0 \in \overline{A^\perp}$, alors il existe une suite $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A^\perp$, telle que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$. Nous avons pour tout $y \in A$,

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = 0$$

Donc $x_0 \in A^\perp$ et A^\perp est un sous espace vectoriel fermé.

Remarque :

- a) Si $\phi : A_1 \rightarrow A_2 \subset H$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.
- b) On a $A^\perp = [A]^\perp$.
- c) $A^\perp = \overline{A}^\perp$.
- d) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

En effet,

(c) Comme $B \subset B^\perp \subset A^\perp$. On a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$. Montrons l'inégalité inverse soit $x \in A^\perp$ par définition $\langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A$.

Soit $b \in \overline{A}$, il existe une suite $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$ par continuité du produit scalaire

$$\langle x, b \rangle = \langle x, \lim_n a_n \rangle = \lim_n \langle x, a_n \rangle = 0.$$

Donc $x \in \overline{A}^\perp$.

(d) Soit $a \in A$ donc $\langle x, a \rangle = 0 \quad \forall x \in A^\perp$, donc $a \in (A^\perp)^\perp$.

Remarque :

L'inclusion en générale est stricte. En effet

L'orthogonalité d'une partie A quelconque est un sous-espace vectoriel fermé l'orthogonalité de cet orthogonale sera aussi un sous-espace vectoriel fermé, si A n'est pas un sous-espace vectoriel fermé, on aura nécessairement $A \subsetneq (A^\perp)^\perp$.

Théorème (9)

Soient H un espace de Hilbert, $A \subset H$ un ensemble non vide convexe et fermé et $x_0 \in H \setminus A$. Alors il existe un et seulement un $y_0 \in A$, tel que

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|.$$

Démonstration :

a) Montrons d'abord l'existence de y_0 . Soit $d = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\| > 0$. choisissons une suite $\{y_n; \|x_0 - y_n\| < d + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset A$. D'après la loi du parallélogramme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x_0) - (y_n - x_0)\|^2 \\ &= 2\|y_m - x_0\|^2 + 2\|y_n - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2 \\ &= 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \\ &= \frac{4}{m}d + \frac{2}{m^2} + \frac{4}{n}d + \frac{2}{n^2} < \varepsilon \text{ si } m, n > n_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Puisque A est un ensemble convexe, $\frac{y_m + y_n}{2} \in A$ et $\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x_0\right\|^2 \geq d^2$.

Donc $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset A$ est une suite de Cauchy et il existe un $y_0 \in H$ tel que $y_n \rightarrow y_0$. Parce que A est fermé, $y_0 \in A$.

b) Montrons que $\|x_0 - y_0\| = d$. Nous avons

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y_n + y_n - y_0\| < d + \frac{1}{n} + \varepsilon \text{ si } n > n_0(\varepsilon),$$

D'où

$$\|x_0 - y_0\| = d.$$

c) Il reste à montrer l'unicité de y_0 . Soit $z_0 \in A$, tel que

$$\|z_0 - y_0\| = d. \text{ En utilisant la loi du parallélogramme,}$$

On a

$$\begin{aligned} \|z_0 - y_0\|^2 &= \|(z_0 - x_0) - (y_0 - x_0)\|^2 \\ &= 2\|z_0 - x_0\|^2 + 2\|y_0 - x_0\|^2 - \|z_0 + y_0 - 2x_0\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\left\|\frac{z_0 + y_0}{2} - x_0\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

D'où

$$z_0 = y_0.$$

Corollaire :

Soit H_1 un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Alors il existe pour tout $x \in H$ fixé, un seul $y_0(x) \in H_1$, tel que

$$\|y_0 - x\| = \inf_{y \in H_1} \|y - x\|.$$

Exemple :

Dans l'espace vectoriel $H = L^2(dt)$ sur $[0,1]$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt,$$

Considérons le sous-espace vectoriel $H_1 \subset H$ où $H_1 = \{P \in L^2(dt), P \text{ étant un polynôme de degré plus petit ou égal à } n\}$.

Alors H_1 est un sous-espace fermé de H . Pour chaque $f \in L^2(dt)$ fixé, il existe un polynôme unique $P_0 \in H_1$, tel que

$$\|f - P_0\| = \inf_{P \in H_1} \|f - P\|, \text{ Pour tout } P \in H_1.$$

Théorème (10) :

Soient H un espace de Hilbert et H_1 un sous-espace fermé de H . Un élément $y_0 \in H_1$ satisfait à l'inégalité

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|, \text{ pour tout } y \in H_1$$

Si et seulement si $x - y_0 \perp H_1$.

Corollaire :

Soit H_1 un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H , et soient $x \in H$. Alors il existe un et seulement un $y_0 \in H_1$ tel que $x - y_0 \perp H_1$ et $\|x - y_0\| = \inf_{y \in H_1} \|x - y\|$ pour tout $y \in H_1$. On appelle cet élément la projection orthogonale de x sur H_1 et l'on note $y_0 = Px$.

Nous avons donc une application P de H sur H_1 qui s'appelle l'opérateur de la projection orthogonale, ou tout simplement la projection orthogonale de H sur H_1 . Notons que $P^2y = Py$,

pour tout $y \in H_1$. De plus l'opérateur de la projection orthogonale de H sur H_1 satisfait les propriétés suivantes :

Théorème (11) :

Soient H un espace de Hilbert, H_1 un sous-espace fermé de H et P la projection orthogonale de H sur H_1 . Alors

i) $P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P x_1 + \beta P x_2$, pour tout $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

C.-à-d. P est une application linéaire de H sur H_1 .

ii) $P \circ P = P^2 = P$.

iii) $P x = x$, pour tout $x \in H_1$.

Démonstration :

i) Puisque pour tout $x \in H$ et $y \in H_1$, $\langle x - P x, y \rangle = 0$,

nous avons d'une part

$$\langle \alpha x_1 - \alpha P x_1 + \beta x_2 - \beta P x_2, y \rangle = \langle \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha P x_1 + \beta P x_2), y \rangle = 0$$

et d'autre part

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2 - P(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle = 0.$$

L'unicité de la projection orthogonale de $\alpha x_1 + \beta x_2$ entraîne que

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P x_1 + \beta P x_2.$$

ii) Puisque $P x \in H_1$ et $P y = y$ si $y \in H_1$, on a $(P \circ P)x = P(Px) = Px$, pour tout $x \in H$, d'où $P^2 = P$.

iii) est une conséquence immédiate de

$$\|x\|^2 = \|x - P x\|^2 + \|P x\|^2 \quad \|P x\|^2.$$

Théorème (12) :

Soit H_1 un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H , et soit P la projection orthogonale de H sur H_1 . Alors

$$\ker P = \{x \in H; Px = 0\} = H_1^\perp.$$

De plus $(I - P)$ est l'opérateur de la projection orthogonale de sur H_1^\perp . L'application I signifie l'identité, *i. e.*, $Ix = x$, Pour tout $x \in H$.

Démonstration :

a) Soit $x \in H_1^\perp$, c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = 0$, pour tout $y \in H_1$.

D'autre part $\langle x - Px, y \rangle = 0$, et donc $\langle Px, y \rangle = 0$, pour tout $y \in H_1$. Pour $y = Px$, $\langle Px, Px \rangle = 0$, c.-à-d., $x \in \ker P$.

b) Si $x \in \ker P$, alors pour tout $y \in H_1$, $0 = \langle x - Px, y \rangle = \langle x, y \rangle$. donc $x \in H_1$.

c) Parce que H_1^\perp est un sous-espace fermé de H , la projection orthogonale P_1 de H sur H_1^\perp existe. Soit $y \in H_1^\perp$. Alors

$$\langle x - (I - P)x, y \rangle = \langle Px, y \rangle = 0, \text{ pour tout } x \in H, \text{ Ce qui montre que } P_1 = I - P.$$

Théorème (13) (Décomposition orthogonale) :

Si H_1 est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H , alors tout $x \in H$ se décompose d'une manière unique ;

$$x = y + z, \text{ où } y \in H_1, z \in H_1^\perp.$$

Démonstration :

L'existence d'une telle décomposition vient du fait que

$$x = Px + (I - P)x,$$

où P est la projection orthogonale de H sur H_1 . Supposons maintenant que

$$x = y + z, \text{ où } y \in H_1, z \in H_1^\perp. \text{ Alors } Px = Py + Pz = y \text{ et}$$

$$(I - P)x = (I - P)y + (I - P)z = z. \text{ Cette décomposition est donc unique.}$$

Corollaire :

Soit H_1 est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H . Alors

$H_1 \cap H_1^\perp = \{0\}$. De plus $H = H_1 \oplus H_1^\perp$, c'est-à-dire H admet une décomposition orthogonale.

Démonstration :

Si $x = Px + (I - P)x \in H_1 \cap H_1^\perp$, alors $\langle x, Px \rangle = \langle x, (I - P)x \rangle$ ce qui entraîne que $\langle x, Px + (I - P)x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$. En utilisant le théorème (13), on a

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp.$$

Théorème (14)

Soit H_1 un sous-espace (pas nécessairement fermé) d'un espace de Hilbert H . Alors on a

$$(H_1^\perp)^\perp = \overline{H_1}.$$

3. Bases orthonormales d'un espace de Hilbert :

Ce paragraphe est dédié essentiellement à la représentation d'un élément d'un espace de Hilbert H sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} par rapport à une base orthonormale.

3.1 Définition (système orthogonale) :

Un ensemble non vide A d'un espace de Hilbert est un système orthogonale si pour tout $x, y \in A$, $x \neq y$, on a $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple :

L'ensemble $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ est un système orthogonale.

Exemple :

Dans l'espace de Hilbert $L^2(dt)$ sur $[-\pi, \pi]$, l'ensemble $A = \{1, \sin nt, \cos nt; n \in \mathbb{N}\}$ est un système orthogonal.

3.2 Définition (système orthonormal) :

Un ensemble $E = \{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert H est un système orthonormal si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

i.e. E est un ensemble orthogonal dont chaque élément e_i possède une norme égale à 1.

Remarque :

Un système orthonormal d'un espace de Hilbert H est linéairement indépendant.

En effet, si $E = \{e_i; i \in I\}$ est un système orthonormal dans H ,

et si $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{j_k} = 0$,

alors, nous avons, pour tout $p = 1, \dots, n$,

$$0 = \langle 0, e_{j_p} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{j_k}, e_{j_p} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{j_k}, e_{j_p} \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{kp} = \lambda_p.$$

Exemple :

Soit H un espace de Hilbert et $H \neq \{0\}$, et soit $x \in H, x \neq 0$. Alors $\left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\} = e$ est un système orthonormal.

Exemple :

Dans l'espace de Hilbert $L^2\left(\frac{dt}{2\pi}\right)$ sur $[-\pi, \pi]$, l'ensemble $E = \{e^{int}; n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormal.

Nous allons utiliser le prochain lemme pour la représentation d'un élément d'un espace de Hilbert par une série de Fourier.

Lemme :

Soit $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ un système orthogonal dans l'espace de Hilbert H . Alors la suite

$$\left\{ y_n = \sum_{k=1}^n x_k; n \in \mathbb{N} \right\},$$

Converge en norme si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty.$$

Théorème (15) :

Soient H un espace de Hilbert et H_s définie par

$$H_s = \left\{ x; x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty \right\} = \langle e_k; k \in \mathbb{N} \rangle.$$

Alors

- i) H_s est un sous espace de H .
- ii) H_s est isomorphe à ℓ_2 et donc lui-même un espace de Hilbert.

3.3 Définition (Le coefficient de Fourier) :

Soit H un espace de Hilbert non trivial i.e. $H \neq \{0\}$ et soit $x_0 \in H, x_0 \neq 0$.

Le coefficient de Fourier d'un élément $x \in H$ par rapport à x_0 , noté $c_{x_0}(x)$ se définit par

$$c_{x_0}(x) = \frac{(x, x_0)}{(x_0, x_0)}.$$

Théorème (16)

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système orthonormal fini dans l'espace de Hilbert H , alors, pour tout $x \in H$,

$$\sum_{k=1}^n |c_k(x)|^2 \leq (x, x),$$

Où $c_k(x) = (x, e_k)$, i.e. le coefficient de Fourier de x par rapport à $e_k, k = 1, \dots, n$.

Théorème (17) (Inégalité de Bessel et égalité de Parseval) :

Soit $E = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H .

Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \leq (x, x), \text{ (Inégalité de Bessel)}$$

Et on a égalité si et seulement si

$$H = H_s = \langle E \rangle \text{ (Egalité de Parseval)}.$$

Théorème (18) :

Soit $E = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H , et soit P la projection orthogonale de H sur $H_S = \overline{E}$. Alors pour tout $x \in H$, on a

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Nous allons maintenant établir les résultats analogues pour un système orthonormal quelconque. Soit $E = \{e_i; i \in I\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H , où I est une famille d'indices.

Considérons $\{\alpha_i \geq 0; i \in I\}$. Nous introduisons $\sum_{i \in I} \alpha_i$ comme étant le supremum de toutes les sommes formées par des sous-ensembles finis de I , i.e.

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cette somme peut être considérée comme l'intégrale $\int_I \alpha(t) d\mu(t)$, où μ est la mesure dénombrant et $\alpha \geq 0$.

Lemme :

$\sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$, alors il n'y a qu'un nombre dénombrables d'éléments α_i différents de zéro.

Théorème (19) (Inégalité de Bessel)

Soit $E = \{e_i; i \in I\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H et soit, pour $x \in H$, $c_i(x) = \langle x, e_i \rangle, i \in I$. Alors

$$\sum_{i \in I} |c_i(x)|^2 \leq \|x\|^2$$

Théorème (20) :

Soit $E = \{e_i; i \in I\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H et soit

$$H_e = \left\{ x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i; \sum_{i \in I} |\xi_i|^2 < \infty \right\}.$$

Alors

- i) H_e est un sous espace de H .
- ii) H_e est un espace de Hilbert.
- iii) Si P est la projection orthogonale de H sur H_e , alors

$$Px = \sum_{i \in I} c_i(x) e_i$$

et

$$\|Px\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i(x)|^2 = \|x\|^2.$$

Corollaire (Egalité de Parseval) :

On a

$$\sum_{i \in I} |c_i(x)|^2 = \|x\|^2$$

si et seulement si $x \in H_e$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert non trivial, i.e. $H \neq \{0\}$. On peut, par la relation d'inclusion des ensembles, ordonner l'ensemble des systèmes orthonormaux de H .

3.4 Définition (Base orthonormale) :

On appelle Base orthonormale dans un espace de Hilbert $H \neq \{0\}$, un système orthonormal maximal, i.e. on ne peut plus ajouter un vecteur non nul qui est orthogonal à une base orthonormale.

Autrement dit, un système orthonormal $\{e_i; i \in I\}$ d'un espace de Hilbert est une base orthonormale si et seulement si on a $\langle x, e_i \rangle = 0$, pour tout $i \in I$ $\Leftrightarrow x = 0$.

Une base orthonormale s'appelle aussi système orthonormal complet ou encore système orthonormal total.

L'existence des base orthonormales dans un espace de Hilbert non trivial est assurée par :

Théorème (21) :

Dans tout espace de Hilbert non trivial, $H \neq \{0\}$, il y a des bases orthonormales .

Corollaire :

Soit $H \neq \{0\}$ un espace de Hilbert et soit $\zeta = \{H_i; i \in I\}$ l'ensemble des parties orthonormales de H .

La réunion des éléments d'une chaîne maximale de ζ est une base orthonormale de H .

De plus, tout ensemble orthonormal de H est contenu dans une base orthonormale, puisqu'un tel ensemble est élément d'une chaîne de ζ .

Théorème (22)

Soit $E = \{e_i; i \in I\}$ un système orthonormal dans un espace de Hilbert H . les énoncés suivants sont équivalentes :

- i) E est une base orthonormale.
- ii) $[E]$ i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires finies sur E , est dense dans H , c.-à-d. $\overline{[E]} = H$.
- iii) Chaque $x \in H$ possède une représentation unique

$$x = \sum_{i \in I} c_i(x) e_i,$$

qui converge en norme, c.-à-d.

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i(x)|^2$$

Exemple :

Soit l'espace de Hilbert ℓ_2 où $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i$ pour $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ et

$y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$. Alors l'ensemble

$E = \{e_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots); k \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de ℓ_2 .

Exemple :

Dans l'espace de Hilbert ℓ_2 , où $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$, l'ensemble $E = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale, où

$$e_1 = (e^{i\theta_1}, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, e^{i\theta_2}, 0, \dots)$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, e^{i\theta_n}, 0, \dots)$$

.....

Une autre base orthonormale pour ℓ_2 est $E = \{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ où

$$e_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, \cos \theta_2, \sin \theta_2, 0, \dots)$$

$$e_4 = (0, 0, -\sin \theta_2, \cos \theta_2, 0, \dots)$$

.....

Montrons maintenant que dans tout espace de Hilbert, on peut construire des système orthonormaux à partir d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. La procédure est connue sous le nom de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théorème (23) (Procédure de Gram-Schmidt) :

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{x_i; i \in I\} \subset H$ un ensemble au plus dénombrable linéairement indépendant. Alors on peut construire un système orthonormal $\{e_i; i \in I\} \subset H$, tel que chaque e_i est une combinaison linéaire de

$$\{e_j; j \leq i\}.$$

Théorème (24) :

Un espace de Hilbert $H \neq \{0\}$ admet une base orthonormale au plus dénombrable si et seulement si H est séparable.

4. Isomorphisme des espaces de Hilbert, dimension hilbertienne :

Après avoir introduit la dimension hilbertienne d'un espace de Hilbert nous allons montrer que deux espaces de Hilbert sur même corps qui ont la même dimension hilbertienne sont isomorphes.

Théorème (25) :

Dans un espace de Hilbert non trivial, $H \neq \{0\}$, toutes les bases orthonormales sont équivalentes, i.e. ont la même cardinalité.

4.1 Définition (dimension hilbertienne) :

Soit H un espace de Hilbert non trivial, i.e. $H \neq \{0\}$.

On appelle dimension hilbertienne de H le nombre cardinal attaché aux bases orthonormales.

Par convention la dimension hilbertienne de l'espace de Hilbert trivial $H = \{0\}$ est zéro.

4.2 Définition :

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert sur le même corps \mathbb{K} . On dit que H_1 et H_2 sont isomorphes comme espaces de Hilbert si

- i) H_1 et H_2 sont isomorphes comme espaces vectoriels i.e. il existe un isomorphisme algébrique $\varphi: H_1 \rightarrow H_2$.
- ii) H_1 et H_2 sont isotones, i.e. le produit scalaire est préservé,

$$\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle, \text{ pour tout } x, y \in H_1.$$

On dit que φ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Théorème (26) :

Deux espace de Hilbert sur le même corps \mathbb{K} et de même dimension hilbertienne sont isomorphes comme espace de Hilbert.

CONCLUSION

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach munis d'un produit scalaire. Ce concept permet d'étendre à des espaces fonctionnels de dimension infinie les raisonnements de la géométrie euclidienne classique.

Bibliographie

- [1] WALTER HENGARTNER, MARCEL LAMBERT et CORINA REISCHER, *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, Les Presses de l'Université du Québec (1981).
- [2] N. BOCCARA, *Analyse fonctionnelle*, Ellipses.
- [3] SERGE NICAISE, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (2000).
- [4] XAVIER GOURDON, *Les maths en tête algèbre*, Ellipses.
- [5] PATRICE TAUVEL, *Algèbre Agrégation*, Dunod.