

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

جامعة عمارة تليدجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT



كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique

Présenté par :

Wissam DJAIDJA

THEME

**Etude de quelques inégalités dans les algèbres de Banach
et applications**

Devant le jury composé de :

Président : Dr Youcef BELABBACI.

Encadreur : Mme Zohra BENDAOU.

Examineur : Mr Ameer YAGOUB.

Examineur : Mr Amar BELACEL.

Année universitaire 2013-2014

Résumé

Dans ce mémoire, on a essayé de regrouper tous les résultats obtenus à partir de l'article de J. Esterle paru en 1981 [7], où il démontre que :

Si A est une algèbre de Banach commutative ne possédant aucun idempotent non nul. Alors

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

Mots-clés

idempotents, semigroupes fortement continus, semigroupes, algèbres de Banach.

Abstract

In this thesis, we tried to combine all results obtained from the article J. Esterle [7], where he shows that:

If A be a commutative Banach algebra has no nonzero idempotent. Then

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

Keywords

idempotents, strongly continuous semigroup, semigroups, Banach algebras.

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Rappels	4
1.1	Rappels et résultats généraux	4
1.1.1	Transformation de Gelfand	8
2	Les inégalités dans les algèbres de Banach	9
2.1	L'inégalité $\ x^2 - x\ \geq \frac{1}{4}$ pour $\ x\ \geq \frac{1}{2}$	9
2.1.1	Distance entre éléments dans un espace de Banach sans idempotent non nul	9
2.2	Application aux algèbres de Banach possédant une u.a.b.s	13
2.2.1	Rappels et définitions	13
2.3	L'inégalité $\ x^3 - x\ < \frac{2}{3\sqrt{3}}$	14
2.4	Distance entre puissances d'éléments d'une u.a.b.s.	19
2.5	Idempotents et inégalités dans les algèbres de Banach	23
2.6	L'inégalité $\ e^x - e^{(\gamma+1)x}\ \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ pour $\ x\ \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}$	25
3	Application aux semigroupes	36
3.1	Semigroupe dans une algèbre de Banach	36
3.1.1	Générateur infinitésimal d'un semigroupe	38
3.2	Distance entre éléments d'un semigroupe dans une algèbre de Banach	39
3.3	Distance près de l'origine entre éléments d'un semigroupe fortement continu	43

0.1 Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude de quelques inégalités dans les algèbres de Banach. Dans la suite A désigne une algèbre de Banach complexe.

Notre travail a été effectué selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre on a rappelé les principaux résultats aux quels on a eu recours dans notre travail :
les espaces vectoriels normés, les espaces métriques, les idéaux, transformation de Gelfand ...

Le deuxième chapitre porte sur les inégalités dans les algèbres de Banach où on introduit les résultats suivants :

- Si l'algèbre de Banach commutative A ne possède aucun idempotent non nul alors

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

En particulier on a l'idempotent

$$P(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} \neq 0,$$

dans toute algèbre de Banach contenant un élément x tel que $\|x\| \geq 1/2$
et

$$\|x^2 - x\| < 1/4, \text{ [6]}$$

- Si l'algèbre de Banach commutative A tel que :

$$\|x^3 - x\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

on a l'idempotent

$$P(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{e}{\sqrt{3}})(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x)^{1/2}(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3)^{-1/2} \neq 0$$

dans toute algèbre de Banach contenant un élément x de norme $\leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ [11]

- pour p et q deux entiers positifs, il a été démontré dans [5] que :
dans toute algèbre de Banach contenant un élément x de norme supérieur ou

égale à $\left(\frac{1}{q+1}\right)^{1/q}$ tel que

$$\|x - x^{1+q}\| \geq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}}$$

on a l'idempotent

$$\begin{aligned} J_{p,q} &:= e - \left[pg(x^p - x^{p+q})^{p-1} - (p+q)g(x^p - x^{p+q})^{p+q-1} \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[\sum_{2 \leq k \leq p+q} C_{p+q}^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p+q-k} \right] \\ &\quad - \sum_{2 \leq k \leq p} C_p^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p-k} \end{aligned}$$

- pour n entier il a été démontré dans [8] que :
dans toute algèbre de Banach contenant un élément x de norme supérieur ou égale à $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ tel que

$$\|x - x^{n+1}\| \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

en particulier on a l'idempotent

$$J := (I - (n+1)h^n(x - x^{n+1}))^{-1} \left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k (x - h(x - x^{n+1}))^{k-1} h(x - x^{n+1})^{n+1-k} \right).$$

- pour γ réel il a été démontré dans [2] que :
dans toute algèbre de Banach contenant un élément x de norme supérieur ou égale à $1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$ tel que

$$\|1 + x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

en particulier on a l'idempotent

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x}) e^{g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!} (x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}$$

Dans le troisième chapitre, on a exposé l'application des résultats précédents aux semigroupes :

- Si $(T(t))_{t>0}$ un semi-groupe non nul dans une algèbre de Banach. et Si

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|(T(t) - T((n+1)t))\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

pour un entier $n \geq 1$ alors :

l'algèbre de Banach engendrée par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ possède une unité e , et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - e\| = 0,$$

de sorte que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - T((n+1)t)\| = 0,$$

et la constante $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ est optimal (on notera que ce résultat ne nécessite aucune condition de continuité pour le semigroupe).

- Soit $(T(t))_{t>0}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A l'algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t>0}$ et soit $\gamma > 0$. Si

$$\limsup_{t \rightarrow 0^0} \rho(T(t) - T((\gamma+1)t)) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors $A/\text{Rad}(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A , un élément u de JA et une application $r : t \rightarrow (t)$ de \mathbb{R}^+ dans $\text{Rad}(JA)$ possédant les propriétés suivantes :

- (i) $\phi(J) = 1$ pour tout $\phi \in \widehat{A}$,
- (ii) $r(s+t) = r(s) + r(t)$ pour $s, t \in \mathbb{R}^+$,
- (iii) $JT(t) = J e^{tu+r(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$,
- (iv) $(T(t) - JT(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe quasinilpotent.

Chapitre 1

Rappels

Dans cette partie de ce chapitre on va donner quelques définitions et notions utilisées dans toute la suite.

1.1 Rappels et résultats généraux

Définition 1.1.1 Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), une norme sur E est une application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivantes :

1. $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé qui sera noté e.v.n ou simplement espace normé.

L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique, en définissant la distance d sur E par :

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E,$$

E sera muni de la topologie définie par cette norme.

Un espace normé complet $(E, \|\cdot\|)$ (i.e : toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$) s'appelle espace de Banach .

rappelons qu'une suite (u_n) est dite suite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > m \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon .$$

Définition 1.1.2 Soit E un espace vectoriel. Une partie $F \neq \emptyset$ de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x + \beta y \in F$$

Définition 1.1.3 On appelle algèbre A sur \mathbb{C} tout espace vectoriel A sur le corps \mathbb{C} , muni d'une troisième opération, nommée multiplication et satisfaisant aux axiomes suivants :

1. $(xy)z = x(yz)$;
 2. $x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$;
 3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,
pour tout x, y et $z \in A$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$.
- S'il existe un élément $e \in A$ et $\|e\| = 1$ tel que

$$ex = xe = x$$

pour tout $x \in A$, alors A est un algèbre unitaire, e est dit élément unité.

- Si la multiplication est commutative, c-à-d :

$$xy = yx$$

pour tous $x, y \in A$, on dit que l'algèbre A est commutative.

- Si A est une algèbre unitaire sur \mathbb{C} avec élément unité e . Un élément x de A est dit inversible s'il existe un élément noté x^{-1} dans A tel que

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

On note $inv(A)$ l'ensemble des éléments inversibles dans l'algèbre A .

- Si $x, y \in inv(A)$ alors $y^{-1}x$ est l'inverse de $x^{-1}y \in A$ d'où $inv(A)$ est un groupe. Noter que si $x \in A$ admet un inverse, il est unique, car :
si $xy = e = xz$ alors

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

Définition 1.1.4 Soit A une algèbre sur \mathbb{C} munie d'une norme qu'en fait un espace vectoriel normé. Si A est non unitaire, on dit que $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée si on a

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

pour tout couple (x, y) d'éléments de A .

On dit qu'une algèbre normée A est une algèbre de Banach quand $(A, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach .

Si A est unitaire d'unité e , on dit que A est une algèbre normée si on a de plus

$$\|e\| = 1$$

Remarque 1

Si $\|e\| \neq 1$, on obtient $\|e'\| = 1$ en posant la norme initiale

$$\|x\|' = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}$$

Remarque 2

Si l'algèbre A n'admet pas un élément unité, on peut se ramener au cas unitaire en adjoignant une unité, par un procédé élémentaire classique ; ainsi l'algèbre obtenue, $A^\# = A \times \mathbb{C}$ qui est munie des opérations suivantes :

$$\begin{aligned} (x, \alpha) + (y, \beta) &= (x + y, \alpha + \beta) \\ \alpha(x, \beta) &= (\alpha x, \alpha\beta) \\ (x, \alpha)(y, \beta) &= (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \end{aligned}$$

est une algèbre unitaire d'unité $e = (0, 1)$ et normée pour la norme

$$\|x + \alpha e\| = \|x\| + |\alpha|; \quad x \in A, \alpha \in \mathbb{C}$$

Dans le cas où A est unitaire, on pose $A^\# = A$. voir [13]

Définition 1.1.5 Soit x un élément d'une algèbre unitaire A . On appelle spectre de x l'ensemble suivant :

$$\text{Spect}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda e - x)^{-1} \text{ n'existe pas}\}.$$

On posera $\sigma(x) = \text{Spect}_A(x)$ quand il n'y a pas risque de confusion.

Définition 1.1.6 On appelle caractère d'une algèbre normée A un homomorphisme d'algèbre non nul de A dans \mathbb{C} . On notera \hat{A} l'ensemble des caractères χ de A , χ_0 est une forme linéaire et

$$\widehat{A^\#} = \hat{A} \cup \chi_0$$

où

$$A = \ker \chi_0.$$

Théorème 1.1.1 1. Tout caractère χ de \widehat{A} est continu, et $\|\chi\| = 1$.

2. Le spectre $\sigma(x)$ de x est un composant non vide de \mathbb{C} pour tout $x \in A$.

Si A est commutative, on a $\sigma(x) = \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\} \cup \{0\}$ pour tout $x \in A$

Remarque 3

Si A n'est pas unitaire, alors pour tout élément de A on a

$$\sigma(x) = \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\} \cup \{0\}.$$

Définition 1.1.7 Un sous-ensemble I d'une algèbre commutative A , est dit un idéal si

1. I est sous-espace de l'espace vectoriel A .

2. $xy \in I$ pour tout $x \in A$ et $y \in I$.

l'algèbre A et $\{0\}$ sont des idéaux triviaux.

Un idéal est dit maximal, s'il n'est contenu dans aucun autre idéal non trivial.

Définition 1.1.8 Soit A une algèbre commutative et unitaire. On appelle radical de A l'intersection de tous les idéaux maximaux de A et on note

$$\text{Rad}A = \{x \in A : \chi(x) = 0, \forall \chi \in \widehat{A}\}.$$

L'algèbre A est semi-simple si $\text{Rad}A = \{0\}$; et si $\text{Rad}A = A$. On remarquera que $\text{Rad}A^\# = \text{Rad}A$.

Définition 1.1.9 Soient A une algèbre normée. Alors pour tout $x \in A$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{m \in \mathbb{N}^*} \|x^m\|^{1/m}.$$

Cette limite est appelée rayon spectral et notée $\rho(x)$; notons que si A est unitaire, alors

$$\rho(x) = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

Définition 1.1.10 On dit qu'un élément x , d'une algèbre de Banach A , est quasinilpotent si $\rho(x) = 0$. Posons $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de tous les éléments quasinilpotents de A , c'est à dire

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in A : \rho(x) = 0\}.$$

1.1.1 Transformation de Gelfand

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, Soit \widehat{A} l'ensemble des caractères de A et soit A^* le dual topologique de A . Notons par B la boule unité de A^* .

Il est clair que \widehat{A} est faiblement fermé dans B . Donc \widehat{A} , muni de la topologie faible, est compact et l'application

$$\widehat{x} : \chi \rightarrow \chi(x) \text{ avec } \chi \in \widehat{A}$$

est continu pour tout $x \in A$ comme restriction à \widehat{A} d'une application faiblement continue sur A^* , ceci par définition même de la topologie faible.

L'application

$$\begin{aligned} A &\rightarrow C(\widehat{A}, \mathbb{C}) \\ x &\rightarrow G(x) = \widehat{x} \end{aligned}$$

est appelée transformation de Gelfand.

Propriétés :

$G(x)$ est un homomorphisme d'algèbre contractant, et on a :

$$\begin{aligned} \text{Ker}G &= \{x \in A : \widehat{x} = 0\} = \{x \in A : \chi(x) = 0, \quad \forall \chi\} \\ &= \bigcap_{\chi \in \widehat{A}} \text{Ker}\chi = \text{Rad}A \end{aligned}$$

Donc si A est semi simple G est injective.

Si A n'est pas unitaire, on définit la transformée de Gelfand :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow G(\widehat{A^\#}, \mathbb{C}) \\ x &\rightarrow G(x) = \widehat{x} \end{aligned}$$

comme étant la restriction à A de la transformée de Gelfand sur $A^\#$.

Chapitre 2

Les inégalités dans les algèbres de Banach

2.1 L'inégalité $\|x^2 - x\| \geq \frac{1}{4}$ pour $\|x\| \geq \frac{1}{2}$

2.1.1 Distance entre éléments dans un espace de Banach sans idempotent non nul

Dans cette partie on va rappeler des résultats obtenus dans [3], [4], [7].

Soit x un élément d'une algèbre de Banach A tel que $\|x\| < 1$ et soit e l'élément unité de $A^\#$.

Posons :

$$\begin{aligned}(e - x)^{1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/2(1/2 - 1) \cdots (1/2 - n + 1)}{n!} (-x)^n \\ (e - x)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2 - 1) \cdots (-1/2 - n + 1)}{n!} (-x)^n\end{aligned}$$

les deux séries sont absolument convergentes et telles que

$$\left[(e - x)^{1/2} \right]^2 = e - x,$$

et

$$(e - x)^{-1/2} = \left[(e - x)^{1/2} \right]^{-1}.$$

On a,

$$\begin{aligned}
 \|e - (e - x)^{1/2}\| &= \left\| e - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/2(1/2 - 1) \cdots (1/2 - n + 1)}{n!} (-x)^n \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2(1/2 - 1) \cdots (1/2 - n + 1)}{n!} (-x)^n \right\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2(1/2 - 1) \cdots (1/2 - n + 1)}{n!} (-\|x\|)^n \\
 &= -\left[(1 - \|x\|)^{1/2} - 1 \right] \\
 &= 1 - \sqrt{1 - \|x\|}.
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Et,

$$\begin{aligned}
 \|(e - x)^{-1/2}\| &= \left\| e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2 - 1) \cdots (-1/2 - n + 1)}{n!} (-x)^n \right\| \\
 &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/2(-1/2 - 1) \cdots (-1/2 - n + 1)}{n!} (-\|x\|)^n \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|}}.
 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Définition 2.1.1 Soit A une algèbre unitaire d'unité e . Un élément x de A est dit idempotent si

$$x^2 = x$$

Il est dit non trivial si x est non nul et s'il est différent de e .

Lemme 2.1.1 Soit A une algèbre de Banach, et soit $x \in A$ tel que

$$\|x^2 - x\| < 1/4.$$

On pose

$$P(x) = \frac{e}{2} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e - 4x + 4x^2)^{-1/2}.$$

Alors

1. $P(x)$ est un idempotent de A ,
2. $\|P(x)\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1/2 + \|x\|}{\sqrt{1 - 4\|x^2 - x\|}}$. De plus $P(x) \neq 0$ si $\|x\| \geq 1/2$.

Preuve : On pose $y = 4x - 4x^2$; alors $\|y\| < 1$ et on a :

$$\begin{aligned} P^2(x) &= \left[\frac{e}{2} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} \right]^2 \\ &= \frac{e}{4} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e - y)^{-1/2} + \left(x - \frac{e}{2}\right)^2(e - y)^{-1}; \end{aligned}$$

comme

$$\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{e}{4} - \frac{y}{4}$$

on a alors

$$P^2(x) = \frac{e}{2} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} = P(x).$$

Si A est unitaire, on a $P(x) \in A$. Sinon on a :

$$\widehat{A^\#} = \widehat{A} \cup \chi_0 \text{ où } \text{Ker} \chi_0 = A.$$

Comme $\chi_0(P(x)) = 0$, on a $P(x) \in A$ d'où (1).

D'autre part on a, d'après 2.1.2

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \left\| \frac{e}{2} + \left(x - \frac{e}{2}\right)(e - y)^{-1/2} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} + \left\| \left(x - \frac{e}{2}\right) \right\| \|(e - y)^{-1/2}\| \\ &\leq \frac{1}{2} + \left\| x - \frac{e}{2} \right\| \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|}} \\ &\leq \frac{1}{2} + (\|x\| + \frac{1}{2})(1 - \|4x - 4x^2\|)^{-1/2}. \end{aligned}$$

On suppose $P(x) = 0$. On a dans ce cas

$$\frac{e}{2} = -\left(x - \frac{e}{2}\right)(e - y)^{-1/2},$$

donc

$$e = -(2x - 1)(e - y)^{-1/2},$$

et

$$2x = e - (e - y)^{1/2}.$$

On déduit de 2.1.1 que l'on a

$$2\|x\| \leq 1 - \sqrt{1 - \|y\|} < 1, \text{ et } \|x\| < 1/2.$$

Donc $P(x) \neq 0$ si $\|x\| \geq 1/2$, ce qui démontre (2). \square

Théorème 2.1.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative ne possédant aucun idempotent non nul. Alors*

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

Preuve : Dans le cas où $\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| < 1/4$, il existe

$$P(x) = \frac{e}{2} + (x - \frac{e}{2})(e - 4x + 4x^2)^{-1/2} \neq 0,$$

idempotent non nul de A ce qui entraîne une contradiction. \square

On a aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1 *Soit A une algèbre de Banach radicale. Alors*

$$\inf_{\|x\| \geq 1/2} \|x^2 - x\| \geq 1/4.$$

2.2 Application aux algèbres de Banach possédant une u.a.b.s

2.2.1 Rappels et définitions

Définition 2.2.1 Soit A une algèbre de Banach. On dira qu'une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A est une unité approchée Bornée séquentielle (u.a.b.s) de A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

1. il existe $k > 0$ tel que $\|e_n\| \leq k$ pour tout $n \geq 1$,
2. on a $x = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} x e_n$ pour tout élément $x \in A$.

Quand A possède une u.a.b.s. formée d'idempotents, on a le résultat élémentaire suivant, démontrer dans [3] et [4],

Proposition 2.2.1 Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée Bornée séquentielle $(e_n)_{n \geq 1}$ formée d'idempotents.

- (i) Il existe une autre unité approchée bornée séquentielle $(f_n)_{n \geq 1}$ de A formée d'idempotents telle que $f_n f_m = f_n$ pour $m, n \geq 1, n \geq m$.
- (ii) Si A est non unitaire, il existe une suite $(U_m)_{m \geq 1}$ d'ouverts compacts non vide disjoint deux à deux de \hat{A} tels que $\hat{A} = \bigcup_{m \geq 1} U_m$.

Le résultat suivant, démontrer dans [4], donne une condition suffisante (et nécessaires) pour qu'une algèbre de Banach commutative A possède une u.a.b.s. formée d'idempotents.

Théorème 2.2.1 Soit A une algèbre de Banach commutative. Si A possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^2 - e_n\| < 1/4;$$

alors A possède une unité approchée Bornée séquentielle formée d'idempotents.

preuve : Soit $\lambda \in \left] \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^2 - e_n\|, 1/4 \right[$.

On peut construire une suite strictement croissante $(p_n)_{n \geq 1}$ d'entiers telle que

$$\|e_{p_n}^2 - e_{p_n}\| < \lambda \text{ pour tout } n.$$

Alors $(e_{p_n})_{n \geq 1}$ est une unité approchée bornée séquentielle de A , et dans ce cas $(P(e_{p_n}))_{n \geq 1}$, où P est le polynôme défini dans le lemme 2.1.1, est une unité approchée bornée de A formée d'idempotents. \square

2.3 L'inégalité $\|x^3 - x\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Lemme 2.3.1 Soit A une algèbre de Banach commutative, et soit $x \in A$ tel que

$$\|x\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ et } \|x^3 - x\| < \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ on pose :}$$

$$P(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} \left(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3\right)^{-1/2}$$

Alors $P(x) \in A$, $P^2(x) = P(x)$, et

$$\|P(x)\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\|x\| + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\|}}$$

Preuve : Soit $x \in A$ tel que $\|x\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\|x^3 - x\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

$$\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^n.$$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^n$ est absolument convergente car $\left\|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right\| \leq 1$; donc $\left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2}$ est bien définie.

$$\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^n,$$

la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^n$ est absolument convergente puisque $\left\|\frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right\| < 1$, et $\left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2}$ est bien définie.

Donc $P(x)$ est bien défini dans $A^\#$.

Comme $\chi_0(P(x)) = 0$, alors $P(x) \in A$.

$$\begin{aligned} P^2(x) &= \frac{e}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} + \\ &\quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} \right]^2 \\ &= \frac{e}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} + \\ &\quad \frac{3}{4} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme

$$e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x = 3 \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

on a :

$$\frac{3}{4} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1} = \frac{e}{4},$$

donc $P^2(x) = P(x)$.

$$\begin{aligned} \left\| \left(e + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1/2} \right\| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \\ &\quad \left(- \left\| \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x \right\| \right)^n \\ &= 1 + \left(1 - \left\| \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x \right\| \right)^{-1/2} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left\| \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x \right\|}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^{1/2} \right\| &\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!} (-1)^{n-1} \left\| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\|^n \\
 &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!} \left(- \left\| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\| \right)^n \\
 &= 1 - \left[\left(1 - \left\| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\| \right)^{1/2} - 1 \right] \\
 &= 2 - \left(1 - \left\| \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\| \right)^{1/2} \leq 2.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \|P(x)\| &= \left\| \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}} \right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)^{1/2} \left(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 \right)^{-1/2} \right\| \\
 &\leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\|x\| + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{2}{\sqrt{1 - \left\| \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x \right\|}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle $(e_n)_{n \geq 1}$ telle que $\|e_n\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\|e_n^3 - e_n\| \leq \lambda$ pour tout n , avec $\lambda \in \left] 0, \frac{2}{3\sqrt{3}} \right[$. Alors $(P(e_n))$ est une unité approchée bornée séquentielle pour A .*

Preuve :

$$P(e_n) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(e_n - \frac{e}{\sqrt{3}} \right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n \right)^{1/2} \left(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n + \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 \right)^{-1/2}.$$

D'après le lemme 2.3.1,

$$\|P(e_n)\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\|e_n\| + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda}}.$$

On pose :

$$r_n = e_n - \frac{e}{\sqrt{3}}, \quad t_n = \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n \right), \quad \text{et } s_n = (e + v_n)^{-1/2}$$

$$\text{avec } v_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}e_n.$$

Soit $u \in A$; $\|v_n^p\| \leq \mu^p$, $\mu = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda < 1$, et $uv_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} \|s_n u - u\| &= \left\| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-p+1)}{p!} v_n^p u \right\| \\ &\leq \frac{\|uv_n\|}{\mu} \sum_{p=1}^{+\infty} \left| -1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-p+1) \right| \frac{\mu^p}{p!} \end{aligned}$$

donc $s_n u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u$.

$$t_n u - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-p+1)}{p!} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^p \right] (e_n^p - e)u.$$

On a

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|1/2(1/2-1)\cdots(1/2-p+1)|}{p!} < +\infty, \quad \left\| \frac{\sqrt{3}}{2} e_n \right\|^p < 1,$$

et comme

$e_n^p u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u$ pour tout p , on obtient

$$t_n u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u, \quad \text{et on a aussi } r_n u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)u.$$

t_n, s_n et r_n sont bornées, et on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| P(e_n)u - u \right\| &= \left\| \frac{\sqrt{3}}{2} r_n t_n s_n u - \frac{u}{2} \right\| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| r_n t_n s_n u - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u \right\| \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| r_n t_n s_n u - r_n t_n u \right\| + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| r_n t_n u - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u \right\| \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \|r_n\| \|t_n\| \|s_n u - u\| + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| r_n t_n u - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u r_n \right\| \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\| \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} r_n u - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u \right\| \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \|r_n\| \|t_n\| \|s_n u - u\| + \frac{\sqrt{3}}{2} \|r_n\| \left\| t_n u - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} u \right\| \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} \left\| r_n u - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) u \right\|
 \end{aligned}$$

Donc $P(e_n)u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$, et $(P(e_n))$ est une u.a.b.s pour A . \square

Théorème 2.3.2 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle (e_n) de borne 1. On suppose que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^3 - e_n\| < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Alors A possède une unité approchée bornée séquentielle formée d'idempotents.

Preuve : Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(e_n)_{n \geq 1}$, on peut supposer que $\|e_n^3 - e_n\| \leq \lambda$ pour tout n , avec $\lambda \in \left]0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right[$. D'après le théorème 2.3.1, $P(e_n)u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ pour tout $u \in A$, et $(P(e_n))_n$ est une u.a.b.s. Formée d'idempotents. \square

Corollaire 2.3.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative possédant une unité approchée bornée séquentielle (e_n) de borne 1. Si A ne possède aucun idempotent non nul, alors*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^3 - e_n\| \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Preuve : Dans le cas contraire on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^3 - e_n\| < \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

et on peut former $P(e_n)$. \square

2.4 Distance entre puissances d'éléments d'une u.a.b.s.

Plus généralement considérons deux entiers positifs p et q . On va étudier le cas où une u.a.b.s. $(e_{p_n})_{n \geq 1}$ vérifie la condition

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^p - e_n^{p+q}\| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}; \text{ voir [5].}$$

On remarque que pour $p = q = 1$ on retrouve les résultats précédents. Pour $p = 1$ et $q = 2$, Mohtari introduit dans [10], l'idempotent

$$J(x) = \frac{e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{e}{\sqrt{3}}\right) \left(e + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^{1/2} \left(e - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3\right)^{-1/2},$$

pour démontrer que si A possède une u.a.b.s. $(e_n)_{n \geq 1}$ qui vérifie

$$\|e_n\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

et

$$\|e_n^3 - e_n\| \leq \lambda \text{ pour } \lambda \in \left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[,$$

alors A admet une u.a.b.s formée d'idempotents.

Ce résultat (sans hypothèse restrictive $\|e_n\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$) a été généralisé dans [5] pour p et q quelconques.

Le point de départ des auteurs de [5] est le résultat élémentaire d'analyse complexe suivant :

Lemme 2.4.1 *Soient p et q deux entiers positifs, et soit*

$$R_{p,q} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q}.$$

Il existe une fonction analytique,

$$g : D(0, R_{p,q}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $g(0) = 1$ et telle que

$$g(z)^p - g(z)^{p+q} = z \text{ pour } |z| < R_{p,q}$$

De plus

$$|g(z)| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/q} \text{ pour } |z| < R_{p,q}$$

Preuve : voir [14].

On note $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{1/n}$ le rayon spectral d'un élément x d'une algèbre de Banach A . Si A est unitaire, d'unité e , et si

$$\rho(x) < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

on pose

$$g(x) = e + \sum_{k \geq 1} \frac{g^k(0)}{k!} x^k,$$

on a alors

$$g(x)^p - g(x)^{p+q} = x.$$

Lemme 2.4.2 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par x , soit $A^\#$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité e à A , soient p et q deux entiers positifs et soit g la fonction analytique associée à p et q au lemme précédent.*

Si

$$\rho(x^p - x^{p+q}) < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

alors

$$pg(x^p - x^{p+q})^{p-1} - (p+q)g(x^p - x^{p+q})^{p+q-1}$$

est inversible dans $A^\#$, et

$$\begin{aligned} J_{p,q} &:= e - \left[pg(x^p - x^{p+q})^{p-1} - (p+q)g(x^p - x^{p+q})^{p+q-1} \right]^{-1} \\ &\times \left[\sum_{2 \leq k \leq p+q} C_{p+q}^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p+q-k} \right] \\ &- \sum_{2 \leq k \leq p} C_p^k (x - g(x^p - x^{p+q}))^{k-1} g(x^p - x^{p+q})^{p-k} \end{aligned}$$

est un idempotent de A . De plus

$$J_{p,q}(x)x = J_{p,q}(x)g(x^p - x^{p+q}),$$

et

$$\{\chi \in \widehat{A} : \chi(J_{p,q}(x)) = 1\} = \{\chi \in \widehat{A} : \chi(x) \in \Omega_0\} \subset \left\{ \chi \in \widehat{A} : |\chi(x)| > \left(\frac{p}{p+q}\right)^{1/q} \right\},$$

où Ω_0 désigne la composante connexe de 1 dans l'ouvert

$$\Omega := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z^p - z^{p+q}| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q} \right\}.$$

La preuve de ce lemme, ainsi que les résultats suivant sont donnés dans [5].

On énonce le résultat suivant [8], [5], qui a été évoqué précédemment dans le cas des algèbres de Banach radicales.

Théorème 2.4.1 *Soit A une algèbre de Banach sans idempotent non nul, soit $q \geq 1$. Si*

$$\|x - x^{q+1}\| \leq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}}$$

alors

$$\|x\| \leq \frac{1}{(q+1)^{1/q}}.$$

On note I l'application identité $x \rightarrow x$ sur un espace de Banach A , et $\mathfrak{B}(A)$ l'ensemble des opérateurs bornés de A dans lui-même. Dans [4], on déduit des lemmes précédents le résultat suivant

Lemme 2.4.3 *Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs bornés sur un espace de Banach A convergent fortement vers I , et soient p et q deux entiers positifs. S'il existe*

$$\delta < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

que $\|T_n^p - T_n^{p+q}\| \leq \delta$ pour $n \geq 1$, alors la suite $(J_{p,q}(T_n))_{n \geq 1}$ converge fortement vers I .

On obtient alors dans [5] le résultat général suivant

Théorème 2.4.2 *Soit A une algèbre commutative, et soient p et q deux entiers positifs. Si A possède une u.a.b.s. $(e_n)_{n \geq 1}$ telle que*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|e_n^p - e_n^{p+q}\| < \left(\frac{p}{p+q}\right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

alors A possède une u.a.b.s formée d'idempotents.

On sait que, (théorème 4.4 de [8] pour $p = 1$), si un élément x d'une algèbre de Banach est quasinilpotent, et si

$$\|x\| \leq \left(\frac{1}{q+1} \right)^{1/q},$$

alors

$$\|x - x^{1+q}\| \geq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}}.$$

Par conséquent si une suite d'opérateurs quasinilpotents $(T_n)_{n \geq 1}$ converge fortement vers I et si q est un positif alors

$$\|T_n - T_n^{1+q}\| \geq \frac{q}{(q+1)^{1+1/q}} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Par contre on ne peut estimer $\|x\|$ en fonction de $\|x^p - x^{p+q}\|$ pour $p \geq 2$, puisqu'il existe des algèbres de Banach radicales triviales où le produit de deux éléments quelconques est nul. D'où l'intérêt du résultat suivant pour $p \geq 2$, également démontré dans [5]

Théorème 2.4.3 *Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs bornés quasinilpotents sur un espace de Banach $A \neq \{0\}$ qui converge fortement vers I . Alors*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n^p - T_n^{p+q}\| \geq \left(\frac{p}{p+q} \right)^{p/q} \frac{q}{p+q},$$

pour tout couple (p, q) d'entiers positifs.

2.5 Idempotents et inégalités dans les algèbres de Banach

Si x est un élément d'une algèbre de Banach commutative A , $\rho(x)$ son rayon spectral, et $\sigma(x)$ son spectre.

on va donner ici une formule explicite de $J_{p,q}$ en utilisant un principe général, que l'on pourrait appeler principe de l'idempotent, qui découle de la formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 2.5.1 *Soit x un élément d'une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par x , soit $A^\#$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité e à A , soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} contenant 0 , soit $R > 0$, soient*

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$g : D(0, R) \rightarrow U$$

deux fonctions analytiques telles que

$$f(g(z)) = z$$

pour $|z| < R$, soit

$$\Omega = \{z \in U : |f(z)| < R\},$$

soit Ω_0 la composante connexe de $g(0)$ dans Ω , et soit Ω_1 le complémentaire de Ω_0 dans Ω .

Si $\sigma(x) \subset U$, et $\rho(f(x)) < R$, posons

$$J(x) = (g(f(x)) - x)g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt$$

si $g(f(0)) = 0$, et

$$J(x) = e - (g(f(x)) - x)g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt$$

si $g(f(0)) \neq 0$.

Alors J est un idempotent de A . De plus

$$\Omega_0 = g(D(0, R)) = \{z \in \Omega : g(f(z)) = z\},$$

et dans le premier cas

$$\{\chi \in \hat{A} : \chi(J(x)) = 1\} = \{\chi \in \hat{A} : \chi(x) \in \Omega_1\},$$

alors que dans le deuxième cas

$$\{\chi \in \hat{A} : \chi(J(x)) = 1\} = \{\chi \in \hat{A} : \chi(x) \in \Omega_0\}.$$

Preuve : Ici $f(x)$ et $g(f(x))$ se calculent au moyen du calcul fonctionnel holomorphe en une variable usuel, qui commute avec les caractères

(en fait $g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} f(x)^n$, et $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ si f est entière, ce qui arrive souvent dans les applications).

U étant convexe, on a, d'après la formule de Taylor, puisque $f(x) - f(g(f(x))) = 0$,

$$(x - g(f(x)))f'(g(f(x))) + (x - g(f(x)))^2 \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt = 0.$$

Comme

$$f'(g(f(z)))g'(f(z)) = 1$$

pour $|z| < R$ on a

$$f'(g(f(x)))g'(f(x)) = e$$

et $g'(f(x))$ est l'inverse de $f'(g(f(x)))$ dans $A^\#$. Posons

$$y = g(f(x)) - x,$$

$$v = g'(f(x)) \int_0^1 (1-t)f''(tx + (1-t)g(f(x)))dt$$

$$J = yv$$

On a $y = y^2v$, donc

$$J^2 = y^2v^2 = yv = J,$$

et $J(x)$ est idempotent de $A^\#$.

Soit χ un caractère de $\widehat{A^\#}$. Posons :

$$\lambda = \chi(x),$$

$$\mu = \chi(f(x)) = f(\lambda),$$

de sorte que $|\mu| < R$. On a :

$$\chi(J) = (g(\mu) - \lambda)g'(\mu) \int_0^1 (1-t)f''(t\lambda + (1-t)g(\mu))dt.$$

Si $g(\mu) = \lambda$ alors $\chi(J) = 0$. Si $g(\mu) \neq \lambda$, on obtient par integration par parties :

$$\begin{aligned} \chi(J) &= g'(\mu) \left([-(1-t)f'(t\lambda + (1-t)g(\mu))]_0^1 \right) - g'(\mu) \int_0^1 f'(t\lambda + (1-t)g(\mu))dt \\ &= g'(\mu)f'(g(\mu)) - \frac{g'(\mu)}{\lambda - g(\mu)}(f(\lambda) - f(g(\mu))). \end{aligned}$$

Comme

$$g'(\mu)f'(g(\mu)) = (f \circ g)'(\mu) = 1$$

et

$$f(g(\mu)) = \mu = f(\lambda)$$

on a $\chi(J) = 0$ si et seulement si $g(f(\chi(x))) = \chi(x)$. En particulier, si $\ker \chi_0 = A$ alors $\chi_0(J) = 0$ si $g(f(0)) = 0$ et $\chi_0(J) = 1$ si $g(f(0)) \neq 0$. Donc $J(x) \in A$. \square

2.6 L'inégalité $\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ pour $\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, on pose

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$$

Le lemme suivant est une reformulation du lemme 2.2 de [6]. Avec les notations de [6], la fonction g du lemme ci-dessous est la fonction $g = -\frac{g_\alpha}{\gamma}$ avec $\alpha = \frac{1}{\gamma} + 1$.

Lemme 2.6.1 *Soit $\gamma > 0$, soit*

$$U = D\left(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

et soit

$$V = D\left(0, \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}\right).$$

Il existe une unique fonction analytique

$$g : U \longrightarrow V$$

telle que $g(0) = 0$ vérifiant

$$e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$$

pour $z \in U$, et on a $g^{(n)}(0) < 0$ pour $n \geq 1$. De plus,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right]^k = -\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}$$

Lemme 2.6.2 Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, soit $u \in A$ et soit g la fonction analytique construite au lemme 2.1. Si

$$\|u\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$$

alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} u^k$ converge dans A .

Si l'on pose

$$g(u) = \sum_{k \geq 1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} u^k,$$

on a

$$e^{g(u)} - e^{(\gamma+1)g(u)} = u,$$

et

$$\|g(u)\| \leq |g(\|u\|)| \leq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

Preuve : Soit g la fonction introduite au lemme précédent. Alors g est décroissante sur $\left[0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right]$, et on a

$$\begin{aligned} \|g(u)\| &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!} \|u^n\| \leq - \sum_{n \geq 1} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \|u\|^n = -g(\|u\|) \\ &\leq -g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}. \quad \square \end{aligned}$$

Dans toute la suite on désigne par

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

le rayon spectral d'un élément x d'une algèbre de Banach A . Si A est unitaire on pose $A^\# = A$. Sinon on note $A^\# = A \oplus \mathbb{C}1$ l'algèbre obtenue en ajoutant une unité 1 à A .

Lemme 2.6.3 Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, et soit $x \in A$ tel que

$$\rho(e^x - e^{(\gamma+1)x}) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Soit

$$U = D\left(0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)$$

et soit g la fonction analytique sur U définie au lemme 2.6.1. Alors la formule

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x}) e^{g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!} (x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}$$

définit un idempotent de A vérifiant

$$J(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x})) = x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}).$$

Preuve : Posons

$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x}$$

et

$$y = x - g(u)$$

où g est la fonction définie au lemme 2.6.1. On a

$$\begin{aligned} e^x - e^{(\gamma+1)x} - u &= 0 \\ &= e^y e^{g(u)} - e^{(\gamma+1)y} e^{(\gamma+1)g(u)} - e^{g(u)} + e^{(\gamma+1)g(u)} \\ &= e^{g(u)} [e^y - 1] - e^{(\gamma+1)g(u)} [e^{(\gamma+1)y} - 1] \\ &= y [e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)}] \\ &\quad - y^2 \left[e^{(\gamma+1)g(u)} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n}{n!} y^{n-2} \right) - e^{g(u)} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{y^{n-2}}{n!} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Posons de nouveau $f(z) = e^z - e^{(\gamma+1)z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z) = 1 \text{ pour } z \in U.$$

Donc comme $\rho(u) < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+1/\gamma}}$, $g'(u)$ est bien définie dans A et $f'(g(u))g'(u) = 1$.

On voit que $e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)}$ est inversible dans \tilde{A} , et on a

$$g'(u) = (e^{g(u)} - (\gamma+1)e^{(\gamma+1)g(u)})^{-1}.$$

L'équation (2.6.1) donne

$$y = y^2 v$$

où

$$v := g' e^{g(u)} \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(u)} - 1}{n!} y^{n-2}$$

Ainsi l'élément $J = yv$ est un idempotent de A donné par la formule

$$J := g'(e^x - e^{(\gamma+1)x})e^{g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^x - e^{(\gamma+1)x})} - 1}{n!} (x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}))^{n-1}.$$

De plus on a

$$J(x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x})) = Jy = y^2v = y = x - g(e^x - e^{(\gamma+1)x}). \quad \square$$

Théorème 2.6.1 *Soit A une algèbre de Banach et soit $x \in A$ tel que*

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

(i) *Si A ne possède aucun idempotent non nul alors*

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

(ii) *Si x est quasinilpotent on a plus précisément $\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| > \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.*

Preuve : Supposons que

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

et

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Posons

$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x}$$

et

$$y = x - g(u).$$

Il résulte du lemme 2.6.2 que

$$\|g(u)\| < \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma} \leq \|x\|,$$

donc $y \neq 0$, et il résulte du lemme 2.6.3 que A contient un idempotent $J = yv$ où

$$v := g'(u)e^{g(u)} \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(u)} - 1}{n!} y^{n-2}$$

vérifiant $y = Jy = y^2v$. Donc $J \neq 0$, et dans ce cas A possède un idempotent non nul. Ceci prouve (i).

Supposons maintenant que x est quasinilpotent et que

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Posons

$$u = e^x - e^{(\gamma+1)x} \text{ et } y = g(u).$$

Alors u et y sont quasinilpotents et vérifient

$$e^x - e^y = e^{(\gamma+1)x} - e^{(\gamma+1)y},$$

et

$$(x-y) \left[1 + \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k y^{n-1-k}}{n!} \right) \right] = (\gamma+1)(x-y) \left[1 + \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^{n-1}}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \right) \right]$$

d'où

$$(x-y)[\gamma+v] = 0$$

avec

$$v = \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \right) - \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k y^{n-1-k}}{n!} \right).$$

Comme $v \in \text{Rad}A$ alors $x = y$.

Comme tous les coefficients de Taylor d'ordre ≥ 1 de g en 0 sont strictement négatifs, et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

il existe $p \geq 1$ tel que

$$\|u^n\| < \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n$$

pour tout $n \geq p$, et on a

$$-\sum_{n=p}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \|u^n\| < -\sum_{n=p}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \|u^n\| < -\sum_{n=p}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n \\ &= -g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right) \\ &= \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}. \quad \square \end{aligned}$$

Pour $z \in D(0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$(1+z)^t = \sum_{n \geq 0} \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} z^n,$$

et $\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$, de sorte que $(1+z)^t = e^{t \log(1+z)}$.

Lemme 2.6.4 *Soit $\gamma > 0$, et soit $g : U \rightarrow V$ la fonction définie au lemme 2.6.2. Posons $h = e^g - 1$, de sorte que $h(0) = g(0) = 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $|h(z)| < 1$ pour $|z| < \delta$. Alors*

$$1 + h(z) - (1 + h(z))^{\gamma+1} = z \text{ pour } |z| < \delta, \quad h^{(n)}(0) < 0 \text{ pour } n \geq 1,$$

et

$$h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right) = -1 + \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Preuve : De même qu'au lemme 2.6.1 on considère la fonction

$$f(z) = e^z - e^{(\gamma+1)z}$$

qui vérifie $f(g(z)) = z$ pour $z \in U$. Notons que le réel positif δ , de même que la fonction g , dépend du réel positif γ .

Pour $|z| < \delta$ on a $e^{g(z)} = 1 + h(z)$, avec $|h(z)| < 1$, donc

$$e^{g(z)} = e^{\log(1+h(z))}.$$

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$g(z) = \log(1 + h(z)) + 2k\pi i.$$

Comme $g(0) = 0 = \log(1 + h(0))$ on a $k = 0$. Donc

$$g(z) = \log(1 + h(z)).$$

On a

$$(1+h(z))^t = e^{t \log(1+h(z))} = e^{tg(z)}, \text{ pour } |z| < \delta, t \in \mathbb{R},$$

donc

$$1+h(z) - (1+h(z))^{\gamma+1} = z.$$

On a

$$h'(z) - (\gamma+1)h'(z)(1+h(z))^\gamma = 1. \quad (2.6.2)$$

Posons

$$\psi(z) := 1 - (\gamma+1)(1+h(z))^\gamma. \quad (2.6.3)$$

On a

$$\psi(0) = -\gamma \text{ et } h'(z)\psi(z) = 1 \text{ et donc } h'(0) = -\frac{1}{\gamma} < 0.$$

On obtient

$$h''(z)\psi(z) = -h'(z)\psi'(z);$$

d'autre part on déduit de l'équation (2.6.2) que

$$(1+h(z))\psi'(z) = \gamma[-h'(z) + 1],$$

donc

$$(1+h(z))\psi''(z) = -h'(z)\psi'(z) - \gamma h''(z).$$

On montre alors par récurrence qu'il existe pour $n \geq 2$ deux familles $(a_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ de réels strictements positifs telles que

$$h^{(n)}(z)\psi(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n} h^{(k)}(z)\psi^{(n-k)}(z).$$

et

$$(1+h(z))\psi^{(n)}(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} b_{k,n} h^{(k)}(z)\psi^{(n-k)}(z) - \gamma h^{(n)}(z).$$

Supposons que $n \geq 1$ et que pour $1 \leq k \leq n$ on a $h^{(k)}(0) < 0$ et $\psi^{(k)}(0) > 0$.

On a alors

$$-\gamma h^{(n+1)}(0) = h^{(n+1)}(0)\psi(0) = -\sum_{k=1}^n a_{k,n+1} h^{(k)}(0)\psi^{(n+1-k)}(0) > 0,$$

et $h^{(n+1)}(0) < 0$. De plus

$$\psi^{(n+1)}(0) = (1 + h(0))\psi^{(n+1)}(0) = - \sum_{k=1}^n b_{k,n+1} h^{(k)}(0) \psi^{(n+1-k)}(0) - \gamma h^{(n+1)}(0) > 0.$$

On voit donc que $h^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$.

D'après le lemme 2.6.1 on a

$$g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right]^k = -\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

Comme $g(z) = \log(1 + h(z))$ on a

$$g\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = \log\left(1 + h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)\right) = \log\left((\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)$$

et donc

$$h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = -1 + \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad \square$$

Remarque : On a ici $h = e^g - 1$, g désignant la fonction introduite au lemme 2.6.1. Notons que si on pose $u(z) = -z$ et $v = e^u - 1$, alors $u(0) = v(0) = 0$ et $u^{(n)}(0) \leq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors que $v^{(n)}(0) < 0$ pour n pair, $v^{(n)} > 0$ pour n impair. Par contre si deux fonctions u et v , définies au voisinage de 0 vérifient la relation $v = e^u - 1$, avec $u(0) = v(0) = 0$ on a

$$u(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n} = - \sum_{n \geq 1} \frac{(-v)^n}{n}$$

Donc si $v^{(n)}(0) < 0$ (respectivement $v^{(n)}(0) \leq 0$) pour tout $n \geq 1$, on a $u^{(n)}(0) < 0$ (respectivement $u^{(n)}(0) \leq 0$) pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent le fait que la fonction h du lemme 2.6.4 vérifie $h^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$ implique que la fonction g du lemme 2.6.2 vérifie $g^{(n)}(0) < 0$ pour tout $n \geq 1$, mais l'inverse n'est pas vrai et le lemme ci-dessus apporte plus d'informations que le lemme 2.6.2.

Soit x un élément d'une algèbre de Banach A . On note $Spec(x)$ le spectre de x dans l'algèbre obtenue en ajoutant si nécessaire une unité 1 à $A^\#$.

On note $Res_\infty(x)$ la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus Spec(x)$. Si $0 \in Res_\infty(x)$, il existe un voisinage ouvert U de $Spec(x)$ et une détermination du logarithme de z sur U , c'est à dire une fonction $z \mapsto \log z$ tel que $e^{\log z} = z$ pour $z \in U$. On pose alors $x^t = e^{t \log x}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On notera que x^t dépend évidemment de la détermination du logarithme choisie sur U .

Théorème 2.6.2 Soit A une algèbre de Banach, soit $\gamma > 0$, et soit $x \in A$ tel que

$$\|x\| \geq 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

et tel que

$$-1 \in Res_{\infty}(x).$$

(i) Si A ne possède aucun idempotent non nul alors

$$\|1+x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{1}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

(ii) Si X est quasinilpotent on a plus précisément

$$\|1+x - (1+x)^{\gamma+1}\| > \frac{1}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Preuve : Soit $x \in A$ tel que $-1 \in Res_{\infty}(x)$. On pose $a = \log(1+x)$, avec une détermination convenable du logarithme complexe sur un voisinage de $Spec(1+x)$, de sorte que $1+x = e^a$.

Posons

$$u = e^a - e^{(\gamma+1)a} = 1+x - (1+x)^{\gamma+1}$$

et supposons que

$$\|x\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Soit g la fonction analytique introduite au lemme 2.6.2. Il résulte du lemme 2.6.4 que si l'on pose

$$J := g'(e^a - e^{(\gamma+1)a})e^{g(e^a - e^{(\gamma+1)a})} \sum_{n \geq 2} \frac{(\gamma+1)^n e^{\gamma g(e^a - e^{(\gamma+1)a})} - 1}{n!} (a - g(e^a - e^{(\gamma+1)a}))^{n-1} \quad (2.6.4)$$

alors J est un idempotent de A , qui commute avec x , telque

$$a - g(u) \in H := \{v \in A : Jv = v\}.$$

Il est claire que H est un idéal à droite fermé de \tilde{A} . Soit $h = e^g - 1$ la fonction introduite au lemme 2.6.5. On a

$$x - h(u) = e^a - 1 - (e^{g(u)} - 1) = (a - g(u)) \left[\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k g(u)^{n-1-k}}{n!} \right) \right] \in (a - g(u))A \subset H.$$

Donc

$$J(x - h(u)) = x - h(u).$$

Si A ne contient aucun idempotent non nul, on a

$$J = 0, \quad x = h(u), \quad \|x\| \leq - \sum_{n \geq 1} \frac{h^n(0)}{n!} \|u\|^n < -h\left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) = 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Ceci prouve (i).

Supposons maintenant que x est quasinilpotent. Il résulte d'une propriété standard du calcul fonctionnel holomorphe que

$$\text{Spec}(a) = \{\log(1 + \lambda) : \lambda \in \text{Spec}(x)\} = \{0\},$$

donc a est quasinilpotent. Donc

$$u = e^a - e^{(\gamma+1)a},$$

est aussi quasinilpotent, et il résulte de même que plus haut du lemme 2.6.4 que la formule 2.6.4 définit un idempotent J de A tel que

$$J(x - h(u)) = x - h(u),$$

et $J \in \text{Rad}A$ car $a - g(u) \in \text{Rad}A$. Donc $J = 0$, et $x = h(u)$. Comme tous les coefficients de Taylor d'ordre ≥ 1 de h en 0 sont strictement négatifs, et comme u est quasinilpotent, il existe $p \geq 1$ tel que

$$\|u^n\| < \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n \text{ pour tout } n \geq p,$$

et on a

$$- \sum_{n=p}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \|u^n\| < - \sum_{n=p}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right)^n.$$

Si

$$\|u\| \leq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

On aurait

$$\begin{aligned}
 \|x\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \|u^n\| \\
 &< - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right)^n \\
 &= -h \left(\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right) \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} \right).
 \end{aligned}$$

Ceci prouve (ii). \square

Chapitre 3

Application aux semigroupes

Dans ce chapitre on va exposer les résultats démontrés dans [6] et [8]. En un premier temps on va rappeler quelques notions et résultats importants sur les semigroupes.

3.1 Semigroupe dans une algèbre de Banach

Définition 3.1.1 Soit A une algèbre de Banach. On appelle C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur Λ , la famille $(T(t))_{t>0}$ d'éléments de Λ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, $(\forall)x \in \Lambda$.

On notera \mathcal{A}_T la sous algèbre fermée de A engendrée par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$. On dira qu'un semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est continu en norme si

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t+h) - T(t)\| = 0 \text{ pour tout } t > 0,$$

et on dira que $(T(t))_{t \rightarrow 0}$ admet une limite en norme à l'origine s'il existe $J \in A$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - J\| = 0.$$

Notons que si le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ admet une limite en norme J à l'origine alors J est un idempotent de A , et l'algèbre de Banach \mathcal{A}_T est unitaire d'unité J . De plus dans ce cas on sait qu'il existe $u \in \mathcal{A}_T$ tel que l'on ait, pour $t > 0$,

$$T(t) = \exp(tu) := J + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n u^n}{n!}.$$

On obtient alors une extension analytique $(T(z))_{z \in \mathbb{C}}$ du semigroupe en posant

$$T(z) = \exp(tz) \text{ pour } z \in \mathbb{C}.$$

Autrement dit le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ est la restriction à $]0, +\infty[$ d'un groupe analytique de \mathcal{A}_T . [8]

On définit de même des semigroupes $(T(t))_{t \in K_+^*}$, K désignant un sous-corps quelconque de \mathbb{R} et K_+^* désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de K .

Un cas particulier important est celui où $A = \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}(E)$ désignant l'algèbre de Banach des endomorphismes bornés d'un espace de Banach E . On dit alors que $(T(t))_{t>0}$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur E . On a alors les notions suivantes

Définition 3.1.2 Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach E .

1. On dit que $(T(t))_{t>0}$ est d'image dense si $\bigcup_{t>0} T(t)(E)$ est dense dans E .
2. On dit que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T(t+h)x - T(t)x\| = 0$ pour tout $x \in E$ et pour tout $t > 0$.
3. On dit que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in E$.

Notons que si on pose

$$F = \bigcup_{t>0} T(t)(E),$$

alors

$$\bigcup_{t>0} T(t)(F) = \bigcup_{t>0, s>0} T(t+s)(E) = \bigcup_{t>0} T(t)(E) = F.$$

Donc si on note \tilde{T} la restriction de $T(t)$ à \overline{F} , le semigroupe $(\tilde{T}(t))_{t>0}$ est un semigroupe d'opérateurs bornés sur \overline{F} qui est d'image dense. D'autre part il est bien connu que si $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine alors il est fortement continu; on peut alors poser $T(0) = I$, I désignant l'application identité $x \rightarrow x$ sur E , et dans ce cas l'application $t \rightarrow T(t)x$ est une application continue de $[0, +\infty[$ dans E pour tout $x \in E$.

Il résulte immédiatement du théorème de Banach-Steinhaus que si $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine, alors $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\| < +\infty$.

Réciproquement si $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)\| < +\infty$, et si $(T(t))_{t>0}$ est d'image dense, une vérification de routine montre que $(T(t))_{t>0}$ est fortement continu à l'origine.

Proposition 3.1.1 Soit $(T(t))_{t>0}$ un semi groupe fortement continu sur x . Alors :

1. $t \rightarrow \|T(t)\|$ est borné sur tout l'intervalle compact $[0, \alpha[$;

2. il existe des constantes réelles ω et $M >$ telles que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Définition 3.1.3 Un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t>0}$ est appelé contractant si l'on a :

$$\|T(t)\| \leq 1 \text{ pour } t \geq 0$$

Définition 3.1.4 Le type du semigroupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est la borne inférieure $\bar{\omega}$ l'ensemble des ω tels qu'il existe un nombre M_ω vérifiant

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad t \geq 0$$

Proposition 3.1.2 Soit $(T(t))_{t>0}$ un semi groupe fortement continu et $\bar{\omega}$ son type, Alors on a

$$(i) \quad \bar{\omega} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|T(n)\|,$$

(ii) $\rho(T(t)) = e^{\bar{\omega}t}$, où $\rho(T(t))$ est le rayon spectral de l'opérateur $T(t)$.

3.1.1 Générateur infinitésimal d'un semigroupe

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in \Lambda : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{dT(t)x}{dt} \right|_{t=0} \text{ pour } x \in D(A).$$

est le générateur infinitésimal du semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de Λ .

Si le semigroupe est fortement continu et d'image dense, alors le domaine $D(A)$ est dense dans A car il contient tous les éléments y de E de la forme $y = \int_\alpha^\beta T(t)x dt$, avec $\beta > \alpha > 0, x \in E$.

On a alors, $T(t) = e^{tA}$, et montrer que le semigroupe admet une limite en norme à l'origine revient à montrer que son générateur infinitésimal est borné.

Notons également que si le semigroupe est fortement continu à l'origine, alors son générateur infinitésimal est un opérateur fermé, c'est à dire que son graphe $G := \{x, Ax\}_{x \in D(A)}$ est fermé dans $E \times E$.

3.2 Distance entre éléments d'un semigroupe dans une algèbre de Banach

Soit $n \geq 0$ un entier, et soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe dans une algèbre de Banach. On démontre que si

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|T(t) - T((\gamma + 1)t)\| < \frac{n}{(n + 1)^{1 + \frac{1}{n}}},$$

alors ou bien $T(t) = 0$, ou bien la sous algèbre fermée A engendrée par $(T(t))_{t>0}$ est unitaire, et qu'il existe $u \in A$ tel que $T(t) = Je^{tu}$ pour $t > 0$ où J désigne l'unité de A . Ceci est une généralisation des résultats obtenus par Mokhtari dans [11] pour $n = 1$, où il supposait le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ continu en norme pour $t > 0$ et borné à l'origine, et de résultats obtenus dans sa thèse pour $n = 1$ et $n = 2$, où supposait seulement que le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ était continu en norme pour $t > 0$.

Pour démontrer ce résultat, les auteurs de [5] ont commencé par discuter les semigroupes dans \mathbb{C} c'est à dire les applications

$$\theta : K^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

$$\theta(s + t) = \theta(s)\theta(t)$$

pour $s, t \in K^+$, K^+ désignant l'ensemble des éléments strictement positif d'un sous-corps K de \mathbb{R} . Ils vérifient que si θ n'est pas continu alors ou bien

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = 2,$$

ou bien

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = +\infty$$

pour tout $\gamma \in K^+$. Ensuite ils considèrent un semigroupe $(T(t))_{t \in K^+}$, dans une algèbre de Banach commutative A . Ils remarquent que si $\gamma \in K^+$, et si

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \rho(T(t) - T(t(\gamma + 1))) < 2,$$

alors l'application $t \rightarrow \phi(T(t))$ est continue sur K^+ pour tout $\phi \in \hat{A}$.

Le deuxième point important était l'étude de la fonction

$$f : x \rightarrow x - x^{\gamma+1}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $\gamma > 0$. Il est a remarqué que si

$$\delta \in \left] 0, \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \right[$$

alors $f^{-1}([0, \delta])$ est la réunion de deux intervalles disjoints $[0, s_1]$ et $[s_2, 1]$, ce qui permis de déduire que si

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \rho(T(t) - T((\gamma + 1)t)) < \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

et que si le semigroupe $(T(t))_{t>0}$ n'est pas quasinilpotent alors $A/\text{Rad}(A)$ est unitaire, et d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit K un sous-corps de \mathbb{R} , soit $(T(t))_{t \in K^+}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t \in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$. Si*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \rho(T(t) - T((\gamma + 1)t)) < \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors $A/\text{Rad}(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A , un élément u de JA et une application $r : t \rightarrow x(t)$ de K^+ dans $\text{Rad}(JA)$ possédant les propriétés suivantes :

- (i) $\phi(J) = 1$ pour tout $\phi \in \hat{A}$,
- (ii) $r(s + t) = r(s) + r(t)$ pour $s, t \in K^+$,
- (iii) $JT(t) = Je^{tu+r(t)}$ pour $t \in K^+$,
- (iv) $(T(t) - JT(t))_{t \in K^+}$ est un semi-groupe quasinilpotent.

Ce qui a permis d'obtenir le corollaire suivant :

Corollère 3.2.1 *Soit $(T(t))_{t \in K^+}$ un semi-groupe non nul dans une algèbre de Banach commutative semi-simple soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t \in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$. Si*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \rho(T(t) - T((\gamma + 1)t)) < \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

alors A est unitaire et il existe un élément u de A tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t \in K^+$.

Posons

$$U_\gamma = D\left(0, \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}\right) \text{ pour } \gamma > 0.$$

La démonstration du théorème suivant se base sur le fait que

$$g_\gamma : U_\gamma \rightarrow \mathbb{C}$$

tel que $g_\gamma(0) = 0$ et telle que

$$e^{g_\gamma(z)} - e^{(\gamma+1)g_\gamma(z)} = z$$

pour $z \in U_\gamma$.

Théorème 3.2.2 *Soit K un sous-corps de \mathbb{R} , soit $(T(t))_{t \in K^+}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t \in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$, Si*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|(T(t) - T((\gamma + 1)t))\| < \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^{1 + \frac{1}{\gamma}}},$$

alors il existe un idempotent J de A et $u \in JA$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$
- (ii) $(T(t) - JT(t))_{t \in K^+}$ est un semi-groupe quasinilpotent,
- (iii) $JT(t) = e^{tu}$ pour $t \in K^+$

Avec les conditions ci-dessus, $tu + r(t) = g(JT(t) - JT(t(\gamma + 1)))$ pour t assez petit, ce qui permet de déduire que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|r(t)\| < +\infty$$

c'est à dire que r est continue. Ce qui ramène le travail au cas des semigroupes quasinilpotents et donne les résultats suivants.

Théorème 3.2.3 *Soit K un sous-corps de \mathbb{R} , soit $(T(t))_{t \in K^+}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach. Soit A la sous algèbre fermée engendrée par $(T(t))_{t \in K^+}$ et soit $n \geq 1$ un entier. Si*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \|(T(t) - T((n + 1)t))\| < \frac{n}{(n + 1)^{1 + \frac{1}{n}}}$$

alors :

- ou bien $T(t) = 0$ pour $t \in K^+$,
- ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t \in K^+$.

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit x un élément d'une algèbre de Banach commutative A tel que

$$\|x\| \geq \frac{1}{(n + 1)^{\frac{1}{n}}}.$$

et

$$\|x - x^{n+1}\| \geq \frac{n}{(n + 1)^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

On déduit qu'il existe un idempotent non nul J de A tel que

$$\left\{ \phi \in \widehat{A} : \phi(J) = 1 \right\} = \left\{ \phi \in \widehat{A} : |\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \right\}.$$

le résultat suivant donne une formule explicite pour calculer un tel idempotent, valable pour tout entier positif n .

Théorème 3.2.4 *Soit A une algèbre de Banach, soit $n \geq 1$ un entier, et soit $x \in A$ tel que*

$$\|x\| \geq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

et

$$\|x - x^{n+1}\| \geq \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Soit U le disque de centre 0 et de rayon

$$\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}},$$

et soit h la fonction analytique définie sur U et contruite plus haut. Alors

$$|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

pour $\phi \in \widehat{A}$ et

$$J := (I - (n+1)h^n(x - x^{n+1}))^{-1} \left(\sum_{2 \leq k \leq n+1} C_{n+1}^k (x - h(x - x^{n+1}))^{k-1} h(x - x^{n+1})^{n+1-k} \right)$$

est un idempotent non nul de A vérifiant

$$x - h(x - x^{n+1}) = J(x - h(x - x^{n+1})).$$

De plus si $\phi \in \widehat{A}$ on a $\phi(J) = 1$ si $|\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et $\phi(J) = 0$ si $|\phi(x)| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Dans la dernière partie, les auteurs se limitent aux semigroupes localement bornés, c'est à dire aux semigroupes tels que

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|T(t)\| < +\infty$$

pour $0 < \alpha < \beta < +\infty$ et montrent que si la condition ci-dessus est vérifiée par un semigroupe localement borné non nul alors la sous algèbre fermée A engendrée par le semigroupe contient une suite croissante $(J_p)_{p \geq 1}$ d'idempotents telle que $U J_p A$ est dense dans A .

Si $T(t)_{t>0}$ est continu en norme, il y a des résultats plus précis :

- ou bien A est unitaire, et dans ce cas il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t > 0$.
- ou bien il existe une suite croissante $(J_p)_{p \geq 1}$ d'idempotents non nul de A telle que $U_{p \geq J_p A}$ est dense dans A et telle que pour $p \geq 1$ il existe $u_p \in J_p A$ vérifiant

$$J_p T(t) = e^{t u_p} \text{ pour } p \geq 1.$$

3.3 Distance près de l'origine entre éléments d'un semigroupe fortement continu

Dans [6] l'auteur s'est intéressé au voisinage de $\|T(t) - T(s)\|$ près de l'origine quand le générateur infinitésimal A du semigroupe fortement continu d'opérateurs bornés $(T(t))_{t>0}$ sur un espace de Banach X n'est pas borné sur son domaine D_A .

On pose

$$\theta(s/t) = \left(\frac{s}{t-1}\right)\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{s}{s-t}} = (s-t)\frac{t^{\frac{s}{s-t}}}{s^{\frac{s}{s-t}}}$$

si $0 < t < s$, valeur qui va jouer un rôle important pour le voisinage de $\|T(t) - T(s)\|$ quand le générateur infinitésimal du semigroupe n'est pas borné.

Soit \widehat{A}_T l'espace des caractères de la sous algèbre fermée \mathcal{A}_T de $B(X)$ engendrée par le semigroupe $(T(t))_{t>0}$. Posons

$$\sigma_T = \{|\phi(T(1))|\}_{\phi \in \widehat{A}_T} \cup \{0\}.$$

Dans le cas où

$$\widehat{A}_T = \emptyset,$$

le semigroupe est quasinilpotent.

On pourra distinguer quatre cas :

1. 0 est un point isolé de σ_T , et le semigroupe n'est pas quasinilpotent ;
2. il existe $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] \subset \sigma_T$, et dans ce cas il est clair qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T(s)\| > \theta(s/t) \text{ pour } 0 < t < s < \eta;$$

3. 0 n'est pas un point isolé de σ_T
4. $\sigma_T = \{0\}$ et le semigroupe est quasinilpotent.

Le résultat important suivant a été démontré dans le cas (4) :

Théorème 3.3.1 *Soit $(T(t))_{t>0}$ un semigroupe fortement continu, non nul d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X . Si $(T(t))_{t>0}$ est quasinilpotent, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|T(t) - T(s)\| > \theta(s/t) \text{ pour } 0 < t < s < \delta$$

Ce résultat est essentiellement optimal, comme le montre le résultat suivant :

Théorème 3.3.2 *Soit $\varepsilon : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue. Il existe alors un semigroupe quasinilpotent, continu en norme, non nul $(T_\varepsilon(t))_{t>0}$ d'opérateurs sur un espace de Hilbert séparable qui vérifie, pour $0 < t < s \leq 1$,*

$$\|T_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(s)\| \leq \theta(s/t) + (s-t)\varepsilon(s).$$

Dans les cas (1) et (3), J.Esterle a démontré, en utilisant les théorèmes précédents, les résultats suivant :

1. Si l'algèbre n'admet pas d'idempotents non nul, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|T(t) - T(s)\| \geq \theta(s/t) \text{ pour } 0 < t, s < \eta.$$

2. Plus précisément, s'il existe deux suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels vérifiant

$$0 < t_n < s_n, \quad \|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta(s_n/t_n)$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$, alors il existe des suites $(p_n)_{n \geq 1}$ d'idempotent de \mathcal{A}_T tel que $\phi(P_n) = 1$ quand n assez grand, pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{A}_T}$. Si en plus le semigroupe est continu en norme, alors la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions suivante :

- (i) $\bigcup_{n \geq 1} P_n \mathcal{A}_T$ est dense dans \mathcal{A}_T ;
 - (ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|P_n T(t) - P_n\| = 0$ pour $n \geq 0$, et le générateur infinitésimal du semigroupe $(P_n T(t))_{t > 0}$ est borné pour $n \geq 1$.
3. Soit $(T(t))_{t > 0}$ un semigroupe fortement continu non nul, d'opérateurs bornés sur un espace de Banach X . S'il existe $\delta > 0$ et une fonction continue

$$s : [0, \delta] \rightarrow (0, +\infty)$$

tel que $0 < t < s(t)$ et

$$\|T(t) - T(s(t))\| < \theta\left(\frac{s(t)}{t}\right) \text{ pour } 0 < t \leq \delta,$$

alors le générateur infinitésimal du semigroupe $(T(t))_{t > 0}$ est borné, et on a

$$\|T(t) - T(s(t))\| = |s - t|(\|u\| + M(s, t)|s - t|),$$

où

$$\sup_{0 < s, t \leq 1} |M(s, t)| < +\infty.$$

Pour les semigroupes fortement continus (voir [12] pour la théorie générale des semigroupes) on a des résultats très généraux, qui étendent en particulier le résultat ci-dessus au cas où n est non entier [6]. En fait s'il existe $t > 0$ tel que $T(t) \neq 0$, et s'il existe une fonction

$$t \rightarrow x(t)$$

définie et continue sur un intervalle $[0, \delta]$ telle que

$$x(0) = 0, \quad 0 < t < x(t)$$

et

$$\|T(t) - T(x(t))\| < (x(t) - t) \frac{\frac{t}{t^{x(t)-t}}}{\frac{x(t)}{(x(t))x(t)-t}}$$

pour $t \in]0, \delta]$, alors l'algèbre engendrée par le semigroupe possède une unité e et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - e\| = 0.$$

Des résultats analogues concernant la distance entre puissances d'une unité approchée bornée dans les algèbres de Banach ont été obtenus dans [3].

Un principe général qui sous-tend ces résultats, ainsi que les résultats obtenus par Kalton, Montgomery-Smith, Oleszkiewicz et Tomilov dans [9], est suivant :

soit f une fonction entière vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, soit $R > 0$ tel que

$$f : f^{-1}(D(0, R)) \longrightarrow D(0, R)$$

soit injective et soit

$$g : D(0, R) \longrightarrow f^{-1}(D(0, R))$$

la fonction analytique vérifiant $g(f(z)) = z$ pour tout $z \in f^{-1}(D(0, R))$. Si $g^{(n)}(0)$ est de signe constant pour $n \geq 1$ alors

$$\|g(y)\| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!} \|y\|^n = |g(\|y\||) \quad \text{pour } \|y\| < R.$$

D'autre part si $x \in A$, et si

$$\|f(x)\| < R,$$

on a

$$x = g[f(x)],$$

donc

$$\|x\| \leq |g(\|f(x)\||)$$

quand A ne possède aucun idempotent non nul (voir le théorème 3.1 de [5] pour une version très générale de ce résultat).

Ceci permet d'une part d'établir des inégalités dans les algèbres de Banach ne possédant pas d'idempotent non nul, et d'autre part de construire explicitement des idempotents dans les algèbres de Banach où ces inégalités ne sont pas vérifiées.

Par exemple les résultats de [8] sont basés sur ce principe appliqué à la fonction entière

$$f : z \rightarrow z - z^{n+1},$$

avec

$$R = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Dans [2] l'auteur obtenu les inégalités liées au comportement de la même fonction au voisinage de $1 \in f^{-1}(0)$, ou en d'autres termes appliquer le principe ci-dessus à la fonction

$$z \rightarrow 1 + z - (1+z)^{n+1}.$$

- La réponse à cette question, a été donné dans [2] au théorème 2.6.2 où il a été montré plus généralement, moyennant une hypothèse spectrale sur x permettant de définir le logarithme complexe au voisinage de $\text{Spec}(1+x)$, que si A ne possède aucun idempotent non trivial, et si

$$\|x\| \geq 1 - \frac{1}{(\gamma+1)^\gamma},$$

γ désignant un réel positif quelconque, alors

$$\|1+x - (1+x)^{\gamma+1}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}},$$

où

$$(1+x)^{\gamma+1} := e^{(\gamma+1)\log(1+x)}.$$

- Si A ne possède aucun idempotent non nul, et si

$$\|x\| \geq \frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}.$$

alors

$$\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| \geq \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}.$$

Ce résultat se déduit du fait, établi dans [2], que les dérivées successives en 0 de la fonction analytique g vérifiant

$$g(0) = 0 \text{ et } e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$$

au voisinage de 0 sont toutes négatives.

Remarque :

Le théorème 2.6.2 est basé sur le fait que $h^{(n)}(0) < 0$ pour $n \geq 1$, où $h = e^g - 1$ (lemme 2.6.4). On notera que si $u = e^v - 1$, avec $v(0) = 0$, alors le fait que les dérivées successives en 0 de u soient négatives entraîne que celles de v le sont aussi, alors que la réciproque est fautive. On voit donc que le théorème 2.6.2 ne peut se déduire du théorème 2.6.1.

Le théorème suivant [1], explicite l'idempotent dans le cas où la suite des $(p_n)_{n \geq 1}$ existe (l'existence a été démontré dans [6]).

Théorème 3.3.3 *Soit $T(t)_{t>0}$ un semi-groupe d'opérateurs fortement continu non nul. On suppose qu'il deux suites $(t_n)_{n \geq 1}$, et $(s_n)_{n \geq 1}$ de réels vérifiant*

$$0 < s_n < t_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$$

et

$$\|T(t_n) - T(s_n)\| < \theta\left(\frac{s_n}{t_n}\right),$$

de sorte que $(T(t))_{t>0}$ n'est pas quasinilpotent.

Soit $a > \rho(T(1))$, et posons $\tilde{T}(t) = e^{-at}T(t)$ pour $t > 0$. Alors il existe deux suites $(\tilde{t}_n)_{n \geq 1}$, et $(\tilde{s}_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs tels que

$$0 < \tilde{t}_n < \tilde{s}_n < s_n \text{ pour } n \geq 1, \quad \tilde{t}_n/\tilde{s}_n < s_n = s_n/t_n$$

vérifiant

$$\rho(\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n)) < \theta\left(\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}\right).$$

De plus si on pose, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} U_n &:= \tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n) = \tilde{T}(\tilde{t}_n)(I - \tilde{T}(\tilde{s}_n - \tilde{t}_n)) \\ V_n &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{T}(k(\tilde{s}_n - \tilde{t}_n))}{k} \\ W_n &:= g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} U_n \end{aligned}$$

$$P_n := I - g'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} \left((\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}} \right) \int_0^1 f'_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} \left(tV_n + (1-t) \left(g_{\frac{\tilde{s}_n}{\tilde{t}_n}} (\tilde{T}(\tilde{t}_n) - \tilde{T}(\tilde{s}_n))^{\frac{\tilde{s}_n - \tilde{t}_n}{\tilde{t}_n}} \right) \right) dt,$$

on a les propriétés suivantes :

1. $(P_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'idempotents de A_T telle que $P_n(V_n - W_n) = V_n - W_n$ pour $n \geq 1$, et pour tout compact $K \subset \widehat{A_T}$, il existe $n_K \geq 1$ tel que $\chi(P_n) = 1$ pour tout $\chi \in K$ et pour tout $n \geq n_K$.
2. L'algèbre fermée engendrée par $(P_n T(t))_{n \geq 0}$ est unitaire d'unité P_n pour tout $n \geq 1$.

Bibliographie

- [1] Z. Bendaoud, *Comportement à l'origine de la distance entre éléments d'un semi-groupe fortement continu et inégalités dans les algèbres de Banach*, thèse de Université de Bordeaux I 2008.
- [2] Z. Bendaoud, J. Esterle, and A. Mokhtari, *Distances entre exponentielles et puissances d'éléments de certaines algèbres de Banach.*, Archiv der Mathematik 89 (2007), no. 3, 243-253.
- [3] M. Berkani, *Inégalités dans les algèbres de Banach*, Bull. Sec. Math. Belg. Sér. B 42 (1990), no. 1, 105-116.
- [4] M. Berkani, J. Esterle, *Banach algebras with left sequential approximate identities close to their square*, Operators in indefinite metric spaces, scattering theory and other topics (Bucharest, 1985), Oper. theory Adv. Appl., vol. 24, Birkhäuser, Basel, 1987, pp. 29-40.
- [5] M. Berkani, J. Esterle, and A. Mokhtari, *Distance entre puissances d'une unité approchée bornée*, J. London Math. Soc. (2) 67 (2003), no. 2, 461-480.
- [6] J. Esterle, *Distance near the origin between elements of a strongly continuous semigroup*, Ark. Mat. 43 (2005), no. 2, 365-382.
- [7] J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞ , and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*, Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981), Lecture Notes in Math., vol. 975, pp. 66-162.
- [8] J. Esterle, and A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe dans une algèbre de Banach*, J. Funct. Anal. 195 (2002), no. 1, 167-189.
- [9] N. Kalton, S. Montgomery-Smith, K. Oleszkiewicz, and Y. Tomilov, *Power-bounded operators and related norm estimates*, J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), no. 2, 463-478.
- [10] A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe continu dans une algèbre de Banach*, thèse de 3ème cycle, bordeaux 1988,.
- [11] A. Mokhtari, *Distance entre éléments d'un semi-groupe continu dans une algèbre de Banach*, J. Operator Theory 20(1988), no. 2, 375-380.
- [12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

-
- [13] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, The University Series in Higher Mathematics, D. van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York, 1960.
- [14] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics.