

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Amar Tledji Laghouat
Faculté de Technologie
Département d'électrotechnique

Polycopié de cours

Théorie de signal

Cours de 2^{ème} année licence automatique

Réalisé par : *Dr. Boufligha Messaoud*

Maitre de conférences, classe « B »

-2021-

AVANT-PROPOS

L'analyse mathématique des signaux fait l'objet de la théorie de signal alors que leur traitement est un moyen d'interprétation. Ce domaine trouve de nos jours une grande application dans différents secteurs.

Ce cours s'adresse aux étudiants de la deuxième année licence automatique (**LMD**), il est conforme au programme officiel de module (**théorie de signal**). Il permet aux étudiants de s'initier à une formation de base et d'acquérir des techniques d'analyse et de traitement de signal.

Ce polycopié de cours est structuré en cinq chapitres

Le premier chapitre, est dédié à la présentation des généralités et des notions de base qui concernent le signal.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'analyse de Fourier (développement en série et transformée de Fourier).

Le troisième chapitre, aborde les bases théoriques de la transformée de Laplace.

Le quatrième chapitre, traite en détail le produit de convolution des signaux.

Le cinquième chapitre, est réservé à l'étude de la corrélation des signaux à énergie finie et à puissance moyenne finie

En annexe, des notions de base sur les nombres complexes et des formules trigonométriques seront présentées.

Nous mentionnons que ce cours est enrichi d'exemples aidant l'étudiant à une bonne compréhension.

Table de matières

Avant-propos	I
Chapitre I	Généralités sur les signaux
Introduction	1
I.1. Définitions.....	1
I.1.1. Système.....	1
I.1.1.1 Système linéaire.....	1
I.1.1.1 Système invariant dans le temps.....	1
I.1.2. Signal.....	2
I.1.3 Bruit.....	2
I.1.4 Rapport signal sur bruit.....	2
I.1.5 Théorie de signal.....	2
I.1.6 Théorie de l'information.....	2
I.1.7 Traitement de signal.....	2
I.2 Objectif de la théorie de signal.....	2
I.3 Domaines d'application du traitement de signal.....	3
I.4 Energie et puissance d'un signal sur un intervalle.....	3
I.5 Energie et puissance totale d'un signal.....	3
I.6 Classification des signaux.....	5
I.6.1 Classification morphologique.....	5
I.6.2 Classification spectrale.....	6
I.6.3 Classification phénoménologique.....	7
I.6.4 Classification énergétique.....	8
I.6.5 Classification dimensionnelle.....	8
I.6.6 Autres classifications.....	9
I.7 Catégories et types des signaux.....	12
I.7.1 Catégories des signaux déterministes.....	12
I.7.2 Catégories des signaux aléatoires.....	14
I.8 Principe de causalité.....	14
I.9 Fonctions de base en traitement de signal.....	15
I.10 Signaux de base.....	15
I.10.1 Fonction signe.....	15
I.10.2 Echelon unité (échelon de Heaviside).....	16
I.10.3 Fonction rampe.....	16
I.10.4 Fonction rectangulaire.....	17
I.10.5 Fonction triangulaire.....	17
I.10.6 Impulsion de Dirac.....	18
I.10.7 Peigne de Dirac.....	19
I.10.8 Sinus Cardinal.....	20
Conclusion	20

Chapitre II	Analyse de Fourier	
Introduction		21
II.1 Analyse fonctionnelle et espace vectoriel des signaux.....		21
II.1.1 Distance euclidienne.....		21
II.1.2 Espace des signaux à énergie finie.....		21
II.1.3 Produit scalaire.....		21
II.1.4 Développement d'un signal sur une base.....		22
II.2 Fonctions orthogonales et orthonormales.....		22
II.2.1 Fonctions orthogonales.....		22
II.2.2 Fonctions orthonormales.....		22
II.3 Changement de représentation.....		22
II.4 Analyse fréquentielle.....		23
II.4.1 Développement en série de Fourier.....		23
II.4.1.1 Conditions d'existence de la série de Fourier.....		23
II.4.1.2 Série de Fourier à coefficients réels.....		23
II.4.1.3 Série de Fourier à coefficients complexes.....		23
II.4.1.4 Relation entre les coefficients réels et complexes de la série de Fourier.....		23
II.4.1.5 Types de développement en série de Fourier.....		24
II.4.1.5.1 Développement en série de Fourier à coefficients réels.....		24
II.4.1.5.2 Développement en série de Fourier à coefficients harmoniques.....		25
II.4.1.5.3 Développement en série de Fourier à coefficients complexes.....		25
II.4.1.5.4 Exemples de décomposition en séries de Fourier.....		26
II.4.1.5.5 Spectre de phase et d'amplitude.....		29
II.4.1.5.6 Limitation de développement en série de Fourier.....		30
II.4.2 Transformée de Fourier.....		30
II.4.2.1 Définition.....		30
II.4.2.2 Conditions d'existence de la transformé de Fourier.....		30
II.4.2.3 Propriétés de la transformée de Fourier.....		31
II.4.2.4 Théorème de Parseval.....		34
II.4.2.5 Table des Transformées de Fourier.....		34
Conclusion		34

Chapitre III	Transformée de Laplace	
Introduction		36
III.1 Transformée de Laplace.....		36
III.1.1 Définition.....		36
III.1.2 Transformée de Laplace inverse.....		37
III.1.3 Propriétés fondamentales de la transformé de Laplace.....		38
III.2 Calcul opérationnel.....		41
III.3 Application de la transformé de Laplace à un circuit électrique.....		42

III.4 Fonction de transfert d'un système.....	44
III.4.1 Définition.....	44
III.4.2 Résolution d'un problème à l'aide de la fonction de transfert.....	45
III.5 Table des transformées de Laplace.....	46
Conclusion	46
Chapitre IV	Produit de convolution
. Introduction.....	47
IV.1. Le produit de convolution.....	47
IV.1.1 Définition.....	47
IV.1.2 Réponse indicielle.....	47
IV.1.3 Réponse impulsionnelle.....	48
IV.1.4 Formulation de produit de convolution.....	48
IV.2 Etapes et opérations dans le produit de convolution.....	49
IV.3 Propriétés de produit de convolution.....	49
IV.4 Produit de convolution et impulsion de Dirac.....	49
IV.5 Théorème de produit(théorème de Plancherel).....	50
IV.6 Interprétation graphique de la convolution.....	50
IV.7 Exemple de calcul de produit de convolution.....	51
Conclusion	51
Chapitre V	Corrélation des signaux
Introduction.....	54
V.1 Corrélation.....	54
V.1.1 Corrélation des signaux à énergie finie.....	54
V.1.1.1 Fonction d'intercorrélation.....	54
V.1.1.2 Fonction d'autocorrélation.....	55
V.1.1.3 Relation entre corrélation et convolution.....	56
V.1.1.4 Densité spectrale d'énergie.....	56
V.1.2 Corrélation des signaux à puissance moyenne finie.....	58
V.1.2.1 Fonction d'intercorrélation.....	58
V.1.2.2 Fonction d'autocorrélation.....	59
V.1.2.3 Densité spectrale de puissance.....	59
V.1.3 Corrélation des signaux périodiques.....	61
V.2 Théorème de Wiener-Khintchine.....	61
Conclusion	62
Bibliographies.....	63
Annexe.....	64

Chapitre I : Généralités sur les signaux

Introduction

L'analyse mathématique des signaux fait l'objet de la théorie de signal. Certains signaux élémentaires présentent une description et un comportement spécifique. Il est nécessaire de présenter dans ce premier chapitre quelques notions, définitions de base, et les caractéristiques de ces signaux particuliers.

I.1.Définitions

I.1.1 Système

Ensemble isolé de dispositifs établissant un lien de cause à effet entre des signaux d'entrées (commandes, consignes, perturbations) et des signaux de sorties (réponses ou mesures),

Exemple : Amplificateur, téléphone,

I.1.1.1 Système linéaire

Un système est caractérisé par une transformation F est linéaire si et seulement si

$\forall(x_1(t), x_2(t))$ et $\forall(\alpha, \beta)$ on a

$$F[\alpha.x_1(t) + \beta.x_2(t)] = \alpha F[x_1(t)] + \beta F[x_2(t)] \tag{I.1}$$

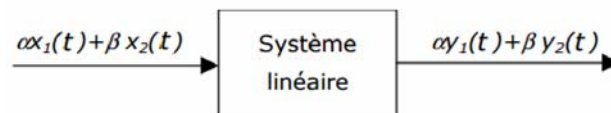


Fig.1 Représentation d'un système linéaire

I.1.1.2 Système invariant dans le temps

Un système caractérisé par une transformation F est invariant dans le temps ou stationnaire si et seulement si une translation temporelle sur l'entrée entraîne la même translation sur la sortie.

$\forall x(t)$ et $\forall t_0$ on a

$$y(t - t_0) = F[x(t - t_0)] \tag{I.2}$$

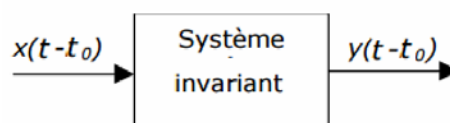


Fig. 2 Représentation d'un système invariant dans le temps

I.1.2 Signal

Un signal $x(t)$ est la représentation physique de l'information qu'il transporte d'une source à un destinataire

Exemple: courant électrique.

I.1.3 Bruit

On appelle bruit (noise) toute perturbation indésirable, $b(t)$ qui se superpose au signal et aux données utiles dans un canal de transmission ou un système de traitement de ce signal, on peut noter le signal bruité par $y(t) = x(t) + b(t)$

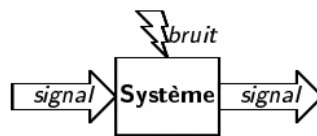


Fig.3 Représentation de l'influence d'un bruit sur un signal

I.1.4 Rapport signal sur bruit

Ce rapport mesure le degré de contamination du signal par le bruit. Il mesure aussi la qualité du signal. Il est donné par le rapport des puissances du signal P_s et du bruit P_b en dB(décibel)

$$RSB_{dB} = 10 * \log\left(\frac{P_s}{P_b}\right) \quad (I.3)$$

Ou \log (logarithme décimal)

I.1.5 Théorie de l'information

La théorie de l'information est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission des messages véhiculés d'une source vers un destinataire

I.1.6 Traitement de signal

Le traitement de signal est l'ensemble des méthodes et algorithmes qui permettent d'élaborer et d'interpréter un signal. son but est en effet d'extraire le maximum d'information utile sur un signal perturbé par un bruit.

I.1.7 Théorie de signal

La théorie de signal est l'ensemble des outils mathématiques qui permettent de décrire et modéliser les signaux

I.2 Objectif de la théorie du signal

L'objectif principal de la théorie du signal est la description mathématique des signaux. Cette description permet de mettre en évidence les principales caractéristiques de signal

(distribution fréquentielle, énergie,) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ce signal.

I.3 Domaines d'application de traitement de signal

Le traitement de signal trouve son application dans les domaines suivants

- Télécommunication
- Techniques de mesures
- Vibration mécaniques
- Surveillances des processus industriels
- Radar
- Traitement d'image, vidéos et son
- Analyse biomédical
- Géophysique
- Asservissement et régulation

I.4 Energie et puissance d'un signal sur un intervalle

Si un signal $x(t)$ est limité dans le temps, c'est-à-dire que $x(t)$ n'est définie que dans l'intervalle: $t_1 \leq t \leq t_2$, alors on peut exprimer son énergie $E(t_1, t_2)$ et sa puissance $p(t_1, t_2)$ par

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.4})$$

$$p(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.5})$$

Remarque

Sa valeur efficace est donnée par

$$X_{eff} = \sqrt{P(t_1, t_2)} \quad (\text{I.6})$$

I.5 Energie et puissance totales d'un signal

1. Energie totale

L'énergie totale E d'un signal est donnée par l'intégrale suivante

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.7})$$

Si cette intégrale existe, c'est à dire

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{I.8})$$

Ce signal est à énergie finie

2. Puissance totale

La puissance totale d'un signal est donnée par

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \tag{I.9}$$

Si $0 < P < +\infty$ ce signal est puissance moyenne finie.

La valeur efficace est définie par

$$X_{eff} = \sqrt{P} \tag{I.10}$$

Remarques

1. dans le cas d'un signal complexes, en remplace $|x(t)|^2$ par $x(t).x^*(t)$
2. dans le cas des signaux périodiques, la puissance moyenne totale est égale à la puissance moyenne sur une période

Exemple 1: Energie du signal $x(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$

L'énergie E de ce signal est donné par:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt$$

$x(t)$ étant une fonction réelle, l'énergie s'exprime tout simplement par:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t} u(t) dt$$

$$E = A^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\alpha t} dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt$$

$x(t)$ étant non-nulle que pour les valeurs de temps positives.

$$E = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = A^2 \left. \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \right|_0^{\infty}$$

$$E = \frac{-A^2}{2\alpha} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{-A^2}{2\alpha} (0 - 1)$$

$$E = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Donc sur de temps $t \in [0, \infty)$, le signal $x(t)$ est d'énergie finie $E = \frac{A^2}{2\alpha}$

Exemple 2: Energie du signal $x(t) = A \sin(2\pi f_c t)$

L'énergie est donné par

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_c t) A \sin(2\pi f_c t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_c t) dt$$

Or

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)]$$

Donc

$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_c t) dt = \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(4\pi f_c t)] dt = \frac{A^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4\pi f_c t) dt \right]$$

La première intégrale résulte en une valeur infinie alors que la seconde a une valeur bornée par -1 et +1. Donc $E \rightarrow \infty$

Exemple 1: puissance du signal $x(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$

Calculons maintenant la puissance moyenne de ce signal $x(t)$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2\alpha T} = 0$$

Le signal $x(t) = Ae^{-\alpha t} u(t)$ est donc un signal de puissance moyenne nulle, i.e. $P = 0$.

Exemple 2: puissance du signal $x(t) = A \sin(2\pi f_c t)$

La puissance moyenne du signal $x(t)$ est donné par:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \sin(2\pi f_c t) dt$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \sin^2(2\pi f_c t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_c t) dt \right]$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{A^2}{2} - \underbrace{\frac{A^2}{4\pi f_c T} \sin\left(4\pi f_c \frac{T}{2}\right)}_{\text{tend vers 0 pour } T \rightarrow \infty} \right] = \frac{A^2}{2}$$

On peut conclure que le signal $x(t)$ est un signal de puissance moyenne finie et non-nulle.

I.6 Classifications des signaux.

Un signal peut être classé selon différentes critères

I.6.1 Classification morphologique

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est continu ou discrète et que la variable t (temps) est elle-même continue ou discrète. (Fig.4) ou TC et TD désignent respectivement temps continu et temps discret

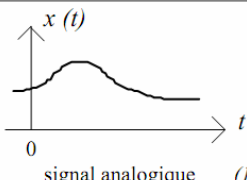
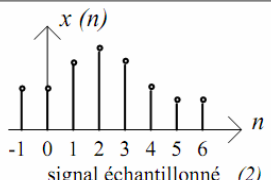
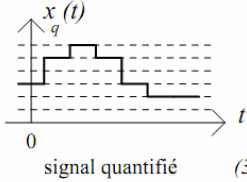
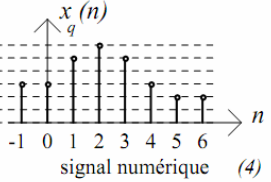
	TC	TD
Amplitude Continue	 <p>signal analogique (1)</p>	 <p>signal échantillonné (2)</p>
Amplitude Discrete	 <p>signal quantifié (3)</p>	 <p>signal numérique (4)</p>

Fig.4 Exemple des signaux à amplitude et temps continu ou discret

- Un signal $x(t)$ à amplitude et temps continus est appelé signal analogique
- Un signal $x_q(t)$ à amplitude discret et temps continu est appelé signal quantifié
- Un signal $x(n)$ à amplitude continue et temps discret est appelé signal échantillonné
- Un signal $x_q(n)$ à amplitude et temps discret est appelé signal numérique

I.6.2 Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution $\Phi_x(f)$ de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre de signal)

* Signaux à basse fréquences

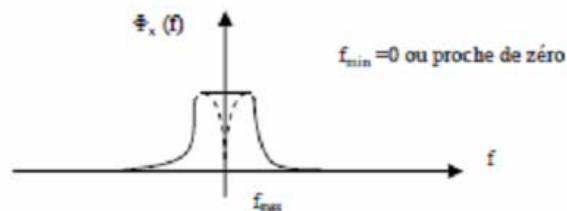


Fig.5 Représentation d'un signal à basses fréquences

* Signaux à haute fréquences

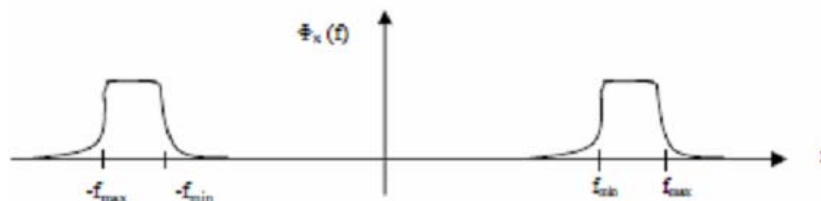


Fig.6 Représentation d'un signal à hautes fréquences

* Signaux à bande étroite

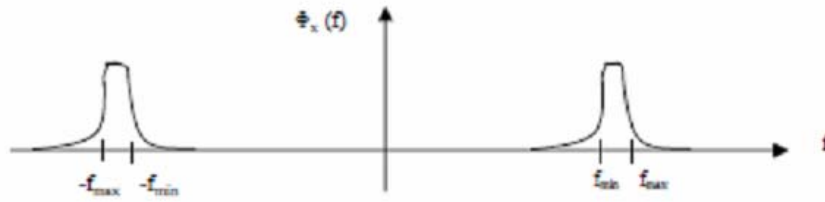


Fig.7 Représentation d'un signal à bande étroite

* Signaux à large bande

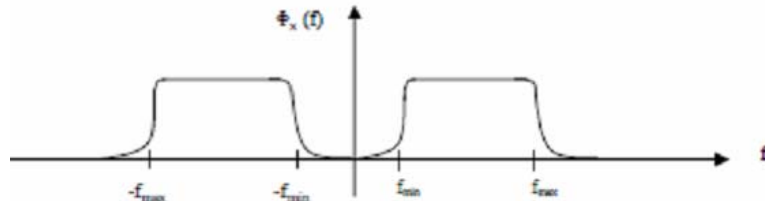


Fig.8 Représentation d'un signal à bande large

I.6.3 Classification phénoménologique

Dans cette classe on peut trouver

a) Signaux déterministes

Les signaux déterministes ou certains sont des signaux dont l'évolution dans le temps peut être représenté par un modèle mathématique. (Signal sinusoïdal, carré, impulsion exponentielle,...). Fig.9 est une représentation d'une impulsion exponentiel (signal déterministe défini par

$$s(t) = \exp(-at), a > 0 \tag{I.11}$$

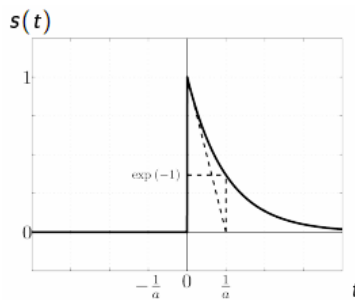


Fig.9 Représentation d'un signal déterministe

b) Signaux aléatoires: Se sont des signaux dont le comportement temporel est imprévisible. Ils sont plutôt caractérisés par leurs propriétés statistiques (moyenne, variance, loi de probabilité,...).

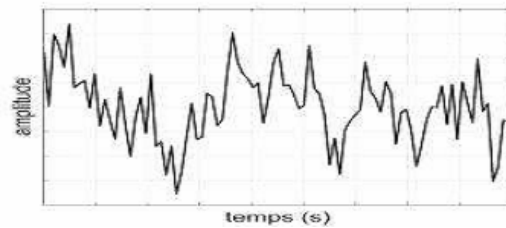


Fig.10 Représentation d'un signal aléatoire

I.6.4 Classification énergétique

Dans cette classe on peut distinguer

a) Signaux à énergie finie

Ils sont caractérisés par une énergie finie (constante) et une puissance moyenne nulle. Cette catégorie comprend les signaux de type transitoire qu'ils soient déterministes ou aléatoires.

b) Signaux à puissance moyenne finie

Ils sont caractérisés par une énergie infinie et une puissance moyenne constante. Cette classe comprend les signaux périodiques, les signaux aléatoires permanents et les signaux aperiodiques non transitoires

I.6.5 Classification dimensionnelle

On peut tenir de ce critère de deux manières différentes: La dimension du signal et la dimension des variables

- **Signal scalaire**: Signal à la sortie d'un microphone
- **Signal vectoriel** : champs électrique dans l'espace

Exemples

Un signal de télévision : Si on considère les trois couleurs de l'image, ce signal prend des valeurs dans un espace à trois dimensions et sera représenté comme suit

$$TV(t) = (R, V, B) \quad (I.12)$$

Par contre si on s'intéresse à la luminance (L), ce signal prend ses valeurs dans un espace à une dimension et sera exprimé par

$$TV(t) = L \quad (I.13)$$

Ce dernier signal peut être fonction du temps, t et aussi des variables cartésiennes correspondant à un point de l'écran : $TV(t, x, y) = L$ (c'est un signal tridimensionnel)

I.6.6 Autres classifications

a) Signaux de durée finie

Les signaux dont l'amplitude est nulle en dehors d'un intervalle de temps T , $x(t)=0$ pour t n'appartient pas à T sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné.

b) Signaux bornés en amplitude

C'est les signaux pour lesquels l'amplitude ne peut dépasser une certaine valeur limite $|x(t)| \leq K$ pour $-\infty < t < +\infty$

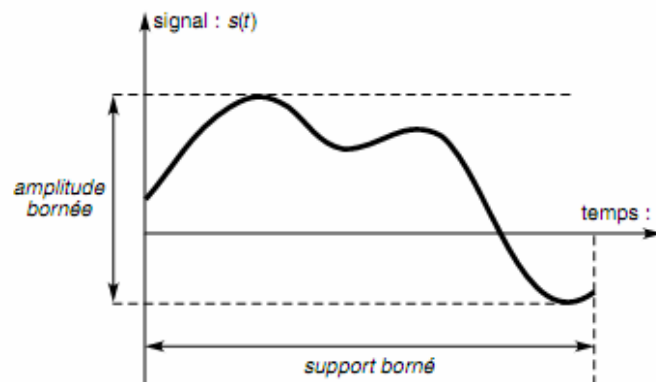


Fig. 11 Représentation d'un signal à amplitude et support bornés

c) Signaux pair et impair

* Un signal $f(t)$ est pair si $f(t) = f(-t)$

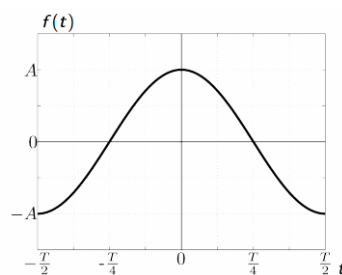


Fig.12 Représentation d'une fonction paire

* Un signal $f(t)$ est impair si $f(t) = -f(-t)$

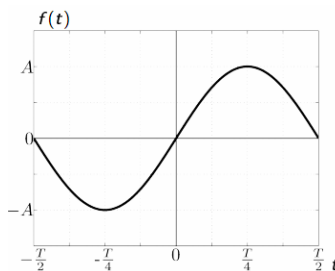


Fig.13 Représentation d'une fonction impaire

De même on peut décomposer un signal en deux signaux pair et impair tel que

$$x(t) = x_{\text{pair}}(t) + x_{\text{impair}}(t)$$

(I.14)

d) Fonction (signal) périodique

Les fonctions périodiques sont définies par la relation suivant

$$f_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} f_T(t - KT) \tag{I.15}$$

Où $K \in \mathbb{N}$, si $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f_T(t) = f_T(t + T) \tag{I.16}$$

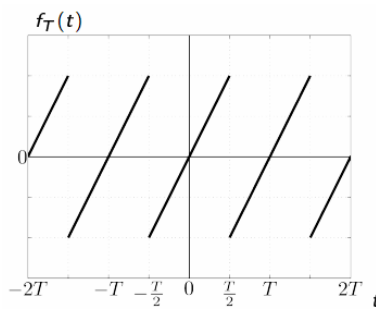


Fig.14 Représentation d'une fonction périodique

e) Fonction décalée (Translation verticale)

Un décalage est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$, la fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = f(t) + a \tag{I.17}$$

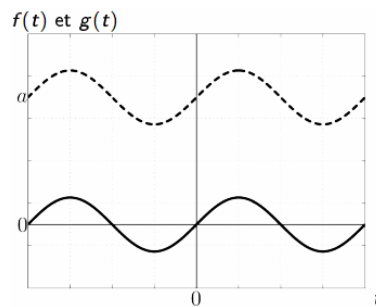


Fig.15 Représentation d'une fonction décalée verticalement

f) Fonction dilatée

Un changement d'échelle (dilatation) est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = f(at) \tag{I.18}$$

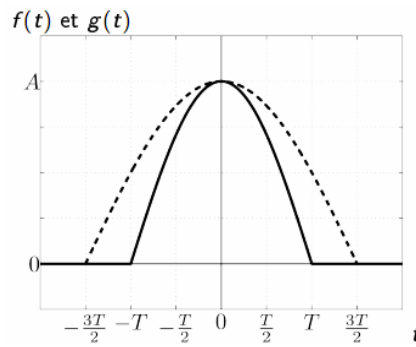


Fig.16 Représentation d'une fonction dilatée

g) Fonction compressée

Un changement d'échelle (compression) est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = f(t/a) \tag{I.19}$$

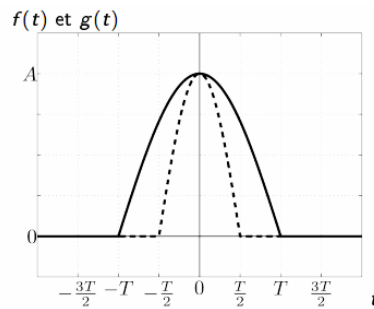


Fig.17 Représentation d'une fonction compressée

h) Fonction retardée (translation horizontale)

La fonction $g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée de t_0 ($t_0 > 0$). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$g(t) = f(t - t_0) \tag{I.20}$$

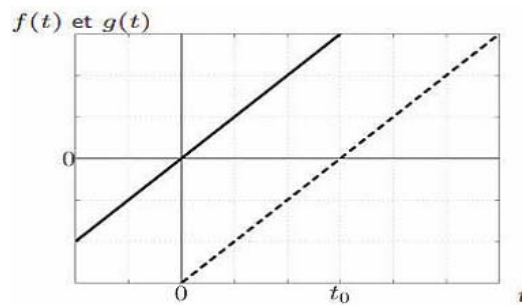


Fig.18 Représentation d'une fonction retardée

I.7 Catégories et types des signaux

Les signaux peuvent être regroupés en deux grandes catégories (Fig.19)

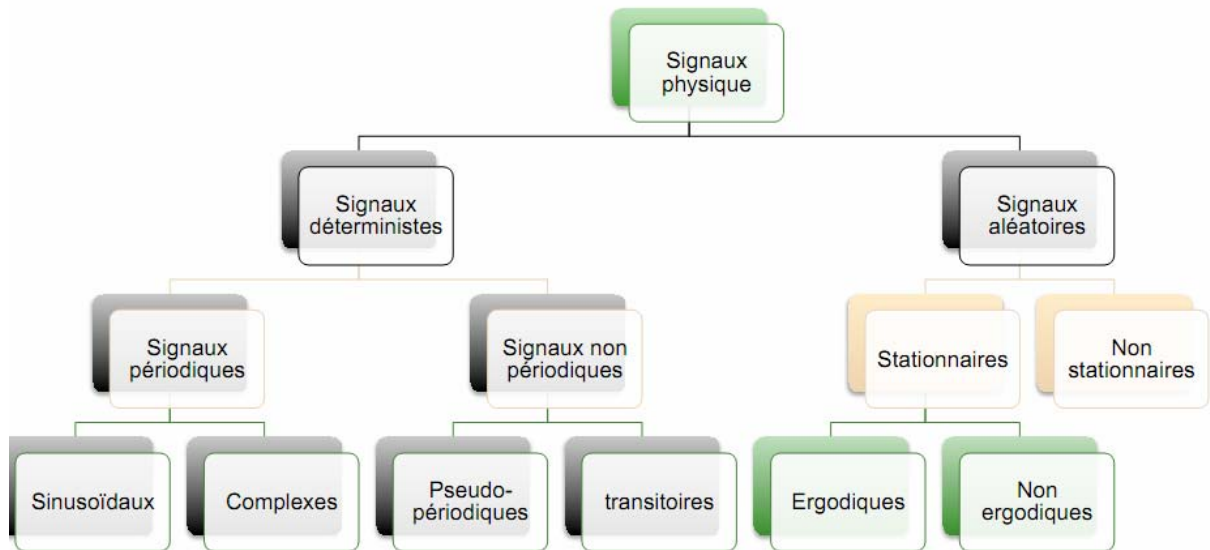


Fig.19 Catégories et types des signaux

I.7.1 Catégories des signaux déterministes

Dans cette catégorie, on peut distinguer

1) Signaux périodiques

Ces signaux obéissent à la relation suivante

$$s(t) = s(t + KT) \tag{I.21}$$

Ou T est la période et K un entier. Dans cette catégorie on distingue

*** Signaux sinusoïdaux**

L'équation générale de ce type de signaux est donnée par

$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi) \tag{I.22}$$

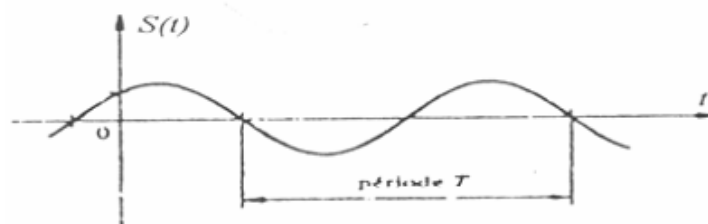


Fig.20 Représentation d'un signal sinusoïdal

* **Signaux complexes**

Ces signaux sont caractérisés par l'équation suivante

$$S(t) = \sum_n (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \tag{I.23}$$



Fig.21 Représentation d'un signal complexe

2) **Signaux non-périodiques**

Dans cette catégorie on peut distinguer

* **Signaux pseudo-aléatoire**

Ces signaux sont périodiques, mais sur une période, ils se comportent comme des signaux aléatoires

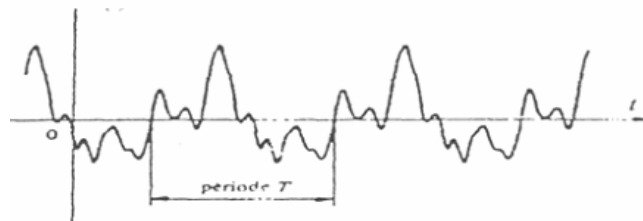


Fig.22 Représentation d'un signal pseudopériodique

* **Signaux transitoires**

Ces signaux sont définis sur un intervalle et sont caractérisés par l'équation générale suivante

$$s(t) = \exp(-at) \sin(\omega t) \tag{I.24}$$

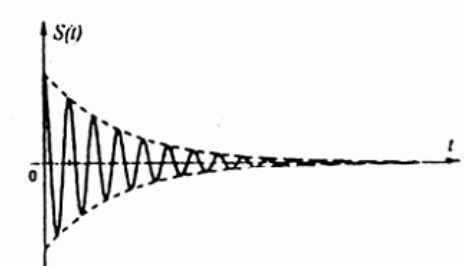


Fig.23 Représentation d'un signal transitoire

I.7.2 Catégorie des signaux aléatoires

Dans cette catégorie, on peut trouver

1) Signaux stationnaires:

Les propriétés statistiques de ces signaux sont invariantes dans le temps(ex: signaux ergodiques)

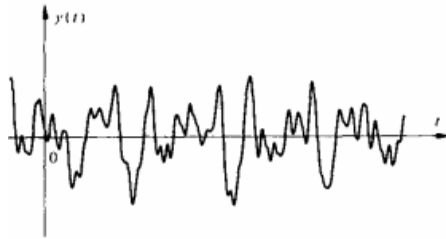


Fig.24 Représentation d'un signal stationnaire

2) Signaux non stationnaires

Ces signaux peuvent être quelconques(ex: signaux non ergodiques)

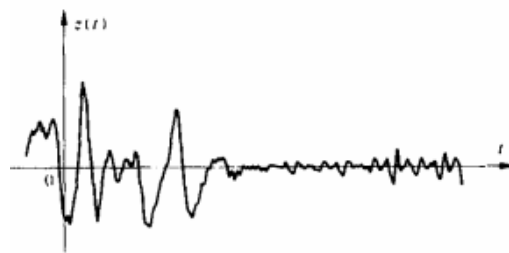


Fig.25 Représentation d'un signal non-stationnaire

I.8 Principe de causalité

Un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause.

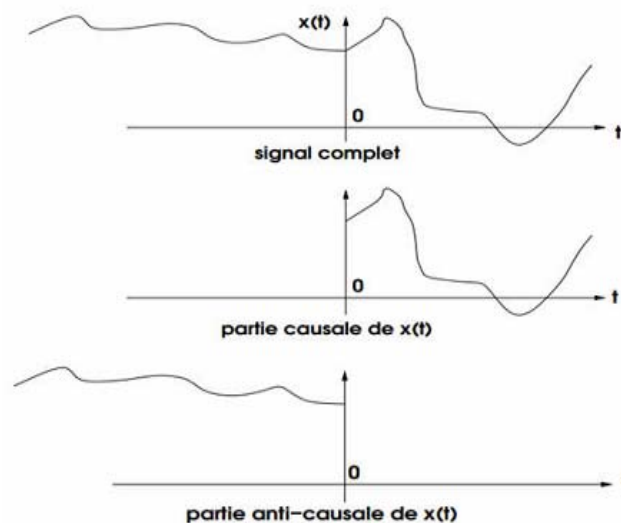


Fig.26 illustration du principe de causalité

Un système est dit causal, s'il respecte cette propriété, c'est-à-dire que si le signal d'entrée $e(t)$ est nul pour $t > t_0$, il en est de même pour le signal de sortie $s(t)$ i.e Si

$$e(t) = 0 \forall t \leq t_0 \Rightarrow s(t) = 0 \forall t \leq t_0$$

I.9 Fonctions de bases en traitement de signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories

a) Elaboration des signaux (incorporation des informations)

- **Synthèse** : création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison de signaux élémentaires.
- **Modulation**, changement de fréquence : moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission
- **Codage** : traduction en code binaire

b) Interprétation des signaux (extraction des informations).

- **Filtrage** : élimination de certaines composantes indésirables
- **Détection** : extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation)
- **Identification** : classement d'un signal dans des catégories préalablement définies
- **Analyse** : isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme complexe (transformée de Fourier)
- **Mesure** : estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.)

I.10 Signaux de base

I.10.1 Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

La valeur à l'origine est nulle. Par convention $\text{sgn}(0)=0$. On peut écrire aussi si $t \neq 0$

$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad (\text{I.26})$$

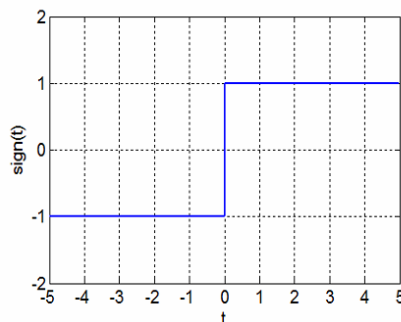


Fig.27 Représentation de la fonction signe

I.10.2 Echelon unité (Echelon de Heaviside)

Elle peut être définie à partir de la fonction sign comme suit

$$u(t) = \frac{1}{2} + \text{sgn}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (\text{I.27})$$



Fig.28 Représentation de la fonction échelon unité

Sa valeur à l'origine par convention est 1

I.10.3 Fonction rampe

Elle est définie à partir de l'échelon unité

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau = t \cdot \varepsilon(t) \quad (\text{I.28})$$



Fig.29 Représentation de la fonction rampe

I.10.4 Fonction rectangulaire (fonction porte)

$$\text{rect}(t) = \varepsilon\left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

La valeur conventionnelle aux abscisse $t = \pm \frac{1}{2}$ est 1

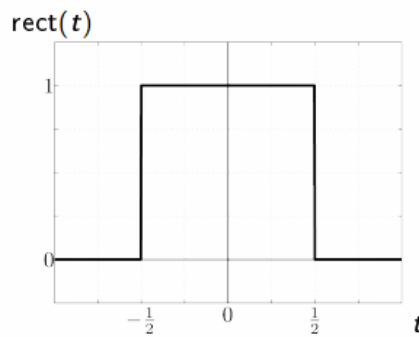


Fig.30 Représentation de la fonction rectangulaire

Avec un changement de variable, une impulsion rectangulaire de durée T et d'amplitude 1, centré en $t = \tau$ est donnée par

$$x(t) = \text{rect}\left[\frac{t - \tau}{T}\right] \tag{I.30}$$

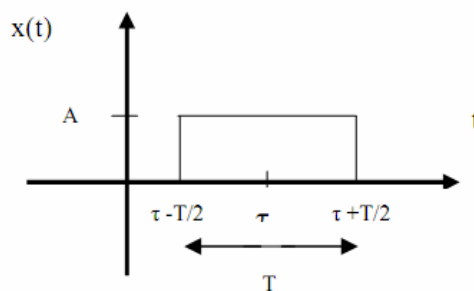


Fig.31 Représentation de la fonction rectangulaire décalée

La fonction rectangulaire intervient fréquemment comme facteur multiplicatif pour localiser un segment de durée T d'un signal quelconque

I.10.5 Fonction triangulaire

La fonction triangulaire est définie par

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{pour } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |t| \geq 1 \end{cases} \tag{I.31}$$

De plus on pourra définir cette fonction par

$$\text{tri}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(\tau) \cdot \text{rect}(t - \tau) d\tau \tag{I.32}$$

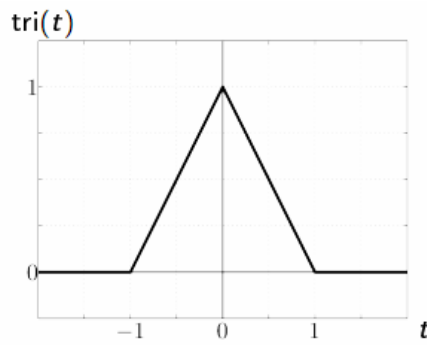


Fig.32 Représentation de la fonction triangulaire

Avec un changement de variable, une impulsion de forme triangulaire d'amplitude A et de base 2T centré en $t = \tau$ définit par

$$x(t) = A \text{tri}[(t - \tau)/T] \tag{I.33}$$

I.10.6 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ ou impulsion unité correspond à une fonction porte de largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1. Elle peut être formellement définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \tag{I.34}$$

Une représentation graphique est donnée par la figure suivante

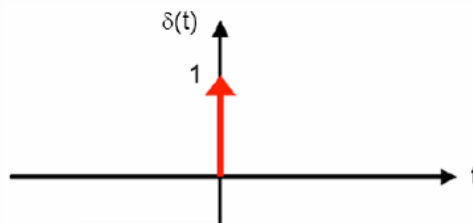


Fig.33 Représentation de l' impulsion de Dirac

Propriété de l'impulsion de Dirac

*** Intégrale**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{I.35}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \delta(t) dt = x(0) \tag{I.36}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \tag{I.37}$$

1. Produit

Soit $x(t)$ une fonction continue en $t=0$ ou $t=t_0$

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) = x(0) \tag{I.38}$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \tag{I.39}$$

2. Translation

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \tag{I.40}$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \tag{I.41}$$

3. Produit de convolution

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{I.42}$$

4. Identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \tag{I.43}$$

5. Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \tag{I.44}$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_2 - t_1) \tag{I.45}$$

6. Changement de variable

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}, \text{ avec en particulier si } \omega = 2\pi f.$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(f) \tag{I.46}$$

I.10.7 Peigne de Dirac

Une suite d'impulsion de Dirac se répétant sur l'axe de temps avec une période de T sera noté $\delta_T(t)$ qui est donnée par

$$\delta_T(T) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT) \tag{I.47}$$

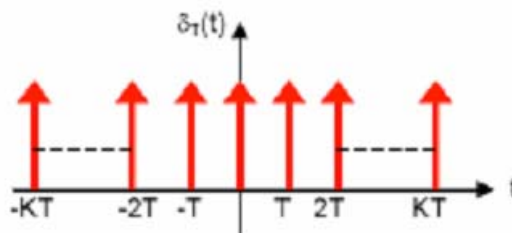


Fig.34 Représentation de la Peigne de Dirac

Cette fonction est parfois appelée fonction d'échantillonnage (Peigne de Dirac) ou T est la période d'échantillonnage. Pour un signal x(t) on pourra écrire

$$x(t) \cdot \delta_T(T) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(KT) \cdot \delta(t - KT) \tag{I.48}$$

I.10.8 Sinus Cardinal

Le sinus cardinal est un signal défini comme suit

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) / \pi & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases} \tag{I.49}$$

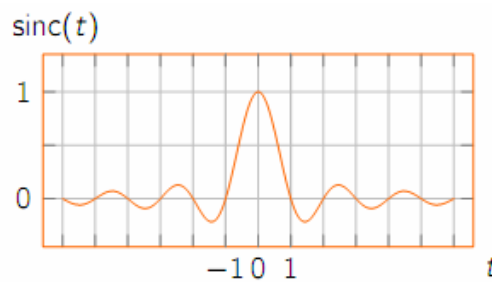


Fig.35 Représentation de la fonction sinus cardinal

Les relations suivantes restent vérifiées

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1 \tag{I.50}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1 \tag{I.51}$$

Conclusion

Dans ce premier chapitre, les notions, les définitions de base, ainsi que les caractéristiques de signaux particuliers sont présentés. Le prochain chapitre sera l'objet de l'analyse de Fourier

Chapitre II : Analyse de Fourier

Introduction

Le mathématicien et physicien Français Joseph Fourier est connu pour ses travaux qui concernent l'analyse harmonique et fréquentielle qui constituent la base du traitement de signal. En effet, ce deuxième chapitre est consacré aux transformations de Fourier des signaux périodiques et non périodiques.

II.1 Analyse fonctionnelle et espace vectoriel des signaux

Dans le cas de l'analyse fonctionnelle dans un espace vectoriel, il faut définir

1. La dimension de cet espace
2. La base de cet espace
3. Une métrique et une norme

II.1.1 Distance euclidienne

La distance euclidienne ou (distance en moyenne quadratique) entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ définie sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.1})$$

II.1.2 Espace des signaux à énergie finie

L'ensemble de tous les signaux (fonctions réelles ou complexes du temps définies sur un intervalle de carré intégrable (sommable) forment un espace fonctionnel dont la norme est donnée par

$$\|x(t)\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.2})$$

Le carré de la norme est l'énergie du signal sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

$$\|x(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (\text{II.3})$$

II.1.3 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ est défini par

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \quad (\text{II.4})$$

Où $y^*(t)$ est le conjugué de $y(t)$

Le produit scalaire est lié à la norme par

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 \quad (\text{II.5})$$

II.1.4 Développement du signal sur une base

L'ensemble des signaux a une structure d'espace vectoriel. Si cet espace est de dimension n, chaque vecteur signal peut s'écrire comme une combinaison linéaire des signaux

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(t) \quad (\text{II.6})$$

II.2 Fonctions orthogonales et orthonormales

II.2.1 Fonctions orthogonales

Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont dites orthogonales dans un intervalle où $t \in [t_1, t_2]$ si

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t).g^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f^*(t).g(t)dt = 0 \quad (\text{II.7})$$

Où $f^*(t)$ et $g^*(t)$ sont les conjugués des fonctions complexes $f(t)$ et $g(t)$

Si $f(t)$ et $g(t)$ sont réelles on peut écrire tout simplement

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t).g(t)dt = 0 \quad (\text{II.8})$$

II.2.2 Fonctions orthonormales

Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont dites orthonormales dans un interval où $t \in [t_1, t_2]$ si

$$\int_{t_1}^{t_2} f^*(t).g(t)dt = 1 \quad (\text{II.9})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t).g^*(t)dt = 1 \quad (\text{II.10})$$

II.3 Changement de représentation

La représentation temporelle n'est pas toujours la plus adaptée pour décrire les signaux. On peut aussi décrire un signal en fonction de sa fréquence. Le passage d'une représentation temporelle $x(t)$ à la représentation $X(\alpha)$ s'écrit de la façon suivante

$$X(\alpha) = \int_{\text{Domaine1}} K(\alpha, t)x(t)dt \quad (\text{II.11})$$

Et la transformation inverse s'écrit

$$x(t) = \int_{\text{Domaine2}} K^{-1}(\alpha, t)X(\alpha)d\alpha \quad (\text{II.12})$$

On peut citer les transformations de Laplace et de Fourier

$$\begin{aligned} \text{➤ Transformation de Laplace: } & \begin{cases} K(p,t) = \exp(-pt) \\ \alpha = p \\ \text{Domaine1} = [0, +\infty[\end{cases} \\ \text{➤ Transformation Fourier: } & \begin{cases} K(f,t) = \exp(-2i\pi ft) \\ \alpha = f \\ \text{Domaine2} =]-\infty, +\infty[\end{cases} \end{aligned}$$

II.4 Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est l'outil mathématique principal qui permet le passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle. La décomposition ou le développement en séries et la transformé de Fourier nous permettent d'obtenir une répartition spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase, de l'énergie et de la puissance des signaux.

II.4.1 Développement en série de Fourier

L'idée de base d'un développement en séries de Fourier et qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux harmoniques, c'est-à-dire de signaux dont la fréquence est multiple d'une fréquence fondamentale.

II.4.1.1 Conditions d'existence de la série de Fourier

- ✓ Le signal doit être périodique
- ✓ La condition de convergence $|s(t)| < \infty$

II.4.1.2 Définition de la série de Fourier

On appelle série de Fourier toute série de terme générale ayant la forme suivante

$$u_k(x) = a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

II.4.1.3 Ecriture complexe de la série de Fourier

En utilisant les formules (d'Euler voir annexe) on peut écrire

$$u_k(x) = a_k \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_k \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \quad (\text{II.13})$$

$$= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-in\omega x} \quad (\text{II.14})$$

II.4.1.4 Relation entre les coefficients réels et complexes de la série de Fourier

On peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(ik\omega t) dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{II.15})$$

$$c_{-k} \exp(-ik\omega t) + c_k \exp(ik\omega t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (\text{II.16})$$

En utilisant la formule d'Euler (voir Annexe) on peut écrire

$$\begin{aligned} c_{-k} \cos(k\omega t) - ic_{-k} \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t) + ic_k \sin(k\omega t) \\ = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Par identification on peut écrire

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad (\text{II.18})$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (\text{II.19})$$

En résolvant ces deux dernières équations on peut aussi écrire

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (\text{II.20})$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad (\text{II.21})$$

II.4.1.5 Types de développement en série de Fourier

II.4.1.5.1 Développement en séries de Fourier à coefficients réels

On peut décomposer un signal ou une fonction, $s(t)$ sous forme de fonctions sinusoïdales et cosinusoidales d'amplitudes différentes et de fréquences f , multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$ comme suit

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(2k\pi \frac{t}{T_0}) + b_k \sin(2k\pi \frac{t}{T_0})) \quad (\text{II.22})$$

Avec a_0 correspondant à la valeur moyenne du signal sur une période

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) dt \quad (\text{II.23})$$

a_k est défini pour $k > 1$ par

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \cos(2k\pi \frac{t}{T_0}) dt \quad (\text{II.24})$$

b_k est défini pour $k \geq 1$ par

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \sin(2k\pi \frac{t}{T_0}) dt \quad (\text{II.25})$$

- La composante $a_0 = S_0$ de $s(t)$ est appelée composante continu. C'est la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période.
- Les coefficients a_k et b_k sont les coefficients réels de la série de Fourier .Cette forme est appelée le développement ou la décomposition en série de Fourier à coefficients réels du signal $s(t)$
- Les composantes a_1 et b_1 constituent l'amplitude du fondamental. Les fréquences $f_k = \frac{k}{T_0}$ pour $k > 1$ constituent les fréquences des harmoniques d'ordre k

De plus

- ✓ Si $s(t)$ est paire alors $b_k = 0 \forall k$
- ✓ Si $s(t)$ est impaire alors $a_k = 0 \forall k$
- ✓ Si $s(t)$ est réelle, a_k, b_k sont réels
- ✓ -Si $s(t)$ est complexes a_k, b_k sont complexes

II.4.1.5.2 Développement en série de Fourier à coefficients complexes

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(ik\omega_0 t) \tag{II.28}$$

Les coefficients c_k sont les coefficients complexes de la série de Fourier ou coefficients de Fourier exponentiels. Ils sont donnés par

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \exp(-ik\omega_0 t) dt \tag{II.29}$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt = a_0 \tag{II.30}$$

II.4.1.5.3 Développement en séries de Fourier à coefficients harmoniques

En partant de la relation suivante

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \arctg\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \tag{II.31}$$

Et la décomposition en série de Fourier définie par Eq.(II.13)

Le développement en série de Fourier peut également s'écrire sous la forme

$$s(t) = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_n \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \tag{II.32}$$

Ou

$\sigma_0 = a_0 / 2$: Harmonique de rang 0

$\sigma_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$: Module de chaque harmonique

$\varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$: Argument de chaque harmonique

II.4.1.5.4 Exemples de décomposition en séries de Fourier

Exemple 1. Soit le Signal d'amplitude A et de période T donné par la figure ci-dessous

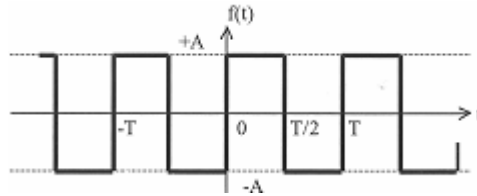


Fig.1 Représentation temporelle d'un signal carré

La fonction f(t) est impaire et le développement ne contient que les termes en sinus. $a_0 = 0$ et

$a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2A}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

Exemple 2. Soit le Signal triangulaire d'amplitude A et de période T donné par la figure ci-dessous

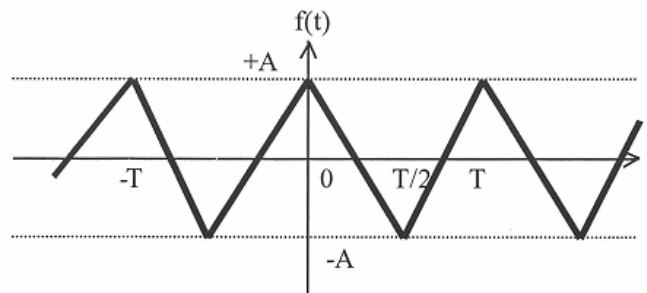


Fig.2 Représentation temporelle d'un signal triangulaire

En considérant le signal donné par la figure ci-dessous, on remarque que la fonction f(t) est paire. La décomposition en série de Fourier ne portera que des termes en cosinus ($b_k = 0$)

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right]$$

Exemple 3 : Soit le signal $f(t)$ représentée par la figure suivante

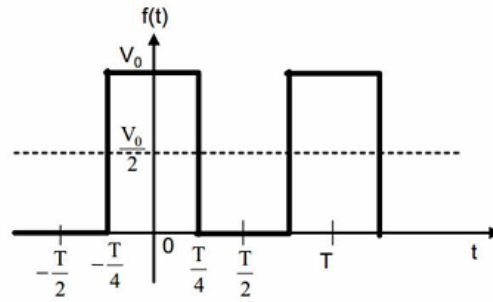


Fig. 3 Représentation temporel du signal $f(t)$

Le développement de $f(t)$ en série de Fourier nous mène aux

- Calcul de a_0

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 dt = \frac{V_0}{T} [t]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{V_0}{T} \frac{2T}{4} = \frac{V_0}{2} \rightarrow a_0 = \frac{V_0}{2}$$

- Calcul de a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{2V_0}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} - \frac{\sin\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} \right]$$

$$a_n = \frac{4V_0}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

- Si n est un nombre pair, $n=2p$:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$$

- Si n est un nombre impair, $n=2p+1$:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$$

$$a_n = \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} (-1)^p \end{cases}$$

- Calcul de b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V_0}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \\ &= \frac{2V_0}{T} \left[-\frac{\cos\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} + \frac{\cos\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement la décomposition en série de Fourier du $f(t)$ s'écrit comme suit:

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2V_0}{(2p+1)\pi} \cos((2p+1)\omega t)$$

Pour la forme complexe cela donne:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 e^{-in\omega t} dt \\ c_n &= \frac{-V_0}{in\omega T} \left[e^{-in\omega t} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{-V_0}{in\omega T} \left[e^{-\frac{in\omega T}{4}} - e^{\frac{in\omega T}{4}} \right] \\ c_n &= -\frac{V_0}{n\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{jn\pi}{2}} - e^{\frac{jn\pi}{2}}}{2j} = \frac{V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{Si } n = 2p & \text{on a, } c_{2p} = 0 \\ \text{Si } n = 2p+1 & \text{on a, } c_{2p+1} = (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} = \frac{a_{2p+1}}{2} \\ \text{Si } n = 0 & \text{on a, } c_0 = \frac{V_0}{2} = a_0 \end{cases}$$

Le dernier résultat peut aussi s'obtenir par le calcul direct:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} V_0 dt = \frac{V_0}{2}$$

On obtient alors le résultat suivant

$$f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} e^{j(2p+1)\omega t}$$

II.4.1.5.5 Spectre de phase et d'amplitude

Si $s(t)$ est un signal décomposable en série de Fourier on peut définir les spectres d'amplitude et de phase comme suit

1. Spectre d'amplitude

Puisque chaque coefficient du développement en série de Fourier est l'amplitude d'une sinusoïde, donc de fréquence unique, on représente les coefficients du développement en série de Fourier par un spectre de raies dans l'espace des fréquences

2. Spectre de phase

C'est le tracé de la phase en fonction des pulsations ou fréquences

Exemple

Soit $s(t)$ le signal exprimé par

$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \varphi_2)$$

Ou $f_0 = 0, A_0 = 2, \varphi_0 = 0 ; f_1 = 1000, A_1 = 5, \varphi_1 = -\frac{\pi}{3} ; f_2 = 2500, A_2 = 10, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

Les représentations des spectres d'amplitude et de phase sont illustrées respectivement par Fig.4 et Fig.5

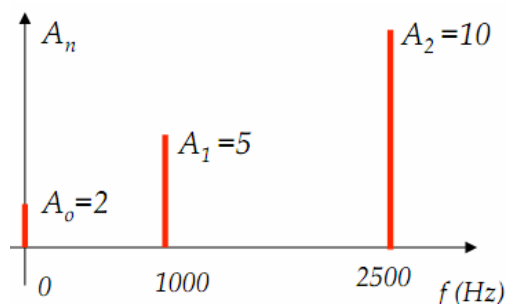


Fig. 4 Représentation de spectre d'amplitude du signal s(t)

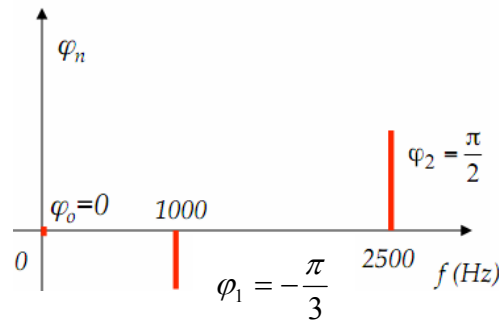


Fig.5 Représentation de spectre de phase du signal s(t)

II.4.1.5.6 Limitation de développement en série de Fourier

Le développement série de Fourier s'applique uniquement aux signaux

1. Déterministes
2. Périodiques
3. Continues

II.4.2 Transformé de Fourier

La transformé de Fourier est une extension (généralisation) pour les fonctions non périodiques du développement en série de Fourier des fonctions périodiques .Elle permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation spectrale).

II.4.2.1 Définition

Soit $x(t)$ un signal déterministe. Sa transformé de Fourier est une fonction généralement complexe de la variable réelle f (la fréquence) définie par

$$TF(x(t)) = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt \tag{II.33}$$

On peut exprimer $X(f)$ de la façon suivante

$$X(f) = R\{X(f)\} + i.I\{X(f)\} = |X(f)| \cdot e^{i\theta(f)} \tag{II.34}$$

Le module est l'amplitude, définie par

$$|x(f)| = \sqrt{R\{X(f)\}^2 + I\{X(f)\}^2} \tag{II.35}$$

La phase est l'argument définit par

$$\arg(X(f)) = \text{Arctg}\left(\frac{I\{X(f)\}}{R\{X(f)\}}\right) \tag{II.36}$$

La fonction $X(f)$ fournit des informations sur la distribution fréquentielles (amplitude, phase, énergie, puissance)

II.4.2.2 Conditions d'existence de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier existe si et seulement si

- La fonction $x(t)$ soit intégrable, c'est-à-dire existe et en a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- Les discontinuités de $x(t)$ sont en nombre limité dans chaque intervalle de temps finis
- Le signal possède un nombre fini d'extremums dans chaque intervalle de temps finis

II.4.2.3 Propriétés de la transformé de Fourier

L'importance de la transformé de Fourier est largement du à certains de ces propriétés remarquables suivantes

1. Linéarité

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f) \tag{II.37}$$

2. Dérivation

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (2i\pi f)^n X(f) \tag{II.38}$$

3. Retard (Translation en temps)

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) e^{-2i\pi f t_0} \tag{II.39}$$

4. Retard (Translation en temps)

$$X(f - f_0) \leftrightarrow x(t) e^{2i\pi f_0 t} \tag{II.40}$$

5. Convolution

$$x(t).y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f) \tag{II.41}$$

6. Dilatation en temps

Si $y(t) = x(at)$ avec $a > 0$ alors $Y(f) = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$. Une dilatation ou $0 < a < 1$ de l'échelle de

temps correspond compression $\left(\frac{1}{a}\right) > 1$ de l'échelle en fréquences et inversement.

7. Inversion de temps

$$x(-t) \rightarrow X(-f) \tag{II.42}$$

8. Conjugué

$$x^*(-t) \rightarrow X^*(-f) \tag{II.43}$$

9. Formes particulières

$x(t)$ réelle \rightarrow Symétrie hermitienne

$x(t)$ réelle paire $\rightarrow X(f)$ réelle paire

$x(t)$ réelle $\rightarrow X(f)$ imaginaire impaire

$x(t)$ imaginaire paire $\rightarrow X(f)$ imaginaire paire

$x(t)$ imaginaire impaire $\rightarrow X(f)$ réelle impaire

Exemple 1 Calculer la transformée de Fourier de signal défini par $x(t) = \text{rect}_\tau(t)$

Représenter le spectre de $x(t)$

La représentation temporelle du signal $x(t)$ est représentée par la figure ci-dessous

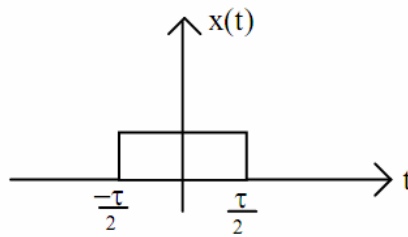


Fig.6 Représentation temporelle du signal $x(t)$

Par définition

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_\tau(t) e^{-2\pi jft} .dt$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 .e^{-2\pi jft} .dt = -\frac{1}{i2\pi f} [e^{-i\pi f\tau} - e^{i\pi f\tau}]$$

Or

$$\sin x = \frac{1}{2i} [e^{ix} - e^{-x}]$$

$$\sin c x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

D'où

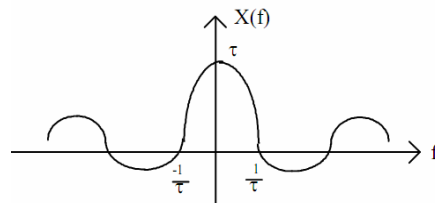


Fig. 7, Représentation du spectre de signal $x(t)$

$$X(f) = \tau \cdot \frac{1}{\pi f T} \sin(\pi f \tau) = \tau \cdot \text{sinc}(f \tau)$$

Exemple 2

Soit le signal $s(t)$ donné par

$$s(t) = S \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

La représentation de $s(t)$ est illustrée par Fig.8

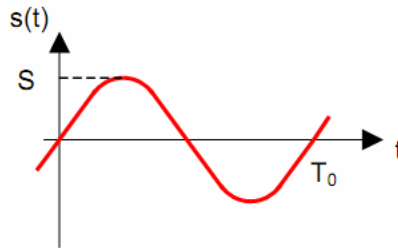


Fig .8 Représentation temporelle du signal $s(t)$

Nous savons d'abord que $Tf[S \cdot \cos(2\pi f_0 t)] = [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = S \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Or

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$S(f) = S \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{S}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right]$$

$$= \frac{S}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_0 - f)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f_0 + f)t} dt \right] = \frac{S}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f - f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f + f_0)t} dt \right]$$

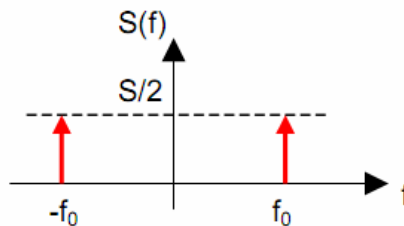


Fig .9 Représentation fréquentielle du signal $s(t)$

$$S(f) = \frac{S}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

II.4.2.4 Théorème de Parseval

L'énergie total d'un signal ne dépend pas de la représentation fréquentielle ou temporelle. Elle peut être exprimée comme suit

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{II.44}$$

Démonstration

Soit x(t) signal à énergie finie et qui admet X(f) pour Transformé de Fourier, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f') e^{2\pi j f' t} df' \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot X^*(f') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(f-f')t} dt \right] df df' \end{aligned} \tag{II.45}$$

L'expression entre crochets est égale à la transformée de Fourier de la fonction unité calculée à la fréquence f' - f, soit δ(f' - f)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f' - f) df' \right] df \tag{II.46}$$

Avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f') \delta(f' - f) df' = X^*(f) \tag{II.47}$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \tag{II.48}$$

II.4.2.5 Table des Transformées de Fourier

Domaine temporel $x(t) = TF^{-1}[X(f)]$	Domaine fréquentiel $X(f) = TF[x(t)]$
Rect(t/T)	$T \text{ sinc}(fT)$
$e^{-at}u(t)$, pour $a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$

$e^{-a t }$, pour $a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (j2\pi f)^2}$
$\text{tri}(t)$	$\text{sinc}^2(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}j[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \text{sgn}(f)$

Conclusion

Vue l'importance de la représentation fréquentielle en théorie et traitement de signal, ce deuxième chapitre a été consacré globalement à l'étude de la décomposition des signaux périodiques en série de Fourier généralisée à la transformée de Fourier et ses propriétés des signaux non périodiques. Le prochain chapitre se rapportera sur la transformée de Laplace.

Chapitre III : Transformée de Laplace

Introduction

La transformée de Laplace est une technique utilisée pour résoudre les équations différentielles. C'est une opération qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Elle est très utile dans l'étude des régimes transitoires qui vérifient le principe de causalité. En particulier, elle sera un outil important dans l'étude des filtres basée sur la réponse impulsionnelle. D'une manière générale, elle est l'outil de base en automatique.

III.1 Transformée de Laplace

III.1.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction à variable réelle ou complexe de la variable réelle t définie de $[0, +\infty[$, alors la transformée de Laplace de f est donnée par l'expression

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{III.1})$$

Où $p = \alpha + j\beta$ une variable complexe et le symbole $L(f(t))$ désigne la transformée de Laplace. Cette transformation permet de transformer le problème du domaine temporel au domaine fréquentiel. On dit que $F(p)$ est l'image de $f(t)$ dans le domaine symbolique et $f(t)$ est l'image de $F(p)$ dans le domaine temporel. En posant $P = i2\pi f = i\omega$, la transformée de Laplace correspond à la transformée de Fourier des signaux causaux.

Exemple 1

On considère la fonction $s(t)$ définie par

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 && \text{pour } t < 0 \\ s(t) &= \sin \omega t && \text{pour } t \geq 0 \end{aligned}$$

Déterminer l'expression de $S(p)$ en utilisant directement la définition de la transformation de Laplace.

En utilisant la relation suivante

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Et en utilisant la définition de la transformée de Laplace

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-pt} dt$$

Après calcul et développement nous trouverons que

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Exemple 2

Calculer la transformée de Laplace de la fonction s(t) définie par

- $s(t) = 0$ Pour $t < 0$,
- $s(t) = At/T$ Pour $0 < t < T$,
- $s(t) = A$ Pour $t > T$

Nous commençons par la représentation temporelle du signal s(t)

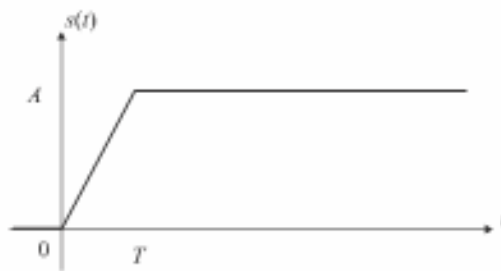


Fig.1 Représentation du signal s(t)

Et en utilisant la définition de la transformé de Laplace et après calcul on a

$$S(p) = \frac{A}{Tp^2} [1 - e^{-pT}]$$

III.1.2 Transformée de Laplace inverse

On peut revenir de la transformé de Laplace à la fonction $f(t)$ par la transformation inverse Suivante

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} F(p) dp \tag{III.2}$$

Exemple

Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression

$$F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$$

Nous factorisons le dénominateur de l'expression de $F(p)$, et nous décomposons cette dernière en éléments simples, nous pouvons écrire donc que

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2}$$

Par identification on trouve que

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Selon la table des transformées, l'expression de la transformée inverse de $F(p)$ s'écrit de la façon suivante

$$f(t) = \frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

III.1.3 Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace

Ces propriétés permettent de calculer les transformés de Laplace de certains signaux

a) Addition

La transformée de Laplace d'une somme de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est égale à la somme de leurs transformés de Laplace.

$$L(f_1(t) + f_2(t)) = L(f_1(t)) + L(f_2(t)) \quad (\text{III.3})$$

b) Multiplication par une constante

$$L(cf(t)) = cL(f(t)) \quad (\text{III.4})$$

c) Linéarité

Les propriétés de multiplication par une constante et d'addition lorsqu'elles sont combinées conduisent au fait que la transformée de Laplace est une transformation linéaire

$$L\left(\sum_{K=1}^n c_K f_K(t)\right) = \sum_{K=1}^n c_K L(f_K(t)) \quad (\text{III.5})$$

d) Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. Il a été démontré que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule en fonction de $F(p)$

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0) \quad (\text{III.6})$$

De même pour sa dérivée d'ordre n ou la n -ième dérivée est donnée par

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - \sum_{K=n+1}^{2n} \left(p^{2n-K} \frac{d^{K-n-1} f(0)}{dt^{K-n-1}} \right) \quad (III.7)$$

Si les conditions initiales sont tous nulles, alors on a

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n L(f(t)) = p^n F(p) \quad (III.8)$$

e) Transformée de Laplace d'une primitive

Soit p(t) une primitive d'une fonction f(t) et F(p) la transformé de Laplace de cette fonction

On a

$$p(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{p(0)}{p} \quad (III.9)$$

Comme pour le cas de la dérivée ,si la condition initiale est nulle ,on écrira tout simplement

$$p(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} \quad (III.10)$$

f) Translation

$$L(e^{-at} f(t)) = F(p + a) \quad (III.11)$$

Exemple

$$L(e^{-at} \cos \omega t) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

g) Changement d'échelle

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (III.12)$$

$$L\left(f\left(\frac{t}{k}\right)\right) = kF(p) \quad (III.13)$$

h) Théorème de retard

Considérons la fonction $f(t - \tau)$, (autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine ou un retard du temps τ .

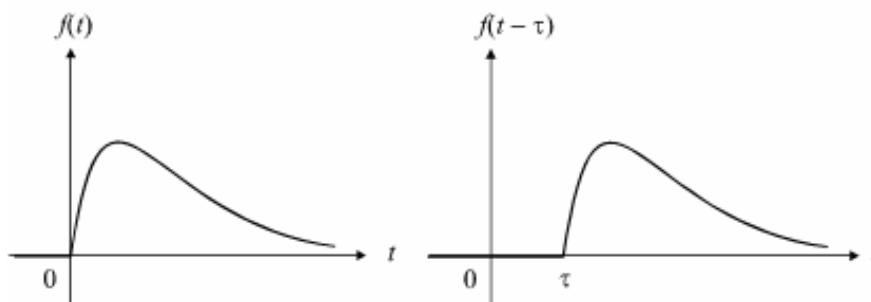


Fig.2 Représentation de la fonction f(t) et f(t-τ)

La transformée de Laplace de la fonction retardée peut être calculé en connaissant la transformée de Laplace de la fonction non retardée de la façon suivante

$$L(f(t - \tau)) = F(p)e^{-p\tau} \quad (\text{III.14})$$

$e^{-p\tau}$ est appelé facteur de retard

i) Théorème de la valeur initiale

La transformée de Laplace d'une fonction f(t) est donnée par

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0) \quad (\text{III.15})$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$ on a $e^{-pt} \rightarrow 0$, donc $pF(p) - f(0) \rightarrow 0$

D'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)] \quad (\text{III.16})$$

Cette dernière relation constitue le théorème de la valeur initiale qui permet d'obtenir une expression de la valeur de f au voisinage de 0 par valeur supérieure connaissant sa transformée de Laplace.

j) Théorème de la valeur finale

Le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle f(t) en connaissant uniquement sa transformée de Laplace

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)] \quad (\text{III.17})$$

Exemple

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système, en déduire S(p) si le signal d'entrée est un échelon unité

La fonction de transfert de système se détermine comme précédemment en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on a donc

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp + 1}$$

De cela, l'expression de S(p) est donnée par

$$S(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}$$

Le théorème de la valeur finale nous permet d'écrire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pK}{p(Tp + 1)} = K$$

D'après la table des transformées on déduit l'expression de s(t) qui est définie par

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) u(t)$$

k) Autres propriétés

$$\text{➤ } L(e^{-at} f(t)) = F(p + a) \tag{III.18}$$

$$\text{➤ } L(tf(t)) = \frac{dF}{dp} \tag{III.19}$$

$$\text{➤ } L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^{+\infty} F(p) dp \tag{III.20}$$

III.2 Calcul opérationnel

L'utilisation de la méthode de Laplace pour résoudre les équations différentielle s'appelle le calcul opérationnel ou calcul symbolique. Il permet de connaître la solution complète d'un système linéaire soumis à une large variété de signaux quelconque transitoire ou périodique. Le traitement se fait généralement en quatre étapes.

- 1) On établit l'équation différentielle à résoudre
- 2) On applique les propriétés de dérivations et autres de la transformation de Laplace à l'équation différentielle considérée. Par cette transformation on passe du domaine temporel au domaine (complexe) de Laplace.

3) On détermine la solution sous la forme

$$Y(p) = N(p) / D(p) \tag{III.21}$$

dans le plan de Laplace que l'on décompose en termes simples

4) IL reste à déterminer la solution, pour cela on utilise la transformation inverse en utilisant la table des transformations

Suivant la forme de la décomposition obtenue on distingue trois cas.

➤ **Premier cas : Les pôles de Y(p) sont simples**

Supposant que D(p) possède des pôles $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$. On peut écrire Y(p) sous la forme

$$Y(p) = \frac{A_0}{p - P_0} + \frac{A_1}{p - P_1} + \dots + \frac{A_n}{p - P_n} \tag{III.22}$$

On connaît la réponse temporelle des différents termes, il reste de déterminer les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ par la méthode d'identification.

➤ **Deuxième cas : Existence d'un pôle multiple**

Si la fonction à variable complexe possède un pôle simple, on obtient le coefficient comme suit

$$f(p) = \frac{A}{p - a} \tag{III.23}$$

Alors

$$A = \lim_{p \rightarrow a} f(p)(p - a) \tag{III.24}$$

Si $f(p)$ possède un pôle multiple d'ordre n , on détermine le coefficient A à l'aide de l'expression suivante

$$A = \lim_{p \rightarrow a} \left[\frac{1}{n-1} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left((p-a)^n f(p) \right) \right] \tag{III.25}$$

➤ **Troisième cas : Si les pôles sont complexes conjugués**

$$Y(p) = \frac{N(p)}{(p + p_0^*)(p + p_0)} \tag{III.26}$$

Avec $p_0 = a + jb$ et $p_0^* = a - jb$

On aura

$$Y(p) = \frac{A_0}{p + p_0} + \frac{A_1}{p + p_0^*} \tag{III.27}$$

$$A_0 = Ae^{j\varphi} \text{ et } A_1 = Ae^{-j\varphi}$$

Les coefficients de la décomposition en fraction simples seront aussi complexes conjugués.

La solution contient des termes oscillatoires

$$Ae^{j\varphi} e^{(a+jb)t} + Ae^{-j\varphi} e^{(a-jb)t} = 2Ae^{at} \cos(bt + \varphi) \tag{III.28}$$

Ou $\varphi = \arg(A)$

III.3 Application de la transformée de Laplace à un circuit électrique

On considère la réponse correspondant au circuit RL série donnée par Fig. soumis à un signal échelon. La transformé de Laplace de l'échelon est

$$L(u(t)) = \frac{1}{p} \quad (\text{III.29})$$

Pour $t > 0$ on a $u(t) = E$. On procède à chercher le courant $i(t)$ traversant le circuit suivant

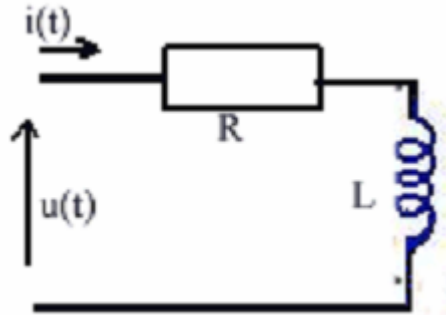


Fig.3 Schémas d'un circuit RL série

La loi d'ohm permet d'écrire

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (\text{III.30})$$

On applique la transformation de Laplace dans chacun de ces éléments pris séparément et en se rappelant que

$$F'(p) = pF(p) \quad (\text{III.31})$$

Ce qui donne

$$U(p) = RI(p) + LpI(p) \quad (\text{III.32})$$

En remplaçant $U(p)$ par E/p , l'équation différentielle s'exprime dans l'espace de Laplace de la façon suivante

$$E/p = (R + Lp)I(p) \quad (\text{III.33})$$

L'expression de $I(p)$ sera donc définie par

$$I(p) = \frac{E}{p} \frac{1}{R + Lp} \quad (\text{III.34})$$

Cette équation peut être aussi écrite sous la forme suivante

$$I(p) = \frac{E/L}{p(p + R/L)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + R/L} \quad (\text{III.35})$$

On applique la règle de détermination des coefficients, on obtient

$$I(p) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right) \quad (\text{III.36})$$

De la table des transformés on peut déduire l'expression de $i(t)$ qui sera donnée par

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (\text{III.37})$$

III.4 Fonction de transfert d'un système

III.4.1 Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$. On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n tel que

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t) \quad (\text{III.38})$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant les différentes conditions initiales nulles, on pourra écrire

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p) \quad (\text{III.39})$$

La relation liant la sortie à l'entrée dans l'espace de Laplace sera définie par

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (\text{III.40})$$

Cette relation de la variable complexe p est appelé fonction de transfert du système et généralement notée

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (\text{III.41})$$

Exemple

On considère un système régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^3 s}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + s(t) = 2 \frac{de}{dt} + e(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

L'application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, nous mène à établir la relation suivante

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p + 1}{(p + 1)^3}$$

La fonction de transfert possède un zéro $z_1 = -\frac{1}{2}$ et un pôle triple $p_1 = -1$

III.4.2 Résolution d'un problème à l'aide de la fonction de transfert

La relation précédente peut être écrite sous la forme

$$S(p) = G(p) * E(p) \quad (\text{III.42})$$

Donc il suffit de trouver l'original de $S(p)$

Exemple

Soit un système du second ordre excité par un échelon unitaire. Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

En injectant dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon, en cherche à identifier l'expression du signal de sortie $s(t)$

Le calcul de la fonction de transfert nous permet d'écrire

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

L'expression de la fonction de transfert sera définie par

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

De plus nous avons par ailleurs que

$$E(p) = 1/p$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)}$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples donne

$$S(p) = \frac{2}{3p} + \frac{1}{3(p+3)} - \frac{1}{p+1}$$

De la table de transformés de Laplace nous déduisons $s(t)$ qui est donnée par

$$s(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t} \right) u(t)$$

III.5 Table des transformées de Laplace

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$n!/p^{n+1}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p+a}$
$s(t) = te^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - ae^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a^2)}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Conclusion

La transformée de Laplace qui est un outil important pour la résolution des équations différentielles et principalement utilisée en automatique a été étudiée en détail. Le prochain chapitre sera l'objet de produit de convolution.

Chapitre IV : Produit de convolution

Introduction

Le produit de convolution est une notion utile pour la connaissance des réponses à des excitations des systèmes linéaires à temps invariant. Dans ce chapitre nous définissons et nous donnons d'abord une formulation du produit de convolution, ensuite nous énumérerons les étapes intervenant dans ce produit puis nous citons ces propriétés. Nous terminons le chapitre par un exemple type du calcul du produit de convolution

IV.1 Le produit de convolution

IV.1.1 Définition

Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction $x(t)$ lorsqu'on la déplace sur une autre fonction $h(t)$: c'est un mélangeur de fonction. L'opération de convolution, noté $(*)$ exprime la réponse d'un système linéaire causal et invariant à une entrée quelconque $x(t)$ à partir de sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui le caractérise. Physiquement la convolution entre deux signaux est l'intégrale de recouvrement de deux fonctions.

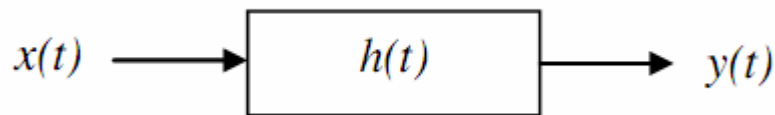


Fig.1 illustration de la réponse d'un système à une excitation

Avant de donner une formulation de produit de convolution nous définissons d'abord les réponses impulsionnelle et indicielle

IV.1.2 Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse d'un système dont l'entrée est un échelon.

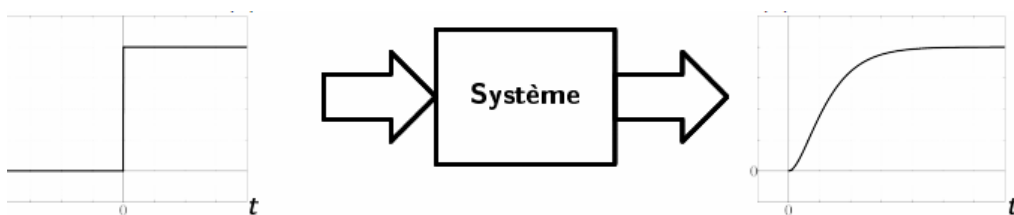


Fig. 2 illustration de la réponse d'un système à un échelon (réponse indicielle)

IV.1.3 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac. Elle permet de caractériser les systèmes linéaires dans le domaine temporel.

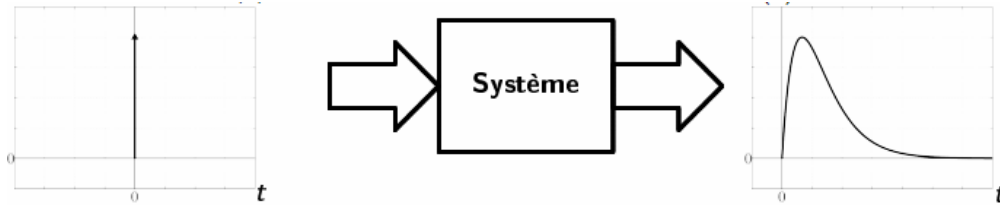


Fig.3 illustration de la réponse d'un système à une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle)

IV.1.4 Formulation de produit de convolution

On va montrer que la réponse d'un système se calcul d'une façon simple à partir d'une intégrale toute en connaissant son entrée $x(t)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Soit un système à temps invariant soumis à une impulsion de Dirac, c'est-à-dire $x(t) = \delta(t)$. Sa réponse $y(t)$ est notée

$$y(t) = S(x(t)) = S(\delta(t)) = h(t) \tag{IV.1}$$

Comme

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau \tag{IV.2}$$

Alors

$$y(t) = S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right) \tag{IV.3}$$

En supposant que le système est linéaire, donc on peut écrire

$$S\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x(\tau)\delta(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S(\delta(t - \tau)) d\tau \tag{IV.4}$$

Puisque $x(\tau)$ on peut écrire

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \tag{IV.5}$$

Ou

$$h(t - \tau) = S(\delta(t - \tau)) \tag{IV.6}$$

L'équation suivante définit un produit appelé produit de convolution de $x(t)$ par $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (\text{IV.7})$$

On peut conclure que tout système linéaire à temps invariant (LTI) soumis à une excitation $x(t)$ ayant une réponse impulsionnelle $h(t)$, sa réponse est le produit de convolution de $x(t)$ par $h(t)$.

IV.2 étapes et opération intervenant dans le produit de convolution

On peut énumérer les différentes étapes et opération intervenant dans le produit de convolution:

1. La variable t est remplacée par τ .
2. On prend la symétrie de $h(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$
3. La fonction $h(-\tau)$ est ensuite translatée vers la droite d'une quantité t : $h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau)$.
4. On fait le produit $x(\tau)$ par $h(t - \tau)$.
5. Le produit de convolution est une fonction du temps t , elle doit être évaluée pour $-\infty < t < +\infty$.

IV.3 Propriétés de produit de convolution

1. Commutativité:

$$y(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (\text{IV.8})$$

2. Associativité:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) && (\text{IV.9}) \\ &= x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \\ &= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \end{aligned}$$

3. Distributivité : Cette propriété est la conséquence de la linéarité des intégrales.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\ &= x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] && (\text{IV.10}) \end{aligned}$$

IV.4 Produit de convolution et impulsion de Dirac

Le produit de convolution avec l'impulsion de Dirac a les propriétés suivantes

1. Identité ou élément neutre

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (\text{IV.11})$$

2. Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (\text{IV.12})$$

$$x(t-t_1) * \delta(t-t_0) = x(t-t_1-t_0) \tag{IV.13}$$

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_2-t_1) \tag{IV.14}$$

IV.5 Théorème de produit (théorème de Plancherel)

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux x(t) et y(t) est égale au produit de transformée de Fourier des deux signaux.

$$TF(x(t) * y(t)) = X(f).Y(f) \tag{IV.15}$$

$$TF(x(t).y(t)) = X(f) * Y(f) \tag{IV.16}$$

Démonstration

$$TF(x(t) * y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right] \exp(-i2\pi ft) dt \tag{IV.17}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) \exp(-i2\pi ft) dt \right] d\tau$$

Si on pose t-τ=u alors t=u+τ

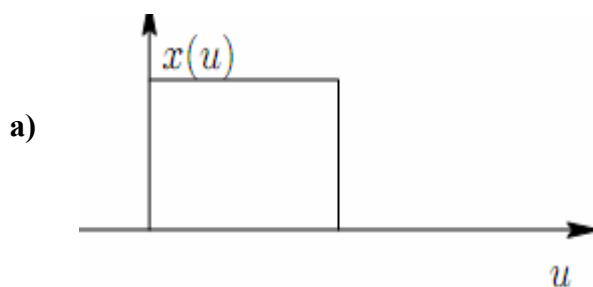
$$TF(x(t) * y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(u) \exp(-i2\pi fu) du \right] \tag{IV.18}$$

$$=X(f).Y(f)$$

IV.6 Interprétation graphique de la convolution

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit x(u).y(t-u). Le signal y(t-u) est simplement le signal initial y(u) retourné dans le temps pour donner y(-u) puis translaté de t.

En calculant l'ensemble des surfaces obtenues en faisant glisser y, c'est-à-dire pour tous les décalages de t, on obtient le produit de convolution pour tout t. Ces étapes sont illustrées par les figures ci-dessous



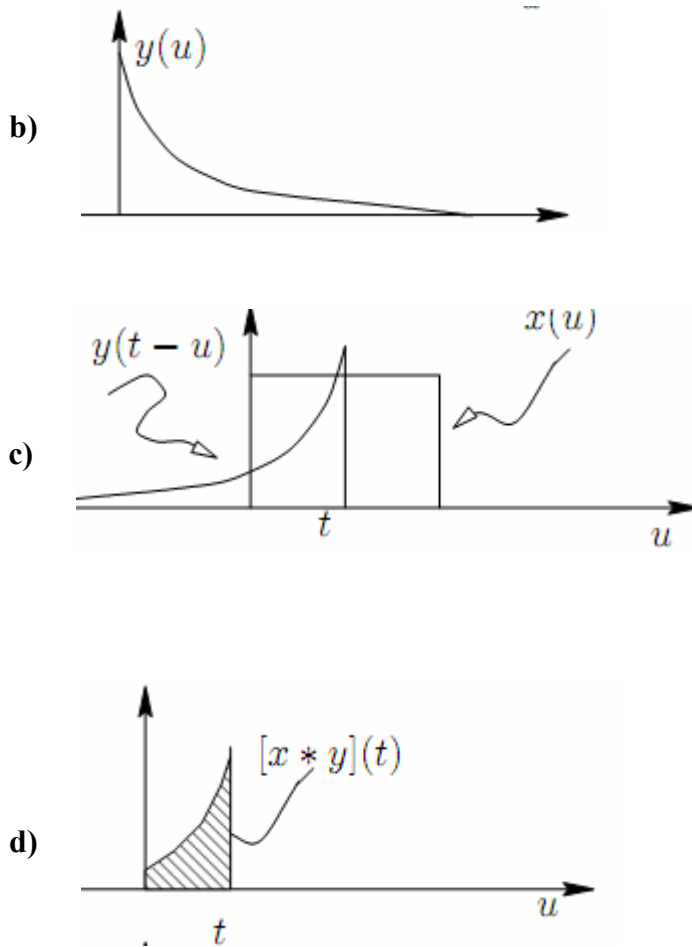


Fig. 4 a), b), c), d) illustration graphique du produit de convolution

IV.7. Exemple de calcul de produit de convolution

Soit $x(t) = h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$. calculer $y(t) = x(t) * h(t)$



Fig.5 Représentation temporelle du signal $x(t)$ et $x(\tau)$

Le produit de convolution est donné par $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

1^{er} cas: pour $t < 0$

On remarque qu'il n'ya pas d'intersection entre les deux signaux donc

$$y(t) = 0$$

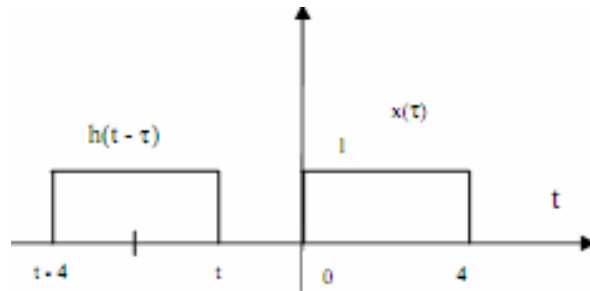


Fig.6 Représentation de $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ pour $t < 0$

2^{ème} cas: pour $0 < t < 4$

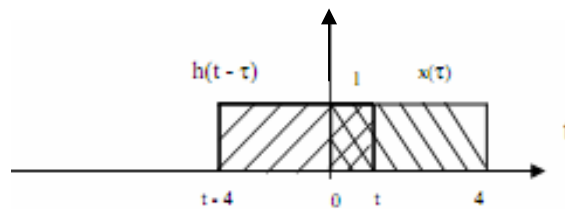


Fig.7 Représentation de $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ pour $0 < t < 4$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t 1d\tau = t$$

3^{ème} cas: pour $t > 4$ et $t-4 < 4$ donc $4 < t < 8$

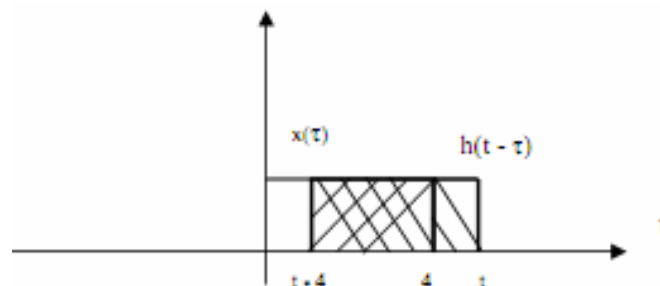


Fig.8 Représentation de $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ pour $4 < t < 8$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t-4}^4 1d\tau = 4-t+4 = -t+8$$

4^{ème} cas: pour $t-4 > 4$ donc $t > 8$

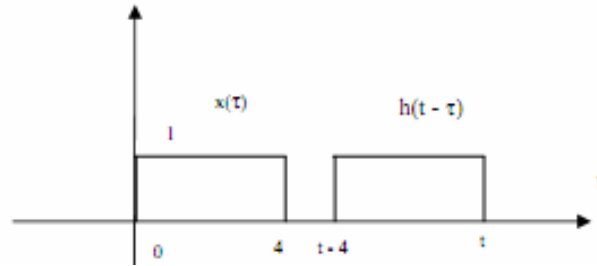


Fig.9 Représentation de $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ pour $t > 8$

On remarque qu'il n'y a pas d'intersection entre $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ donc $y(t)=0$

La récapitulation des résultats des quatre cas est donnée par l'équation suivante

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 4 \\ 8-t & 4 \leq t \leq 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$

Ce dernier résultats n'est que la fonction $y(t)$ définie par

$$y(t) = 4tri\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

La représentation temporelle de cette fonction est illustrée par la figure suivante

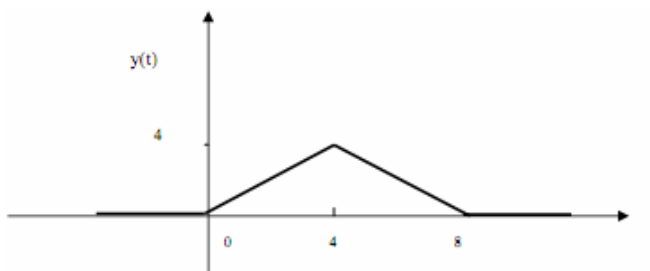


Fig.10 Représentation de la fonction $y(t)$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons défini et donné la formulation du produit de convolution. Nous avons aussi rappelé les propriétés de ce produit avec l'impulsion de Dirac. Le prochain chapitre sera consacré à la corrélation des signaux

Chapitre V : Corrélation des signaux

Introduction

La corrélation est l'un des concepts physiques dans les domaines scientifiques. Elle joue un rôle important dans l'analyse et le traitement des signaux. Dans ce chapitre nous intéressons aux signaux à énergie et puissance moyenne finie. Nous définissons d'abord la corrélation des signaux, ensuite nous présentons les densités spectrales d'énergie et de puissance ainsi que le théorème de Wiener-Khintchine

V.1 Corrélation

La corrélation est une comparaison de deux signaux entre eux. On s'intéresse à des signaux d'énergie finie ou aux signaux à puissance moyenne finie

V. 1.1 Corrélation des signaux à énergie finie

V.1.1.1 Fonction d'intercorrélation

L'intercorrélation, notée $\Gamma_{xy}(\tau)$, compare deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ retardée. Cette fonction permet donc de mesurer la similitude entre ces deux signaux. La fonction d'intercorrélation des signaux à énergie finie réelle ou complexe $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \quad (\text{V.1})$$

On peut remarquer que la fonction d'intercorrélation est égale au produit scalaire

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle \quad (\text{V.2})$$

Il existe une autre écriture de $\Gamma_{xy}(\tau)$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t - \tau) y(\tau) dt$$

Par raison de la symétrie hermitienne

$$\langle x, y_\tau \rangle = \langle y_\tau, x \rangle^* \quad (\text{V.3})$$

D'où la relation

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{xy}^*(-\tau) \quad (\text{V.4})$$

Le produit scalaire de deux signaux est une mesure de leur similitude de forme et de position. La fonction d'intercorrélation traduit l'évolution de cette similitude en fonction du paramètre de translation.

V.1.1.2 Fonction d'autocorrélation

L'autocorrélation réalise une comparaison entre un signal $x(t)$ et ses copies retardées. La fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie finie $x(t)$ est définie par

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \langle x, x_\tau^* \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \quad (\text{V.5})$$

En utilisant l'égalité suivante

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}^*(-\tau) \quad (\text{V.6})$$

Et en notant la fonction d'autocorrélation sous la forme

$$\Gamma_{xx}(\tau) = R(\tau) + iI(\tau) \quad (\text{V.7})$$

L'équation (V.6) devienne

$$\Gamma_{xx}(\tau) = R(\tau) + iI(\tau) = R(-\tau) - iI(-\tau) \quad (\text{V.8})$$

En déduit que la partie réelle de Γ_{xx} est paire et sa partie imaginaire est impaire

Pour $\tau = 0$, on a en particulier

$$\Gamma_{xx}(0) = \Gamma_{xx}(0) \quad (\text{V.9})$$

$$\Gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt > 0 \quad (\text{V.10})$$

La valeur à l'origine c'est-à-dire ($\tau = 0$) de la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie de signal.

$$\Gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E \quad (\text{V.11})$$

Cas des signaux réels

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux réels on peut écrire

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t - \tau) dt \quad (\text{V.12})$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t - \tau) dt \quad (\text{V.13})$$

En faisant un changement de variable on peut écrire aussi

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) y(t) dt \quad (\text{V.14})$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)x(t)dt \quad (\text{V.15})$$

Les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation des signaux réels sont aussi réelles avec les propriétés suivantes.

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}(-\tau) \quad (\text{V.16})$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \Gamma_{xx}(-\tau) \quad (\text{V.17})$$

V.1.1.3 Relation entre corrélation et convolution

On peut écrire une relation qui permet d'exprimer la fonction de corrélation comme un produit de convolution en effet

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-\tau)du \quad (\text{V.18})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(-(\tau-u))du$$

$$= x(\tau) * y^*(-\tau)$$

V.1.1.4 Densité spectrale d'énergie

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et $\Gamma_{xx}(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation, on appelle densité spectrale d'énergie notée $S_{xx}(f)$ transformée de Fourier de $\Gamma_{xx}(\tau)$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \exp(-2i\pi f\tau) d\tau \quad (\text{V.19})$$

En utilisant l'expression de la relation entre la corrélation et la convolution

On a

$$S_{xx}(f) = TF\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} \quad (\text{V.20})$$

$$= TF\{x(\tau)\} . TF\{x^*(-\tau)\}$$

$$= X(f) . Y^*(f)$$

D'où le résultat

$$S_{xx}(f) = |x(t)|^2 \quad (\text{V.21})$$

Cette expression montre que $S_{xx}(f)$ est l'énergie du signal à la fréquence f , d'où le nom de densité spectrale d'énergie. En utilisant le théorème de Parseval, on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E \quad (\text{V.22})$$

Exemple

On considère la fonction

$$x(t) = \exp(-at) \varepsilon(t)$$

*La fonction d'autocorrélation est définie par:

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau)) \varepsilon(t-\tau) dt \quad \tau > 0 \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \int_{\tau}^{+\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(a\tau) \left[\frac{\exp(-2at)}{-2a} \right]_{\tau}^{+\infty} \\ &= \frac{\exp(-a\tau)}{2a} \end{aligned}$$

Pour $\tau < 0$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau)) dt \\ &= \exp(a\tau) \left[\frac{\exp(-\tau at)}{-2a} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\exp(a\tau)}{\tau a} \end{aligned}$$

D'où l'expression suivante

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{A}{2a} \exp(-a|\tau|)$$

*Densité spectrale d'énergie

La densité spectrale d'énergie par définition est la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\} \\ &= \frac{1}{2a} TF\{\exp(-a|\tau|)\} \\ &= \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

Vérification de l'égalité de Parseval on a donc à vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Or:

$$|X(f)|^2 = S_{xx}(f)$$

► La première intégrale vaut

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{1 + \left(\frac{2\pi f}{a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} [\arctan(u)] \\ &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

► La seconde intégrale vaut

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(-at)]^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-2at) dt \\ &= \left[\frac{\exp(-2at)}{-2a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

On a la conservation de l'énergie dans la représentation du signal en temps et en fréquence

V.1.2 Corrélation des signaux à puissance moyenne finie

V.1.2.1 Fonction d'intercorrélation

Le produit scalaire, défini pour les signaux à énergie finie n'est pas applicable pour les signaux à puissance moyenne finies car l'intégrale ne converge pas. Cependant on peut écrire

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt \quad (\text{V.23})$$

V.1.2.2 Fonction d'autocorrélation

Par analogie, la fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t - \tau) dt \tag{V.24}$$

Les fonctions de corrélations des signaux à puissance moyenne finie possèdent les mêmes propriétés que celles des signaux à énergie finie.

V.1.2.3 Densité spectrale de puissance

Soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie on appelle densité spectrale de puissance la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation

$$S_{xx}(f) = TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \cdot \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \tag{V.25}$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = TF^{-1}\{S_{xx}(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot \exp(+i2\pi f\tau) df \tag{V.26}$$

Pour $\tau = 0$ on obtient

$$\Gamma_{xx}(0) = P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \tag{V.27}$$

Pour les signaux $x(t)$ à puissance moyenne finie, la densité spectrale de puissance n'est pas égal au carré de module de la transformé de Fourier. $X(f)$.

On peut trouver une relation asymptotique En effet, soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie, on note

$$x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{V.28}$$

Le porion du signal de largeur T centré sur l'origine

$$x(t, T) \xleftrightarrow{T} X(f, T) \tag{V.29}$$

Ainsi $x(t, T)$ est un signal à énergie finie dont on peut calculer la densité spectrale d'énergie

$$S_{xx}(f, T) = |X(f, T)|^2 \tag{V.30}$$

En utilisant la théorie de parseval on a

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \tag{V.31}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t, T)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f, T)|^2 dt \tag{V.32}$$

En identifiant les intégrantes, on a donc

$$S_{xx}(f) df = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (\text{V.33})$$

Exemple

On considère le signal à puissance finie $x(t) = \varepsilon(t)$ dont la transformée de Fourier est

$$X(f) = \frac{1}{(i2\pi f) + \frac{\delta(f)}{2}}$$

Calculons la densité spectrale de puissance de $x(t)$, à partir du signal d'énergie

$$x(t, T) = \text{rect} \left(\frac{\left(t - \frac{T}{4} \right)}{\frac{T}{2}} \right)$$

Commençons par calculer la TF de $x(t, T)$

$$\begin{aligned} X(f, T) &= \exp(-i2\pi f \frac{T}{4}) \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \exp(-i2\pi f t) dt \\ &= \exp(-i2\pi f \frac{T}{4}) \frac{\sin(2\pi f \frac{T}{4})}{\pi f} \\ &= \exp(-i2\pi f \frac{T}{4}) \text{sinc}(f \frac{T}{2}) \cdot \frac{T}{2} \end{aligned}$$

On peut alors calculer la DSP de $x(t)$ comme la limite

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{T^2}{4} \text{sinc}^2(f \frac{T}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{4} \text{sinc}^2(f \frac{T}{2}) \\ &= \delta(f) / 2 \end{aligned}$$

Calculons directement la fonction d'autocorrélation de $x(t)$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{1}{2} \quad \text{pour } \tau > 0 \end{aligned}$$

Compte tenu de la parité de $\Gamma_{xx}(\tau)$ on a donc $\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}$

$$S_{xx}(f) = TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\} = \frac{\delta(f)}{2}$$

V.1.3 Corrélation des signaux périodiques

La fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques de même période est donnée par

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (V.34)$$

De même la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique de période T est donnée par

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad (V.35)$$

Remarque

Les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation des signaux périodiques de période T sont également des fonctions périodiques de même période.

V.2 Théorème de Wiener-khintchine

Soient x(t) et y(t) deux signaux à énergie finie.

$$TF[\Gamma_{xy}(\tau)] = TF[x(\tau) * y^*(-\tau)] \quad (V.36)$$

$$= TF[x(\tau)]TF[y^*(-\tau)]$$

$$TF[y^*(-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(-\tau) \exp(-2i\pi f\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t) \exp(2if\pi t) dt \quad (V.37)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-2i\pi ft) dt \right]^* = Y^*(f)$$

$$TF[\Gamma_{xy}(\tau)] = X(f).Y^*(f) \quad (V.38)$$

Si les deux signaux sont identiques on alors

$$TF[\Gamma_{xx}(\tau)] = X(f).X^*(f) = |X(f)|^2 = S_{xx}(f) \quad (V.39)$$

On obtient le module du spectre au carré: densité spectrale d'énergie. La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal est égal à sa densité spectrale d'énergie

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons intéressé à la corrélation des signaux à énergie et puissance moyenne finie. Ensuite nous avons présentés leurs densités spectrales d'énergie et de puissance. Nous avons terminé par le rappel du théorème de Wiener-Khintchine.

Bibliographies

- [1] Y. Granjon, Automatique ,2^{ème} édition, Dunod, 2010
- [2] M. Benidir, Théorie et traitement de signal, Dunod, 2002
- [3] F. Cottet, Traitement de signal(Aide-mémoire), Dunod, 2000
- [4] E.Tisserand, J.F. Pautex, P. Schwertzer, Analyse et traitement des signaux, 2^{ème} édition, Dunod, 2008
- [5] D. Baudois,J. Chanussot,J. Mars, Cours de traitement de signal ,Institut polytechnique de Grenoble
- [6] S. Dos Santos, Cours de traitement de signal, Institut des sciences appliqués, université de Tours
- [7] A. Porebski, Théorie de signal, Ecole d'ingénieurs du pays de Calais, 2010
- [8] J.P. Costa, Traitement de signal, Université d'Avignon
- [9] N. Errien, Traitement de signal, 2011
- [10] C. Jutten, Théorie de signal, université Joseph Fourier, Grenoble, 2009

Annexe

1) Notions de base sur les complexes

Soit le complexe z , nous pouvons l'écrire sous la forme cartésienne:

$$z = x + j.y$$

Ou selon la notation polaire:

$$z = x + j.y = r.(cos \theta + j.sin \theta) = r.e^{j.\theta}$$

Avec le module $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'argument $\theta = arctg(\frac{y}{x})$

Le complexe conjugué de z s'écrit \bar{z} avec :

$$\bar{z} = x - j.y = r.(cos \theta - j.sin \theta) = r.e^{-j.\theta}$$

2) Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$