الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــة الـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: BOUHALI M'hammed

THEME

Existence et stabilité exponentielle pour une équation d'évolution semi linéaire avec temps retard.

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. BELABBACI Youcef	***M.C.A***	***Président***
Mr. RAHMOUNE Abdelaziz	***M.C.B***	***Examinateur***
Mr. YAZID Fares	***M.A.A***	***Examinateur***
Mme. BOUKHATEM Yamna	***M.C.A***	***Encadreur***
Mlle. CHELLAOUA Houria		***Co-Encadreur***

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **ALLAH** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame **Boukhatem Yamna** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques, sa disponibilité, ses orientations judicieuses et la patience ont grandement contribué à l'aboutissement de ce projet.*

*Je tiens aussi à remercier Mlle. **Chellaoua Houria**, mon co-encadreur pour mon projet de fin d'études pour son suivi permanent et ses conseils pratiques qui m'ont aidé.*

*Un remerciement particulier va au Mr. **Bouhali Aissa** pour leurs tutelles à mes affaires et pour leurs aides.*

*Un très grand merci aux professeurs : **Y. Belabbaci**, **A. Rahmoune**, et **F. Yazid** qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

À mes parents.

Qu'ils ne savaient ni lire ni écrire.

Leur amour me permet aujourd'hui de réaliser ce mémoire.

ملخص:

في هـذا العمـل، نعتـبر مسـألة التطـور المجـردة الشـبه الخطيـة ذات تـأخير. وبفـرض بعـض الشروط عـلى المعطيـات الابتدائيـة، نـبرهن وجـود ووحدانيـة الحـل الكلـي للمسـألة مـع اعطـاء صـيغة الحـل وذلك باسـتخدام نظريـة نصـف الزمـرة. بالإضـافة الى ذلك، مـن خـلال طريقـة مبـاشرة نتحصـل عـلى الاسـتقرار الأسي للحـل، كـما نجـد أنـه إذا كانـت نصـف الزمـرة الـتي تصـف الجـزء الخطي للمسـألة مسـتقرة أسـيا فـان المسـألة تحـافظ عـلى هـذه الخاصـية. وفي الأخير، نقدم بعض التطبيقات.

الكلمات المفتاحية: مسألة شبه خطية ذات تأخير؛ الوجود الكلي؛ الاستقرار الأسي؛ التأخير.

Résumé :

Dans ce travail, on considère un problème d'évolution semi linéaire abstrait avec un terme de retard. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on démontre l'existence globale et l'unicité de la solution. De plus, on donne la formule de la solution en utilisant la théorie du semi groupe. Ensuite, par une méthode directe, on fournit la stabilité exponentielle de la solution suivant le terme source et on trouve que le $\mathcal{C}_0-$semi groupe qui décrit la partie linéaire est exponentiellement stable, alors le système tout entier est exponentiellement stable. Enfin, on donne quelques applications.

Mots clés : $\mathcal{C}_0-$semi groupe ; existence globale ; problème d'évolution semi linéaire abstrait ; stabilité exponentielle ; terme de retard.

Abstract :

In this work, we consider an abstract semilinear evolution equations with a time delay. Under certain assumptions on the initial data, we prove the global existence, uniqueness and we give the formula of the solution by using the semi group theory. Then, we establish the exponential stability result and we show that, if the $\mathcal{C}_0-$semigroup describing the linear part of the model is exponentially stable, then the whole system retains this good property. Finally, some examples illustrating our abstract approach are also given.

Key-words : $\mathcal{C}_0-$semi group ; abstract semilinear evolution problem ; exponential stability ; global existence ; time delay.

Table des matières

Introduction

Le retard de temps survient dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, thermiques et économiques parce que ce phénomène dépend non seulement de l'état actuel, mais aussi de l'histoire passé du système d'une manière plus compliquée. Ces dernières années, différentes équations avec des effets de retard sont devenus un domaine de recherche actif.

Dans de nombreux cas, le retard est une source d'instabilité et un petit retard peut déstabiliser le système qui est asymptotiquement stable dans l'absence du retard (Voir [4, 9]). Dans [10], Nicaise et Pignotti ont considéré le problème semi linéaire d'évolution abstrait suivant :

$$(P) : \begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + k\mathcal{B}U(t-\tau), & \forall t \in (0, +\infty), \\ U(0) = U_0, \quad \mathcal{B}U(t-\tau) = f(t), & \forall t \in (0, \tau), \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ un générateur d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ qui est exponentiellement stable, $\mathcal{B}$ un opérateur borné et F est une fonction non linéaire. $\tau > 0$ représente le temps du retard, k est un nombre réel et $U_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in C(0, \tau; \mathcal{H})$ sont les conditions initiales. Ils ont montré l'existence et la stabilité exponentielle de la solution en utilisant une méthode directe et le fait que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable. Ce mémoire consiste à donner une explication et simplification d'une partie de ce dernier travail.

Dans le cas des problèmes d'évolutions linéaires ($F \equiv 0$), on considère le problème suivant

$$u_{tt}(t) + Au(t) + Bu_t(t) + \mu u_t(t-\tau) = 0, \quad \forall t > 0,$$

où A et B sont des opérateurs linéaires avec μ est un nombre réel. Dans la littérature il existe différents résultats de stabilité, ces résultats montrent que l'amortissement $Bu_t(t)$ est assez fort pour stabiliser le système en présence du terme de retard à condition que $|\mu|$ soit suffisamment petit. Les mêmes résultats sont obtenus dans le cas des équations d'onde ($A = -\Delta$), par exemples, voir [15, 3, 13, 16]. Pour les problèmes viscoélastiques avec retard, voir [8, 5]

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la stabilité exponentielle du problème semi linéaire d'évolution abstrait, le problème (P), dans le cas où $\mathcal{B}$ est un opérateur borné. Le système (P) généralise les problèmes linéaires aux problèmes semi linéaires où le terme source et le terme dissipatif sont des opérateurs non linéaires. De plus, les équations d'ondes sans ou avec un terme mémoire avec retard sont un cas particulier du problème (P).

Ce travail constitue trois chapitres, le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques. On a commencé par des rappels d'analyse fonctionnelle. Ensuite, on a donné des définitions et des propriétés fondamentales sur les semi groupes fortement continus d'opérateurs linéaires continus et on a cité leurs propriétés élémentaires et nécessaires. On a terminé par quelques compléments divers sur les espaces de Lebesgue, l'espace de Sobolev et les espaces associés au problème d'évolution.

Le seconde chapitre sera consacré à l'étude du problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène. Nous citons des théorèmes pour assurer l'existence et l'unicité de la solution mild et classique. Ensuite, sous certaines conditions lipschitzienne, on montre que la solution du problème d'évolution non linéaire existe et unique. Enfin, on cite des théorèmes associés à l'existence locale et la régularité de la solution.

Dans le dernier chapitre, on considère un problème d'évolution semi linéaire abstrait avec un terme de retard. Sous certaines conditions initiales, on montre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie du semi groupe. En utilisant le fait que le semi groupe est exponentiellement stable, on établit la stabilité exponentielle par une méthode directe de l'écriture de la solution. Dans la fin de ce chapitre on donne quelques applications qui illustrent le résultat obtenu.

Notations

A^*	L'adjoint de l'opérateur A.
X	Espace de Banach.
X'	Espace dual de X.
H	Espace de Hilbert.
$\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert.
Id	L'opérateur d'identité.
$\mathcal{D}(A)$	Le domaine de l'opérateur A.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $\quad 1 \leq p \leq \infty$.
$L(X,Y)$	L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y.
$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$C(0,T;X)$	L'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans X.
$C^1(0,T;X)$	L'espace des fonctions continûment différentiables de $[0,T]$ dans X.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontiére régulière $\partial\Omega$.
$\mathcal{D}(\Omega),\ C_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles infiniment dérivables à support compact contenu dans $\mathcal{D}(\Omega)$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	L'espace des distributions.
$C_K^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ à support dans K.
$D^\alpha = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$	La dérivée d'ordre α avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
$H^1(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
$H_0^1(\Omega)$	Sont les fonctions $u \in H^1$ tells que $u\ \vert_{\partial\Omega} = 0$.
p.p	Presque partout.
u_t	La dérivée première de u par rapport au temps t.
u_{tt}	La dérivée seconde de u par rapport au temps t.

Chapitre 1

Semi groupes d'opérateurs linéaires bornés

Le premier chapitre est un rappel de quelques outils mathématiques. Nous commençons par quelques définitions et quelques propriétés fondamentales sur la théorie des opérateurs qui sont utiles pour la suite. Ils sont suivis par des définitions et des propriétés fondamentales sur les semi groupes fortement continus qu'il faut absolument connaitre pour l'étude de notre problème. Dans la fin de ce chapitre, on a donné quelques définitions sur les espaces L^p, les espaces de Sobolev et les espaces fonctionnels. Les prinipaux ouvrages utilisés sont [1], [6], [12] et [14].

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé, complet pour la distance associée à sa norme.

Définition 1.2. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance associée à sa norme.

Définition 1.3. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$). On dit qu'un opérateur A est **linéaire** si et seulement si

$$\forall x, y \in X, \quad A(x+y) = A(x) + A(y),$$

$$\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y est noté par $L(X, Y)$.

Remarque 1.1. *Lorsque $Y = \mathbb{K}\,(\mathbb{R}\ où \mathbb{C})$, $L(X, \mathbb{K})$ est l'ensemble des **formes linéaires** sur X.*

Définition 1.4. Soient X et Y deux espaces normés sur $\mathbb{K}(\mathbb{R}\,\text{où}\,\mathbb{C})$. Un opérateur linéaire A défini de X dans Y est dit **continu** en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \quad \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Il y a une définition équivalente : l'opérateur A est continu en x_0 si

$$Ax_n \to Ax_0 \text{ (dans } Y) \text{ dés que } x_n \to x_0 \text{ (dans } X) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

L'opérateur A est continu sur G tel que $G \subseteq X$, s'il est continu en chaque point de G. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y est noté par $\mathcal{L}(X, Y)$.

Théorème 1.1. *Soient X et Y deux espaces normés sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si A est continu en x_0, alors A est continu partout.*

Remarque 1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A continu en point 0 si et seulement si A est continu partout.*

Définition 1.5. Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dit **borné** s'il existe une constante positive M, telle que

$$\forall x \in X, \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Proposition 1.1. *La plus petite constante des M est la norme de A.*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1,\, x \neq 0} \|A(x)\|_Y.$$

Définition 1.6. Le graphe d'un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est le sous-espace de $X \times Y$ donné par

$$G(A) = \Big\{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\Big\} \subset X \times Y.$$

Définition 1.7. On dit que l'opérateur $A : X \longrightarrow Y$ est **fermé** si son graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times Y$.

On donne une caractérisation des opérateurs fermés par la suite dans la définition suivante

Définition 1.8. On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ converge vers x telle que la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers y alors, on a :

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad y = Ax$$

Théorème 1.2. *Soit X un espace normé et Y un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.3. *Un opérateur linéaire A est continu si et seulement s'il est borné.*

Théorème 1.4. *(**Théorème de Banach-Steinhaus**) Soient X et Y deux espaces de Banach, soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires continus de X dans Y. On suppose que*

$$\sup_{j\in J} ||A_j x||_Y < \infty, \quad \forall x \in X,$$

alors

$$\sup_{j\in J} ||A_j||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Autrement dit, il existe une constante C telle que

$$||A_j x||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X, \quad \forall j \in J.$$

Définition 1.9. Soit X un espace normé sur $\mathbb{K}$, on appel **dual topologique** l'espace vectoriel des formes linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$. Cet espace est noté par X'.

Définition 1.10. Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur linéaire borné défini de H dans H, alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté A^* défini de H dans H par

$$\forall x, y \in H, \quad \langle A(x), y\rangle_H = \langle x, A^*(y)\rangle_H.$$

A^* est appelé un opérateur **adjoint** de A.

- A est dit **auto-adjoint** si $A^* = A$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in H : \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Définition 1.11. (Opérateur positif) Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur positif, et on le note par $A \geq 0$, si pour tout $\varphi \in H$ on a

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle_H \geq 0.$$

Définition 1.12. (Racine carrée d'un opérateur) Soit A un opérateur linéaire positif sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, il existe un unique opérateur positif R appelé le racine carrée de l'opérateur A si

$$A = R^2, \quad \text{ou encore} \quad R = \sqrt{A}.$$

Définition 1.13. On définit l'espace de Hilbert $H_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ muni de la norme $\|u\|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|$ qui est donnée par

$$\langle u, v\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle, \quad \forall u,\ v \in H_{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Remarque 1.3. *Si $u \in \mathcal{D}(A)$, alors* (1.1) *s'écrit par*

$$\langle u, v\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Au, v\rangle.$$

1.2 Semi groupes uniformément continus

Définition 1.14. Soit X un espace de Banach et soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de X dans X. On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

1. $T(0) = Id$, $\quad$ (Id l'opérateur d'identité dans X)
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$

Définition 1.15. On dit qu'un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est uniformément continu sur X, s'il vérifie

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - Id\| = 0.$$

Définition 1.16. On appelle générateur infinitésimal d'un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ défini par

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{existe dans } X \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \left.\frac{T(t)x - x}{t}\right|_{t=0}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 1.4. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu sur X, alors on a*

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

En effet, posons $\alpha = s - t$, alors

$$\|T(s) - T(t)\| = \|T(t+\alpha) - T(t)\|,$$

et d'après les propriétés du semi groupe uniformément continu, on obtient

$$\begin{aligned} \|T(t+\alpha) - T(t)\| &= \|T(t)T(\alpha) - T(t)\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(\alpha) - Id\|, \end{aligned}$$

par passage à la limite lorsque $s \to t$, on trouve

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Exemple 1.1. (**Semi groupe de translations**)
On considère l'espace de Banach X défini par

$$X = \left\{ f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ est uniformément continue et bornée} \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_X = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f(x)|.$$

On définit une famille d'opérateurs linéaires $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ par

$$\forall x \in [0,\infty),\ (T(t)f)x = f(t+x), \quad \forall t \geq 0,\ \forall f \in X.$$

Si $t = 0$, on a :

$$(T(0)f)x = f(0+x) = f(x),$$

c'est-à-dire :

$$T(0) = Id_X$$

Donc $T(0) = Id_X$. De plus

- $(T(t+s)f)x = f(t+s+x) = (T(t)f)(s+x) = (T(t)T(s)f)(x),$

alors

$$\forall f \in X, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Donc $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace X.

Vérifiant que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu. On a :

- $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_X = \lim_{t\to 0} \sup_{x\in[0,+\infty)} |f(t+x) - f(x)| = 0, \quad \forall f \in X.$

Par conséquent, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X, nommé un semi groupe de translations à droite.

Soit l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ défini par :

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x),$$

uniformément par rapport à x. Par conséquent

$$\mathcal{D}(A) \subset \Big\{ f \in X \mid f' \in X \Big\}.$$

Si $f \in X$ telle que $f' \in X$, alors

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_X = \sup_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right|,$$

et on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(T(t)f)(x) - f(x)}{t} - f'(x) \right| &= \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{t} f(\tau) \mid_x^{x+t} - f'(x) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_x^{x+t} (f'(\tau) - f'(x)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{t} \int_x^{x+t} \Big| f'(\tau) - f'(x) \Big| d\tau \to 0,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à x pour $t \to 0$. Par suite

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_X \to 0 \quad \text{si} \quad t \to 0,$$

Par conséquent, $\mathcal{D}(A) = \Big\{ f \in X \mid f' \in X \Big\}$ et $Af = f'$.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques propriétés des semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Lemme 1.1. *Soit X un espace de Banach et $f : [a, b] \to X$ une application continue, alors*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

Démonstration.
Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} \Big(f(s) - f(a) \Big) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s\in[a,a+t]} \Big\| f(s) - f(a) \Big\| \times t \\
&\leq \sup_{s\in[a,a+t]} \Big\| f(s) - f(a) \Big\|.
\end{aligned}$$

D'après la continuité de f, on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

$\square$

Théorème 1.5. *Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow X$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Posons

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Cette série, ainsi définie, converge en norme et définit un opérateur linéaire borné $T(t)$ pour tout $t \geq 0$, il est clair que $T(0) = Id$, de plus on a

$$T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

On vérifié que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|T(t) - Id\| &= \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - Id \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!} \\
&\leq e^{t\|A\|} - 1,
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $t \to 0^+$, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \Big\| T(t) - Id \Big\| = 0.$$

D'autre part, pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - Id}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{e^{tA} - Id}{t} - A \right\| \\
&= \left\| \frac{e^{tA} - Id - tA}{t} \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \frac{\|A\|^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'ou

$$\frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0^+,$$

donc

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - Id}{t} = A.$$

Par conséquent, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X de générateur infinitésimal A.

Réciproquement, soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X, de générateur infinitésimal A.
L'application $t \longmapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue, donc

$$\int_0^t T(s)ds \in \mathcal{L}(X), \quad \forall t \geq 0.$$

D'après le lemme 1.1, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)ds = T(0) = Id.$$

Il existe alors $\tau > 0$, tel que

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \ T(s)ds - Id \right\| < 1.$$

Ce qui implique que $\displaystyle\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(s)ds$ est inversible, donc $\displaystyle\int_0^\tau T(s)ds$ est aussi inversible. De plus, pour tout $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T(h) - Id}{h}\right) \int_0^\tau T(s)ds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\tau (T(h+s) - T(s))ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^{\tau+h} T(s)ds - \int_0^\tau T(s)ds \right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_\tau^{\tau+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{T(h) - Id}{h}\right) = \left(\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds \right)\left(\int_0^\tau T(s)ds \right)^{-1}.$$

En utilisant le lemme 1.1, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\Big(\frac{T(h)-Id}{h}\Big)=(T(\tau)-Id)\Big(\int_0^\tau T(s)ds\Big)^{-1}.$$

Donc, le générateur infinitésimal du semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné, donné par

$$A=(T(\tau)-Id)\Big(\int_0^\tau T(s)ds\Big)^{-1}.$$

$\square$

Remarque 1.5. *On considère le semi groupe de translation $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ défini dans l'exemple avec*

$$\mathcal{D}(A)=\Big\{f\in X \mid f'\in X\Big\}\quad \textit{et}\quad Af=f',$$

comme cet opérateur n'est pas borné et d'après le théorème précédent, alors il ne peut pas engendre un semi groupe uniformément continu.

Remarque 1.6. *Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ admet un unique générateur infinitésimal d'après la définition* (1.16)*, et si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu, alors son générateur infinitésimal est un opérateur linéaire borné. D'autre part, tout opérateur linéaire borné est le générateur infinitésimal d'un unique semi groupe uniformément continu. Ce résultat est donnée par le théorème suivant :*

Théorème 1.6. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ deux semi groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés, si*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-Id}{t}=A=\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-Id}{t}, \tag{1.2}$$

alors

$$T(t)=S(t),\quad \forall t\geq 0.$$

Démonstration.
On montre que pour tout $\alpha>0$: $T(t)=S(t)$ pour $t\in[0,\alpha]$. Soit $\alpha>0$ fixé. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sont des semi groupes uniformément continus, alors les applications

$$t\to\Big\|T(t)\Big\|\quad \text{et}\quad t\to\Big\|S(t)\Big\|\quad \text{sont continues.}$$

Par conséquent, il existe une constante $C_\alpha>0$ telle que

$$\Big\|T(t)\Big\|\Big\|S(t)\Big\|\leq C_\alpha,\quad \forall t,s\in[0,\alpha].$$

Pour $h>0$, on a

$$\Big\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\Big\|=\Big\|\frac{T(h)-Id}{h}-A-\Big(\frac{S(h)-Id}{h}-A\Big)\Big\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, l'égalité (1.2) implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < h \leq \delta$, on trouve

$$\left\|\frac{T(h) - Id}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha C_\alpha} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{S(h) - Id}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha C_\alpha}.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(h) - S(h)}{h}\right\| &\leq \left\|\frac{T(h) - Id}{h} - A\right\| + \left\|\frac{S(h) - Id}{h} - A\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\alpha C_\alpha}.\end{aligned}$$

D'autre part, soient $t \in [0, \alpha]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{t}{n} < \delta$, d'après la définition (1.16) et l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|T(t) - S(t)\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\Big[T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big)\Big]\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big((k+1)\frac{t}{n}\Big)\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)T\Big(\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big(k\frac{t}{n}\Big)S\Big(\frac{t}{n}\Big)\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)\right\|\left\|S\Big(k\frac{t}{n}\Big)\right\|\left\|T\Big(\frac{t}{n}\Big) - S\Big(\frac{t}{n}\Big)\right\| \\ &\leq C_\alpha\frac{t}{n}\frac{\varepsilon}{\alpha C_\alpha} = \varepsilon\frac{t}{\alpha} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $T(t) = S(t),\ \forall t \in [0, \alpha]$, et, puisque $\alpha > 0$ est aussi arbitraire, on trouve

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

□

Corollaire 1.1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, alors*

1. *Il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.*
2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné A telle que $T(t) = e^{tA}$.*
3. *L'opérateur A définie dans le point 2 est un générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*
4. *L'application $t \to T(t)$ est différentiable, et on a*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration.
Toutes les assertions ci-dessus découlent de l'assertion (2).
Pour montrer (2), notons que puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continu, et d'après le théorème 1.5, son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire borné et est aussi le générateur infinitésimal du semi groupe uniformément continu donné par

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

1.3 Semi groupes fortement continus

Dans la suite, on suppose que A est un opérateur linéaire de X dans X de domaine $\mathcal{D}(A) \subset X$.

Définition 1.17. Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

Un semi groupe fortement continu sur X est appelé semi groupe de classe $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_0-$semi groupe.

Exemple 1.2. Un semi groupe uniformément continu d'opérateur linéaires bornés est un $\mathcal{C}_0-$semi groupe, en effet,

$$\|T(t)x - x\|_X \leq \|T(t) - Id\|\|x\|_X.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Comme exemple le semi groupe de translation à droite est un $\mathcal{C}_0-$semi groupe.

Définition 1.18. La borne supérieure "The growth bound" d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est le nombre $\omega_0(T)$ défini par

$$\omega_0(T) = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Remarquons que $\omega_0(T) \in [-\infty, \infty)$.

Proposition 1.2. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe sur X, telle que $\omega_0(T) < 0$. Alors*

1. $\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \log \|T(t)\|$.
2. *Pour tout $\omega > \omega_0(T)$, il existe $M_\omega \in [1, +\infty)$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad \forall t \in [1, \infty)$$

3. *L'application $t \longmapsto T(t)x \in X$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X.*

Démonstration.
Soit $x \in X$. La continuité de la fonction $t \to T(t)x$ en $t = 0$ à droite implique qu'il existe $\tau > 0$ tel que la fonction $t \to T(t)x$ est bornée sur $[0, \tau]$, et d'après la propriété d'un semi groupe, la même fonction est bornée sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$. Ensuite en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus 1.4 on obtient que la fonction $t \to \|T(t)\|$ est bornée dans $[0, T]$, pour tout $T > 0$.

Notons $p(t) = \log \|T(t)\|$, d'après la propriété de semi groupe, on a

$$p(t + \tau) \leq p(t) + p(\tau),$$

notons par $[t]$ et t_1 la partie entière et la partie fractionnaire de $t \in [0, \infty)$, on a

$$p(t) = p([t] + t_1),$$

et d'après les propriétés d'un semi groupe, on trouve

$$p([t] + t_1) \leq [t]p(1) + p(t_1) = ([t] + t_1)p(1) = tp(1). \tag{1.3}$$

Donc, d'après ce qui précède $p(t_1)$ est borné. par suite, on divise l'inégalité (1.3) par t on obtient

$$\frac{p(t)}{t} \leq p(1),$$

en prenant $\limsup$, on obtient

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq p(1),$$

de la même manière, si on remplace p par p_α avec $p_\alpha(t) = p(\alpha t), \quad \alpha \in (0, \infty)$, on trouve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(\alpha)}{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Par conséquent

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} \leq \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{p(t)}{t},$$

l'inégalité inverse est évident, donc on obtient le résultat

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{p(t)}{t} = \omega_0(T).$$

Le point (2) suit à partir du point (1). En effet, si $\omega > \omega_0(T)$, alors

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \text{pour tout} \quad t \geq t_\omega,$$

est vérifié pour tout $t_\omega \geq 0$, posons

$$M_\omega = \sup_{t\in[0,t_\omega]} \|T(t)\|e^{-\omega t}.$$

Revenant au dernier point. Soient $t_0 > 0$, et $x \in X$, on démontre que

$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x.$$

Si $t > t_0$

$$\begin{array}{rcl} T(t)x - T(t_0)x & = & T(t_0)[T(t-t_0)x - x] \\ \|T(t)x - T(t_0)x\| & \leq & \|T(t_0)\|\|T(t-t_0)x - x\| \quad \text{quand} \quad t \to t_0. \end{array}$$

Donc

$$\lim_{t\to t_0^+} T(t)x = T(t_0)x.$$

Si $t < t_0$

$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t)[T(t_0-t)x - x]\| \\ &\leq \|T(t)\|\|T(t_0-t)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(t_0-t)x - x\| \quad \text{quand} \quad t \to t_0. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t \to t_0^-} T(t)x = T(t_0)x,$$

d'où

$$\lim_{t \to t_0} T(t)x = T(t_0)x.$$

Par conséquent, on obtient la continuité de l'application $t \longmapsto T(t)x \in X$, de $\mathbb{R}^+$ dans X. D'où la démonstration du proposition (1.2). □

Définition 1.19. On dit qu'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe est exponentiellement stable, si

$$\omega_0(T) < 0.$$

On donne quelques propriétés sur les $\mathcal{C}_0-$semi groupes.

Théorème 1.7. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe et A son générateur infinitésimal, alors*

1. *Pour $x \in X$,*
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$
2. *Pour $x \in X$, alors $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$, et on a*
$$A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0.$$
3. *Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a*
$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$
4. *Pour $x \in \mathcal{D}(A)$,*
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Démonstration.
1. D'après le lemme 1.1, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)ds = f(x),$$

et comme l'application $t \longmapsto T(t)x \in X,\ t \geq 0$ est continue on déduit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

2. Soient $x \in X$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-T(0)}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.
\end{aligned}$$

En passant à la limite $h \to 0$, on trouve

$$\begin{aligned}
A\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-T(0)}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_0^{t+h} T(u)xdu - \int_0^h T(u)xdu\Big] \\
&= T(t)x - T(0)x = T(t)x - x,
\end{aligned}$$

et on a

$$\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A).$$

3. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(t)x-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)(x)}{h},
\end{aligned}$$

donc, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, et on a

$$T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0.$$

Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $\quad t \geq 0$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\Big\| &\leq \Big\|T(t)\Big\|\Big\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\Big\| \\
&\leq Me^{\omega t}\Big\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\Big\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)(x)}{h} = T(t)Ax,$$

d'ou

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $t-h > 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax\Big\| &\leq \Big\|T(t-h)\Big\|\Big\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax - thAx\Big\| \\
&\leq Me^{w(t-h)}\Big(\Big\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\Big\| + \Big\|T(h)Ax - Ax\Big\|\Big).
\end{aligned}$$

Par suite
$$\lim_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)(x)}{-h}=T(t)Ax.$$
Par conséquent
$$\frac{d^-}{dt}T(t)x=T(t)Ax,\quad \forall t\geq 0.$$
Donc, l'application est dérivable sur $[0,+\infty[$, pour tout $x\in\mathcal{D}(A)$, de plus, on a l'égalité
$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x.$$

4. D'après le point (3), on a
$$\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax,\quad \forall t\geq 0,$$
on intègre l'égalité précédente de s à t, on obtient
$$\int_s^t T(\tau)Axd\tau=\int_s^t AT(\tau)xd\tau=\int_s^t\frac{d}{d\tau}xd\tau=T(t)x-T(s)x.$$

□

Théorème 1.8. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe et A son générateur infinitésimal, alors*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)}=X$,

2. A est un opérateur fermé.

Démonstration.

1. Soient $x\in X$ et $t_n>0,\ n\in\mathbb{N}$, tels que
$$\lim_{n\to\infty}t_n=0.$$
On pose
$$x_n=\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)xds\in\mathcal{D}(A),\quad \forall n\in\mathbb{N},$$
d'où
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}T(s)xds=T(0)x=x,$$
par conséquent, $\overline{\mathcal{D}(A)}=X$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}(A)$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x\quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}Ax_n=y,$$
alors
$$\begin{aligned}\|T(s)Ax_n-T(s)y\| &\leq \|T(s)\|\|Ax_n-y\|\\ &\leq Me^{\omega t}\|Ax_n-y\|,\quad \forall s\in[0,t].\end{aligned}$$

Par suite $T(s)Ax_n \longmapsto T(s)y$, pour $n \longmapsto +\infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$, d'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$. On a

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n ds.$$

Alors

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds,$$

par suite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y ds = y.$$

Donc

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad Ax = y,$$

d'où A est un opérateur fermé. □

Théorème 1.9. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ deux $\mathcal{C}_0-$semi groupes dans X engendrés respectivement par A et B. Si $A = B$, alors*

$$T(t) = S(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, d'après le théorème 1.7, alors la fonction $s \longmapsto T(t-s)S(s)x$ est différentiable, et on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\
&= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction $s \longmapsto T(t-s)S(s)x$ est nulle, donc $s \to T(t-s)S(s)x$ est constante, donc, en $s = 0$ et $s = t$ sont identiques, on trouve

$$T(t)x = S(t)x, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus, d'après le théorème 1.8, alors le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X, et on obtient

$$T(t)x = S(t)x, \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

□

1.3.1 Théorème de Lumer Phillips

Dans ce paragraphe, on présente une caractérisation concernant les $\mathcal{C}_0-$semi groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lumer Phillips. On commence par donner quelques préliminaires.

Définition 1.20. On dit qu'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est de contraction si

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.21. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, et soit X' l'espace dual du X posons

$$F(x) = \Big\{x^* \in X', \quad \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\Big\}.$$

On dit que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif si pour tout $x \in X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que

$$Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0.$$

Proposition 1.3. *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\|(\lambda Id - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.10. ***(Lumer Phillips)*** *Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.*

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 Id - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe de contractions sur X.*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe de contractions sur X, alors $Im(\lambda_0 Id - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x^* \in F(x)$ on a $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Le théorème suivant, donne la perturbation d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe par un opérateur linéaire continu.

Théorème 1.11. *Soient X un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si B est un opérateur linéaire continu dans X, alors $A + B$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans X.*

1.4 Compléments

1.4.1 Les espaces L^p et les espaces de Sobolev

Définition 1.22. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω. Pour $K \subset \Omega$ compact, on note $C_K^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ à support dans K.
Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelées les fonctions tests.

Définition 1.23. On dit que T est une distribution (réelle) dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \, . \end{array}$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante
Pour tout K compact de Ω, il existe une constante $C_K > 0$ et il existe $P_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq P_k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$(multi-indice). On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions dans Ω. [$\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$].

Définition 1.24. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la dérivée d'une distribution T par

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Les espaces de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx. Les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.25. On appelle $\mathcal{L}^P$ pour $1 \leq p < +\infty$ l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mesurables, telles que

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Définition 1.26. On dit que f est essentiellement bornée sur Ω s'il existe une constante C positive telle que

$$|f(x)| \leq C \quad \text{p.p.}$$

La plus petite de ces constantes est appelée le sup essentiel de f. On la note par

$$ess \sup |f(x)|.$$

Définition 1.27. On appelle espace $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables qui ont un sup essentiel fini.

Définition 1.28. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace quotient $L^p = \mathcal{L}^P / \mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^P : \quad f \mathcal{R} g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Omega : \quad f(x) = g(x) \quad \text{p.p.}$$

Proposition 1.4. *L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$u \mapsto \begin{cases} \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \\ \|f\|_\infty = ess\sup_{x \in \Omega} |f(x)|, & si \quad p = +\infty, \end{cases}$$

est une norme.
$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.5. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

(qui s'écrit $\int_\Omega u(x)v(x)dx$ pour les fonctions réelles).

Notation :
Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p, i.e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Proposition 1.6. *(**Inégalité de Young**) Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

En Cas particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, pour $\delta > 0$ on a

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

Proposition 1.7. *(**Inégalité de Hölder**) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et,*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Remarque 1.7. *Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.*

Définition 1.29. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que Y s'injecte continûment dans X si $Y \subset X$ et si l'inclusion est continue, c'est-à-dire s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in Y$:

$$\|x\|_X \leq C \, \|x\|_Y.$$

On note $Y \hookrightarrow X$.
On dit que l'injection $Y \hookrightarrow X$ est compacte si, de plus, de toute suite bornée pour $(Y, \|.\|_Y)$, on peut en extraire une suite convergente dans $(X, \|.\|_X)$.

Proposition 1.8. *Si Ω est de mesure finie alors*
i) $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.
ii) $\forall q \geq p : \quad L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Remarque 1.8. *la dérivée d'une fonction régulière coïncide avec sa dérivée au sens des distributions.*

Les espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière.

Définition 1.30. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit l'espace de Sobolev que l'on note par $W^{m,p}$, l'espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que les dérivées $D^\alpha u$ au sens des distributions (avec α un multi-indice vérifiant $|\alpha| \leq m$) soient des fonctions de $L^p(\Omega)$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| \leq m\right\}.$$

Plus précisément, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si et seulement si $u \in L^p(\Omega)$ et s'il existe m fonctions $v_1, ...v_m \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega uD^i\varphi = (-1)^i \int_\Omega v_i\varphi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall i = 1, ..., m.$$

Notons que l'espace $W^{0,p}(\Omega)$ est l'espace $L^p(\Omega)$. L'application $\|.\|_{W^{m,p}} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & si\ 1 \leq p < \infty; \\ \\ \sup\limits_{1\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p, & si\ p = \infty, \end{cases}$$

est une norme sur l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.31. Soit m un entier positif, l'espace $H^m(\Omega)$ est un cas particulier d'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ où $p = 2$. Autrement dit, on définit $H^m(\Omega)$ par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

L'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ (u, v) & \mapsto & (u, v)_{H^m} = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \end{array}$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$.

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace normé muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,2}} = \|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Le cas particulier des fonctions de $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. En particulier, on a

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \text{pour tout } i = 1, .., n \right\},$$

et le produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ est donné par

$$(u, v)_{H^1} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx$$

pour tout u, v dans $H^1(\Omega)$.
Ainsi la norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Théorème 1.12.
1. $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{m,p}}$ est un espace de Banach.
2. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.9.
Soit $m' \geq m$. Alors $H^{m'}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$, de plus l'injection canonique est continue.

Théorème 1.13. *Soit $m \geq 1$ entier. Pour Ω un ouvert borné de classe C^1, on a*
si $n > 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, où $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.
si $n = 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, où $\forall p \in [2, +\infty)$.
si $n < 2$, alors $H^m(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.
Avec injections continues.

Définition 1.32. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m \geq 1$. Autrement dit,

$$u \in H_0^m(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } u_n \to u \text{ dans } H^m(\Omega).$$

Proposition 1.10. *Si $u \in H^m(\Omega)$ est à support compact, alors $u \in H_0^m(\Omega)$.*

Théorème 1.14. *Soit $u \in H^1(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u = 0$ sur la frontière de Ω.*

Remarque 1.9. *On peut définir $H_0^m(\Omega)$ pour $m > 1$ par :*

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) : \ u = Du = ... = D^{m-1}u = 0, \ sur\, \partial\Omega \right\}.$$

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Poincaré)***
Pour $1 \leq p < \infty$, on suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante positive C_* (dépendant de Ω et p) telle que :

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \|u\|_p \leq C_* \|\nabla u\|_p.$$

Corollaire 1.2. *La norme $\|\nabla u\|_2$ est équivalente à la norme $\|u\|_{H_0^1}$.*

1.4.2 Les espaces fonctionnels

Définition 1.33. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit l'espace $C(0,T;X)$ par

$$C(0,T;X) = \{ f \ : (0,T) \to X \ ; \quad \text{avec } f \text{ continue } \}.$$

muni de la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X$$

Définition 1.34. On dit qu'une fonction $f : (0,T) \to X$ est fortement dérivable en $t_0 \in (0,T)$ s'il existe un élément

$$\frac{df}{dt}(t_0) \in X \quad \text{telle que} \quad \lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \left(f(t_0 + h) - f(t_0) - \frac{df}{dt}(t_0) \right) \right\|_X = 0.$$

$\dfrac{df}{dt}(t_0)$ est appelé la dérivée forte de f en t_0.

Définition 1.35. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On note par $D(0,T;X)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0,T)$ à valeurs dans X.

Définition 1.36. Une fonction $f : (0,T) \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $D(0,T;X)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X \, ds = 0.$$

Théorème 1.15. ***(Bochner)***
Une fonction $f : (0,T) \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si l'application $t \to \|f(t)\|_X$, qui est définie de $(0,T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ soit intégrable, dans ce cas

$$\left\| \int_0^T f(s)\, ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X \, ds.$$

Définition 1.37. Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0,T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(X)$. l'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace normé muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(0,T;X) = \{ f \ : (0,T) \to X; \text{ mesurable et } \quad \exists\, C > 0 \ : \ \|f(t)\|_X \leq C \ \text{ p.p} \},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{ C > 0 \, ; \quad \|f(t)\|_X \leq C \quad \text{p.p} \quad t \in (0,T) \}.$$

Proposition 1.11.

1. *$L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach, pour $(1 \leq p \leq \infty)$.*
2. *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle \ . \ , \ . \ \rangle_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X dt.$$

3. *Pour $1 \leq q \leq r \leq \infty$, on a $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$ avec injection continue.*

Définition 1.38. Soit $u,\ w \in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)\, u(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,t;X).$$

Définition 1.39. L'espace de Sobolev $H^1(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u:(0,T)\to X$ telles que

$$u\in L^2(0,T;X) \quad \text{et} \quad u'\in L^2(0,T;X).$$

L'espace $H^1(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(0,T;X)}=\Big(\|u\|_{\ L^2(0,T;X)}+\|u'\|_{\ L^2(0,T;X)}\Big)^{1/2}.$$

Étant donné un entier $m\geq 2$, on définit par récurrence l'espace

$$H^m(0,T;X)=\Big\{u\in H^{m-1}(0,T;X)\,;\ u'\in H^{m-1}(0,T;X)\Big\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(0,T;X)}=\|u\|_{L^2(0,T;X)}+\sum_{\alpha=1}^{m}\left\|u^{(\alpha)}\right\|_{L^2(0,T;X)}.$$

Proposition 1.12. *Si $f\in L^p(0,T;X)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}\in L^p(0,T;X)$ avec $(1\leq p\leq\infty)$, alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$ continue de $[0,T]\to X$.*

Lemme 1.3. ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $g\in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $g(t)\geq 0$ pour tout $t\in[0,T]$ et soit $a\geq 0$. Si $\Psi\in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t)\leq a+\int_0^T g(s)\Psi(s)ds, \qquad \forall t\in[0,T].$$

Alors

$$\Psi(t)\leq a\exp(\int_0^T g(s)ds), \quad \forall t\in[0,T].$$

Théorème 1.16. ***(Le théorème du point fixe)*** *Soient E un espace métrique complet (non vide)et $A\subset E$ un ensemble convexe fermé. Soit f une application contractante sur A vérifiée $f(A)\subset A$, alors il existe un unique point fixe $\overline{x}$ de f.*
De plus, toute suite d'éléments de A vérifiant la récurrence

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

converge vers $\overline{x}$.

Chapitre 2

Équation d'évolution non linéaire

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité d'une solution intégrable et classique du problème de Cauchy abstrait homogène dans la première section. Pour un problème non homogène, sous certaines conditions sur F, on montre que la solution existe et unique dans la seconde section. On termine par l'étude du problème d'évolution non linéaire, et on cite des théorèmes associés à l'existence et la régularité de la solution du problème de Cauchy.

Soient X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire qui engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

2.1 Problème de Cauchy homogène

Définition 2.1. (**Problème homogène abstrait de Cauchy**) Le problème à valeur initiale

$$(P_1) : \begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad \forall t \geq 0. \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

est dit un problème homogène abstrait de Cauchy associé à A où t est la variable de temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X, avec $u_0 \in X$ est la valeur initiale.

Définition 2.2. Une fonction $u : [0, T[\to X$ est dite solution "classique" du problème (P_1) si

1. u est continue pour $t \geq 0$,
2. u est continûment différentiable,
3. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t \geq 0$, et u vérifie (P_1) sur $[0, T]$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy homogène est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe dans X et A son générateur infinitésimal, alors, pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Le problème (P_1) à une solution unique u vérifiée*

$$u \in C(0, +\infty; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, +\infty; X),$$

donnée par

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration.
L'existence de la solution est assurée par le théorème 1.7(assertion 3) on obtient que pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$:

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0,$$

est une solution classique du problème (P_1).

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe une autre solution $v \in C^1(0,+\infty;X) \cap C(0,+\infty;\mathcal{D}(A))$ et $t > 0$.
Posons

$$z(t) = T(t-s)v(s), \quad \forall s \in [0,t].$$

On a, pour tout $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds}(s) &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $z \in C^1(0,t;X)$ et $z(s) = z(0)$ pour tout $s \in [0,t]$, on trouve

$$v(t) = z(t) = T(t)v(0) = T(t)u_0, \quad \text{pour tout} \quad \forall t \geq 0.$$

D'ou

$$v(t) = T(t)u_0 = u(t), \quad \forall t \geq 0,$$

par conséquent, le problème (P_1) admet une unique solution u donnée par

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi, la preuve du théorème 2.1 est achevée. $\square$

Définition 2.3. Une fonction continue $u : [0,T[\to X$ est dite solution intégrable du problème (P_1) de valeur initiale u_0 si

$$\forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_0^t u(s)ds \in \mathcal{D}(A),$$

et la solution a la forme suivante :

$$u(t) = u_0 + A\Big(\int_0^t u(s)ds\Big), \quad \forall t > 0.$$

2.2 Problème de Cauchy non homogène

Soit le problème

$$(P_2) : \begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0. \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

où $f : [0,T[\to X$ est continue. On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, par conséquent l'équation homogène correspondante à $f \equiv 0$ admet une solution unique pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Définition 2.4. Une fonction $u : [0, T[\to X$ est dite solution classique de (P_2) sur $[0, T[$ si

1. u est continue dans $[0, T[$,
2. $u(t)$ est continûment différentiable sur $]0, T[$,
3. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t \geq 0$ et $u(t)$ satisfaite le problème (P_2) sur $[0, T[$.

Proposition 2.1. *Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème à valeur initiale (P_2) admet au plus une solution. Dans le cas ou la solution existe elle est donnée par*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{2.1}$$

Démonstration.
Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe engendré par A, et soit u une solution de (P_2), alors la fonction $s \longmapsto g(s) := T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= T(t-s)((Au) + f(s)) - AT(t-s)u(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable. En intégrant (2.2) de 0 à t on trouve

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

donc

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{2.3}$$

□

Exemple 2.1. En particulier, si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors pour tout $u_0 \in X$ le problème (P_2) a une solution unique u sur $\mathbb{R}^+$ donnée par

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)d(s).$$

Définition 2.5. Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, et soit $u_0 \in X$ et $f \in L^1(0, T; X)$. La fonction $u \in C(0, T; X)$ donnée par

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

est la solution intégrable du problème à valeur initiale (P_2) sur $[0, T]$.

Remarque 2.1. *La continuité de f en général n'est pas suffisante pour assurer l'existence de la solution du (P_2) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Exemple 2.2. Soient A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $x \in X$ tel que $T(t)x \notin \mathcal{D}(A) \quad \forall t \geq 0$. On considère la fonction f définie par

$$f(s) = T(s)x, \quad \forall s \in [0, T[,$$

alors f est continue pour $s \geq 0$.
Considérons le problème à valeur initiale suivant

$$(P') : \begin{cases} u'(t) &= Au(t) + T(t)x, \quad \forall t > 0. \\ u(0) &= 0 \end{cases}$$

Le problème (P') n'admet pas de solution malgré que $u(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$. En effet, la solution intégrable de (P') est donnée par

$$u(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x,$$

avec la fonction $t \longmapsto tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$, et donc ne peut pas être une solution du problème (P').

Lemme 2.1. *Soit $g : [a, b[\to X$ une fonction continue admettant une dérivée à droite, notée g'_d continue sur $[a, b[$, alors la fonction g est continûment différentiable sur $[a, b[$.*

Théorème 2.2. *Soient A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in L^1(0, T; X)$ continue sur $]0, T]$ et soit v la fonction définie par*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Le problème à valeur initiale (P_2) admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée

1. *v est continûment différentiable sur $]0, T[$.*
2. *$v(t) \in \mathcal{D}(A), \forall t \in [0, T[$ et la fonction $t \longmapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.*
   Réciproquement, si le problème (P_2) admet une solution u sur $[0, T[$ pour un certain $x \in \mathcal{D}(A)$, alors v vérifie les conditions (1) et (2).

Démonstration.
Si le problème (P_2) admet une solution u pour un certain $x \in \mathcal{D}(A)$, alors cette solution est donnée par (2.1). Par conséquent, les fonctions $u(t)$, et $T(t)x$ sont différentiables, donc $t \longmapsto v(t) = u(t) - T(t)x$ est différentiable, et on a $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$, donc v' est clairement continue sur $]0, T[$ et par suite l'assertion 1 est vérifiée. De plus si $x \in \mathcal{D}(A)$ alors

$$T(t)x \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t > 0,$$

et par suite

$$v(t) = u(t) - T(t)x \in \mathcal{D}(A), \quad \forall t > 0, \quad \text{et} \quad Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax.$$

Donc $t \longmapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$. Alors l'assertion 2 est vérifiée.
D'autre part, pour tout $h > 0$ on a

$$\frac{T(h) - Id}{h}v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds, \tag{2.5}$$

puisque f est continue, alors

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds = f(t).$$

• Si v est continûment différentiable sur $]0,T[$, il s'ensuit alors de l'égalité (2.5) que

$$v(t)\in\mathcal{D}(A), \quad \forall t\in[0,T[, \quad \text{et } Av(t)=v'(t)-f(t),$$

puisque $v(0)=0$ alors $u(t)=T(t)x+v(t)$ est la solution du problème (P_2) pour $x\in\mathcal{D}(A)$.

• Si $v(t)\in\mathcal{D}(A), \quad \forall t\in[0,T[$, il vient de l'égalité (2.5) que v est différentiable à droite en t et sa dérivée à droite est

$$v'_d(t)=Av(t)+f(t).$$

Comme v'_d est continue, il vient alors par le lemme 2.1 que v est continûment différentiable sur $]0,T[$ et

$$v'(t)=Av(t)+f(t).$$

Puisque $v(0)=0, \quad u(t)=T(t)x+v(t)$ est la solution du problème (P_2) pour $x\in\mathcal{D}(A)$. D'où la démonstration du théorème 2.2. □

Théorème 2.3. *Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, et soit $u_0\in\mathcal{D}(A)$ et $f:[0,+\infty[\to X$ est un fonction de classe C^1, alors la solution intégrable devient une solution classique de l'équation (P_2).*

Démonstration.
La solution intégrable s'écrit comme

$$u(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s)d(s)=T(t)x+v(t).$$

Soit $v\in C^1([0,+\infty],X)$, alors

$$v(t)=Au(t)+T(t)y, \quad \forall t\geq 0 \quad \text{et} \quad v(0)=0.$$

En effet, soit $h>0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-Id}{h}v(t) &= \frac{T(h)-Id}{h}+\int_0^t T(t-s)f(s)d(s)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)d(s)-\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)d(s)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)d(s)-\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)d(s)\\
&- \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)d(s)\\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h}-\frac{1}{h}\int_t^{t+1} T(t+h-s)f(s)d(s). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)d(s)=f(t),$$

mais, on a

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)d(s) = \int_0^t T(s)f(t-s)d(s),$$

alors

$$\begin{aligned} D^+v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \int_0^t \frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} d(s) \\ &= \int_0^t T(s)f'(t-s)d(s) \\ &= \int_0^t T(t-s)f'(s)d(s). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Comme f' est continue, alors $t \longmapsto \int_0^t T(t-s)f'(s)$ est continue dans $\mathbb{R}^+$. Donc

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t), \quad \forall t \geq 0.$$

la démonstration du théorème est achevée. □

Exemple 2.3. Considérons le problème qui décrit les phénomènes du transport suivant :

$$(E_A) : \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(\mathbb{R})$.
Écrivons le problème (E_A) sous la forme abstraite, en posant $u(t) = v(\cdot,t)$

$$(P_1) \begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad \forall t \geq 0. \\ u(0) &= f, \end{cases}$$

où $A = -\dfrac{d}{dx}$ avec le domaine $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.
Comme A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0-$semi groupe défini sur X par

$$(T(t)f)(x) = f(x-t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0,$$

d'après le théorème 2.1, il vient que pour tout $f \in \mathcal{D}(A)$, la fonction définie par

$$u(x,t) = (T(t)f)(x) = f(x-t),$$

est l'unique solution du problème (E_A).

2.3 Équation d'évolution non linéaire

On considère le problème d'évolution non linéaire suivant

$$(P_3) \begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t,u(t)), \quad t > t_0. \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, et $f : [t_0,T] \times X \to X$ est continue en t et Lipschitzienne en u.

Remarque 2.2. *Le problème (P_3) n'admet pas nécessairement une solution, s'il existe une solution, alors cette solution u est de la forme*

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{2.8}$$

Définition 2.6. Une fonction continue u est dite solution intégrable du problème (P_3) si elle vérifie (2.8).

L'existence et l'unicité de la solution intégrable du problème (P_3) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soit $f : [t_0, T] \times X \to X$ est continue en t dans $[t_0, T]$ et uniformément Lipschitzienne sur X. Si A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans X, alors pour tout $u_0 \in X$, le problème (P_3) admet une unique solution intégrable $u \in C(t_0, T; X)$. De plus, l'application $u_0 \to u$ est Lipschitzienne de X dans $C(t_0, T; X)$.*

Démonstration.
Pour démontrer l'existence de la solution, on utilise le théorème du point fixe. Soit $u_0 \in X$, on définie l'application :

$$F : C(t_0, T; X) \longrightarrow C(t_0, T; X),$$

par

$$(Fu)(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall t \in [t_0, T], \tag{2.9}$$

alors

$$(Fu)(t) - (Fv)(t) = T(t-t_0)(u_0 - v_0) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))ds, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

par passage en norme et en utilisant l'hypothèse sur f, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| & \leq & \|T(t-t_0)(u_0 - v_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\|ds \\ & \leq & M\|u_0 - v_0\| + ML\|u - v\||t - t_0|. \end{array}$$

Notons par $\|u\|_\infty$ la norme de u dans l'espace $C(t_0, T; X)$.
D'après la définition de F, on a

$$\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| \leq ML(t-t_0)\|u - v\|_\infty. \tag{2.10}$$

En utilisant (2.9) et (2.10), on obtient

$$\|(F^n u)(t) - (F^n v)(t)\| \leq \frac{(ML(t-t_0))^n}{n!}\|u - v\|_\infty,$$

d'où

$$\|F^n u - F^n v\| \leq \frac{(MLT)^n}{n!}\|u - v\|_\infty. \tag{2.11}$$

Pour n assez grand, on a

$$\frac{(MLT)^n}{n!} < 1.$$

D'après le principe de contraction, alors F admet un unique point fixe $u \in C(t_0, T; X)$, ce point fixe est la solution cherché de l'équation (2.8).

Pour prouver l'unicité de la solution, soit v une solution intégrable du problème (P_3) sur $[t_0, T]$ avec la donné initiale v_0, alors

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|T(t-t_0)u_0 - T(t-t_0)v_0\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)(f(s, v(s)))ds \\ &\leq M\|u_0 - v_0\| + ML\int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\|ds. \end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall (1.3) à l'inégalité précédente, on obtient

$$\|u(t) - v(t)\| \leq Me^{ML(T-t_0)}\|u_0 - v_0\|,$$

donc

$$\|u - v\|_\infty \leq Me^{ML(T-t_0)}\|u_0 - v_0\|,$$

si $u_0 = v_0$.
Ce qui donne l'unicité de u et la continuité de Lipschitz de l'application $u_0 \to u$, c'est-à-dire que la solution dépend continûment de la condition initiale.
Ceci achève la preuve. □

Remarque 2.3. *Si $g \in C(t_0, T; X)$ on modifié la définition de F dans la preuve précédente du théorème 2.4 en*

$$(Fu)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, u(s))ds.$$

On obtient le résultat plus général suivant

Corollaire 2.1. *Si A et f vérifiant les conditions du théorème 2.4, alors pour tout $g \in C(t_0, T; X)$ l'équation*

$$\omega(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s, \omega(s))ds, \tag{2.12}$$

admet une unique solution $\omega \in C(t_0, T; X)$.

Remarque 2.4. *La condition de Lipschitz uniforme de la fonction f du théorème 2.4 assure l'existence d'une solution intégrable globale du problème (P_3).*

Le théorème suivant donne la version locale du théorème 2.4.

Théorème 2.5. *Soit $f : [0, \infty[\times X \to X$ une fonction continue en t pour $t \geq 0$, et localement Lipschitzienne en u uniformément en t dans des intervalles bornés. Si A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans X, alors pour tout $u_0 \in X$, il existe $t_{max} \leq \infty$ tel que le problème*

$$(P_3)\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases}$$

admet une unique solution intégrable u dans $[0, t_{max}[$, de plus si $t_{max} < \infty$ alors

$$\lim_{t\to t_{max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Théorème 2.6. *(**Régularité**) Soit A un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si $f : [t_0, T] \times X \to X$ est continûment différentiable de $[t_0, T] \times X$ dans X, alors la solution intégrable du problème (P_3) avec $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ est une solution classique de problème (P_3).*

Remarque 2.5. *La preuve de ces théorèmes 2.5 et 2.6 se trouve dans le livre de Pazy [12](Ch.6, Page 187).*

Chapitre 3

Existence et stabilité exponentielle d'un problème d'évolution abstrait avec terme retard

Dans ce chapitre, on considère un problème d'évolution semi linéaire abstrait avec un terme de retard. Sous certains conditions, on démontre l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie de semi groupe, et pour la stabilité, on utilise une méthode directe de l'écriture de la solution et le fait que le semi groupe est exponentiellement stable. Dans la fin de ce chapitre on donne quelques applications qui illustrent le résultat obtenu.

3.1 Position du problème

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{A}$ un opérateur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$ qui engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe qui est exponentiellement stable au sens de la définition (1.19), c'est-à-dire

$$\exists M, \omega > 0, \quad \text{tels que} \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et la stabilité exponentielle du problème d'évolution abstrait suivant :

$$(P) : \begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + k\mathcal{B}U(t-\tau), & \forall t \in (0, +\infty), \\ U(0) = U_0, \quad \mathcal{B}U(t-\tau) = f(t), & \forall t \in (0, \tau), \end{cases}$$

où : $\tau > 0$ est un paramètre de retard fixé, k un nombre réel et $U_0 \in \mathcal{H}$, $f \in C(0, \tau; \mathcal{H})$ sont les conditions initiales.

Dans l'étude du problème (P), on aura besoin de supposer quelques hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.

• **Hypothèses.**

(H1) : $\mathcal{A}$: un opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ qui engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe qui est exponentiellement stable.

(H2) : $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur linéaire borné.

(H3) : $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une fonction non linéaire satisfait certaines conditions de Lipschitz.

On vas étudier le problème dans deux cas : le cas ou F est globalement Lipschitzienne et le cas non linéarités plus générale. Commençons par le premier cas :

3.2 F est globalement Lipschitzienne

Dans cette partie, on suppose que F vérifie l'hypothèse suivante :
(H4) : $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est globalement Lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tel que} \quad \|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U_1, U_2 \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

De plus, supposons que $F(0) = 0$.

3.2.1 Existence globale

L'existence globale de la solution dans ce cas est donnée par le théorème suivant

Théorème 3.1. *Pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in C(0, \tau; \mathcal{H})$, il existe une unique mild solution $U \in C(0, +\infty; \mathcal{H})$ du problème (P), de plus la solution est donnée par*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)[F(U(s)) + k\mathcal{B}U(s-\tau)]ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3}$$

Démonstration.

Pour montrer l'existence de la solution, on utilise une méthode itérative.
Pour $t \in [0, \tau]$, le problème (P) est considéré comme le problème d'évolution non homogène suivant

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + g_0(t), & \forall t \in (0, \tau) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $g_0(t) = kf(t)$. Puisque f est continue et F est globalement lipschitzienne, alors d'après le théorème 2.4, le problème (3.4) possède une unique mild solution $U \in C(0, \tau; \mathcal{H})$ donnée par

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)\left[F(U(s)) + g_0(s)\right] ds, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Par conséquent, la solution U existe pour tout $t \in [0, \tau]$.
Dans l'intervalle $t \in [\tau, 2\tau]$ et avec $g_1(t) = k\mathcal{B}U(t-\tau)$ le problème (P) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U_t(t) = & \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + g_1(t), \quad \forall t \in (\tau, 2\tau) \\ U(\tau) = & U(\tau-). \end{cases} \tag{3.5}$$

En appliquant le théorème 2.4 pour $t \in [\tau, 2\tau]$, on obtient que le problème (3.5) admet une unique mild solution $U \in C(\tau, 2\tau; \mathcal{H})$ donnée par

$$U(t) = S(t-\tau)U(\tau-) + \int_\tau^t S(t-s)[F(U(s)) + g_1(s)]ds, \quad \forall t \in [\tau, 2\tau],$$

avec
$$U(\tau-) = U(\tau).$$
Par conséquent, la solution U existe $\forall t \in [\tau, 2\tau]$.

On passe à la troisième itération ou $t \in [2\tau, 3\tau]$ et sous les même étapes, on trouve le problème d'évolution non homogène suivant :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + g_2(t), & \forall t \in (2\tau, 3\tau) \\ U(2\tau) = U(2\tau-), \end{cases} \tag{3.6}$$

où $g_2(t) = k\mathcal{B}U(t-\tau)$, pour $t \in [2\tau, 3\tau]$. D'après le même théorème 2.4, ce problème a une unique mild solution $U \in C(2\tau, 3\tau; \mathcal{H})$ donnée par

$$U(t) = S(t-2\tau)U(2\tau-) + \int_{2\tau}^{t} S(t-s)[F(U(s)) + g_2(s)]ds, \quad \forall t \in [2\tau, 3\tau],$$

avec
$$U(2\tau-) = U(2\tau).$$
Par conséquent, la solution U existe $\forall t \in [2\tau, 3\tau]$.

Par itération, on obtient que le problème (P) admet une unique globale solution $U \in C(0, +\infty; \mathcal{H})$ vérifiant (3.3). $\square$

3.2.2 Stabilité exponentielle

La stabilité exponentielle de la solution du problème (P) avec F est globalement lipschitzienne, et $F(0) = 0$ est assurée dans le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soient M, ω et γ des constantes positives définies dans les formules* (3.1) *et* (3.2). *Il existe une constante positive k_0 telle que pour k vérifie*

$$|k| < k_0 := \frac{e^{\tau\omega} - 1}{\tau \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} M e^{\tau\omega}}, \tag{3.7}$$

et pour $\gamma < \gamma(|k|)$ avec $\gamma(|k|)$ une constante dépend de $|k|$. Alors, il existe $M', \omega' > 0$ tels que la solution $U \in C(0, +\infty; \mathcal{H})$ du problème (P) satisfait

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M' e^{-\omega' t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + \int_0^{\tau} e^{\omega s} \|f(s)\|_{\mathcal{H}} ds\Big), \quad \forall t \geq \tau. \tag{3.8}$$

Démonstration.
Pour démontrer ce théorème, on passe premièrement par la partie linéaire du problème (P), c'est-à-dire F est nulle.

• **Cas** 1 : $F \equiv 0$
Le problème (P) s'écrit dans ce cas par :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + k\mathcal{B}U(t-\tau), & \forall t \in (0, +\infty), \\ U(0) = U_0, \quad \mathcal{B}U(t-\tau) = f(t), & \forall t \in (0, \tau). \end{cases} \tag{3.9}$$

D'après le théorème 3.1 la solution du problème (3.9) existe globalement et s'écrit sous la forme

$$U(t) = S(t)U_0 + k\int_0^t S(t-s)\mathcal{B}U(s-\tau)ds, \quad \forall t > 0, \tag{3.10}$$

par passage en norme, on trouve

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\int_0^t \|S(t-s)\mathcal{B}U(s-\tau)\|_{\mathcal{H}}ds, \quad \forall t > 0, \tag{3.11}$$

d'après la stabilité exponentielle d'une semi groupe $\mathcal{C}_0$, on obtient

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\int_0^t e^{\omega s}\|\mathcal{B}U(s-\tau)\|_{\mathcal{H}}ds\Big), \quad \forall t > 0.$$

Pour montrer (3.8) on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$e^{\omega t}\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha)(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^n, \ t \in [0, (n+1)\tau]. \tag{3.12}$$

avec $\alpha := \int_0^\tau e^{\omega s}\|f(s)\|_{\mathcal{H}}ds$ *et* $B = \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

Démonstration.
Pour démontrer le lemme 3.1, on utilise la démonstration par récurrence.
Pour $n = 0$, dans l'intervalle $(0, \tau)$, l'écriture de la solution (3.3) et la condition initiale de (P) donne

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\int_0^t e^{\omega s}\|f(s)\|_{\mathcal{H}}ds\Big), \quad \forall t \in (0, \tau),$$

alors

$$e^{\omega t}\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha\Big), \quad \forall t \in (0, \tau).$$

On suppose que (3.12) est vérifiée pour $n \leq m-1$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et on démontre qu'elle est vraie pour m. En effet, d'après (3.3) et pour $t \in (m\tau, (m+1)\tau)$, on obtient

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha + |k|\sum_{l=0}^{m-1}\int_{(l+1)\tau}^{(l+2)\tau} e^{\omega s}\|\mathcal{B}U(s-\tau)\|_{\mathcal{H}}ds\Big).$$

De plus, pour $s \in ((l+1)\tau, (l+2)\tau)$, avec $l = 0, \cdots, m-1$ on à $s - \tau \in (l\tau, (l+1)\tau)$, et d'après (3.12) on trouve

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \ \leq \ & Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha + |k|\sum_{l=0}^{m-1}\int_{(l+1)\tau}^{(l+2)\tau} e^{\omega s}BMe^{-\omega(s-\tau)}(\|U_0\|_{\mathcal{H}} \\ & +|k|\alpha)(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau})^l ds\Big),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \ \leq \ & Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha + |k|\tau BM(\|U_0\|_{\mathcal{H}} \\ & +|k|\alpha)e^{\omega\tau}\sum_{l=0}^{m-1}(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau})^l\Big),\end{aligned}$$

donc, on trouve

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\omega t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha\Big)\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\sum_{l=0}^{m-1}(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau})^l\Big). \tag{3.13}$$

Maintenant, on montre par récurrence l'égalité suivante :

$$1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^l = \Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^m. \tag{3.14}$$

Pour $m = 0$, elle est vraie. On suppose qu'elle est vraie pour m, et on démontre pour $m + 1$, on a

$$\begin{aligned} 1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\sum_{l=0}^{m}\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^l &= 1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\sum_{l=0}^{m-1}\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^l \\ &\quad + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^m, \end{aligned} \tag{3.15}$$

et d'après (3.14), on obtient qu'elle est vraie pour tout m.

$$e^{\omega t}\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha\Big)\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^m, \quad \forall t \in [m\tau, (m+1)\tau],$$

Par récurrence, on a l'inégalité

$$\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^n \leq \Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big)^m, \quad \forall n \leq m - 1.$$

$\square$

Revenant à la démonstration du théorème. Posons

$$\sigma = \frac{1}{\tau}\ln\Big(1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau}\Big), \tag{3.16}$$

donc, l'inégalité (3.12) devient

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-(\omega-\sigma)t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + |k|\alpha\Big), \quad \forall t > 0.$$

Pour k, on trouve

$$1 + |k|\tau BMe^{\omega\tau} < e^{\tau\omega},$$

donc sous la condition (3.7), on obtient que $\omega - \sigma > 0$. D'où, la stabilité exponentielle de la solution U.

- **Cas 2** : $F \neq 0$

Similaire à [9], on introduit la variable Z comme suit

$$Z(t,\rho) := \mathcal{B}U(t - \tau\rho), \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0, \tag{3.17}$$

puisque $\mathcal{B}$ est linéaire, on a :

$$Z_t(t,\rho) = \frac{\partial Z(t,\rho)}{\partial t} = \mathcal{B}U(t - \tau\rho) \quad \text{et} \quad Z_t(t,\rho) = \frac{\partial Z(t,\rho)}{\partial \rho} = -\tau\mathcal{B}U(t - \tau\rho),$$

donc la fonction Z vérifie l'équation suivante :

$$\tau Z_t(t,\rho) + Z_\rho(t,\rho) = 0, \quad \forall t \in (0,+\infty),\ \forall \rho \in (0,1).$$

Par conséquent, le problème (P) se transforme au problème suivant

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + kZ(t,1), & \forall t \in (0,+\infty) \\ Z_t(t,\rho) = -\dfrac{1}{\tau} Z_\rho(t,\rho), & \forall t \in (0,+\infty),\ \forall \rho \in (0,1) \\ Z(t,0) = \mathcal{B}U(t), & \forall t \in (0,+\infty) \\ U(0) = U_0, \quad Z(0,\rho) = f((1-\rho)\tau), & \forall \rho \in (0,1). \end{cases} \tag{3.18}$$

La partie linéaire du problème (3.18) est donnée par

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + kZ(t,1), & \forall t \in (0,+\infty) \\ Z_t(t,\rho) = -\dfrac{1}{\tau} Z_\rho(t,\rho), & \forall t \in (0,+\infty),\ \forall \rho \in (0,1) \\ Z(t,0) = \mathcal{B}U(t) & \forall t \in (0,+\infty) \\ U(0) = U_0, \quad Z(0,\rho) = f((1-\rho)\tau), & \forall \rho \in (0,1). \end{cases} \tag{3.19}$$

Pour $V := (U,Z)^T$, alors le problème (3.19) devient :

$$\begin{cases} V_t = \tilde{\mathcal{A}}V \\ V(0) = (U(0), Z(0,.))^T, \end{cases}$$

avec l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\varphi_1 + k\varphi_2(1) \\ \dfrac{-1}{\tau}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

et le domaine de $\tilde{\mathcal{A}}$ est donné ainsi

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}) = \Big\{ (U,V)^T \in \tilde{\mathcal{H}} :\ \mathcal{A}U(t) + kZ(1) \in \mathcal{H} \text{ et } Z(0) = f((1-\rho)\tau) \Big\},$$

où $\tilde{\mathcal{H}}$ est l'espace de Hilbert suivant

$$\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \times L^2(0,1,\mathcal{H}), \tag{3.21}$$

muni du produit scalaire suivant :

$$\langle \Phi, W \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle \varphi_1, w_1 \rangle + k\tau \langle \varphi_2, w_2 \rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})}.$$

Pour tout $\Phi = (\varphi_1,\ \varphi_2)^T \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $W = (w_1,\ w_2)^T \in \tilde{\mathcal{H}}$.
L'ensemble $L^2(0,1;\mathcal{H})$ est défini par

$$L^2(0,1;\mathcal{H}) = \Big\{ \varphi : (0,1) \to \mathcal{H}, \quad \int_0^1 \|\varphi(\rho)\|^2 d\rho < +\infty \Big\}, \tag{3.22}$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})} = \int_0^1 \langle \varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho) \rangle d\rho.$$

Pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0,1;\mathcal{H})$.

Pour montrer que le problème (3.20) est bien posé au sens d'existence et d'unicité, il suffit de montrer que $\tilde{\mathcal{A}}$ engendre un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu. Pour cela, on utilise le théorème de Lumer Phillips 1.10 dans l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$.

En effet, on montre d'abord que $\tilde{\mathcal{A}}$ est un opérateur dissipatif. Pour $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}})$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathcal{A}}\Phi, \Phi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} &= \left\langle \begin{pmatrix} A\varphi_1 + k\varphi_2(1) \\ \dfrac{-1}{\tau}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \\
&= \langle A\varphi_1 + k\varphi_2(1), \varphi_1\rangle + k\tau\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}, \varphi_2\rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})} \\
&= \langle \mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1\rangle + k\langle \varphi_2(1), \varphi_1\rangle + k\tau\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}, \varphi_2\rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Young, on obtient

$$k\langle \varphi_2(1), \varphi_1\rangle \leq \frac{k}{2}\left(\|\varphi_2(1)\|^2 + \|\varphi_1\|^2\right), \tag{3.23}$$

de plus, on a

$$\begin{aligned}
\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}, \varphi_2\rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})} &= \int_0^1 \langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}(\rho), \varphi_2(\rho)\rangle d\rho \\
&= \frac{-1}{2\tau}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho}\|\varphi_2(\rho)\|^2 d\rho \\
&= \frac{1}{2\tau}\left(\|\varphi_2(0)\|^2 - \|\varphi_1(1)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2\tau}\left(\|\mathcal{B}\varphi_1\|^2 - \|\varphi_1(1)\|^2\right).
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ est un opérateur borné, on trouve

$$\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}, \varphi_2\rangle_{L^2(0,1;\mathcal{H})} \leq \frac{1}{2\tau}\left(B\|\varphi_1\|^2 - \|\varphi_1(1)\|^2\right),$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathcal{A}}\Phi, \Phi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} &\leq \langle \mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1\rangle + \frac{k}{2}\left(\|\varphi_2(1)\|^2 + \|\varphi_1\|^2\right) + \frac{k}{2}\left(\|B\varphi_1\|^2 - \|\varphi_1(1)\|^2\right) \\
&\leq \langle \mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1\rangle + \frac{k}{2}\|\varphi_2(1)\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_1\|^2 + \frac{kB}{2}\|\varphi_1\|^2 - \frac{k}{2}\|\varphi_1(1)\|^2 \\
&\leq \langle \mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1\rangle + \|\varphi_1\|^2\left(\frac{k}{2} + \frac{kB}{2}\right),
\end{aligned}$$

de plus, comme $\mathcal{A}$ engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe, on a

$$\langle \mathcal{A}\varphi_1, \varphi_1\rangle < 0, \quad \forall \varphi_1 \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent, il résulte

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}\Phi, \Phi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \left(\frac{k}{2} + \frac{kB}{2}\right)\|\varphi_1\|^2 \leq C\|\Phi\|^2, \tag{3.24}$$

Donc, l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}} - CId$ est dissipatif pour tout $C > 0$.

• D'autre part, on montre que $\lambda Id - \tilde{\mathcal{A}}$ est surjective. En effet, Soit $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$, on démontre qu'il existe $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}})$ satisfait

$$\left(\lambda Id - \tilde{\mathcal{A}}\right)\Phi = F,$$

c'est-à-dire

$$(\lambda Id - \tilde{A})\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \lambda\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_1 - k\varphi_2(1) = f_1 \\ \lambda\varphi_2 + \frac{1}{\tau}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\rho} = f_2 \end{cases} \tag{3.25}$$

Remarquons que la deuxième équation du (3.25) est une équation différentielle ordinaire du premier ordre, donc on commence par la résolution de l'équation homogène associée

$$\lambda\varphi_2(\rho) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\varphi_2(\rho)}{\partial\rho} = 0,$$

la solution de l'équation homogène est de la forme

$$\varphi_2(\rho) = C_1 e^{-\lambda\tau\rho} \quad \text{avec} \quad C_1 \text{ est une constante,}$$

ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière, on trouve

$$C_1(\rho) = \int_0^\rho f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds + c.$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par

$$\varphi_2(\rho) = \Big(\int_0^\rho f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds + c\Big)e^{-\lambda\tau\rho},$$

où c est une constante. Par conséquent, pour $\rho = 0$ on obtient $\varphi_2(0) = \mathcal{B}\varphi_1$, alors

$$\varphi_2(\rho) = \Big(\int_0^\rho f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds + \mathcal{B}\varphi_1\Big)e^{-\lambda\tau\rho},$$

pour $\rho = 1$, on trouve

$$\varphi_2(1) = \Big(\int_0^1 f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds + \mathcal{B}\varphi_1\Big)e^{-\lambda\tau}, \tag{3.26}$$

en combinant (3.26) avec la première équation du (3.25), on trouve

$$\lambda\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_1 - k\Big(\int_0^1 f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds + \mathcal{B}\varphi_1\Big)e^{-\lambda\tau}\Big) = f_1,$$

alors

$$\lambda\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_1 - ke^{-\lambda\tau}\mathcal{B}\varphi_1 = f_3,$$

avec

$$f_3 = f_1 + k^{-\lambda\tau}\int_0^1 f_2(s)e^{\lambda\tau s}ds.$$

Comme $\mathcal{A}$ engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, et d'après le théorème de Lumer Phillips 1.10, alors $\Big(\lambda Id - \mathcal{A}\Big)$ est surjectif, et comme $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire, on obtient qu'il existe $\varphi_1 \in \mathcal{H}$ tel que

$$\lambda\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_1 - ke^{-\lambda\tau}\mathcal{B}\varphi_1 = f_3,$$

pour tout $f_3 \in \mathcal{H}$, par conséquent, l'opérateur $\lambda Id - \tilde{\mathcal{A}}$ est surjectif.

Ce qui résulte qu'il existe $(\varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ satisfait l'équation (3.25), ce qui implique que $\lambda Id - \tilde{\mathcal{A}}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, donc pour une certaine C de (3.24), l'opérateur $\lambda Id - (\tilde{\mathcal{A}} - CId)$ est surjectif.

Par conséquent, d'après le théorème de Lumer Phillips 1.10 on obtient que $\tilde{\mathcal{A}} - CId$ engendre un semi groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de contraction dans l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$,

et d'après le théorème 1.11 alors l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}$ engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe fortement continu dans $\tilde{\mathcal{H}}$.

Enfin, il nous reste à vérifiée que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable pour U et Z.

La stabilité exponentielle pour U est vérifié précédemment, il suffit de la vérifié pour la variable Z

$$Z(t,\rho) := \mathcal{B}U(t-\tau\rho), \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0,$$

on passe par la norme dans l'espace $L^2(0,1,\mathcal{H})$, on trouve

$$\|Z(t,\rho)\|^2_{\mathcal{L}^2(0,1;\mathcal{H})} = \int_0^1 \|\mathcal{B}U(t-\tau\rho)\|^2_{\mathcal{H}}d\rho,$$

comme $\mathcal{B}$ est un opérateur borné, alors

$$\int_0^1 \|\mathcal{B}U(t-\tau\rho)\|^2_{\mathcal{H}}d\rho \leq B^2\int_0^1 \|U(t-\tau\rho)\|^2_{\mathcal{H}}d\rho.$$

Pour $t \geq 2\tau$, l'estimation exponentielle de U donne

$$\|Z(t,\rho)\|^2_{L^2(0,1;\mathcal{H})} \leq B^2M'^2h^2e^{-2\omega' t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + \int_0^\tau e^{\omega s}\|f(s)\|_{\mathcal{H}}ds\Big)^2,$$

si on pose $h^2 = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau e^{2\omega' s}ds$, on trouve qu'il existe une constante positive $\tilde{M}$ dépendant de $M, \omega, |k|$ et la norme de B telle que

$$\tilde{M} = B^2M'^2h^2\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + \int_0^\tau e^{\omega s}\|f(s)\|_{\mathcal{H}}ds\Big)^2,$$

alors

$$\|T(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \tilde{M}e^{-\omega' t}, \quad t > 0. \tag{3.27}$$

Maintenant, on passe au problème (3.18) tout entier, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} V_t(t) = \tilde{\mathcal{A}}V(t) + \tilde{F}(V(t)) \\ V(0) = (U(0), Z(0,.))^T, \end{cases} \tag{3.28}$$

avec

$$\tilde{F}\Big(V(s)\Big) = \Big(F(U(s)), 0\Big)^T.$$

On a $\tilde{\mathcal{A}}$ engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Par conséquent, le système admet une unique globale solution $V \in C(0, +\infty, \tilde{\mathcal{H}})$ d'après les théorèmes 2.4 et 3.1 la solution est donnée par

$$V(t) = T(t)V_0 + \int_0^t T(t-s)\tilde{F}(V(s))ds.$$

Par passage à la norme, on obtient

$$\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \|T(t)V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}\|\tilde{F}(V(s))\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds,$$

en utilisant le fait que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable (3.27), on trouve

$$\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \tilde{M}e^{-\omega' t}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \tilde{M}e^{-\omega' t}\int_0^t e^{\omega s}\|\tilde{F}(V(s))\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse $(H4)$, on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(V(s)) - \tilde{F}(0)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} &= \|F(U(s)) - F(0)\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma\|U(s)\| \\ &\leq \gamma\Big(\|U(s)\| + \|Z(s)\|\Big) \leq \gamma\|V(s)\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \tilde{M}e^{-\omega' t}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \tilde{M}e^{-\omega' t}\int_0^t e^{\omega s}\gamma\|V(s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds,$$

alors

$$\frac{1}{\tilde{M}}e^{\omega' t}\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}}\int_0^t e^{\omega s}\gamma\|V(s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds.$$

On applique le lemme de Gronwall pour

$$a = \|V(0)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \quad \Psi(t) = \frac{1}{\tilde{M}}e^{\tilde{\omega} t}\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \quad \text{et} \quad g = \tilde{M}\gamma,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} &\leq \tilde{M}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}e^{-\omega' t + \int_0^t \tilde{M}\gamma ds} \\ &\leq \tilde{M}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}e^{(\tilde{M}\gamma - \omega')t}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient l'estimation de la stabilité exponentielle si $\omega' - \tilde{M}\gamma$ est positive. D'ou la démonstration du théorème 3.2. □

Remarque 3.1. ▷ *Si $F \equiv 0$, alors la décomposition explicite de $\|U(t)\|_{\mathcal{H}}$ est*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{(\sigma-\omega)t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + \alpha\Big), \quad \forall C > 0. \tag{3.29}$$

▷ *Le théorème 3.2 est plus général. En effet, il donne des résultats de stabilité lorsque le paramètre de retour de retard k est suffisamment petit.*

▷ *On a la stabilité exponentielle de problème (P).*

3.3 Non-linéarités plus générale

3.3.1 Résultats d'existence et de stabilité

Considérons maintenant un cas plus générale de non-linéarités. On suppose que :
(H5) : Pour toute constante $c > 0$, il existe une constante positive $L(c)$ telle que

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}} \leq L(c)\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.30}$$

pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{H}$ avec et $\|U_1\|_{\mathcal{H}} \leq c,\ \|U_2\|_{\mathcal{H}} \leq c$.

De plus, on suppose qu'il existe une fonction continue croissante $\chi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, avec $\chi(0) = 0$, vérifiant :

$$\|F(U)\|_{\mathcal{H}} \leq \chi\Big(\|U\|_{\mathcal{H}}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in \mathcal{H}. \tag{3.31}$$

Remarque 3.2. *Le terme non linéaire introduit des difficultés supplémentaires, nous pouvons donner un résultat de stabilité exponentielle sous une hypothèse bien posée pour de petites données initiales.*

Théorème 3.3. *Soit $\tilde{M}, \omega'$ vérifiant l'inégalité (3.27). Supposons pour $|k|$ suffisamment petit, alors*

$$\exists \rho_0, C_{\rho_0} > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall U_0 \in \mathcal{H}, \quad f \in C([0, \tau]; H),$$

avec

$$\Big(\|U_0\|^2_{\mathcal{H}} + \int_0^\tau |k|\|f(s)\|^2_{\mathcal{H}} ds\Big)^{\frac{1}{2}} < \rho_0,$$

il existe une unique solution globale $U \in C(0, +\infty; \mathcal{H})$ du problème (P), de plus

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\rho_0} < \chi^{-1}\Big(\frac{\omega'}{\tilde{M}}\Big), \quad \forall t > 0. \tag{3.32}$$

Alors, il existe $\tilde{k} > 0$ tel que si $|k| < \tilde{k}$ pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in C([0, \tau]; \mathcal{H})$ satisfaisant l'hypothèse de (3.32), la solution du problème (P) satisfait l'estimation de la décroissance exponentielle suivante

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M^* e^{-\tilde{\omega} t}\Big(\|U_0\|_{\mathcal{H}} + \int_0^\tau e^{\omega s}\|f(s)\|_{\mathcal{H}} ds\Big), \quad \forall t \geq \tau, \tag{3.33}$$

pour des constantes $M^*, \tilde{\omega}$.

Démonstration.
Le problème (P) est un problème d'évolution non homogène, et d'après le théorème 2.5, et par itération, on obtient, qu'il (P) admet une unique globale mild solution donnée par

$$V(t) = T(t)V_0 + \int_0^t T(t - s)\tilde{F}(V(s))ds.$$

D'autre part, pour la stabilité, le problème dans le cas non linéaire s'écrit sous la forme

$$V = \tilde{\mathcal{A}}V + \tilde{F}(V),$$

avec $\tilde{F}(V) = \Big(F(u(s)), 0\Big)^T$. D'après le théorème 2.4, alors le problème (P) admet une unique mild solution s'écrit sous la forme

$$V(t) = T(t)V_0 + \int_0^t T(t-s)\tilde{F}(V(s))ds,$$

on passe par la norme, on obtient

$$\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \|T(t)V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}\|\tilde{F}(V(s))\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds$$

comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable, alors

$$\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \tilde{M}e^{-\omega' t}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \tilde{M}e^{-\omega' t}\int_0^t e^{\omega s}\|\tilde{F}V(s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}ds,$$

avec

$$\|\tilde{F}(V(s))\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = \|F(U(s))\|_{\mathcal{H}} \leq \chi\Big(\|U(s)\|_{\mathcal{H}}\Big)\|U(s)\|_{\mathcal{H}},$$

d'après l'hypothèse $\|U\|_{\mathcal{H}} < C_{\rho_0}$ et comme χ est une fonction croissante, on trouve

$$\frac{1}{\tilde{M}}e^{\omega' t}\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}}\int_0^t e^{\omega s}\chi\Big(C_{\rho_0}\Big)\|V(s)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

On applique le lemme de Gronwall pour

$$a = \|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \quad \Psi(t) = \frac{1}{\tilde{M}}e^{\tilde{\omega} t}\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \quad \text{et} \quad g = \tilde{M}\chi(C_{\rho_0}),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\|V(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} &\leq \tilde{M}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}e^{-\omega' t + \int_0^t \tilde{M}\chi(C_{\rho_0})ds} \\ &\leq \tilde{M}\|V_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}}e^{(\tilde{M}\chi(C_{\rho_0}) - \omega')t}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient l'estimation de la stabilité exponentielle si $\omega' - \tilde{M}\chi(C_{\rho_0})$ positive. D'ou la démonstration du théorème 3.2. □

3.4 Applications

Soit H un espace de Hilbert réel, muni de la norme $\|\cdot\|_H$, et soit $A : \mathcal{D}(A) \to H$ un opérateur auto-adjoint positif avec inverse compact sur H.

Notons par $V := \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ le domaine de $A^{\frac{1}{2}}$, de plus pour $i = 1, 2$, soit W_i un espace de Hilbert réel (qui sera identifié à son espace dual) et soit $C \in \mathcal{L}(W_1, H)$, $B \in \mathcal{L}(W_2, H)$.

Considérons l'équation d'évolution du second ordre suivante :

$$(P') : \begin{cases} u_{tt} + A_1 u + CC^* u_t = \nabla G(u) + kBB^* u_t(t-\tau), & \forall t > 0, \\ B^* u_t(t-\tau) = g(t), & \forall t \in (0, \tau), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases}$$

avec $(u_0, u_1) \in V \times H$.
Afin d'obtenir le résultat de stabilité, on considère les hypothèses suivantes :

(A1) : pour tout $\mu > 0$, on a

$$\|B^*u\|_{W_2}^2 \leq \mu \|C^*u\|_{W_1}^2, \quad \forall u \in V.$$

(A2) : $G : V \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable pour tout $x \in V$.

(A3) : Pour tout $u \in V$, il existe une constante positive $c(u)$ telle que

$$|DG(u)(v)| \leq c(u)\|v\|_H, \quad \forall v \in V,$$

où $DG(u)$ est la dérivée de G au sens de Gâteaux en u, par conséquent $DG(u)$ peut être étendue dans l'ensemble H et nous notons $\nabla G(u)$ l'élément unique dans H tel que

$$(\nabla G(u), v)_H = DG(u)(v), \quad \forall v \in H.$$

(A4) : Pour tout $c > 0$, il existe $L(c) > 0$ tel que

$$\|\nabla G(u) - \nabla G(v)\|_H \leq L(c)\|A_1^{\frac{1}{2}}(u - v)\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.34}$$

pour tout $u, v \in V$ tel que $\|A_1^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathcal{H}} \leq c$ et $\|A_1^{\frac{1}{2}}v\|_{\mathcal{H}} \leq c$.

(A5) : Il existe une fonction continue croissante ψ satisfaisant $\psi(0) = 0$ telle que

$$\|\nabla G(u)\|_H \leq \psi\Big(\|A_1^{\frac{1}{2}}u\|\Big)\|A_1^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall u \in V.$$

Pour $U = (u, v)^T$ avec $v = u_t$, le problème (P') se transforme au problème (P)

$$(P) : \begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + k\mathcal{B}U(t-\tau), & \forall t \in (0, +\infty) \\ U(0) = U_0, \quad \mathcal{B}U(t-\tau) = f(t), & \forall t \in (0, \tau), \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & -CC^* \end{pmatrix}$$

et

$$F(U) := \Big(0, \nabla G(u)\Big)^T, \quad \mathcal{B}U := \Big(0, BB^*v\Big)^T.$$

Remarque 3.3. *Les hypothèses ci-dessus sur G impliquent que F vérifie l'hypothèse $(H5)$ dans l'espace :*

$$\mathcal{H} := V \times H, \quad \text{avec} \quad \chi = \psi.$$

Soit u solution du problème (P'), on définit la fonctionnelle d'énergie associé au problème (P') par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_H^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|_H^2 - G(u) + \int_{t-\tau}^{t} |k|\|B^*u_t(s)\|_{W_2}^2 ds, \tag{3.35}$$

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A5), la fonctionnelle d'énergie E définie en (3.35) vérifiant :*

$$E'(t) \leq -\|C^*u_t(t)\|_{W_1}^2 + |k|\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2, \quad \forall t > 0.$$

Démonstration.
On dérive la fonction d'énergie, on trouve

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u_t\|_H^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|_H^2 - \frac{d}{dt}G(u) + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t} |k|\|B^*u_t(s)\|_{W_2}^2 ds.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_H^2 \quad = \quad 2\langle u_t, u_{tt}\rangle.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u\|_H^2 &= \frac{d}{dt}\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u\rangle = \frac{d}{dt}\langle Au, u\rangle \\ &= \langle u_t, Au\rangle + \langle Au_t, u\rangle \\ &= 2\langle Au, u_t\rangle.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}G(u) = \langle u_t, \nabla G(u)\rangle.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t} |k|\|B^*u_t(s)\|_{W_2}^2 ds &= |k|\langle B^*u_t(t), B^*u_t(t-\tau)\rangle + \tfrac{|k|}{2}\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2 \\ &\quad -\tfrac{|k|}{2}\|B^*u_t(t-\tau)\|_{W_2}^2.\end{aligned}$$

En multipliant la première équation du problème (P') par u_t, on obtient

$$\begin{aligned}E'(t) &= -\|C^*u_t(t)\|_{W_1}^2 + k\langle B^*u_t(t), B^*u_t(t-\tau)\rangle + \frac{|k|}{2}\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2 - \frac{|k|}{2}\|B^*u_t(t-\tau)\|_{W_2}^2 \\ &\leq -\|C^*u_t(t)\|_{W_1}^2 + |k|\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2,\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse $(A1)$ on obtient

$$\begin{aligned}E'(t) &\leq -\tfrac{1}{\mu}\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2 + |k|\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2 \\ &\leq \left(|k| - \frac{1}{\mu}\right)\|B^*u_t(t)\|_{W_2}^2.\end{aligned}$$

Donc, l'énergie $E(t)$ est décroissante si $|k| < \frac{1}{\mu}$. □

Dans ce paragraphe, on montre l'existence globale de la solution du problème (P') et pour établir la stabilité exponentielle de la solution en applique le théorème 3.3.

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse $(H2)$ et pour $|k| < \frac{1}{\mu}$, il existe ρ_0 tel que*

$$\left(\|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^{\tau} |k|\|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} < \rho_0.$$

Et, il existe une unique solution globale $U \in C(0, +\infty, \mathcal{H})$ satisfait l'estimation de la décroissance exponentielle.

Démonstration.
Supposons que $|k| < \frac{1}{\mu}$ pour garantir que la fonctionnelle d'énergie est décroissante. Pour montrer l'existence de la solution, on utilise une méthode itérative et la méthode d'énergie.

Dans l'intervalle $[0, \tau]$, le système abstrait est un problème d'évolution non homogène (3.4) avec $g_0(t) = (0, kBg(t))$ et d'après le théorème 2.5, alors il existe une unique solution mild locale U définie dans un intervalle de temps maximal $[0, \sigma)$ avec $0 < \sigma \leq \tau$.

Afin d'obtenir le résultat, on suit les mêmes procédures dans [2] et [7]. On doit montrer que le problème admet une solution dans l'intervalle $[0, \tau]$, donc il suffit de montrer que $\sigma = \tau$.
Supposons que $\psi\Big(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H^2\Big) < \dfrac{1}{4}$, alors

$$E(0) \geq \frac{1}{2}\|u_1\|_H^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H^2 - G(u_0) \geq \frac{1}{2}\|u_1\|_H^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H^2 \geq 0.$$

Montrons d'abord que si

$$\psi\Big(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H\Big) < \frac{1}{4}, \quad \text{et} \quad \psi\Big(2(E(0))^{\frac{1}{2}}\Big) < \frac{1}{4}, \tag{3.36}$$

alors

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_H^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H^2, \quad \forall t \in [0, \sigma). \tag{3.37}$$

Soit $r := \sup\Big\{s \in [0, \sigma)\Big\}$ tel que (3.37) est vraie pour tout $t \in [0, s]$, et supposons que $r < \sigma$, alors

$$E(r) \geq \|u_t(r)\|_H^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\|_H^2 \geq 0. \tag{3.38}$$

Alors, d'après (3.38), on a

$$\psi\Big(\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\|_H\Big) \leq \psi\Big(2(E(r))^{\frac{1}{2}}\Big) < \psi\Big(2(E(0))^{\frac{1}{2}}\Big) < \frac{1}{4},$$

cela donne

$$E(r) \geq \frac{1}{2}\|u_t(r)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\|_H^2 - G(u(r)) > \frac{1}{2}\|u_t(r)\|_H^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\|_H^2,$$

ce qui contredit la maximalité de r, ce qui implique que $r = \sigma$.
Maintenant, on pose

$$\rho_0 = \min\left\{\frac{1}{2}\psi^{-1}\Big(\frac{1}{4}\Big), \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\psi^{-1}\Big(\frac{\omega'}{\tilde{M}}\Big)\right\} > 0, \tag{3.39}$$

ensuite, nous montrons que (3.36) est vraie pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, $u_1 \in H$ et $g \in C(0, \tau; W_2)$ satisfaisant

$$\Big(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H^2 + \|u_1\|_H^2 + \int_0^\tau |k|\|g(s)\|_{w_2}^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} < \rho_0. \tag{3.40}$$

En effet, comme cette hypothèse implique que $\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H < \rho_0$ alors on a

$$\psi\Big(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H\Big) < \psi(\rho_0) = \psi\Big(\frac{1}{2}\psi^{-1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big) < \frac{1}{4},$$

par l'hypothèse (c) sur G, on déduit que

$$E(0) \leq \frac{3}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u_0\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|_H^2 + \frac{1}{2}\int_0^\tau |k|\|g(s)\|_{W_2}^2 ds < \rho_0^2,$$

et par la définition de ρ_0 nous concluons que

$$\psi\Big(2(E(0))^{\frac{1}{2}}\Big) < \psi\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big) = \frac{1}{4}.$$

En conclusion, sous l'hypothèse (3.40), l'estimation (3.36) est vérifiée, alors

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_H^2 + \frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H^2 \leq E(t) \leq E(0) \leq \rho_0^2, \quad \forall t \in [0, \sigma].$$

Puis encore d'après le théorème 2.5, $\sigma = \tau$.

Dans $[\tau, 2\tau)$ le problème considéré comme un problème d'évolution non homogène (3.4) avec $g_1(s) = (0, kBu_t(t-\tau))$, alors il existe une solution locale et en argumentant que sur $[0, \tau]$ nous obtenons une solution sur $[0, 2\tau]$ sous l'hypothèse (3.40).
Répétant cet argument et prouvons que si (3.40) est satisfaite, alors la solution est existe sur $[0, +\infty)$ et

$$\|u_t(t)\|_H^2 + \|^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H^2 < 4\rho_0^2 \leq \frac{1}{2}\Big[\psi^{-1}(\frac{\omega'}{\widetilde{M}})\Big]^2.$$

Cela prouve (3.32) et d'après le théorème 3.3, on obtient la stabilité exponentielle de la solution du problème (P'). $\square$

Maintenant, on va citer quelques exemples qui sont un cas particulier du problème précédent, le problème (P'). Dans la suite, on considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière $\partial\Omega$ et la fonction u définie de $\Omega \times (0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$. On note par $\|\cdot\|_p$ la norme associée à l'espace $L^p(\Omega)$.

3.4.1 Équation d'onde

Exemple 3.1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \mu_1 u_t(x,t) = |u(x)|^\gamma u(x) + k\mu_2 u_t(x, t-\tau), & \forall x \in \Omega,\ \forall t \geq 0 \\ u(x,t) = 0, & \forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \Omega \\ \sqrt{\mu_2}u_t(x,t) = f_0(x,t), & \forall x \in \Omega,\ \forall t \in (-\tau, 0), \end{cases} \tag{3.41}$$

avec les données initiales $(u_0, u_1, f_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(\Omega))$, $\gamma > 0$, et μ_1, μ_2 sont des constantes positives.

On prend $H = L^2(\Omega)$, et on définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\Big\}.$$

et les opérateurs B et C sont comme suit

$$\begin{array}{rcl} B : H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & \sqrt{\mu_2}u, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C : H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & \sqrt{\mu_1}u, \end{array}$$

vérifiant : $BB^*u = \mu_2 u, \quad CC^*u = \mu_1 u.$
L'opérateur A est auto-adjoint et positif avec un inverse compact dans H. De plus l'opérateur racine carré de A est bien défini. On a $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_2.$$

Le problème (3.41) est équivaut de problème (P') avec

$$A_1 = -\Delta,\ CC^* = \mu_1,\ \text{et } BB^* = \mu_2.$$

On doit vérifie les hypothèses précédentes. Dans ce cas considérons la fonction

$$G(x) := \frac{1}{\gamma+2}\int_\Omega |x(\xi)|^{\gamma+2}d\xi, \quad \forall x \in H_0^1(\Omega).$$

Si $0 < \gamma \leq \dfrac{4}{N-2}$, et d'après le théorème de Sobolev alors la fonction est bien définie. Remarquons que F est dérivable au sens de Gâteaux pour tout $x \in H_0^1(\Omega)$, et sa dérivée est donnée par

$$DG(x)(y) = \int_\Omega |x(\xi)|^\gamma x(\xi)y(\xi)d\xi, \quad \forall y \in H_0^1(\Omega),$$

Supposons maintenant la condition plus restrictive

$$0 < \gamma \leq \frac{2}{N-2}. \tag{3.42}$$

Alors $2(\gamma+1) \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$. Donc, en utilisant le théorème de Sobolev on obtient

$$\begin{aligned} |DG(x)(y)| &\leq \int_\Omega |x(\xi)|^{\gamma+1}|y(\xi)|d\xi \leq \Big(\int_\Omega |x(\xi)|^{2(\gamma+1)}d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|y\| \\ &\leq C\|\nabla x\|^{\gamma+1}\|y\|, \quad \forall y \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, G satisfait les hypothèses $(A2)$ et $(A3)$. Donc pour tout $x \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur linéaire $DG(x)$ admet une unique extension dans l'espace $L^2(\Omega)$ donnée par

$$\nabla G(x)(\xi) = |x(\xi)|^\gamma x(\xi), \quad x \in H_0^1(\Omega),\ \xi \in \Omega \quad \text{p.p.} \tag{3.43}$$

Ensuite, on vérifie l'hypothèse $(A4)$.
Puisque

$$\Big||a|^\gamma a - |b|^\gamma b\Big| \leq (\gamma+1)(|a|+|b|)^\gamma|a-b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega ||x(\xi)|^\gamma x(\xi) - |y(\xi)|^\gamma y(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (\xi+1)^2 \int_\Omega \Big(|x(\xi)| + |(y\xi)|\Big)^{2\gamma} |x(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq (\xi+1)^2 \Big(\int_\Omega (|x(\xi)| + |y(\xi)|)^{2(\gamma+1)} d\xi\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \Big(|x(\xi) - y(\xi)|^{2(\xi+1)} d\xi\Big)^{\frac{1}{\gamma+1}} \\
&\leq C\Big(\int_\Omega (|\nabla x(\xi)| + |\nabla y(\xi)|)^2 d\xi\Big)^\gamma \int_\Omega |\nabla x(\xi) - \nabla y(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Cela donne l'inégalité (3.34) de l'hypothèse ($A4$).
Enfin, remarquons que l'hypothèse ($A5$) est satisfaite avec $\psi(s) = Cs^\gamma$, où

$$\langle \nabla G(x), x\rangle = \int_\Omega |x(\xi)|^{\gamma+2} d\xi \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla x(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{\gamma}{2}} \int_\Omega |\nabla x(\xi)|^2 d\xi, \quad x \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.3, on conclut que la condition initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$ sont suffisamment petites, c'est-à-dire

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) d\xi < \rho_0,$$

pour certaine $\rho > 0$, alors le problème (3.41) admet une unique globale solution qui est exponentiellement stable.

Exemple 3.2. Comme deuxième exemple, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + b_1(x) u_t(x,t) = |u(x)|^\gamma u(x) + k b_2(x) u_t(x, t-\tau), & \forall x \in \Omega,\ \forall t \geq 0 \\
u(x,t) = 0, & \forall x \in \Gamma_1,\ \forall t > 0 \\
\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = 0, & \forall x \in \Gamma_0,\ \forall t \geq 0 \\
u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \Omega \\
\sqrt{b_2} u_t(x,t) = f_0(x,t), & \forall x \in W_2,\ \forall t \in (-\tau, 0),
\end{cases} \tag{3.44}$$

où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, avec Γ_0, Γ_1 sont des sous-ensembles fermés de $\partial\Omega$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. De plus, on suppose que Γ_0, Γ_1 ont un intérieur non vide sur $\partial\Omega$.
Avec les données initiales $(u_0, u_1, f_0) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((-\tau, 0); L^2(W_2))$, où $b_1, b_2 \in L^\infty(\Omega)$ et

$$W_i = \Big\{x \in \Omega :\ b_i(x) > 0\ i = 1, 2\Big\}$$

$$H^1_{\Gamma_1} := \Big\{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_1\Big\}.$$

avec

$$\mathcal{D}(A) := \Big\{u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{dans} \quad \Gamma_0\Big\}.$$

Pour $H = L^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur A par

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\Big\},$$

et les opérateurs B et C des opérateurs auto adjoint donnés comme suit

$$\begin{array}{rcl} B : L^2(W_2) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & \sqrt{b_2(x)}u, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} C : L^2(W_1) & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & \sqrt{b_1(x)}u, \end{array}$$

vérifiant : $BB^*u = b_2(x)u, \quad CC^*u = b_1(x)u.$

Le problème (3.44) coïncide avec le problème (P') avec $A = -\Delta$, $CC^* = b_1(x),\ BB^* = b_2(x)$ et $\nabla G = |u(x)|^\gamma u(x)$. D'après le théorème 3.3, on obtient la stabilité exponentielle du problème (3.44).

3.4.2 Système de Petrovsky

Exemple 3.3. Considérons le problème à valeur limite initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + b_1(x)u_t(x,t) = F(u) + kb_2(x)u_t(x,t-\tau), & \forall x \in \Omega,\ \forall t \geq 0 \\ u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, & \forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \Omega \\ u_t(x,t) = f^0(x,t), & \forall x \in W_2,\ \forall t \in (-\tau, 0), \end{cases} \tag{3.45}$$

où les données initiales $(u_0, u_1, f_0) \in (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times H^2((-\tau, 0); L^2(W_2))$ et $b_1, b_2 \in L^\infty(\Omega)$. On définit l'opérateur A par

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{D}(A) & \rightarrow & H \\ u & \longmapsto & \Delta^2 u, \end{array}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ v \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) : \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega \Big\}.$$

L'opérateur A est auto-adjoint et défini positif avec un inverse compact dans H. De plus, on a $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$ et

$$\|u\|_{H_0^2} = \|\Delta u\|_2.$$

Les opérateur B et C définis dans l'exemple précédent avec F est une fonction non linéaire quelconque localement lipschitzienne vérifiant l'hypothèse $(H4)$. Par conséquant, le problème (3.45) équivaut le problème (P') et d'après le théorème 3.3, on obtient l'existence et la stabilité de la solution du problème (3.45).

Conclusion

Dans ce travail, on a considéré un problème d'évolution semi linéaire abstrait avec un terme de retard. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on a démontré l'existence globale et l'unicité de la solution. De plus, on a donné la formule de la solution en utilisant la théorie du semi groupe. Ensuite, par une méthode directe, on a fourni la stabilité exponentielle de la solution suivant le terme source et on a affirmé que si la partie linéaire d'un problème d'évolution qui est décrite par un $\mathcal{C}_0-$semi groupe, est exponentiellement stable alors cette solution de ce problème reste décroit exponentiellement. À la fin de ce travail, on a donné quelques applications et exemples pour illustrer le résultat obtenu.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, and D. Sforza, *Decay estimates for second order evolution equations with memory*, Journal of Functional Analysis 254.5 (2008) : 1342-1372.

[3] K. Ammari, S. Nicaise, C. Pignotti, *Feedback boundary stabilization of wave equations with interior delay*, Syst. Control Lett. 59 (2010) : 623-628.

[4] A. Bátkai, S.Piazzera, *Semigroups for delay equations*, AK Peters/CRC Press, (2005).

[5] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmane, *General decay for a viscoelastic equation of variable coefficients with a time-varying delay in the boundary feedback and acoustic boundary conditions*, Acta Mathematica Scientia, 37(5) (2017) : 1453-1471.

[6] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Halsted Press, 1983.

[7] P. Cannarsa, D. Sforza, *An existence result for semilinear equations in viscoelasticity : the case of regular kernels, in : M. Fabrizio, B. Lazzari, A. Morro (Eds.), Mathematical Models and Methods for Smart Materials*, in : Ser. Adv.Math. Appl. Sci., vol. 62, World Scientific, 2002, pp. 343–354.

[8] A. Guesmia, *Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay*, IMA Journal of Mathematical Control and Information 30.4 (2013) : 507-526.

[9] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006) : 1561-1585.

[10] S. Nicaise, C. Pignotti, *Exponential stability of abstract evolution equations with time delay*, Journal of Evolution Equations 15.1 (2015) : 107-129.

[11] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stabilization of second-order evolution equations with time delay*, Mathematics of Control Signals and Systems 26.4 (2014) : 563-588.

[12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[13] C. Pignotti, *A note on stabilization of locally damped wave equations with time delay*,Systems Control Letters 61.1 (2012) : 92-97.

[14] M. Tucsnak, G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Springer Science and Business Media, 2009.

[15] E. Zuazua, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Comm. Partial Differential Equations 15 (1990) : 205-235.

[16] GQ. Xu , SP. Yung , LK. Li, *Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control. ESAIM : Control*, optimisation and calculus of variations, 12(4),12 (2006) : 770–785.