الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـــعبيـــــة
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعـالـــي و الـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّـــار ثـليـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــة الـعـلـــوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:
Bekkaye Aicha

<u>THEME</u>

Existence et stabilisation de l'équation de Schrödinger de frontière de type mémoire

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr Boukhatem Yamna	*M.C.(A)*	*Président*
Mr Yazid fares	*M.A.(A)*	*Examinateur*
Mr Smail Brahim	*M.A.(A)*	*Examinateur*
Mr Abdesselam Nawal	*M.A.(A)*	*Encadreur*

Année Universitaire 2016/2017

Remerciements

Nous remercions Dieu tout Puissance de nous avoir permettons de mener à terme ce mémoire qui est pour nous le point de départ D'une merveilleuse aventure, celle de la recherche, source de remise en cause permanent et de perfectionnement perpétuelle.

Qu'il me soit permis de rendre un vibrant hommage à notre encadreur **Md. Abdesselam Nawel** pour avoir bien voulu superviser ce modeste travail et donné de son temps et de son intelligence à la réussite de ce projet qui pour nous représente un modèle de réussite une source de motivation permanente, pour sa disponibilité.

J'associe tout particulièrement à ces remerciements Messieurs : La présidente **Boukhatem yamna**, et les examinateurs **Smail.B**, et **Yazid Fares**

qui m'ont fait l'honneur et le plaisir d'accepter la présidence du jury et d'examiner mon travail.

Mes remerciements vont aussi à tout mes amis et tout les enseignants de département de mathématiques.

Dédicace

A mes parents

Pour mener à bien son nom avec toute la fierté mon père La miséricorde de Dieu

Pour que je connaissais le sens de la vie avec elle ma chère mère Dieu protège Et prolonger sa vie

Et leur dire merci pour tout

pour boire la timbale est vide pour me donner une goutte d'amour une personne chère à mon cœur Abdrahmane Dieu protège, je tiens à vous remercier pour vos intentions et attitudes sincères

A touts ma famille mes beaux frères Kwider Aissa Abdlbaki Mamar Walid ,mes belles sœurs Rokai , Nacira et leurs enfants surtout ma chère Khadija mes oncles et ma tante et mes cousins Baya , Aïcha, Khawla et leurs enfants

A mes âmes Bochra ,Batoul,Imane,Sabrine, Rofaida...

Table des matières

Table des notions

$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturelle
$\alpha \in \mathbb{N}^n$	$\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n)$ multi indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i = 1, 2, ...n$ $\lvert\alpha\rvert = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i$
$supp(f)$	support de la fonction f
$L^1_{Loc}(\Omega)$	l'ensemble des fonctions **Lebesgue** intégrable sur tout partie compact de Ω
$< .,. >$	le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$
Ω	un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$
Γ	la frontière de Ω
Γ_0, Γ_1	deux parties de Γ vérifiant $\Gamma_0, \Gamma_1 \neq \emptyset$ et $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$
$Re(z)$	le réel d'un nombre complexe
$Im(z)$	l'imaginaire d'un nombre complexe
i	nombre complexe tel que $i^2 = -1$
Q	$= [S, T] \times \Omega$
Σ_0	$= [S, T] \times \Gamma_0$
Σ_1	$= [S, T] \times \Gamma_1$

Introduction générale

La Théorie du Contrôle des Équations aux Dérivées Partielles intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de stabilité des Équations aux Dérivées Partielles ont fait l'objet récemment de nombreux travaux. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilisation de l'équation de **Schrödinger** avec feedback de type mémoire. Il y a eu d'intensives recherches sur le sujet depuis les trois dernières décennies. Nous renvoyons par exemple aux livres de J.-L. Lions [13], de Lasiecka et Triggiani [12]

Plus précisément, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, et si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.

Il existe plusieurs types de stabilité que l'on peut étudier. Le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte. Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$E(t) \leq C \exp^{-\delta t} \quad \forall t > 0$$

où C et δ sont des constantes positives.

Quand au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}} \quad \forall t > 0$$

Ce mémoire est constitué de trois chapitres, qui sont liés entre eux, pour établir l'existence et la stabilisation de l'équation de **Schrödinger** avec condition aux limite de type mémoire.

Chapitre 1

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles et les résultats utilisés à travers ce travail, en premiers lieu, nous rappelons la topologie faible, quelque définition et résultats sur les espaces fonctionnelles ; l'espace de Sobolev, les espaces de L^p, qui jouer un rôle très importants pour l'étude des problèmes des équations aux dérivées partielles.

En suite, on donne quelque inégalités très utiles portant sur les normes de Sobolev l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder $\cdots$

Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple aux ouvrages [9] [13] [11] $\cdots$

Chapitre 2

Dans ce chapitre, on va présenter quelques travaux concernant l'équation de **Schrödinger**, en suite le problème de stabilisation et le comportement asymptotique de solutions de l'équation **ondes** avec un feedback frontière de type mémoire.

Chapitre 3

Ce chapitre comporte une étude basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin** de l'existence, de l'unicité de la solution du problème proposé .

En suite on présente un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie de l'équation de **Schrödinger** à coefficients constants avec des conditions aux limites dissipatives de type mémoire en utilisant la technique des multiplicateurs.

Chapitre 1

Rappels

On rassemble toutes les notions et résultats de base que nous utiliserons par la suite.

1.1 La topologie faible

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X^{'}$ ($X^{'}$ l'espace dual de X). On désigne par $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f =< f, x >$ Lorsque f parcourt $X^{'}$ on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1. *La topologie faible $\sigma(X, X^{'})$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$*

Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément $x \in X$ comme suit :

Étant donné un point $x \in X$ on obtient une base de voisinages de x pour la topologie $\sigma(X, X^{'})$ en considérant les ensembles de la forme $\cap_{finie} {\varphi_f}^{-1}$, où V_f est un voisinage de $\varphi_f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

(i.e $V_f =]a - \epsilon, a + \epsilon[$ avec $a =< f, x >$)

Définition 1.2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert X converge faiblement vers $u \in X$ et on note $u_n \to u$ si :*

$$\lim_{n \to \infty} < v, u_n >=< v, u > \text{ pour tout } v \in X$$

Remarque 1.1. *1. La limite faible quand elle existe est unique car si $< u_1, v >=< u_2, v >$ pour tout $x \in X$, on a pour $v = u_1 - u_2$*

$$\|u_1 - u_2\|^2 =< u_1 - u_2, u_1 - u_2 >= 0$$

donc $u_1 = u_2$ *.(On peut prendre* $v \in X$ *car* X *est un espace de Hilbert, donc* $X = X'$ *(théorème de Riesz)).*

2. *Si la suite* (u_n) $\forall n \in \mathbb{N}$ *converge vers* $u \in X$ *pour la norme (on dit alors qu'elle converge fortement vers u) alors* $u_n \to u$*. En effet, on a :*

$$| < u_n - u, v > | \leq \|u_n - u\|\|v\|$$

Ce qui implique que $< u_n - u, v > \longrightarrow 0$ *quand,*$n \longrightarrow \infty$*.*

3. *Si* X *est de dimension finie alors la convergence faible implique la convergence forte. Il suffit de considérer la base* $e_1, ...e_n$ *et d'observer que* $< u, e_i >= u_i$ *pour* $u \in X$ *ce qui montre que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte.*

Soient X et Z des espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite qui converge faiblement vers u et $A \in L(X, Z)$ (opérateur linéaire continu de X dans Z). Alors la suite $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $A(u)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers A(u).

Théoréme 1.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Hilbert* X*.*
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possède une sous-suite faiblement convergente.*

Théoréme 1.2. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert* X *est bornée.*

Corollaire 1.1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge faiblement vers u et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge fortement vers* v*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} < u_n, v_n >=< u, v >$$

Définition 1.3. *Soit* X *un espace normé, et soit* $X = L(X, R)$ *son dual topologique. Alors la topologie étoile faible sur* X *notée* $\sigma(X, X')$ *est la topologie initiale associée au système* $(\mathbb{R}, \theta, \Psi_u)_{u\in X}$ *où* θ *désigne la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *et* $\psi_u : X \to \mathbb{R}$ *est définie par* $\psi_u(l) = l(u)$ *C'est donc la moins fine des topologies sur* X *rendant continues toutes les fonctionnelles* $\psi_u, x \in X$*.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X . On a

1. $f_n \to f$ (étoile faible) $\Leftrightarrow$ $(< f_n, x >\to< f, x >, \quad x \in X)$
2. Si $f_n \to f$ pour $\sigma(X, X')$ et si $x_n \to x$ fortement dans X, $< f_n, x_n >\to< f, x >$.

L'espace fonctionnelle

On définie quelque notion élémentaire pour introduisons **Les espaces de Sobolev** requièrent quelque notions clés et techniques comme L'ensemble des fonction Lebesgue intégrable L^p

1.2 les espaces L^p

On donne ici quelques définitions et propriétés élémentaires.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et p un entier avec $1 \leq p < \infty$. On définit

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \; u \text{ et mesurable et}$$

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

Cet espace muni de la norme

$$\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace vectoriel normé complet. (On rappelle qu'un espace est dit complet si toute suite de Cauchy, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}, p_1 p_2 > n \Rightarrow |u_{p_1} - u_{p_2}| < \varepsilon$$

est convergente

On rappelle d'autre part que $D(\Omega)$

1.2.1 l'ensemble des fonction test $D(\Omega)$

on dit que f est une fonction test si :

$$f \in D(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \quad (\mathbb{R} \vee \mathbb{C}) \quad f \in C^\infty \text{à support campact dans} \Omega\}$$

avec $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega, \quad f(x) \neq 0\}}$ (i.e nulles en dehors Ω)
est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.
On notera C_c^1 l'ensemble des fonctions de classe C^1 à support compact.
On rappelle que p.p. signifie presque partout, soit sur un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle. Pour $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ u \text{ et mesurable et } \exists C \text{ t.q } |u(r)| < C \text{ p.p . } \Omega\}$$
$$\text{et } \|u\|_\infty = inf\{C, \text{ t.q. } |u(r)| \leq C \text{ p.p.}\Omega\}$$

C'est aussi un espace vectoriel normé complet.

1.3 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega)= \{u \in L^p(\Omega) \text{ , t.q } \exists g \in L^p(\Omega) \text{ avec } \forall \phi \in C_c^1(\Omega)$$
$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega g(x)\phi(x)dx\}$$

On définit alors la différentielle (ou dérivée en dimension 1) au sens faible de u notée $\frac{du}{dx}$ par $\frac{du}{dx} = g$. Cette définition est cohérente avec la différentielle classique de u si $u \in C^1$ grâce à une intégration par partie et le fait que ϕ est nulle au bord.

Cet espace est un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = 2$, on pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Dans ce cas, la norme provient du produit scalaire

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

L'espace H^1 est alors un espace de Hilbert, en particulier il possède une base dénombrable dense. Il peut aussi être défini comme l'adhérence des fonctions C^1 pour la norme H^1.

1.4 l'inégalité de Young

Théoréme 1.3. *[13]*
pour tout réels a et b positifs et p et q des réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $\varepsilon > 0$ Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^q}{q}$$

1.5 l'inégalité de Hölder

Théoréme 1.4. *[13]*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert,* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable, et soient*

$$p, q > 1 \quad t.q \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1$$

Alors

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Cas particulier : $p = q = 2 \Rightarrow$ l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**

1.6 La formule de Green

Définition 1.4. *[13]*

Soit Ω *un ouvert bornée de classe* C^1*. Alors pour toutes fonctions* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *et* $v \in C^1(\bar{\Omega})$ *on a :*

$$\int_\Omega \triangle y(t)\vartheta(t)dt = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial v}(t)\vartheta(t)d\Gamma_1 - \int_\Omega \bigtriangledown y(t) \bigtriangledown \vartheta(t)dt$$

Chapitre 2

Recherche bibliographique

Le phénomène de la stabilisation des équations aux dérivées partielles, par un feedback frontière de type mémoire a été traité par récemment par plusieurs auteurs.

Le comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes à coefficients constants avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de **Neumann** à été étudie par **Guesmia** [9] dans le cas où le feedback est linéaire

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\displaystyle\int_0^t k(t-s)y^{'}(s)ds + by^{'} & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0, y^{'}(x,0) = y_1 & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

Où Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 où , Γ_0 et Γ_1 sont deux partie disjoints de Γ , avec k vérifie quelques conditions

$$k : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

tel que

$$\Delta y = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$$

Et par **Aassila, cavalcanti, et sorianon** [1] dans le cas où le feedback est non linéaire en utilisant la technique des multiplicateurs.

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\displaystyle\int_0^t k(t-s)y^{'}(s)ds + a(x)g(y^{'})ds & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0, y^{'}(x,0) = y_1 & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

tel que g est une application non linéaire.

D'autre par **M. AassilaM.M. CavalcantiV.N. Domingos Cavalcanti** [2] ont été montrés l'existence de solutions par la méthode de Faedo-Galerkin au lieu de la théorie du semi groupe et ils ont employés des méthodes pour établir la la décroissance uniforme en utilisant la technique du multiplicateur et la méthode de monotonie combinées des nouveaux arguments pour passe à la limite.

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + f_0(\nabla y) = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x,t) = 0 & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^* \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} + g(y_t) = \displaystyle\int_0^t h(t-\tau)f_1(y^{'}(\tau))d\tau & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x,0) = y^0(x), y_t(x,0) = y^1(x) & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

Cette étude a été généralisée par **Shugen.Chai et Yuxia.Guo** [5] et **Serge Nicaise et Cristina Pignotti** [15] à coefficients variables.

$$\begin{cases} y_{tt} - Ay = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v_A} = -\displaystyle\int_0^t k(t-s)y_t(s))ds - by_t(t) & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0, y^{'}(x,0) = y_1 & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

tel que :

$$Ay = \sum_{ij=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j})$$

un opérateur différentiable d'ordre deux à coefficients réels (a_{ij}) de classe C^∞
avec deux méthodes déférentes.

Shugen.Chai et Yuxia.Guo ont été établis la stabilisation uniforme en adaptant une approche développée par **Yoa** et qui combine la géométrie riemannienne et la technique des multiplicateurs .

Serge Nicaise et Cristina Pignotti ont été utilisés la géométrie différentielle et la fonction de Lyapounov et la méthode classique des multiplicateurs.

L'équation des ondes à conditions aux limites dissipatives du type retard et mémoire a été considéré par **Pierre Cornilleau et Serge Nicaise** [6] et utilisant la méthode du multiplicateur et une inégalité intégrale standard pour montrer la stabilité exponentielle du système.

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+^* \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -m.v(\mu_0 y^{'}(t) + \displaystyle\int_0^t y^{'}(t-s)d\mu(s)) & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x,0) = y_0, y^{'}(x,0) = y_1 & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

et par **Mauro de Lima Santos** [7] à été désintégré la stabilisation uniforme de l'équation des ondes avec une condition aux limite de type mémoire. La méthode utilisée dans ce travail est basée sur la construction d'un Lyapunov fonctionnel

$$\begin{cases} y_{tt} - \mu(t) y_{xx} = 0 & \text{Dans } [0,1] \times \mathbb{R}_+ \\ y(0,t) = 0, y(1,t) + \displaystyle\int_0^t k(t-s)\mu(s) y_x(1,s) ds = 0 & \text{Sur } \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x) & \text{Dans } [0,1] \end{cases}$$

Le comportement asymptotique de la solutions à un système couplé d'équations des ondes à été considérer toujours par **Mauro de Lima Santos** [8].

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + \displaystyle\int_0^t g_1(t-s)\Delta y(s) ds + \alpha(y-z) = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ z_{tt} - \Delta z + \displaystyle\int_0^t g_2(t-s)\Delta z(s) ds + \alpha(y-z) = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ y = z = 0 & \text{Sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ (y(0,x), z(0,x)) = (y_0(x), z_0(x)), (y_t(0,x), z_t(0,x)) = (y_1(x), z_1(x)) & \text{Dans } \Omega \end{cases}$$

D'autre par, dans le cas où le feedback frontière est de type mémoire et le système couplé garantir une décroissance exponentielle (ou polynomiale) pourvu que les fonctions de relaxation décroissance exponentielle (ou polynomiale) et avec le même taux de décroissance, cette études à été considérés par **M.M. Cavalcanti , V.N. Domingos Cavalcanti M.L. Santos** [3]

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 y_{tt} - \Delta y + \alpha(y-z) = 0 && \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+\\
&\rho_2 z_{tt} - \Delta z + \alpha(y-z) = 0 && \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+\\
&y = 0 && \text{Sur } \Gamma_0\\
&y + \int_0^t k_1(t-s)\frac{\partial y}{\partial v}(s)ds = 0 && \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+\\
&z = 0 && \text{Sur } \Gamma_1\\
&z + \int_0^t k_2(t-s)\frac{\partial z}{\partial v}(s)ds = 0 && \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+\\
&(y(0), z(0)) = (y^0, z^0), \sqrt{\rho}_2 z_t(0)) = (\sqrt{\rho}_1 y^1, \sqrt{\rho}_2 z^1(x)) && \text{Dans } \Omega
\end{aligned}
$$

De la mème manière **M.M. Cavalcanti et A. Guesmia** [4] ont été données une relations générales entre la désintégration de la solution et la désintégration de la fonction de relaxation.

$$
\begin{aligned}
&y_{tt} - \Delta y + F(x,t,y,\nabla y) = 0 && \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+\\
&y = 0 && \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+\\
&u + \int_0^t g(t-s)\frac{\partial y}{\partial v}(s)ds = 0 && \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+\\
&y(x,0) = y_0,\, y^{'}(x,0) = y_1 && \text{Dans } \Omega
\end{aligned}
$$

Le problème de la stabilisation uniforme de l'équation de **Schrödinger** canonique par un contrôle frontière a été traitée par **Machtyngier et Zuazua** [14] dans le cas où le contrôle est de type **Neumann** dans deux cas différentes, premièrement des conditions limites dissipatives sont introduites, en utilisant des techniques de multiplication et de construire des fonctions énergétiques bien adaptées au système. D'autre part, le problème de stabilisation interne est considéré. Quand la décroissance exponentielle dans L^2 est prouvée par des techniques multiplicatrices.

$$
\begin{aligned}
&iy_t + \Delta y = 0 && \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+\\
&\frac{\partial y}{\partial v} = -(m(x) * v(x))y_t && \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+\\
&y = 0 && \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+\\
&y(x,0) = y_0 && \text{Dans } \Omega
\end{aligned}
$$

Le comportement asymptotique de les solutions des équations de **Schrödinger** dans un domaine bornés où la fonction de contrôle est non linéaire a été considéré par **R.Cipolatti , E.Machtyngier et E.San Pedro Siqueira** [17]

$$\begin{array}{ll} iy_t + \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -q(y_t) & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0 & \text{Dans } \Omega \end{array}$$

où q est une fonction non linéaire

Dans le cas où le contrôle est de type **Dirichlet** cette étude a été établis par **Lasiecka et Triggani** [12]

$$\begin{array}{ll} iy_t + \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = y & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0 & \text{Dans } \Omega \end{array}$$

Ces résultats ont été généralisés par **Rebiai et Abdesselam** au cas où l'opérateur elliptique est à coefficients variables. méthodes de la géométrie riemannienne et la technique des multiplicateurs, pour montré que la solution décroît exponentiellement dans l'espace d'énergie $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

$$\begin{array}{ll} iy_t + Ay = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v_A} = -ib(y_t) & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0 & \text{Dans } \Omega \end{array}$$

D'autre part ; **Serge Nicaise et Salah-eddine Rebiai** [16] ont été études la stabilisation internes de l'équation de Schrödinger tel que l'effet des retards de. Et établissons des conditions suffisantes sur le délai qui garantit la stabilisation exponentielle de la solution.

$$\begin{cases} iy_t + \Delta y = 0 & \text{Dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \\ y(x,t) = 0 & \text{Dans } \mathbb{R}_+^* \times \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = i\mu_1 y(x,t) + i\mu_2 y(x,t-\tau) & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^* \\ y(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) & \text{sur } [0,\tau] \times \Gamma_1 \end{cases}$$

Dans un cas plus général la stabilisation d'un system couplé de deux equation complexe de **Schrödinger** à des coefficients variables a été étudie par **Ilhem Hamchi et Salah Eddine Rebiai** [10] pour prouver comment appliquer la géométrie riemannienne développée pour étudier les problèmes de la stabilisation directe Pour les équations hyperboliques réelles et montrer que le suffisamment lisse solutions décroît polynomialement à l'infini

$$\begin{cases} iy_t + Ay + az = 0 & \text{Dans } \Omega \times [0,T] \\ iz_t + Az + ay = 0 & \text{Dans } \Omega \times [0,T] \\ \dfrac{\partial y}{\partial v_A} + b(y_t) = 0 & \text{Sur } \Gamma_1 \times [0,T] \\ y = 0 \quad \text{Sur } \Gamma_0 \times [0,T] \quad , z = 0 \quad \text{Sur } \Gamma \times [0,T] & \\ y(x,0) = y_0 \quad \text{Dans } \Omega \quad , z(x,0) = z_0 \quad \text{Dans } \Omega & \end{cases}$$

Dans ce travail, on va étudie la stabilisation uniforme de l'équation de **Schrödinger** à coefficients constant par un feedback frontière de type mémoire

Dans Ω, on considère le problème mixte pour l'équation de **Schrödinger** suivant :

$$\begin{cases} iy_t + \triangle y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0 & \text{Dans } \Omega \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = \displaystyle\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds - k(0)y(t) - by_t & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Chapitre 3

Résultat principal

Dans ce chapitre, on présente un résultat de décroissance uniforme de l'énergie de l'équation de **Schrödinger** avec condition aux limites de type mémoire.Soit dans tout la suite, Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 où, Γ_0 et Γ_1 sont deux parties disjoints de Γ, Soient

$$k : \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

$$b : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^+ \tag{3.2}$$

sont deux fonctions appartenant à $C^3(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$et $L^\infty(\Gamma_1)$ respectivement vérifient les conditions suivantes :

$$k^{'} \leq 0 \qquad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{3.3}$$

$$k^{'}(0) = -k(0) \tag{3.4}$$

$$\exists \delta > 0, k^{''} \geq -\delta k^{'} \qquad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{3.5}$$

$$k^{'''} \leq 0 \qquad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{3.6}$$

$$\exists \beta > 0, \quad b \geq \beta \quad \Gamma_1 \tag{3.7}$$

$$f = \inf(-k^{'}) \neq 0 \quad \forall (x,t) \in \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \tag{3.8}$$

avec u donnée par

$$u = -\int_0^t k(t-s) y_s(s) ds - b y_t$$

Ce chois de u nous a été inspiré par les travaux de **Shugen.Chai et Yuxia.Gua** [5] et **Nicaise, Serge et Pignotti, Cristina** [15] et **Guesmia** [9] sur les equation des ondes.

On va transformer la condition au bord (limite) sur la partie Γ_1. On suppose que $y_0 = 0$ sur Γ_1

On a par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^t k(t-s)y_s(s)ds &= [k(t-s)y(s)]_0^t + \int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds \\ &= \int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds + k(0)y(t) - k(t)y_0 \\ &= \int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds + k(0)y(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donc sur la partie Γ_1, nous avons

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds - k(0)y(t) - by_t \tag{3.10}$$

et le système (3.11) aura de la forme suivante :

$$\begin{cases} iy_t + \Delta y = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y(x,0) = y_0 & \text{Dans } \Omega \\ y = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = -\displaystyle\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds - k(0)y(t) - by_t & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans uns cadre plus générale, que le système (3.11) est bien posé au sens standard. Plus précisément, on va montré le théorème suivante :

Théoréme 3.1. *:*

1. *Pour tout $y_0 \in V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega); y = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ il existe une solution (faible) unique du système (3.11) vérifiant : $y \in C(\mathbb{R}^+, V)$.*
2. *Pour tout $y_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tel que $\dfrac{\partial y_0}{\partial v} = -k(0)y(0) - by_t(0)$ sur Γ_1, on a : $y \in C^1(R^+, V)$ est une solution régulière.*

Démonstration. :

Ci-dessous, on va établir un résultat concernant l'existence,l'unicité des solutions du problème (3.11) qu'est basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin** et en utilisant des inégalité particuliers , on montre que le système (3.11) est uniformément stable

Avant de commencer sur le preuve on va donner un résultat très important sur la démonstration.

3.1 La formulation variationnelle

Dans cette partie, on démontre que le problème proposé est équivalent au problème variationnel suivant :

$$i < y_t, v > -\alpha(y,v) - \beta(t,y,v) =< by_t, v >$$
$$\forall \bar{v} \in V, où$$
$$\alpha(y,v) = \int_\Omega \triangledown y(t) \triangledown \bar{v} d\Omega$$
$$\beta(t,y,v) = \int_{\Gamma_1} \big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds + k(0)y(t)\big)\bar{v}d\Gamma_1 \quad \beta(0,y,v) = 0$$

Démonstration. Soit y une solution du problème proposé, et soit $\bar{v} \in V$ On multiple la premier équation du problème proposé par $\bar{v}$ et on intégré sur Ω on obtient :

$$i \int_\Omega y_t \bar{v} d\Omega = -\int_\Omega \triangle y \bar{v} d\Omega \tag{3.12}$$

En utilisant la formule de **Green** on obtient :

$$= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu} \bar{v} d\Gamma_1 + \int_\Omega \nabla y(t) \nabla \bar{v} d\Omega$$

où $\bar{v} \in V$

De la condition au limite de (3.11),on a

$$\begin{aligned} i \int_\Omega y_t \bar{v} d\Omega = & -\int_{\Gamma_1} \big(-\int_0^t k'(t-s)y(s)ds - k(0)y(t) - by_t \big)\bar{v}d\Gamma_1 \\ & + \int_\Omega \triangledown y(t) \triangledown \bar{v} d\Omega \end{aligned} \tag{3.13}$$

Alors, on réécrit (3.13) comme suit

$$i < y_t, v > -\alpha(y,v) - \beta(t,y,v) =< by_t, v >$$

□

Maintenant, on passe à la démonstration de l'existence et l'unicité

3.2 Existence, unicité des solutions

3.2.1 Existence

On démontre l'existence d'une solution faible du problème sera obtenue en se basant sur les approximations de la méthode de **Feado-Galarkin**

La méthode de **Feado-Galarkin** consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

1. On construit des solution "approchées"
2. On établir sur ces solution approchées des estimations à priori
3. On passe à la limite.

1. **Solutions approchées**

   Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de fonction dans V qui forment une base orthonormée pour $L^2(\Omega)$ ie :
$$\begin{cases} e_i \in V, \quad \forall i; & \\ \forall m, e_1, e_2, \cdots, e_m & \text{sont lineairement independants}; \\ V_m & \text{l'espace engendré par } e_1, e_2, \cdots, e_m \end{cases}$$
   et soit
$$y^m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t) e_i$$
   une solution de problème de **Cauchy**.
$$i < y_t^m, v > -\alpha(y^m, v) - \beta(t, y^m, v) =< by_t^m, v > \tag{3.14}$$

2. **Estimation à priori**

   Estimation I

   Posant dans (3.15) $v = y_t^m$, on trouve
$$i < y_t^m, y_t^m > -\alpha(y^m, y_t^m) - \beta(t, y^m, y_t^m) =< by_t^m, y_t^m >$$
   en prenant la partie imaginaire, il résulte
$$Re(\int_\Omega \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y}_t^m d\Omega) = -\int_{\Gamma_1} b|y_t^m|^2 - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s) y^m(s)\bar{y}_t^m(t) ds d\Gamma_1)$$
$$- Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k(0) y^m(t)\bar{y}_t^m(t) d\Gamma_1)$$
   Pour continue on remarque que
$$|y-z|^2 = |y|^2 + |z|^2 - 2Re(y.z) \Rightarrow 2Re(y.z) = |y|^2 + |z|^2 - |y-z|^2$$
   Donc
$$-\int_{\Gamma_1} b|y_t^m|^2 - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s) y^m(s)\bar{y_t^m}(t) ds d\Gamma_1) - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k(0) y^m(t)\bar{y_t^m}(t) d\Gamma_1)$$
$$= -\int_{\Gamma_1} b|y_t^m|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{'}|y^m|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y^m(t) - y^m(s)|^2 ds d\Gamma_1$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1} k|y^m|^2 d\Gamma_1] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s)|y^m(t) - y^m(s)|^2 ds d\Gamma_1]$$

Alors

$$Re(\int_{\Omega} \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y_t^m} d\Omega) = -\int_{\Gamma_1} b|y_t^m|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{'}|y^m|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1} k|y^m|^2 d\Gamma_1]$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y^m(t)-y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s)|y^m(t)-y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1]$$

D'après $(3.2),(3.3)$ et (3.5)

$$-\int_{\Gamma_1} b|y_t^m|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{'}|y^m|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y^m(t)-y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1 < 0$$

Donc

$$Re(\int_{\Omega} \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y_t^m} d\Omega) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1} k|y^m|^2 d\Gamma_1] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s)|y^m(t)-y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1]$$

De (3.1) et (3.3) on déduit que

$$Re(\int_{\Omega} \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y_t^m} d\Omega) \leq 0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Re(\int_{\Omega} \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y_t^m} d\Omega) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} \bigtriangledown y^m \bigtriangledown \bar{y}^m d\Omega) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} |\bigtriangledown y^m|^2 d\Omega) \end{aligned}$$

On intègre cette equation sur $[0,T]$ on a

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} |\bigtriangledown y^m|^2 d\Omega)dt = \frac{1}{2}(\int_{\Omega} |\bigtriangledown y^m|^2 d\Omega)\Big]_0^T$$

Alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\bigtriangledown y^m(T)|^2 d\Omega) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\bigtriangledown y^m(0)|^2 d\Omega)$$

D'où

$$|y^m|_V^2 \leq |y^{0m}|_V^2 \tag{3.15}$$

Estimation II

On dérive (3.16) par rapport à t, on a

$$i < y_{tt}^m, v > -\int_{\Gamma_1}(\int_0^t k^{''}(t-s)y^m(s)ds + k(0)y_t^m)\bar{v}d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} by_{tt}^m\bar{v}d\Gamma_1 - \int_\Omega \nabla y_t^m(t)\nabla \bar{v}d\Omega = 0$$

On pose $v = y_{tt}^m$

$$\begin{aligned} i < y_{tt}^m, y_{tt}^m > &-\int_{\Gamma_1}(\int_0^t k^{''}(t-s)y^m(s)ds + k(0)y_t^m)\bar{y_{tt}^m}d\Gamma_1 - \int_\Omega \nabla y_t^m(t)\nabla \bar{y_{tt}^m}d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_1} by_{tt}^m\bar{y_{tt}^m}d\Gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

On prend la partie réele

$$\begin{aligned} &Re(\int_\Omega \nabla y_t^m \nabla \bar{y_{tt}^m}d\Omega) = -\int_{\Gamma_1} b|y_{tt}^m|^2 - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)y^m(s)\bar{y_{tt}^m}(t)dsd\Gamma_1) \\ &- Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k(0)y_t^m(t)\bar{y_{tt}^m}(t)d\Gamma_1) \end{aligned}$$

D'après (3.4) on a

$$\begin{aligned} &-\int_{\Gamma_1} b|y_{tt}^m|^2 - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)y^m(s)\bar{y_{tt}^m}(t)dsd\Gamma_1) - Re(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k(0)y_t^m(t)\bar{y_{tt}^m}(t)d\Gamma_1) \\ &= -\int_{\Gamma_1} b|y_{tt}^m|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{''}|y_t^m|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'''}(t-s)|y_t^m(t) + y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1 \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[-\int_{\Gamma_1} k^{'}|y_t^m|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y_t^m(t) - y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1\Big] \end{aligned}$$

et de $(3.2), (3.5)$ et (3.6) on déduit que

$$-\int_{\Gamma_1} b|y_{tt}^m|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{''}|y_t^m|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'''}(t-s)|y_t^m(t) + y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1 \leq 0$$

Alors

$$Re(\int_\Omega \nabla y_t^m \nabla \bar{y_{tt}^m}d\Omega) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} k^{'}|y_t^m|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y_t^m(t) - y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1]$$

D'autre part

$$Re(\int_\Omega \nabla y_t^m \nabla \bar{y_{tt}^m}d\Omega) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega |\nabla y_t^m|^2 d\Omega)$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega |\nabla y_t^m|^2 d\omega) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1} k^{'}|y_t^m|^2 d\Gamma_1) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y_t^m(t) - y^m(s)|^2 dsd\Gamma_1]$$

D'après (3.3) et (3.5)

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1} k^{'}|y_t^m|^2 d\Gamma_1) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y_t^m(t) - y^m(s)|^2 ds d\Gamma_1] \leq 0$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} | \bigtriangledown y_t^m|^2 d\omega) \leq 0$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} | \bigtriangledown y_t^m(T)|^2 d\omega) \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} | \bigtriangledown y_t^m(0)|^2 d\omega)$$

D'où

$$|y_t^m|_V^2 \leq |y_t^{0m}|_V^2 \tag{3.16}$$

3. **Passage à la limite**

A partir de $(3.15), (3.16)$ on déduit que

$$\begin{cases} (y_m) & \text{demeure dans un ensemble borné } L^{\infty}(]0,T[, L^2(\Omega)) \\ (y_m^{'}) & \text{demeure dans un ensemble borné } L^{\infty}(]0,T[, L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{3.17}$$

On déduit de (3.17) qu'on peut extraire des sous-suites convergente (y_l), $(y_l^{'})$ de (y_m), $(y_m^{'})$ respectivement et telles que, lorsque $l \to \infty$ on a

$$\begin{aligned} y_l &\to y && \text{dans } L^{\infty}(]0,T[, V) faible(^*) \\ y_l^{'} &\to y^{'} && \text{dans } L^{\infty}(]0,T[, V) faible(^*) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il résulte, en particulière, de (3.17) que

$$\begin{cases} (y_m) & \text{est borné } L^{\infty}(]0,T[, L^2(\Omega)) \\ (y_m^{'}) & \text{est borné } L^{\infty}(]0,T[, L^2(\Omega)) \end{cases} \quad \text{D'après le théorème de (Lions-Magenés [13])}$$

$$\text{l'injection de } H^1(Q) \text{ dans } L^2(Q) \text{ est compacte}$$

Donc on passe à la limite sans difficultés

3.2.2 L'unicité

Soient y et z deux solutions du problème proposé

Alors $\omega = y - z$ vérifie

$$\begin{cases} i\omega_t + \Delta\omega = 0 & \text{Dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \omega(0,x) = 0 & \text{Dans } \Omega \\ \omega = 0 & \text{Sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\nu} = -\displaystyle\int_0^t k'(t-s)\omega(s)ds + k(0)\omega(t) - b\omega_t & \text{Sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.18}$$

Multipliant la première equation de problème (3.17) par $\bar{\omega}_t$, intégrant sur Ω .En appliquant la formule de **Green**, on obtient

$$i\int_\Omega |\omega_t|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\bar{\omega}_t d\Gamma_1 - \int_\Omega \triangledown\omega \triangledown \bar{\omega}_t d\Omega = 0$$

Prenant la partie imaginaire de la relation précédente

$$\begin{aligned} Re\int_{\Gamma_1} \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\bar{\omega}_t d\Gamma_1 &= Re\int_\Omega \triangledown\omega \triangledown \bar{\omega}_t d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega [\frac{d}{dt}| \triangledown \omega|^2] d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega | \triangledown \omega(t)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on a

$$\int_\Omega | \triangledown \omega|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} k|\omega|^2 d\Gamma_1 - \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)|\omega(t) - \omega(s)|^2 d\Gamma_1 ds = 0$$

Alors

$$\int_\Omega | \triangledown \omega|^2 d\Omega = -\int_{\Gamma_1} k|\omega|^2 d\Gamma_1 + \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)|\omega(t) - \omega(s)|^2 d\Gamma_1 ds$$

D'après (3.1), (3.3), on déduit que

$$\int_\Omega | \triangledown \omega|^2 d\Omega \leq 0$$

et donc

$$\triangledown\omega = 0$$

Ceci avec la condition au limite de problème (3.11)

$$\omega = 0$$

$\square$

3.3 La stabilisation exponentielle

Dans cette partie, on montre que la solution forte du problème (3.11) décroît exponentiellement dans l'espace d'énergie V. Par un argument de densité, on a le même résultat pour la solution faible. On commence par démontrer que le système (3.11) est dissipatif.

Notons

- $Q = [S, T] \times \Omega$
- $\Sigma_0 = [S, T] \times \Gamma_0$
- $\Sigma_1 = [S, T] \times \Gamma_1$

3.3.1 La décroissance de l'énergie

Lemme 3.1. *Soit $E(t)$ l'énergie du système (3.11) définie par :*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\bigtriangledown y|^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k|y|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k^{'}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 d\Gamma_1 ds \quad (3.19)$$

alors $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissance et vérifie pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

$$E(S) - E(T) = \int_{\Sigma_1} b|y_t|^2 d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} k^{'}|y|^2 d\Sigma_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Sigma_1} k^{''}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 d\Sigma_1 ds \quad (3.20)$$

Démonstration. :

d'après (3.1) et (3.3) $E(t)$ est positive pour $y_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega), E(t)$ est dérivable on dérive(3.19) par rapport à t et on intègre sur $[S, T]$ on obtient :

$$\begin{aligned}
E(T) - E(S) &= \int_S^T E^{'}(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown y. \bigtriangledown \bar{y}_t d\Omega dt + \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown \bar{y}. \bigtriangledown y_t d\Omega dt + \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} k^{'}|y|^2 d\Gamma_1 dt \\
&+ \int_S^T \int_{\Gamma_1} k y y_t d\Gamma_1 dt - \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k^{''}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1 dt \\
&- \int_S^T \int_{\Gamma_1} \int_0^t k^{'}(t-s)[y(t)-y(s)]\bar{y}_t ds d\Gamma_1 dt
\end{aligned}$$

d'autre part , on remarque que :

$$\frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown y. \bigtriangledown \bar{y}_t d\Omega dt + \frac{1}{2}\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown \bar{y}. \bigtriangledown y_t d\Omega dt = \frac{1}{2} 2Re\Big(\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown y. \bigtriangledown \bar{y}_t d\Omega dt\Big)$$
$$= Re\Big(\int_S^T \int_{\Omega} \bigtriangledown y. \bigtriangledown \bar{y}_t d\Omega dt\Big)$$

on multiple la premiére equation de problème (3.11) par $\bar{y}_t$ et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega (iy_t + \triangle y)\bar{y}_t d\Omega = 0$$
$$i\int_\Omega y_t\bar{y}_t d\Omega + \int_\Omega \triangle y\bar{y}_t d\Omega = 0$$

la formule de **Green** nous donne

$$i\int_\Omega |y_t|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \triangledown y \triangledown \bar{y}_t d\Omega = 0$$

on prend la partie imaginaire

$$Im(i\int_\Omega |y_t|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1 - \int_\Omega \triangledown y \triangledown \bar{y}_t d\Omega) = 0$$

on a

$$Re\int_\Omega \triangledown y \triangledown \bar{y}_t d\Omega = Re\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1$$

on multiple (3.11) par $\bar{y}_t$, et on intègre sur Γ_1

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1 = -\int_{\Gamma_1} k(0)y(t)\bar{y}_t d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} (\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds)\bar{y}_t d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} by_t\bar{y}_t d\Gamma_1$$

on prend la partie réelle

$$Re\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1 = -Re\int_{\Gamma_1} k(0)y_t\bar{y}_t d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1} (\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds)\bar{y}_t d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1$$

on a

$$\begin{aligned} E^{'}(t) &= Re\int_\Omega \triangledown y. \triangledown \bar{y}_t d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k^{'}|y|^2 d\Gamma_1 + Re\int_{\Gamma_1} kyy_t d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 dsd\Gamma_1 \\ &- Re\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s)[y(t)-y(s)]\bar{y}_t dsd\Gamma_1 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} E^{'}(t) &= Re\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu}\bar{y}_t d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k^{'}|y|^2 d\Gamma_1 dt + Re\int_S^T\int_{\Gamma_1} kyy_t d\Gamma_1 dt \\ &- \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{''}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 dsd\Gamma_1 dt - Re\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k^{'}(t-s)[y(t)-y(s)]\bar{y}_t dsd\Gamma_1 dt \end{aligned}$$

d'après (3.11) on a

$$\begin{aligned}
E'(t) =& -\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2\bar{y}_t d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1} k(0)y(t)\bar{y}_t d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1}\bar{y}_t\big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds\big)d\Gamma_1\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1 + Re\int_{\Gamma_1} k\bar{y}_t y d\Gamma_1 - Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\bar{y}_t(t)(y(t)-y(s))d\Gamma_1 ds\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 d\Gamma_1 ds\\
=& -\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1} k(0)y(t)\bar{y}_t d\Gamma_1 + Re\int_{\Gamma_1} k\bar{y}_t y d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1\\
&-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1 - Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\bar{y}_t(t)y(s)ds d\Gamma_1\\
&- Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\bar{y}_t(t)y(t)ds d\Gamma_1 + Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\bar{y}_t(t)y(s)ds d\Gamma_1
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E'(t) =& -\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1\\
&+ Re\int_{\Gamma_1} y\bar{y}_t[k-k(0)-\int_0^t k'(t-s)ds]d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

puisque

$$Re\int_{\Gamma_1} y\bar{y}_t[k-k(0)-\int_0^t k'(t-s)ds]d\Gamma_1 = 0$$

par conséquent

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1$$

pour tout $0 < T < \infty$ on a

$$\begin{aligned}
E(T)-E(S) =& -\int_S^T\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1 dt - \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1 dt\\
&+\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1 dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S)-E(T) =& \int_S^T\int_{\Gamma_1} b|y_t|^2 d\Gamma_1 dt + \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds d\Gamma_1 dt\\
&-\frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_1} k'|y|^2 d\Gamma_1 dt
\end{aligned}$$

d'après $(3.2), (3.3)$ et (3.5) $E(t)$ est décroissance. □

Pour continuer on a besoin les conditions géométriques suivantes :

On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on pose

$m(x) = x - x_0, x \in \mathbb{R}^n$ et $R = \|m\|_{L(\Omega)}$ on suppose que :

$$m.v \leq 0 \quad sur\Gamma_0 \tag{3.21}$$

et qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$m.v \geq \delta \quad sur\Gamma_1 \tag{3.22}$$

où v est le vecteur normal extérieur à Γ

Notre résultat de stabilisation est le suivantes

3.3.2 Théorème de stabilisation

Théoréme 3.2. *supposons satisfaites les condition* $(3.3), (3.5), (3.22), (3.23)$ *alors pour toute donnée initiale* $y_0 \in H_0^1(\Omega)$*, l'énergie de la solution du système* (3.11) *vérifie, pour une constante* $\omega > 0$ *indépendante de* y_0

$$E(t) \leq E(0) \exp^{1-\omega t} \tag{3.23}$$

Démonstration. :

d'après **Komornik** [11], pour établir ce théorème il suffit de montrer que pour toute solution du problème (3.11) on a

$$\int_0^\infty E(t)dt \leq CE(S) \quad \forall S > 0 \tag{3.24}$$

le lemme suivant nous donne une identité très utile pour la démonstration de notre résultat.

3.3.3 L'identité de problème

Lemme 3.2. *pour tout* $0 \leq S < T < \infty$ *on a :*

$$\begin{aligned}(n-2)\int_Q |\nabla y|^2 dQ + 2Re\int_{\Sigma_1}(m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial \nu}d\Sigma_1 + 2Re\int_{\Sigma_0} m.v(\frac{\partial y}{\partial \nu})^2 d\Sigma_0 \\ -\int_{\Sigma_1}(m.v)|\nabla y|^2 dQ = \int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\Big]_S^T - \int_{\Sigma_1} y\bar{y}_t m.vd\Sigma_1 + \int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ\end{aligned} \tag{3.25}$$

Démonstration. :

avant de commencer la démonstration on a

$iy_t + \Delta y = 0 \Rightarrow y_t - i\Delta y = 0$

soit $0 \leq S < T < \infty$ .En multipliant la première equation de (3.11) par $2m\nabla\bar{y}$, en intégrant sur $[S,T]\times\Omega$

$$\begin{aligned}\int_S^T\int_\Omega 2(y_t - i\Delta y)m\nabla\bar{y}d\Omega dt &= \int_S^T\int_\Omega 2y_t m\nabla\bar{y} - 2i\Delta\bar{y}m\nabla\bar{y}d\Omega dt\\ &= \int_S^T\int_\Omega 2y_t m\nabla\bar{y}d\Omega dt - 2i\int_S^T\int_\Omega \Delta y m\nabla\bar{y}d\Omega dt = 0\end{aligned}$$

par intégration par partie sur I_1

$$I_1 = \int_S^T\int_\Omega 2y_t m\nabla\bar{y}d\Omega dt = 2\int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_Q ym\nabla\bar{y}_t dQ$$

En suite, nous appliquant la formule de **Green**

$$\begin{aligned}I_1 &= 2\int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + 2\int_Q \bar{y}_t div(y.m)dQ\\ &= 2\int_\Omega y.m\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + 2\int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ + 2\int_Q \bar{y}_t m\nabla y dQ.\end{aligned}$$

D'autre part on a $\bar{y}_t = -i\Delta\bar{y}$

on obtient

$$2\int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + 2\int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ - 2\int_Q i\Delta\bar{y}m\nabla y dQ - 2i\int_Q \Delta y m\nabla\bar{y}d\Omega dt = 0$$

$$2\int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + 2\int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ - 2i\int_Q \big[\Delta\bar{y}m\nabla y + \Delta y m\nabla\bar{y}\big]dQ = 0$$

Alors

$$2\int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - 2\int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + 2\int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ - 4iRe\int_Q \Delta y m\nabla\bar{y}dQ = 0$$

On prend la partie imaginaire, on obtient

$$2Re\int_Q \Delta y m\nabla\bar{y}dQ = \int_\Omega ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T - \int_\Sigma y\bar{y}_t m.vd\Sigma + \int_Q \bar{y}_t y div(m)dQ \tag{3.26}$$

D'autre part, et après Rellich on a

$$2\int_Q \Delta y(m\nabla\bar{y})dQ = (n-2)\int_Q |\nabla y|^2 dQ + 2\int_\Sigma (m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Sigma - \int_Q (m.v)|\nabla y|^2 dQ \tag{3.27}$$

Pour continuer, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.

$$y = y_t = 0 \quad Sur\ \Gamma_0 \tag{3.28}$$

$$\nabla y = \frac{\partial y}{\partial\nu}.v$$

Ce lemme implique

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}(m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Sigma &= \int_{\Sigma_0}(m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Sigma_0+\int_{\Sigma_1}(m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Sigma_1\\ &= \int_{\Sigma_0}m.v(\frac{\partial y}{\partial\nu})^2d\Sigma_0+\int_{\Sigma_1}(m\nabla\bar{y})\frac{\partial y}{\partial\nu}d\Sigma_1\end{aligned} \tag{3.29}$$

et

$$\int_{\Sigma}y\bar{y}_tm.vd\Sigma=\int_{\Sigma_1}y\bar{y}_tm.vd\Sigma_1 \tag{3.30}$$

Après (3.29), (3.30), (3.32), (3.33) on a (3.27) □

Pour continuer, on a besoin des résultat suivantes

Lemme 3.4. $\forall\varepsilon>0$

$$|Im\int_{\Sigma_1}y\bar{y}_tm.vd\Sigma_1-Im\int_{\Omega}ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T|\leq\frac{\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|}{2\alpha}\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1+2\alpha\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2d\Sigma_1$$
$$+\varepsilon\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|E(S)+\Big(\frac{\varepsilon}{\alpha}2\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|\Big)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \tag{3.31}$$

Démonstration. :

On applique l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** pour le terme suivant

$$\begin{aligned}|Im\int_{\Sigma_1}y\bar{y}_tm.vd\Sigma_1| &\leq\frac{1}{2\alpha}\int_{\Sigma_1}|y|^2m.vd\Sigma_1+2\alpha\int_{\Sigma_1}|y_t|^2m.vd\Sigma_1\\ &\leq\frac{\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|}{2\alpha}\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1+2\alpha\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2d\Sigma_1\end{aligned}$$

Maintenant, on majore l'autre terme

$$|-Im\int_{\Omega}ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T|=\int_{\Omega}|y(T)m\nabla y(T)-y(S)m\nabla y(S)|d\Omega$$
$$\leq\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|\big(\int_{\Omega}|y(T)||\nabla y(T)|d\Omega-\int_{\Omega}|y(S)||\nabla y(S)|d\Omega\big)\leq\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|\Big(\int_{\Omega}\big(\frac{\alpha}{2}|y(T)|^2+\frac{1}{2\alpha}|\nabla y(T)|^2$$
$$+\frac{\alpha}{2}|y(S)|^2+\frac{1}{2\alpha}|\nabla y(S)|^2\big)d\Omega\Big)\leq\varepsilon\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|E(S)+\Big(\frac{\varepsilon}{\alpha}2\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|\Big)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

Alors

$$|Im\int_{\Sigma_1}y\bar{y}_tm.vd\Sigma_1-Im\int_{\Omega}ym\nabla\bar{y}d\Omega\big]_S^T|\leq\frac{\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|}{2\alpha}\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1+2\alpha\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2d\Sigma_1$$
$$+\varepsilon\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|E(S)+\Big(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|\Big)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}.$$

□

Lemme 3.5. *Soient* $0 \leq S < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

$$-\int_{\Sigma_1} (m.v)|\nabla y|^2 dQ + 2Re \int_{\Sigma_0} m\nabla \bar{y}(\frac{\partial y}{\partial \nu}) d\Sigma_0 \leq C_0 \int_{\Sigma_1} \big(\frac{\partial y}{\partial \nu}\big)^2 d\Sigma_1 \qquad (3.32)$$

où $C_0 = (\alpha_1 \sup \frac{|m|^2}{m.v}) d\Sigma_1$

Lemme 3.6.

$$\begin{aligned}&\Big|\int_Q |\nabla y|^2 div(m) dQ - Im \int_Q \bar{y}_t y.div(m) dQ\Big| \leq C_1 \int_{\Sigma_1} \big(\frac{\partial y}{\partial \nu}\big)^2 d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q |\nabla \bar{y}|^2 dQ \\ &+ \Big(\frac{\alpha_1}{2\varepsilon} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\nabla(div(m))| + \frac{1}{4} \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big(div(m)\big)\Big) \int_{\Sigma_1} |y|^2 d\Sigma_1\end{aligned} \qquad (3.33)$$

où $C_1 = \frac{\alpha_1}{2} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |divm|$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\big(\frac{\partial y}{\partial \nu}\big)^2 &= \big(-\int_0^t k'(t-s)y(s)ds - k(0)y(t) - by_t\big)^2 = \big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds + k(0)y(t) + by_t\big)^2 \\ &= b^2|y_t|^2 + \big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds + k(0)y(t)\big)^2 + 2b|y_t|\big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds + k(0)y(t)\big) \\ &= b^2|y_t|^2 + \big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds\big)^2 + (k(0)y(t))^2 + 2\big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds\big)k(0)y(t) \\ &+ 2b|y_t|\big(\int_0^t k'(t-s)y(s)ds + k(0)y(t)\big).\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\Sigma_1} \big|\frac{\partial y}{\partial \nu}\big|^2 d\Sigma_1 \leq 3\big[\int_{\Sigma_1} \big|\int_0^t k'(t-s)y(s)ds\big|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} k(0)|y|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} b^2|y_t|^2 d\Sigma_1\big]. \qquad (3.34)$$

Insérant $(3.33), (3.34), (3.35), (3.36)$ dans (3.27) on obtient

$$\begin{aligned}&2a \int_Q |\nabla y|^2 dQ \leq 3(C_0 + C_1)\Big[\int_{\Sigma_1} \big|\int_0^t k'(t-s)y(s)ds\big|^2 d\Sigma_1 + 3(C_0 + C_1)\Big[\int_{\Sigma_1} k(0)|y|^2 d\Sigma_1 \\ &+ \int_{\Sigma_1} |by_t| d\Sigma_1 + C_2 \int_{\Sigma_1} |y|^2 d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q |\nabla y|^2 dQ + \varepsilon \sup_{x\in\bar{\Omega}} |m(x)| E(S) \\ &+ 2\alpha \sup_{x\in\bar{\Omega}} |m| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 d\Sigma_1 + \Big(\frac{\varepsilon\alpha}{2} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |m(x)|\Big) |y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}\end{aligned} \qquad (3.35)$$

où $C_2 = \frac{\alpha_1}{2\varepsilon} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\nabla div(m)| + \frac{1}{4} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |div(m)| + \frac{\varepsilon\alpha_1}{2} \sup_{x\in\bar{\Omega}} |div(m(x))|$

Lemme 3.7. *[12] Daprés* ***I.Lasiecka*** *on a*

$$|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \leq \int_{\Sigma_1} |by_t|^2 d\Sigma_1$$

Lemme 3.8. *Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$\varepsilon \inf k^{'}(0) + 1 > 0 \tag{3.36}$$

Alors pour tout $0 \leq S \leq T < \infty$ on a :

$$\int_{\Sigma_1} \Big| \int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds\Big|^2 dt \leq C_3 E(S)$$

où $C_3 = 2\Big[\dfrac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{\varepsilon\delta f} + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\Big]$

Démonstration. :

Soit $\varepsilon > 0$ vérifiant (3.26) . On pose

$$h := h(x) = \frac{k(0)}{\alpha(1+\varepsilon k^{'}(0))} \quad x \in \Gamma_1$$

La condition de (3.39) implique que $h \geq 0$ et $h \in L^\infty(\Gamma_1)$.Posons

$$I = |\int_0^t -k^{'}(t-s)y(s)ds|^2 - h\int_0^t k^{''}(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds + hk^{'}|y|^2$$

On a , en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} I &\leq |\int_0^t -k^{'}(t-s)ds||\int_0^t -k^{'}(t-s)y^2(s)ds| - h\int_0^t k^{''}(t-s)y^2(s)ds + 2hy\int_0^t k^{''}(t-s)y(s)ds \\ &\quad + hk^{'}(0)y^2 - hk^{'}y^2 + hk^{'}y^2 \\ &\leq (k(t)-k(0))\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds - h\int_0^t k^{''}(t-s)y^2(s)ds + 2hy\int_0^t k^{''}(t-s)y(s)ds + hk^{'}(0)y^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de **Cauchy-Schwarz** nous donne

$$\begin{aligned} I &\leq k(t)\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds - k(0)\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds - h\int_0^t k^{''}(t-s)y^2(s)ds + \frac{h}{\varepsilon}y^2 \\ &\quad + \varepsilon h|\int_0^t k^{''}(t-s)y(s)ds|^2 + hk^{'}(0)y^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I &\leq k(t)\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds - k(0)\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds - h\int_0^t k^{''}(t-s)y^2(s)ds + h\big(\frac{1}{\varepsilon} + k^{'}(0)\big)y^2 \\ &\quad + \varepsilon h|\int_0^t k^{''}(t-s)y(s)ds|^2 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Or (voir(3.1) et (3.3)).

$$k(t)\int_0^t k^{'}(t-s)y^2(s)ds < 0$$

et

$$\varepsilon h k' \int_0^t k''(t-s)y^2(s)ds < 0$$

On applique l'inégalité de Hölder sur la dernier intégrale on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon h|\int_0^t k''(t-s)y(s)ds|^2 &\leq \varepsilon h\Big[|\int_0^t k''(t-s)ds||\int_0^t k''(t-s)y^2(s)ds|\Big] \\ &\leq \varepsilon h(k'(0)-k'(t))|\int_0^t k''(t-s)y(s)ds| \end{aligned} \tag{3.38}$$

de la condition (3.5) ,on déduit

$$\begin{aligned} & k''(t-s) \geq -\delta k'(t-s) \\ & \Rightarrow k''(t-s)y^2(s) \geq -\delta k'(t-s)y^2(s) \\ & \Rightarrow k(t)\int_0^t k'(t-s)y^2(s)ds \leq \frac{-k(t)}{\delta}\int_0^t k''(t-s)y^2(s)ds \end{aligned} \tag{3.39}$$

et

$$\begin{aligned} & k''(t-s) \geq -\delta k'(t-s) \\ & \Rightarrow k''(t-s)y^2(s) \geq -\delta k'(t-s)y^2(s) \\ & \Rightarrow -k(0)\int_0^t k'(t-s)y^2(s)ds \leq \frac{k(0)}{\delta}\int_0^t k''(t-s)y^2(s)ds \end{aligned} \tag{3.40}$$

De les condition $(3.40), (3.41), (3.42), (3.43)$ on a

$$I \leq \big[\frac{k(0)}{\delta} - h(1+\varepsilon k'(0))\big]\int_0^t k''(t-s)y^2(s)ds + h\big(\frac{1}{\varepsilon} + k'(0)\big)y^2.$$

De la définition de h , on déduit que

$$I \leq \frac{1}{\varepsilon\delta}k(0)y^2$$

et par conséquent

$$\int_S^T I dt \leq \frac{1}{\varepsilon\delta}\int_S^T k(0)y^2 dt$$

Alors

$$\begin{aligned} &\int_S^T |\int_0^t k'(t-s)y(s)ds|^2 dt \leq h\int_S^T k''(t-s)|y(t)-y(s)|^2 dt + h\int_S^T k'|y|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon\delta}\int_S^T k(0)y^2 dt \\ &\leq \frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{\varepsilon\delta f}\int_S^T f y^2 dt - \int_S^T k'|y|^2 dt + h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\Big[\int_S^T k''(t-s)(y(t)-y(s))^2 dt\Big] \end{aligned}$$

Grâce à (3.8) et (3.20)

$$\int_S^T |-\int_0^t k'(t-s)y(s)ds|^2 dt \leq C_3 E(S) \qquad où \quad C_3 = 2\Big[\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{\varepsilon\delta f} + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\Big]$$

□

Alors d'après (3.38) on a

$$2a\int_Q|\nabla y|^2dQ\leq 3(C_0+C_1)\Big[\int_{\Sigma_1}|-\int_0^t k^{'}(t-s)y(s)ds|^2d\Sigma_1\Big]+3(C_0+C_1)\Big[\int_{\Sigma_1}k(0)|y|^2d\Sigma_1$$
$$+\int_{\Sigma_1}b^2|y_t|d\Sigma_1\Big]+C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q|\nabla y|^2dQ+\Big(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|\Big)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$
$$+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|E(S)+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|d\Sigma_1$$

Grace à $(3.38)-(3.39)$ la formule de ci-dessus devient

$$2a\int_Q|\nabla y|^2dQ-\frac{\varepsilon}{2}\int_Q|\nabla y|^2dQ\leq\Big[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|\Big]E(S)+C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1$$
$$+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|d\Sigma_1+\Big(\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|\Big)\int_{\Sigma_1}|by_t|^2d\Sigma_1+3(C_0+C_1)\Big[\int_{\Sigma_1}|by_t|^2d\Sigma_1$$
$$+\int_{\Sigma_1}k(0)|y|^2d\Sigma_1\Big]$$

De (3.19) on a

$$(4a-\varepsilon)\int_S^T E(t)dt\leq[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]E(S)+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2d\Sigma_1$$
$$+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\int_{\Sigma_1}|y|^2d\Sigma_1+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]\int_{\Sigma_1}|by_t|^2d\Sigma_1$$

De (3.8) et (3.20)

$$(4a-\varepsilon)\int_S^T E(t)dt\leq[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]E(S)+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\frac{1}{\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|}\int_{\Sigma_1}b|y_t|^2d\Sigma_1$$
$$+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}\int_{\Sigma_1}(-k^{'})|y|^2d\Sigma_1+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|\int_{\Sigma_1}b|y_t|^2d\Sigma_1$$

où

$$(4a-\varepsilon)\int_S^T E(t)dt\leq[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]E(S)+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\frac{1}{\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|}E(S)$$
$$+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}E(S)+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|E(S).$$

En choisissant

$$\varepsilon<4a$$

on obtient

$$\int_S^T E(t)dt\leq CE(S)$$

où

$$C=\frac{1}{(4a-\varepsilon)}\Big[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]+2\alpha\sup_{x\in\bar\Omega}|m|\frac{1}{\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|}\Big]+\frac{1}{(4a-\varepsilon)}\Big[[3(C_0+C_1)$$
$$+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\sup_{x\in\bar\Omega}|m(x)|]\sup_{x\in\bar\Gamma_1}|b|\Big]+\frac{1}{(4a-\varepsilon)}\Big[[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}\Big]$$

.

Maintenant, en laissant T tendre vers l'infinie, on déduit que :

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq CE(S).$$

D'où l'inégalité (3.27) $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude du problème de la stabilisation uniforme pour l'équation de **Schrödinger** avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de Neumann. En utilisant la technique des multiplicateurs, on a montré que la solution décroît exponentiellement dans l'espace d'énergie $H^1_{\Gamma_0}$. Cette étude ouvre la voix à de nombreuses questions, notamment :

1. Étude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action de type mémoire agissant sur la condition de Dirichlet.
2. Étude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action frontière non linéaire de type mémoire.
3. Étude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action de type mémoire tel que l'opérateur A à coefficients variables.
4. Les résultats obtenus ont exige certaines hypothèses géométriques sur le domaine . Il est donc intéressant d'étudier le problème considéré dans ce mémoire en affaiblissant ces hypothèse.

3.4 Annexe

Théorème (admis) et définitions

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé ensemble des nombres complexes, qui vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$
- Il existe dans un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$
- Pour tout nombre complexe z il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $z = a + ib$.

Forme algébrique d'un nombre complexe

L'égalité $z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z.

Partie réelle, partie imaginaire

Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z, le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z . On note : $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$. Par conséquent $z = Re(z) + iIm(z)$.

Nombres réels et nombres imaginaires purs

Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

On appelle imaginaire pur tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

Le réel 0 est le seul nombre complexe qui est réel et imaginaire pur.

module d'un complexe

Le module de $z = a + ib$ est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On a aussi $|z|^2 = z\bar{z}$. Le module vérifie les deux identités suivantes :

$$\forall (z, \omega) \in \mathcal{C}^{\in}, \quad |z.\omega| = |z|.|\omega|$$

de deux nombres complexes

$a + ib = a^{'} + ib^{'}$ équivaut à $a = a^{'}$ et $b = b^{'}$.

Nullité d'un nombre complexe

En particulier $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$.

Nombre complexe conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$

Nombre complexe conjugué, nombre réel et imaginaire pur

Soit z un nombre complexe :

- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$;
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Bibliographie

[1] M Aassila, MM Cavalcanti, and JA Soriano. Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(5) :1581–1602, 2000.

[2] Mohammed Aassila, M.M Cavalcanti, and VN Domingos Cavalcanti. Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 15(2) :155–180, 2002.

[3] Marcelo M Cavalcanti, VN Domingos Cavalcanti, and Mauro L Santos. Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary. *Applied Mathematics and Computation*, 150(2) :439–465, 2004.

[4] MM Cavalcanti, A Guesmia, et al. General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type. *Differential and Integral equations*, 18(5) :583–600, 2005.

[5] Shugen Chai, Yuxia Guo, et al. Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory. *Differential and Integral Equations*, 17(5-6) :669–680, 2004.

[6] Pierre Cornilleau, Serge Nicaise, et al. Energy decay for solutions of the wave equation with general memory boundary conditions. *Differential and Integral Equations*, 22(11/12) :1173–1192, 2009.

[7] Mauro de Lima Santos. Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary. *Electron. J. Differential Equations*, (73) :11, 2001.

[8] Mauro de Lima Santos. Decay rates for solutions of semilinear wave equations with a memory condition at the boundary. *Electronic Journal of Qualitative Theory of*

Differential Equations [electronic only], 2002 :Paper–No, 2002.

[9] Aissa Guesmia. Stabilisation de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire. *Afrika Mathematika*, 10 :14–25, 1999.

[10] Ilhem Hamchi and Salah Eddine Rebiai. Indirect boundary stabilization of a system of schrödinger equations with variable coefficients. *NoDEA : Nonlinear Differential Equations and Applications*, 15(4) :639–653, 2008.

[11] Vilmos Komornik. *Exact controllability and stabilization : the multiplier method*, volume 36. Masson, 1994.

[12] Irena Lasiecka, Roberto Triggiani, et al. Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of schrödinger equations with dirichlet control. *Differential and Integral Equations*, 5(3) :521–535, 1992.

[13] Jacques-Louis Lions, Jacques-Louis Lions, Jacques-Louis Lions, and Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, volume 31. Dunod Paris, 1969.

[14] Elaine Machtyngier and Enrique Zuazua. Stabilization of the schrodinger equation. *Portugaliae Mathematica*, 51(2) :243–256, 1994.

[15] Serge Nicaise and Cristina Pignotti. Stabilization of the wave equation with variable coefficients and boundary condition of memory type. *Asymptotic Analysis*, 50(1, 2) :31–67, 2006.

[16] Serge Nicaise and Salah-eddine Rebiai. Stabilization of the schrödinger equation with a delay term in boundary feedback or internal feedback. *Portugaliae Mathematica*, 68(1) :19, 2011.

[17] John M Noble, R Cipolatti, E Machtyngier, E San Pedro Siqueira, Steve Surace, L Boccardo, T Gallouët, P Marcellini, Bo Zhang, Françoise Demengel, et al. Differential and integral equations. *Differential and integral equations*, 9(1), 1996.