REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENEEIGNEMENT SUPERIEURE

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Mémoire du fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Université Amar Télidji de Laghouat

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Présentée par

MOUSSELMAL Bassaide

PROBLEMES AUX LIMITES NON LINEAIRE

Encadreur : **M. BENABDERRAHMANE Benyattou**

Soutenue le xx Juin 2012

Devant la Commission d'Examen

JURY

M. Wintoun Youcef	MCA : Université de Laghouat	Examinateur
M. NOUIRI Brahim	MCB : Université de Laghouat	Rapporteur
Mme. Boukhatem Yamna	MAA : Université de Laghouat	Examinateur
M. BENABDERRAHMANE Benyattou	Prof : Université de Laghouat	Président
M. Rahmoune Abita	MAB : Université de Laghouat	Examinateur

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu le tout puissant qui m'a donné le courage et de la patience afin d'arriver au terme de ma formation.
En plus, j'adresse mes tous remerciements à mon encadreur monsieur Benabderrahmane Benyattou, Professeur à l'univercité de Laghouat, pour son aide et son efficace, contribution.
En outre, je tiens à remercier du profond de mon cœur tous les membres de l'équipe de Mathématiques appliquées : Mr. Nouiri Brahim, Mr. Rahmoune Abita et Mme Boukhatem Yamna, de leurs précieux aides, sans oublier le directeur du Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques, dont on a réalisé ce travail, Mr. Lagraa Nacereddine.
Mes remerciement sont également adressé aux mes très chers professeurs qui m'ont accompagné de leurs savoirs tout le long de mon cursus universitaire. Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce mémoire.
Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce mémoire.
Enfin, j'adresse mes vifs remerciements au directeur de collège, Abou El Yakdane Brahim, ainsi qu'à tous les collègues de travail.

Table des matières

Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, les notations qu'on a utilisé dans ce travail sont les suivantes :

$\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω.

Γ : La frontière de Ω supposée souvent régulière.

$\Gamma_i(i = \overline{1.2})$: Une partition de Γ.

$mes\ \Gamma_i$: La mesure de *Lebesgue* $(n-1)$ dimensionnelle de Γ_i.

η : La normale unitaire sortante à Γ.

$C^1(\overline{\Omega})$: L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.

$D(\Omega)$: L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.

$D'(\Omega)$: L'espace des distributions sur Ω.

$D'(0T; X)$: L'espace des distributions des fonctions $u : [0, T] \to X$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$: L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.

$(.,.)_X$: Le produit scalaire d'un espace de Hilbert X.

$x_n \rightharpoonup x, (x_n \to x)$: La convergence faible (fort) de la suite (x_n)ver l'élément x.

$\|.\|_X$: La norme de X.

$\|.\|_{L^p(0,T;X)}$: La norme de l'espace de Sobolev $L^p(0, T; X)$.

$\mathcal{L}(X)$: L'espace des applications linéaires et continues de X dans X.

$C(0, T; H)$: L'espace des fonctions continue sur $[0, T]$ dans H.

u', u'' : Les dérivées premières et secondes de u par rapport aux temps.

$\partial_i u$: La dérivée partielle de u par rapport à la i ème composante x_i.

$\mathcal{L}(X, Y)$: L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y.

$|.|$: La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$|.|$: La norme sur l'espace de Sobolev $L^2(\Omega)$.

$d\Gamma$ ou $d\sigma$: La mesure superficielle sur Γ, induite par dx.
$\rangle_{\mathcal{H}}$.

$u.v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$: Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.

$C, C_i, i = 1, 2...$: Des constantes génériques strictement positives.
Principales normes et semi-normes utilisées :
$|f| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$: Norme de $L^2(\Omega)$.
$|f|_1 = \left(\sum_{n=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$: Semi norme de $H^1(\Omega)$.
$\|f\| = \left(|f|^2 + |f|_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$: Norme de $H^1(\Omega)$.
$|f|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(s)\|_X^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}$: Norme de $L^p(0, T; X)$.

Introduction générale

Ce travail concerne essentiellement, l'étude théorique d'un problème aux limites semi-linéaire hyperbolique avec des condition aux limite mixtes Dirichlet-Neumann. Des études analogues ont été considérées par plusieurs auteurs, on cite par exemple : dans [7] J.L. Lions a étudié théoriquement quelques problèmes aux limites semi linéaires hyperboliques avec des conditions aux limites de Dirichlet. Il a démontré l'existence d'une solution en se basant essentiellement sur la méthode de compacité, puis il a démontré l'unicité de la solution en imposant des conditions sur les données. Rahmoune Abita dans [11] a étudié un problème gouverné par les équations de l'élasticité, il a démontré l'existence, l'unicité et la régularité de la solution en utilisant l'approximation de Faedo Galarkin et la méthode de compacité et en négligeant toutes les conditions qui ont été imposées par Lions dans [7].

Le problème considéré dans ce mémoire consiste à chercher une fonction $u = (x,t), x \in \Omega\ , t \in]0,T[$ à valeur réelle solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \mid u \mid^{\rho} u = f, \quad x \in \Omega, t \in]0,T[,$$

$$\begin{cases} a) \ \ u = 0 \ \ sur \ \ \Sigma_1, \\ b) \ \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \ sur \Sigma_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a) \ \ u(x,0) = u_0, \\ b) \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1, \end{cases}$$

avec $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ (régulière) ; $Q =$

$\Omega\times]0,T[.\Gamma_1,\Gamma_2$ est une partition de Γ. On suppose que $mes\ \Gamma_1 > 0$ et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1\times]0,T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2\times]0,T[$, où T est un nombre réel fini. $\rho > -1$ est un entier naturel. u, f désignent le vecteur du déplacement, la densité des forces volumiques, respectivement et u_0, u_1 sont des fonctions données.

Ce travail se décompose en trois chapitres.

Dans le premier, on donne quelques résultats fondamentaux qui concernent essentiellement les espaces de Sobolev et leurs propriétés les plus importantes, ainsi que quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui nous permettent de rendre les étapes des différentes démonstrations plus faciles que possibles.

Dans le deuxième chapitre, on considère un problème aux limites semi linéaire gouverné par les équations des ondes, avec des conditions aux limites mixtes, Dirichlet-Neumann. On démontre que ce problème, sous certaines hypothèses sur les données, est équivalent à un problème variationnel qu'on précisera. En utilisant les techniques de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité, on démontre que ce problème possède au moins une solution faible. Ce chapitre se termine par démontrer l'unicité en se basant sur le Lemme de Gronwall et sur quelques résultats d'analyse fonctionnelle qu'on a cité dans le premier chapitre.

Dans le dernier chapitre, sous certains hypothèses supplémentaires sur les données f, ρ, u_0 et u_1, on démontre que le problème considéré admet une solution unique régulière. Puis, on analyse la question de la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre I

Quelques rappels sur les espaces de Sobolev et leurs propriétés

Résumé :
Dans ce chapitre on présente quelques résultats indispensables d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Banach et les espaces de Hilbert, ainsi que quelque rappels sur les espaces de Sobolev et leurs propriétés les plus importantes qu'on va utiliser dans les chapitres suivants.

Contenu :

1. Topologie faible ;
2. Espaces de Sobolev ;
3. Espaces de Sobolev d'ordre entiers ;
4. Espaces de Hilbert ;
5. Inégalités ;
6. Compléments divers ;
7. Lemmes de Gronwall.

1 Topologie faible

Définition 1 *Soit X un espace normé, X' son dual topologique. On appelle topologie faible sur X et que l'on note $\sigma(X, X')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaire $f \in X'$.*

Définition 2 *Si $x_n \longrightarrow x$ dans $\sigma(X, X')$, on notera $x_n \longrightarrow x$ et on dira que x_n converge faiblement vers x dans X.*

Proposition 1 *Soit X un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de X ; alors*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x), \forall f \in X'.$$

Soit X un espace de Banach, X' son dual, X'' son bidual topologique muni de la norme

$$\| \xi(f) \|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} | \xi(f) | .$$

On a l'injection canonique suivante :

$$J : X \longrightarrow X''.$$

En effet :
Tout élément $x \in X$ définit un élément $J_x \in X''$ par

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est bien une forme linéaire continue sur X' puisque :

$$| J_x(f) | = | f(x) | \leqslant \| x \|_X \| f \|_{X'} .$$

Comme :

$$\| J_x \|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|_{X'} \leqslant 1}} | J_x(f) | = \| x \|_X .$$

Alors :

$$\| J_x \|_{X''} = \| x \|_X ,$$

Définition 3 *L'espace X est dit réflexif, si et seulement si :*

$$J(X) = X''.$$

Théorème 1 *Soit $(X, (.,.))$ un espace de Hilbert. Alors X est réflexif.*

Théorème 2 *Soit X un espace de Banach réflexif ;alors toute suite bornée dans X admet au moins une sous-suite faiblement convergente .*

Corolaire 1 *Soit X un espace de Banach séparable et soit (x_n) une suite bornée dans X'. Alors,* *il existe une sous-suite extraite* (x_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(X, \acute{X})$*. C'est à dire :*

$$\langle x_{n_k}, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in X.$$

Définition 4 *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

Définition 5 *Soit* X *un espace de Banach, on dit que la suite* u_n *converge ver* u *dans l'espace* $L^q(0, T; X)$ *(faible étoile) si :*

$$\int_0^T (u_n(t), g(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), g(t))dt, \forall g \in L^q(0, T; X) : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Et si $u_n \longrightarrow u$ *dans* $D'(0, T, X)$*, donc la limite (faible étoile) de* u_n *est nécessairement* u*.*

Théorème 3 *(Rellich-Kondrachov) Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 < p < \infty$*, alors* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *s'injecte de façon compacte dans* $L^p(\Omega)$ *: de toute suite bornée dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans* $L^p(\Omega)$ *et faiblement dans* $W^{1,p}(\Omega)$*.*
La convergence faible de la sous-suite vient bien sûr de la réflexivité de $W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

2 Espaces de Sobolev

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \| \, . \, \|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.

Définition 6 *Une fonction* $f : [0, T] \longrightarrow X$ *est dite mesurable s'il existe un sous ensemble* $E \subset [0, T]$ *de mesure nulle et une suite* $(f_n), n \in \mathbb{N}$ *de fonctions appartenant à* $D(0, T; X)$ *telles que* $\| f_n(t) - f(t) \|_X \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$ *,pour tout* $t \in [0, T] \backslash E$*.*

Définition 7 *Une fonction* $f : [0, T] \longrightarrow X$ *est dite fortement dérivable dans* $t_0 \in (0, T)$ *s'il existe un élément* $\frac{df}{dt} \in X$ *appelé la dérivée forte def dans* t_0*, tel que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \left\| \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 8 *Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n), n \in \mathbb{N}$ des fonctions appartenant à $D(0, T, X)$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T \| f_n(s) - f(s) \|_X \, ds = 0.$$

Théorème 4 *(Bochner) Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $x \longrightarrow \| f(x) \|_X : [0, T] \longrightarrow R^+$ est intégrable, dans ce cas, on a :*

$$\left\| \int_0^T f(s) ds \right\| \leq \int_0^T \| f(s) \|_X \, ds.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ des fonctions de puissance p-iéme sommable sur Ω pour la mesure $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, et muni de la norme

$$\| v \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(s)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leqslant p < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des (classes des) fonctions essentiellement bornées pour $p = \infty$.
Soit$(X, \| \, . \, \|_X)$ un espace de Banach, on désign par :

$$L^p(0, T; X) = \left\{ v :]0, T[\longrightarrow X \text{ mesurable et telle que} \int_0^T \| v(s) \|_X^p \, ds < \infty, \; 1 \leqslant p < \infty \right\}.$$

$$L^\infty(0, T; X) = \{ v :]0, T[\longrightarrow X \text{ mesurable et telle que } sup\, ess \| v(s) \|_X < \infty \},$$

$$sup\, ess \| v(s) \|_X = inf \{ C > 0 / \| v(t) \|_X \leqslant C ; p.p. \quad t \in (0, T) \}.$$

l'espace normé $L^p(0, T; X), 1 \leq p \leq \infty$ est complet (cf.Brézis[2]).
Naturellement, on a :

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q), \quad Q = \Omega \times]0, t[.$$

Ces espaces sont respectivement munis des normes suivantes :

$$\| v \|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \| v(s) \|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| v \|_{L^\infty(0,T;X)} = sup\, ess \| v(s) \|_X < \infty.$$

Définition 9 *Si on note $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γ induite par la mesure de Lebesgue dx. On définit $L^p(\Gamma), 1 \leqslant p < \infty$ comme l'ensemble des fonctions $f : \Gamma \longrightarrow R$ telles que $| f |^p$ soit intégrable sur Γ. C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\| v \|_{L^p(\Gamma)}= \left(\int_\Gamma |v(x)|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Qui est réflexif si $1 < p < \infty$*. Aussi l'espace* $L^2(\Gamma)$ *muni du produit scalaire :*

$$(u,v)_{L^2(\Gamma)}\Gamma = \int_\Gamma uvd\sigma,$$

est un espace de Hilbert.

Propriétés :

1. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty, L^p(O,T;X)$ est un espace de Banach pour la norme $\| v \|_{L^p(0,T;X)}$ et en particulier, si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)$, alors $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert, avec le produit scalaire.

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

2. Pour $1 \leqslant p < \infty$ et si X est séparable, alors $L^p(0,T;X)$ est aussi séparable ;

3. $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$ avec injection continue, $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant \infty$;

4. $L^p(0,T;X)$ est un espace réflexif pour tout $p : 1 < p < \infty$;

5. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X) \; si \; 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$L^1(0,T;X)' \subset L^\infty(0,T;X).$$

Où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ de façon générale X' désigne le dual topologique de l'espace X ;

6. D'après le théorème de Danfford-Pettis l'espace

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \quad (resp. \; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))$$

est le dual de

$$L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \quad (resp. \; deL^1(0,T;L^2(\Omega))).$$

Et $H^{-1}(\Omega)+L^q(\Omega)$ muni de la structure de dual fort de $H_o^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)$,où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

7. Soit $1\leqslant p\leqslant\infty$. L'espace de Sobolev.

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega), D_iu=\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(\Omega); i=1,2,...,n\right\}.$$

(D_iu est la dérivée au sens des distributions par rapport à la i-ème variable) muni de la norme

$$\parallel v\parallel_{W^{1,p}(\Omega)}=\left(\parallel v\parallel_{L^p(\Omega)}+\parallel\nabla u\parallel_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach séparable réflexif lorsque $(1<p<\infty)$.On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$dans $W^{1,p}(\Omega)$.Grâce aux applications traces,que nous allons voir après, les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$W_0^{1,p}(\Omega)=\{u\in W^{1,p}(\Omega)\diagup D_iu=0 \text{ sur } \Gamma, i=0,1,2,...,n\}.$$

Le dual topologique de cet espace est noté $W^{-1,p'}(\Omega)$ tel que p' est l'exposant conjugué de $p.(i.e.\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$. Dans le cas $p=2$,on note $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega), H_0^1(\Omega)=W_0^{1,2}(\Omega)$ et $H^-1(\Omega)=W^{-1,2}(\Omega)$. Notons que la norme définie sur$H^1(\Omega)$ n'est pas une norme issue d'un produit scalaire, bien que cet espace puisse être très facilement normé(de manière équivalente) de sorte à en faire un Hilbert.

8. Soit $1<p<\infty$. L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$, défini par :

$$W^{1,p}(\Omega)(0,T;X)=\{v:]0,T[\longrightarrow X\text{mesurable et telle que}, v\in L^p(0,T;X)\quad et\quad v'\in L^p(0,T;X)\}$$

L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\parallel v\parallel_{W^{1,p}(0,T;X)}=\left(\parallel v\parallel_{L^p(0,T;X)}+\parallel v'\parallel_{L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 5 *Théorème de Riesz : L'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $(L^p(\Omega))'$, peut être identifié à $L^{p'}(\Omega)$ où $1/p+1/p'=1$ pour autant que $1<p<\infty$. Le résultat est faux si $p=\infty(et\,p'=1)$. On a donc :*

$$(L^p(\Omega))'=L^{p'}(\Omega)\quad si\,1\leqslant p<\infty,$$

$$(L^1(\Omega))'=L^\infty(\Omega),$$

$$(L^\infty(\Omega))'\supsetneqq L^1(\Omega).$$

Plus précisément si $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *avec* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, alors il existe un unique* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tel que :*

$$\langle \varphi; f \rangle = \varphi(f) = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

De plus :

$$\| u \|_{L^{p'}(\Omega)} = \| \varphi \|_{(L^p(\Omega))'} .$$

Définition 10 *Soit* $u, w \in L^1(0,T;X)$*. La fonction* w *s'appelle la dérivée généralisée d'ordre* n *de* u *sur* $(0,T)$ *si*

$$\int_0^T \varphi^n(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Nous écrivons $w = \dot{u}$ *pour* $n = 1$ *et* $w = u^{(n)}$ *pour* $n \geqslant 2$*.*

Théorème 6 *Soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty, X$ *un espace de Banach réflexif et soit* $u \in L^p(0,T;X)$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $u \in W^{1,p}(0,T;X)$;
2. *u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans* $L^p(0,T;X)$ *;*
3. *Il existe* $u_0 \in X$ *et* $g \in L^p(0,T;X)$*, telles que*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds, \ \forall t \in [O,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable *p.p.* sur $(0,T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p. sur $(0,T)$. Par ailleurs, $W^{1,1}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \longrightarrow X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0,T;X)$coïncide avec l'ensemble des fonctions Lipschitziennes $u : [0,T] \longrightarrow X$.

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple aux référence [2].

3 Espace de Sobolev d'ordre entier

L'objet de ce paragraphe est de donner quelques résultats fondamentaux qui concernent les espaces de Sobolev dans différents domaines.

Ce qui nous concerne ici, c'est les espaces de Sobolev relatifs à un ouvert Ω dans le cas suivants : Ω est borné à frontière Γ linéaire par morceau, c'est à dire $\Gamma = \bigcup^{2} \Gamma_j$, où les Γ_j sont les segments ouverts, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, ..., n$ un multi-indice et on définit la dérivée au sens des distributions par :

$$D^\alpha T = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}} T, \alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle,$$

Soit maintenant s un entier positif en bref l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ d'ordre s est défini par

$$H^s(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leqslant s\}.$$

Où les dérivées $D^\alpha v$ dans la définition de $H^s(\Omega)$ sont prises au sens des distributions sur Ω.

4 Quelques propriétés des espaces $H^s(\Omega), s \in \mathbb{N}$

1. On munit $H^s(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leqslant s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \forall u, v \in H^s(\Omega).$$

   La norme associée étant donnée par

$$\| v \|_{H^s(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant s} |D^\alpha v|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall v \in H^s(\Omega).$$

   De plus, il est connu que cet espace est un espace de Hilbert.

2. Pour $s = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $s_1 > s_2$, on a $H^{s_1}(\Omega) \subset H^{s_2}(\Omega)$ avec injection continue.
3. Pour tout $s \geqslant 0, H^s(\Omega)$ est un espace séparable.
4. Pour tout $s \geqslant 0$,nous désignons par $H_0^s(\Omega)$la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$, $H_0^s(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ dans $H^s(\Omega)$, et par $H^{-s}(\Omega)$le dual topologique de$H_0^s(\Omega)$
5. Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^s(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^s(\Omega) = \{v \in H^s(\Omega); D^\alpha v \backslash_\Gamma = 0, |\alpha| \leqslant s - 1\}.$$

6.
$$v \longrightarrow \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha v|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^s(\Omega)$ équivalente à la norme $\| v \|_{H^s(\Omega)}$.

Lemme 1 *L'espace $V \cap L^p(\Omega)$ est séparable.(i.e : il existe un ensemble dénombrable dense)(voir Lions-Magines*[7]*).*

4.1 Quelques propriétés des espaces $H^{-s}(\Omega), s \in \mathbb{N}$

1. $H^{-s}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\| u \|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^s(\Omega), \|v\|_{H^s(\Omega)} \leqslant 1} |(u,v)_{L^2(\Omega)}| \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

2. Alors on a $\| u \|_{H^{-s}(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^2(\Omega)}$

3. Si $s > s'$, alors $H^{-s'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$
4. L'application :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

envoie $H^s(\Omega)$ sur $H^{-s}(\Omega)$est un isomorphisme isométrique(dit canonique) de $H_0^s(\Omega)$ sur $H^{-s}(\Omega)$.
5. Si $T \in H^{-s}(\Omega)$, alors T peut être écrites de la manière(non unique) suivante :

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha f_\alpha \ \textit{où} \ f_\alpha \in L^2(\Omega), m \in \mathbb{N}.$$

5 Espaces de Hilbert

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$.

Définition 11 *Une suite (u_n) de H converge faiblement vers u si pour tout $v \in H$ on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (u_n, v) = (u, v).$$

Il est immédiate que la convergence au sens de la norme $\| \,.\, \|$, ou convergence forte de u_n vers u, entraîne la convergence faible. Mais la réciproque est fausse.

Théorème 7 *Toute suite faiblement convergence d'un Hilbert H est bornée. Réciproquement, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Théorème 8 *Tout l'espace de Hilbert séparable admet une base orthonormale.*

Proposition 2 *L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire (u, v) :*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

est également le produit de dualité entre $u \in D'(\Omega)$ et $v \in D(\Omega)$. On posera

$$|v| = (v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \diagup v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, ..., n \right\}.$$

Muni du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et on note

$$\| \, v \, \|_{H^1(\Omega)} = \left(|v|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on introduit ensuite, $H_0^1(\Omega)$ = adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ = sous-espace de $H^1(\Omega)$, des fonctions «nulles» sur Γ. Puisque (par définition) $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier la dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace des distributions sur Ω.

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega). \end{cases}$$

En fait d'après le théorème de prolongement de Sobolev voir [2].

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \quad si \;\; n \geqslant 3. \end{cases}$$

Théorème 9 *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ, C^1 par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, alors on a la formule de Green suivante :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma uv\nu_i d\Gamma, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Où ν_i désigne le i^{ieme} cosinus directeur de la normale ν à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.
Preuve *: (voir P.A.Ravirat, J.M. Thomas* [10]*).*

6 Inégalités

Proposition 3 *Si $u, v \in L^2(\Omega)$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|(u, v)| \leqslant |u||v|.$$

Lemme 2 *(Inégalité de Young) Si $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Lemme 3 *(Inégalité de Hölder) Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ telle que $p \geqslant 1, \ \ q \geqslant 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et on a :*

$$\| uv \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)} .$$

Si $p = 2, \ q = 2$, c'est l'inégalité de Cauchy- Schwarz

$$\| uv \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^2(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)} .$$

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, alors $uvw \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\| uvw \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)} \| w \|_{L^r(\Omega)} .$$

Lemme 4 *Si $u \in H^s(\Omega)$ et $v \in H^{-s}(\Omega)$, alors $uv \in L^2(\Omega)$, et on a*

$$\| uv \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u \|_{H^s(\Omega)} \| v \|_{H^{-s}(\Omega)} .$$

Lemme 5 *(Inégalité de Fridrichs-Poincaré) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors on a pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}$*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leqslant diam(\Omega) \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)},$$

où

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad et \quad \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci permet de munir $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'une norme équivalente à sa norme usuelle

$$u \longrightarrow \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Preuve(voir Marie-Thérèse, Lacroix-Sonrier)
Lemme (Inégalité de Korn) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière Γ, C^1 par morceaux. Supposons que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ est une partition de Γ et soit V le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$défini par

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) \setminus v = 0 \;\; p.p \; sur \; \Gamma_1 \}$$

Si mes $\Gamma_1 > 0$, alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \geq C \| v \| .$$

Remarque :

$$u \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est une norme sur V équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$.
En effet, si $u \in V$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

alors l'inégalité de Poincaré implique que u est constante dans Ω de trace nulle sur Γ_1, $u = 0$. En utilisant ce résultat, il vient.
Remarque :
Si *mes* $\Gamma_1 > 0$ alors $v \to |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur le sous-espace V, équivalente à la norme canonique $\| \, . \, \|_{H^1(\Omega)}$.
Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecture par exemple aux références [3, 4].

7 Compléments divers

Lemme 6 *Soit X un espace de Banach. Si, voir*[2],

$$f \in L^p(0,T;X) \;\; et \;\; \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X), \;\; (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

alors f est, d'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$, continue de $[0,T] \longrightarrow X$.

Lemme 7 *Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(\Theta)$, $1 < q < \infty$, telles que $\| g_\mu \|_{L^q(\Theta)} \leqslant c, g_\mu \longrightarrow g$ p.p.dans Θ. Alors $g_\mu \longrightarrow g$ dans L^q faible.*

Lemme 8 *(Application linéaire) Soit $(p,q) \in [1,\infty[$ et $1 \leqslant r \leqslant \infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$.Si $B\ : E \times F \longrightarrow G$ est une application bilinéaire continue, alors B induit l'application biliaire continue :*

$$\begin{cases} W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F) \longrightarrow W^{1,r}(0,T;G) \\ \qquad\qquad (u,v) \longrightarrow \mathcal{B}(u,v) \end{cases}$$

On a de plus,pour tout

$$(u,v) \in W^{1,p}(0,T;E) \times W^{1,q}(0,T;F), (\mathcal{B}(u,v))' = \mathcal{B}(u',v) + \mathcal{B}(u,v').$$

Corolaire 2 *L'application*

$$v \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^1_0(\Omega)$ équivalente à la norme $\| \,.\, \|_{H^1(\Omega)}$.

Définition 12 *Une suite (w_n) d'un Hilbert H forme une base de H si elle vérifie les conditions :*

a- Pour tout n, les vecteurs $(w_1, w_2, ..., w_n)$ sont linéairement indépendants.

b- L'espace $\bigcup H_n$ est dense dans H, H_n étant l'espace engendré par les vecteurs $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

$$H_n = \langle \omega_1, ..., \omega_n \rangle \,.$$

Définition 13 *On dit que l'opérateur A, définit sur un espace de Hilbert H est :*

1. *Borné s'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\| A(v) \|_H \leqslant C \| v \|_H \quad \forall v \in H;$$

2. *Coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$(A(v), v) \geqslant \alpha \parallel v \parallel_H^p \quad \forall v \in H,\ 1 < p < \infty;$$

3. *Positive s'il vérifie :*

$$(A(v), v) \geqslant 0 \, \forall v \, \in H, 1 < p < \infty;$$

4. *Monotone dans H s'il vérifie :*

$$\forall u, v \in H : \ (A(u) - A(v), u - v) \geqslant 0 \quad avec \, u \neq v;$$

5. *Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que :*

$$|A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)| \leqslant L|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad pour\ tout \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in H \quad avec\, \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2;$$

6. *Fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que :*

$$(A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > m|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \ \ pour\ tout\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in H \ \ avec \ \ \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

   On peut démontrer que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, alors A est un inversible et A^{-1} est fortement monotone et de Lipschitz.

7. *H-ème continue dans H s'il vérifie la propriété suivante : $\forall u, v, w \in H$ la fonction.*

$$\lambda \mapsto (A(u + \lambda v), w)$$

   est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $2 \leqslant p < \infty$. L'application :*

$$u \in L^p(\Omega) \longrightarrow Au = u \mid u \mid^{p-2} \in L^q(\Omega) \ \ avec \, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   est monotone.

En effet :
Nous avons :

$$(Au, u) = \int_\Omega |u|^{p-2} u^2 dx = \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)}^p . \tag{I.1}$$

Donc

$$| (Au, v) |=| \int_\Omega |u|^{p-2}u.v\, dx |\leqslant \int_\Omega |u|^{p-1} \mid v \mid dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient :

$$| (Au, v) |\leqslant \left(\int_\Omega \mid v \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \mid u \mid^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Par conséquent

$$|(Au, v)| \leqslant\| v \|_{L^p(\Omega)}\| u \|^{p-1}_{L^q(\Omega)} . \tag{I.2}$$

D'autre part, on a :

$$(Au - Av, u - v) = (Au, u) - (Au, v) - (Av, u) + (Av, v) \tag{I.3}$$

En utilisant (I.1),(I.2), de (I.3), il vient :

$$(Au - Av, u - v) \geqslant\| u \|^p_p + \| v \|^p_p - \| v \|_p\| u \|^{p-1}_q - \| u \|_p\| v \|^{p-1}_q . \tag{I.4}$$

De la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$q = \frac{p}{p-1} \leqslant q$$

D'où l'inégalité $(I.4)$, devient :

$$(Au - Av, u - v) \geqslant\| u \|^p_p + \| v \|^p_p - \| v \|_p\| u \|^{p-1}_p - \| u \|_p\| v \|^{p-1}_p$$

$$= \left(\| u \|^{p-1}_p - \| v \|^{p-1}_p\right) (\| u \|_p - \| v \|_p) \geqslant 0; \quad \forall u, v \in L^p(\Omega).$$

Proposition 4 *Soit X un espace de Banach et soit $T : \ X \longrightarrow X'$ un opérateur linéaire tel que*

$$(Tx, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in X.$$

Alors T est continue.

En effet

Soit (x_n) une suite de X avec $x_n \longrightarrow x$ et $Tx_n \longrightarrow f$, on a

$$\langle Tx_n - Ty, x_n - y\rangle \geqslant 0.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\langle f - Ty, x - y\rangle \geqslant 0 \;\; \forall y \in X.$$

Choisissons $y = x + tz$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $z \in X$, on obtient

$$\begin{cases} \langle f - Ty, x - y\rangle = \langle f - Tx - T(tz), -tz\rangle = \langle f - Tx, -tz\rangle + t^2\langle Tz, z\rangle \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \langle Tz, z\rangle t^2 - \langle f - Tx, z\rangle t \geqslant 0 \;\; \forall z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme le polynôme$\langle Tz, z\rangle t^2 - \langle f - Tx, z\rangle t$ est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\langle Tz, z\rangle \geqslant 0$, alors $\Delta = \langle f - Tx, z\rangle^2$ doit être négatif. Par conséquence $f = Tx$, donc T est continue.

8 Lemmes de Gronwall

On présente ici des lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes, en particulier pour établir l'existence, l'unicité et la régularité de la solution.
Dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ses Lemmes.

Lemme 9 *Soient $f, g \in C(0,T;\mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geqslant 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leqslant a + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)\Psi(s)ds \;\; \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$\Psi(t) \leqslant \left(a + \int_0^t f(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \;\; \forall t \in [0,T].$$

Pour le cas particulier $f = 0$, ce Lemme devient :

Corolaire 3 *Soit $g \in (0,T;\mathbb{R})$ telle que $g(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geqslant 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leqslant a + \int_0^t g(s)\Psi(s)ds, \;\; \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$\Psi(t) \leqslant a \; \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right), \;\; \forall t \in [0,T].$$

Lemme 10 *Soient $f, g \in C(0,T;\mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geqslant 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t f(s)\Psi(s)ds + \int_0^t g(s)\Psi^2(s)ds \ \ \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$|\Psi(t)| \leqslant \left(a + \int_0^t f(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \ \ \forall t \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $f = 0$, ce Lemme devient.

Corolaire 4 *Soient $g \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $g(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geqslant 0$.Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t g(s)\Psi^2(s)ds \ \ \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$|\Psi(t)| \leqslant a \ \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \ \ \forall t \in [0,T].$$

9 Résultats de compacité

Théorème 10 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière ; alors l'injection :*

$$Id : \ H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

est compact, et on dit que $H^1(\Omega)$ s'injecte de façon compact dans $L^2(\Omega)$.
Preuve *: (voir H.Brezis[2]).*

Corolaire 5 *(Théorème de Rellich-Kondrahov) Soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$; alors, pour tout $m \geqslant 1$,*

1. *l'injection de $H_0^m(\Omega)$ dans $H_0^{m-1}(\Omega)$ est compact,*
2. *l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compact si Ω possède la propriété de m-prolongement.*

Chapitre II

Existence et unicité de la solution

Résumé :Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites semi linéaire gouverné par les équations semi-linéaire, avec des conditions aux limites mixtes, Dirichlet-Neumann. On démontre que ce problème, sous certaines hypothèses sur les données, est équivalent à un problème variationnel qu'on précisera. En utilisant les techniques de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité, on démontre que ce problème possède au moins une solution faible. Ce chapitre se termine par démontrer l'unicité en se basant sur le Lemme de Gronwall et sur que quelques résultats d'analyse fonctionnelle qu'on a cité dans le premier chapitre.

Contenu :

1 Position du problème et formulation variationnelle

1.1 Position du problème

Le problème considéré, dans ce chapitre, consiste à chercher une fonction $u : \Omega\times]0,T[\to \mathbb{R}$ à valeur réelle solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \mid u \mid^\rho u = f, \quad x \in \Omega, t \in]0,T[, \tag{II.1}$$

$$\begin{cases} a) \;\; u = 0 \;\; sur \;\; \Sigma_1, \\ b) \;\; \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \;\; sur \Sigma_2, \end{cases} \tag{II.2}$$

$$\begin{cases} a) \;\; u(x,0) = u_0, \\ b) \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1. \end{cases} \tag{II.3}$$

Où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

et u_0, u_1 sont des fonctions données et $\rho > -1$ et f donnée dans $\Omega\times]0,T[$.

1.2 Formulation Variationnelle

Dans ce paragraphe on démontre, sous certains hypothèses, que le problème (II.1)-(II.3) est équivalent à un problème variationnel, noté $(P.V)$

Lemme 11 *Sous les hypothèses :*

$$f \in L^2(Q), \tag{II.4}$$

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega) \; ; \; p = \rho + 2, \tag{II.5}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{II.6}$$

Le problème (II.1)-(II.3) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(P.V) : \begin{cases} \textit{Trouver } \; u \in V \cap L^p(\Omega) \; \textit{ tel que} \\ (u'', v) + a(u,v) + (\mid u \mid^\rho u, v) = (f,v), \; \forall v \in V \cap L^p(\Omega) \\ u(x,0) = u_0, \;\; x \in \Omega, \\ u'(x,0) = u_1, x \in \Omega, \end{cases}$$

Où

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \quad sur \quad \Sigma_1\},$$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Démonstration

Soit u une solution du problème (II.1)-(II.3) et soit $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.
En multipliant l'équation (II.1) par v, on trouve :

$$(u'', v) - (\Delta u, v) + (\mid u \mid^\rho u, v) = (f, v). \tag{II.7}$$

Où

$$(\Delta u, v) = \int_\Omega \Delta uv \, dx.$$

En utilisant la formule de Green (Théorème 9), voir chapitre I, pour le terme $(\Delta u, v)$, on obtient : pour tout $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$,

$$(\Delta u, v) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Puisque $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ, on a :

$$(\Delta u, v) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Si on pose $v = 0$ sur Γ_1, de (II.2) il vient

$$(\Delta u, v) = - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \qquad \forall v \in V \cap L^p(\Omega), \tag{II.8}$$

où

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \quad sur \quad \Sigma_1\}.$$

De (II.7),(II.8), il découle :

$$(u'', v) + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (| \, u \, |^\rho \, u, v) = (f, v).$$

Donc :

$$(u'', v) + a(u, v) + (| \, u \, |^\rho \, u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V \cap L^p(\Omega),$$

où :

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Finalement tenant compte des conditions (II.3), on conclut que u est une solution du problème $(P.V)$.

Reste à vérifier l'implication inverse.

Soit $u \in V \cap L^p(\Omega)$ une solution du problème variationnel, on a :

$$(u'', v) + a(u, v) + (| \, u \, |^\rho \, u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

Ou encore :

$$(u'', v) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + (\mid u \mid^{\rho} u, v) = (f, v) \; ; \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, il vient :

$$(u'', v) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} v dx + (\mid u \mid^{\rho} u, v) = (f, v) \; ; \forall v \in V \cap L^p(\Omega). \tag{II.9}$$

Pour $v = \psi \in D(\Omega)$, on conclut :

$$(u'', \psi) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} \psi dx + (\mid u \mid^{\rho} u, \psi) = (f, \psi) \; ; \forall \psi \in D(\Omega).$$

D'où :

$$(u'', \psi) - \int_{\Omega} \Delta u \psi dx + (\mid u \mid^{\rho} u, \psi) = (f, \psi) \; ; \forall \psi \in D(\Omega).$$

Donc :

$$(u'', \psi) - (\Delta u, \psi) + (\mid u \mid^{\rho} u, \psi) = (f, \psi), \qquad \forall \psi \in D(\Omega).$$

D'où l'équation :

$$u'' - \Delta u + \mid u \mid^{\rho} u = f \qquad dans \;\; D(\Omega).$$

Et par conséquent :

$$u'' - \Delta u + \mid u \mid^{\rho} u = f \qquad p.p. \;\; dans \;\; (\Omega).$$

Reste à vérifier la condition (II.2.b).
On revient à (II.9), et puisque $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ, on a :

$$(u'', v) + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} v dx + (\mid u \mid^{\rho} u, v) = (f, v) \; , \forall \, v \in V \cap L^p(\Omega).$$

Comme $v = 0$ sur Γ_1, on déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad sur \quad \Gamma_2.$$

On pose :

$$\parallel u \parallel_1 = (a(u, u))^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est clair que $\| u \|_1$ définie une norme sur V et de plus, on a :

Lemme 12 *$\| u \|_1$ est une norme sur V, équivalente à la norme $\| u \|$.*

Démonstration :

$$a(u,u)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx=\sum_{i=1}^{n}\mid \frac{\partial u}{\partial x_i}\mid_{L^2}\leqslant C'\ \|\ u\ \|\ .$$

Grâce à l'inégalité de Korn, voir Chapitre I, on a :

$$a(u,u)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)}\geqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2(\Omega)}=|Divu|_{L^2(\Omega)}\geqslant C\ \|\ u\ \|\ .$$

Donc :

$$C^{\frac{1}{2}}\ \| u \|\leqslant (a(u,u))^{\frac{1}{2}}\leqslant C'^{\frac{1}{2}}\ \| u \|\ .$$

Remarque 2.1 :
Le problème $(P.V)$ a bien sens.
En effet :
Si $u\mapsto u(t)$ est une fonction de $L^2(0,T;V)$ et si v est un élément de V alors la fonction $t\mapsto (u(t),v)_V$ appartient à $L^2(0,T)$.
Tout d'abord, puisque u est une fonction de $L^2(0,T;V)$, les fonctions $t\mapsto (u(t),v)$ et $t\mapsto a(u(t),v)$ appartiennent à $L^2(0,T)$. Aussi la fonction $t\mapsto (\mid u\mid^{\rho} u(t),v)$ appartient à $L^2(0,T)$ pour tout $v\in V$, car en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\Omega}\mid\ \mid u\mid^{\rho} u(t)v(t)\mid^2\ dx\leqslant\| (u(t))^{2(\rho+1)}\|_{L^2(\Omega)}\| v^2(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant\| (u(t))\|_{L^2(\Omega)}^{2(\rho+1)}\| v(t)\|_{L^2(\Omega)}^{2}\leqslant C.$$

De même, puisque f est une fonction de $L^2(0,T;V)$, la fonction $t\mapsto (f(t),v)$ est dans $L^2(0,T)$, pour tout $v\in V$.
Donc le problème variationnel (P,V) a un sens dans $D'(]0,T[)$.

2 Existence et unicité de la solution

2.1 Existence de la solution

Dans cette partie on montre que le problème (II.1)-(II.3) sous certaines hypothèse, possède au moins une solution variationnelle.

Théorème 2.1 :

Sous les hypothèses :

$$f \in L^2(Q), \tag{II.10}$$

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega),\ p = \rho + 2, \tag{II.11}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{II.12}$$

Alors, le problème (II.1)-(II.3) possède au moins une solution ayant la régularité.

$$u \in L^\infty(0, T; V \cap L^p(\Omega)),\ p = \rho + 2, \tag{II.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)). \tag{II.14}$$

Remarque 2.2 :

Sous les hypothèses (II.10)-(II.12), on a :

Les conditions (II.3.a),(II.3.b) ont un sens.

En effet :

De (II.13),(II.14) et du Lemme 6, voir chapitre I, il résulte en particulier que u est continue de $[0.T] \to L^2(\Omega)$,

donc, (II.3.a) a un sens.

Reste à vérifier que la condition (II.3.b) a un sens :

De l'équation (II.1), on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \Delta u - \mid u \mid^\rho u. \tag{II.15}$$

Comme :

$$\Delta \in \mathcal{L}(V; H^{-1}(\Omega)).$$

En utilisant (II.13), il vient :

$$\Delta u \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

D'autre part de (II.13), il vient :

$$\int_{\Omega} \mid \mid u \mid^{\rho} u \mid^{p'} dx \leqslant \int_{\Omega} \mid u \mid^{(\rho+1)p'} dx = \int_{\Omega} \mid u \mid^{(\rho+1)\frac{p}{p-1}} dx$$

$$= \int_{\Omega} \mid u \mid^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\Omega} \mid u \mid^{p} dx = \parallel u \parallel^{p}_{L^p(\Omega)} \leqslant C.$$

Ce qui implique que :

$$\mid u \mid^{\rho} u \in L^{\infty}(0,T;L^{p^{'}}(\Omega)), \ \ telque \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1.$$

De (II.15), on tire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p^{'}}(\Omega)).$$

D'où, en particulier :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{P^{'}}(\Omega)). \tag{II.16}$$

De (II.14),(II.16) et du Lemme 6,voir chapitre I, on a, en particulier :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ est \ continue \ de \ [0,T] \mapsto H^{-1}(\Omega) + L^{P^{'}}(\Omega).$$

Donc (II.3.b) a un sens .

Démonstration du Théorème 2.1

Le plan de la démonstration est le suivant :

1. Solutions approchées : On construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin .
2. Estimation à priori : On établit sur ces solutions approchées des estimations à priori .
3. Passage à la limite : On passe à la limite , grâce à des propriétés de compacité (Dans les termes non linéaires).
4. Vérification des conditions initiales .

On commence par :

1-Solutions approchées :

On introduit une suite (ω_n) de fonctions ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall i; \omega_i \in V \cap L^P(\Omega)$,
2. $\forall m; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ sont linéairement indépendantes,

3. L'espace$V_m = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m]$engendré par la famille $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$ est dense dans $V \cap L^P(\Omega)$.

Une telle suite existe, d'après la séparabilité de l'espace $V \cap L^P(\Omega)$.
On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution "approchée" du problème dans V_m sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i. \tag{II.17}$$

Les g_{im} étant à déterminer par le système suivant :

$$(u''_m(t), \omega_j) + a(u_m(t), \omega_j) + (\mid u_m(t) \mid^\rho u_m(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j),\ 1 \leqslant j \leqslant m \tag{II.18}$$

et telle que :

$$u_m(0) = u_{0m},\ \ u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\omega_i \to u_0\ \ lorsque\ \ m \to \infty,\ \ dans\ V \cap L^p(\Omega), \tag{II.19}$$

$$u'_m(0) = u_{1m},\ \ u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}\omega_i \to u_1\ ,\ lorsque\ \ m \to \infty\ dans\ L^2(\Omega). \tag{II.20}$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles et puisque $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ sont linéairement indépendants ($\det(\omega_i, \omega_j) \neq 0$ du système (II.18)-(II.20)). On a l'existence d'une solution du système dans un intervalle $[0, t_m]$, où $t_m \in]0, T]$, telle que :

$$u_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m)\ ;\ u'_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m)\ ;\ u''_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Les estimations à priori qui suivent montreront que t_m ne dépend pas de m c'est à dire que $t_m = T$.

2- Estimations à priori :

On multiplie l'équation (II.18) d'indice j par $g'_{jm}(t)$ et l'on somme en j, il vient :

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (\mid u_m(t) \mid^\rho u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)). \tag{II.21}$$

Mais comme :

$$u_m \in L^2(0, t_m; V_m)\ ,\ u'_m \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Alors :

$$a(u_m, u'_m) \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)).$$

Soit la forme bilinéaire B définie par :

$$B : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \longmapsto \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

D'après le Lemme 8, voir chapitre I, on a :

$$a(u_m(t), u_m(t)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \quad \in \; W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) = H^1(0,T; L^2(\Omega)).$$

Comme :

$$a(u'_m(t), u_m(t)) = a(u_m(t), u'_m(t)).$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) = a(u'_m(t), u_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) = 2a(u_m(t), u'_m(t)).$$

Et par conséquent :

$$a(u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_m(t) \|_1^2 . \tag{II.22}$$

En utilisant (II.22), et la formule (II.21), on trouve :

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_m \|_1^2 + (| u_m(t) |^\rho \, u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)). \tag{II.23}$$

On a :

$$\frac{d}{dt} \| u_m(x,t) \|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{d}{dt} \int_\Omega | u_m(x,t) |^p \, dx = \int_\Omega \frac{d}{dt} | u_m(x,t) |^p \, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{d}{dt} \Big(\sum_{i=1}^{n} (u_{im}(x,t))^2\Big)^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2} \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} (u_{im}(x,t))^2\Big)^{\frac{p}{2}-1} \frac{d}{dt} \Big(\sum_{i=1}^{n} (u_{im}(x,t))^2\Big) dx$$

$$= \frac{p}{2} \int_\Omega 2\Big(\sum_{i=1}^{n} (u_{im}(x,t))^2\Big)^{\frac{p-2}{2}} \Big[\sum_{i=1}^{n} (u_{im}(x,t))\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n} (u'_{im}(x,t))\Big] dx$$

$$= p \int_\Omega | u_m |^{p-2} \, u_m . u'_m dx = p \int_\Omega | u_m |^\rho \, u_m . u'_m dx = p \, (| u_m |^\rho \, u_m, u'_m) \;\; ; \; \rho = p-2.$$

Donc :

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt} \| u_m(x,t) \|^p_{L^p(\Omega)} = (| u_m |^\rho \, u_m, u'_m(t)). \tag{II.24}$$

Aussi, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid u'_m(t) \mid^2 = (u''_m(t), u'_m(t)). \tag{II.25}$$

En utilisant (II.23)-(II.25), il résulte :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\mid u'_m(t) \mid^2 + \| u_m(t) \|_1^2] + \frac{1}{p}\frac{d}{dt} \| u_m(x,t) \|_{L^p(\Omega)}^p = (f(t), u'_m(t)). \tag{II.26}$$

D'après le Lemme 12, et en valeur absolue, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\mid u'_m(t) \mid^2 + C_1 \| u_m(t) \|^2] + \frac{1}{p}\frac{d}{dt} \| u_m(x,t) \|_{L^p(\Omega)}^p \leqslant \mid (f(t), u'_m(t)) \mid . \tag{II.27}$$

En intégrant (II.27) sur $(0,t)$, on trouve :

$$\frac{1}{2}[\mid u'_m(t) \mid^2 + C_1 \| u_m(t) \|^2] + \frac{1}{p} \| u_m(t) \|_{L^p(\Omega)}^p$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \mid u_{1m} \mid^2 + \frac{1}{2}C_1 \| u_{0m} \|^2 + \frac{1}{p} \| u_m(0) \|_{L^p(\Omega)}^p + \int_0^t \mid (f(s), u'_m(s)) \mid ds. \tag{II.28}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on conclut :

$$\mid (f(s), u'_m(s)) \mid \leqslant \mid f(s) \mid \mid u'_m(s) \mid \leqslant \frac{1}{2} \mid f(s) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid u'_m(s)) \mid^2 .$$

De (II.28), il découle :

$$\frac{1}{2}\left[\mid u'_m(t) \mid^2 + C_1 \| u_m(t) \|^2\right] + \frac{1}{p} \| u_m(t) \|_{L^p(\Omega)}^p$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \mid u_{1m} \mid^2 + \frac{1}{2}C_1 \| u_{0m} \|^2 + \frac{1}{p} \| u_m(0) \|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mid u'_m(s)) \mid^2 ds.$$

D'après (II.19),(II.20), on a :

$$\frac{1}{2} \mid u_{1m} \mid^2 + \frac{1}{2}C_1 \| u_{0m} \|^2 + \frac{1}{p} \| u_m(0) \|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2}\int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mid u'_m(s) \mid^2 ds$$

$$\leqslant C + \frac{1}{2}\int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mid u'_m(s)) \mid^2 ds.$$

Où C est une constante indépendante de m, alors :

$$\frac{1}{2}[| u'_m(t) |^2 + C_1 \| u_m(t) \|^2] + \frac{1}{p} \| u_m(t) \|^p_{L^p(\Omega)} \leqslant C + \frac{1}{2}\int_0^t | f(s) |^2 \, ds + \frac{1}{2}\int_0^t | u'_m(s)) |^2 \, ds. \tag{II.29}$$

Puisque $f \in L^2(]0,T[\times\Omega)$.
Donc :

$$\int_0^t | f(s) |^2 \, ds \leqslant \quad constante. \tag{II.30}$$

On déduit, en particulier de (II.29) :

$$| u'_m(t) |^2 \leqslant C + \int_0^t | u'_m(s) |^2 \, ds. \tag{II.31}$$

En utilisant le Lemme de Gronwall (corollaire 3), on déduit :

$$| u'_m(t) | \leqslant C'. \tag{II.32}$$

De (II.29),(II.32), on en déduit que :

$$\| u_m(t) \| + \| u_m(t) \|_{L^p(\Omega)} \leqslant \quad C_2, \qquad \text{(Constante indépendante de m).} \tag{II.33}$$

D'où l'indépendance de t_m par rapport à m.
On en déduit que $t_m = T$ et de (II.32),(II.33), on déduit que :

$$\begin{cases} u_m \ \text{ demeure dans un ensemble borné de} L^\infty(0.T; V \cap L^p(\Omega)) \text{ et} \\ u'_m \text{ dans un borné de } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{II.34}$$

3- Passage à la limite :

D'après la proposition 1, voir chapitre I, l'espace $L^\infty(0.T; V \cap L^p(\Omega))$ $(resp\ L^\infty(0.T; L^2(\Omega)))$ est le dual de $L^1(0.T; H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega))$ $(resp\ L^1(0.T; L^2(\Omega)))$.
De (II.34), on peut extraire de (u_m) une sous-suite (u_μ) telle que :

$$u_\mu \to u \ \text{ dans } \ L^\infty(0.T; V \cap L^P(\Omega)) \ \text{ faible étoile.} \tag{II.35}$$

$$u'_\mu \to u' \ \text{ dans } \ L^\infty(0.T; L^2(\Omega)) \ \text{ faible étoile.} \tag{II.36}$$

Par ailleurs, il résulte en particulier de (II.36) que (u_m) est bornée dans $L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$ et (u'_m) dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$,

donc en particulier, on déduit que (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$.
D'après le Théorème 3 de Rellich-Kondrachoff l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte. Ce qui nous permet de conclure que la sous-suite (u_μ) :

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort } \quad p.p. \tag{II.37}$$

Et comme $\mid u_m \mid^\rho u_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega))$, on a :

$$\mid u_\mu \mid^\rho u_\mu \to \omega \text{ dans } L^\infty(0.T;L^{p'}(\Omega)) \text{ faible étoile.} \tag{II.38}$$

On pose : $\Theta = Q; g_\mu = \mid u_\mu \mid^\rho u_\mu,\ \ q = \frac{\rho+2}{\rho+1} = p'$ d'après $(II.37)$, il résulte :

$$g_\mu \to \mid u \mid^\rho u = g \quad p.p \;\; et \; g_\mu \to \omega \; dans \; L^q(\Theta) \text{ faible.}$$

Grâce au résultat du Lemme 7, voir chapitre I, on déduit que :

$$\omega = g = \mid u \mid^\rho u.$$

Et par conséquent :

$$\mid u_\mu \mid^\rho u_\mu \to \mid u \mid^\rho u \;\text{ dans }\; L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)) \text{ faible étoile.} \tag{II.39}$$

De (II.18), on a :

$$(u''_\mu,\omega_j) + a(u_\mu,\omega_j) + (\mid u_\mu \mid^\rho u_\mu,\omega_j) = (f,\omega_j),\ 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{II.40}$$

Mais d'après (II.35),(II.36) :

$$\begin{gathered} a(u_\mu,\omega_j) \to a(u,\omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \;\text{ faible étoile,} \\ (u'_\mu,\omega_j) \to (u',\omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \;\text{ faible étoile.} \end{gathered}$$

Et donc :

$$(u''_\mu,\omega_j) = \frac{d}{dt}(u'_\mu,\omega_j) \to (u'',\omega_j) \text{ dans } D'(0,t). \tag{II.41}$$

Et d'après (II.39) :

$$(\mid u_\mu \mid^\rho u_\mu,\omega_j) \to (\mid u \mid^\rho u,\omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.}$$

On déduit donc de (II.40) que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, \omega_j) + a(u, \omega_j) + (| u |^\rho u, \omega_j) = (f, \omega_j),$$

et cela pour tout $\omega_j \in V_m$; $1 \leqslant j \leqslant m$.
Et d'après la propriété de la densité de V_m dans $V \cap L^P(\Omega)$, on trouve :

$$(u'', v) + a(u, v) + (| u |^\rho u, v) = (f, v) \ , \ \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

D'où il résulte que u satisfait (II.1).

4- Vérification des conditions initiales :
Reste à vérifié les conditions (II.3).
D'après (II.35), on a, en particulier, $u_\mu(0) \to u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ faible.
Or de (II.19) $u_\mu(0) = u_{0m} \to u_0$ dans $V \cap L^p(\Omega)$, donc, on a (II.3.a) :
D'après (II.41), on a :

$$(u''_\mu(t), \omega_j) \to (u''(t), \omega_j) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile.}$$

Donc :

$$(u'_\mu(0), \omega_j) \to (u'(0), \omega_j) \text{ et par conséquent } (u'(0), \omega_j) = (u_1, \omega_j) \ , \ \ \forall j.$$

D'où (II.3.b).

2.2 Unicité de la solution

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la démonstration de l'unicité d'une solution.
Théorème 2.2 :
On se place dans les hypothèses du théorème 2.1 avec $\rho \leqslant \frac{2}{n-2}$, $n \neq 2$ (si $n = 2$ alors ρ fini quelconque), alors la solution u obtenue au théorème 2.1 est unique.
Démonstration :
On fait la démonstration dans le cas $n > 2$.
Soient u, v deux solutions, au sens du théorème 2.1.
On pose $\omega = u - v$, de (II.1)-(II.3), il résulte :

$$\omega'' - \Delta\, \omega + | u |^\rho u - | v |^\rho v = 0, \tag{II.42}$$

$$\omega(0) = 0,\ \omega'(0) = 0, \tag{II.43}$$

$$\omega = 0 \ \ sur \ \ \Sigma_1,\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = 0 \ \ sur \ \ \Sigma_2, \tag{II.44}$$

$$\omega \in L^{\infty}(0, T; V \cap L^{P}(\Omega)), \tag{II.45}$$

$$\omega' \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)). \tag{II.46}$$

Multiplions les deux membres de (II.42) par ω', on obtient :

$$(\omega''(t), \omega'(t)) + a(\omega(t), \omega'(t)) = \int_{\Omega} (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' dx.$$

On sait que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid \omega'(t) \mid^2 = (\omega''(t), \omega'(t)), \\ a((\omega(t), \omega'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(\omega(t), \omega(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2 . \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid \omega'(t) \mid^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2 = \int_{\Omega} (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' dx. \tag{II.47}$$

On a :

$$\mid (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' \mid \leqslant \mid \ \mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u \mid \ \ \mid \omega' \mid .$$

Si on suppose que $\mid u \mid < \mid v \mid$, alors d'après Lions[1], on a :

$$\mid (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' \mid \leqslant \mid \mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u \mid \mid \omega' \mid$$

$$\leqslant \mid v - u \mid (\mid v \mid^{\rho} + \mid v \mid^{\rho} + ... + \mid v \mid^{\rho}) \mid \omega' \mid \leqslant \mid \omega \mid \ \ (\rho + 1) \mid v \mid^{\rho} \mid \omega' \mid$$

$$\leqslant (\rho + 1) \mid v \mid^{\rho} \mid \omega \mid \mid \omega' \mid$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on conclut :

$$\mid \int_{\Omega} (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' dx \mid$$

$$\leqslant \int_{\Omega} \mid (\mid v \mid^{\rho} v - \mid u \mid^{\rho} u)\omega' \mid dx$$

$$\leqslant (\rho+1)\int_\Omega \mid v \mid^\rho \mid \omega \mid \mid \omega' \mid dx$$

$$\leqslant (\rho+1) \mid\mid \mid v \mid^\rho \mid\mid_{L^n(\Omega)} \mid \omega' \mid \ \mid\mid \omega \mid\mid_{L^q(\Omega)} \qquad \text{pour } \frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1$$

$$\leqslant C \mid\mid v \mid\mid^\rho_{L^n(\Omega)} \ \mid\mid \omega \mid\mid \ \mid \omega' \mid .$$

D'après le Théorème de plongement de Sobolev, on a :

$$\mid \int_\Omega (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u)\omega' dx \mid \leqslant C \mid\mid v \mid\mid^\rho \mid\mid \omega \mid\mid \ \mid \omega' \mid . \tag{II.48}$$

Mais comme $v \in L^\infty(0,T; V \cap L^p(\Omega))$, alors :

$$\mid\mid v \mid\mid^\rho \leqslant C.$$

Donc :

$$\mid \int_\Omega (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u)\omega' dx \mid \leqslant C_2 \mid\mid \omega \mid\mid \mid \omega' \mid . \tag{II.49}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il découle de (II.47),(II.49) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mid \omega'(t) \mid^2 + C_1 \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2) \leqslant C_2 \mid\mid \omega \mid\mid \ . \mid \omega' \mid \leqslant \frac{1}{2} C_2 (\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2). \tag{II.50}$$

En intégrant (II.50) entre 0 et t, on aura après utilisation de (II.43) :

$$\frac{1}{2}(\mid \omega'(t) \mid^2 + C_1 \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2) \leqslant \frac{1}{2} C_2 \int_0^t (\mid \omega'(s) \mid^2 + \mid\mid \omega(s) \mid\mid^2) ds,$$

Alors :

$$C_1' \left(\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2\right) \leqslant C_2 \int_0^t (\mid \omega'(s) \mid^2 + \mid\mid \omega(s) \mid\mid^2) ds.$$

Où :

$$C_1' = \min(1, C_1)$$

Ou encore :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant 0 + \int_0^t \frac{C_2}{C_1'} (\mid \omega'(s) \mid^2 + \mid\mid \omega(s) \mid\mid^2) ds.$$

D'après le Lemme de Gronwall, voir chapitre I, on a :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant 0 \ \ \exp\left(\int_0^t \frac{C_2}{C_1'} ds\right) \qquad \forall t \in [0.T].$$

Donc :

$$| \omega'(t) |^2 + || \omega(t) ||^2 \leqslant 0.$$

De l'inégalité suivante :

$$| \omega'(t) |^2 + || \omega(t) ||^2 \geqslant 0,$$

il vient

$$| \omega'(t) |^2 + || \omega(t) ||^2 = 0$$

et puisque

$$| \omega'(t) |^2 \geqslant 0 \;\; et \;\; || \omega(t) ||^2 \geqslant 0,$$

alors :

$$\omega(t) = 0 \qquad \forall\, t \in [0.T].$$

D'où la condition :

$$\omega = 0,$$

et par conséquent, l'unicité de la solution.

Remarque 1 *Pour justifier la conclusion précédente on utilise le procédé suivant :*
Soit $s \in]0, T]$, on introduit les fonctions $\omega_1, \psi :]0, T[\to \mathbb{R}$, définies par :

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s \omega(\sigma) d\sigma, & si\ t \leqslant s \\ 0 & si\ t > s \end{cases}$$

$$\omega_1(t) = \int_0^s \omega(\sigma) d\sigma \text{ de sorte que } \psi(t) = \omega_1(t) - \omega_1(s) \quad si\ t \leqslant s.$$

On prend le produit scalaire des deux membres de (II.42) avec $\psi(t)$ et toutes les intégrations étant maintenant loisibles, on obtient :

$$-\int_0^s (\omega', \psi') dt + \int_0^s a(\omega, \psi) dt = \int_0^s (| v |^\rho v - | u |^\rho u, \psi) dt$$

D'où, comme $\psi'(t) = \omega(t)$ et $\psi(0) = -\omega_1(s)$, on a :

$$-\int_0^s (\omega'(t), \psi'(t)) dt = -\int_0^s (\omega'(t), \omega(t)) dt = -\int_0^s [\int_\Omega \omega'(\sigma)\omega(\sigma) d\sigma] dt$$

$$= -\int_\Omega [\int_0^s \omega(t)\omega'(t) dt] ds = -\int_\Omega [\frac{1}{2}\omega^2(t)]_0^s ds = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\omega(s))^2 ds = -\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2$$

et

$$\int_0^s a(\omega(t),\psi(t))dt = \int_0^s a(\psi'(t),\psi(t))dt = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{d\sigma} \mid\mid \psi(\sigma) \mid\mid_1^2 d\sigma$$
$$= -\frac{1}{2} \mid\mid \psi(0) \mid\mid_1^2 .$$

On en déduit que :

$$-\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 -\frac{1}{2} \mid\mid \psi(0) \mid\mid_1^2 = \int_0^s (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u, \psi(t))dt$$

$$-\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 -\frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid_1^2 = \int_0^s (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u, \psi(t))dt$$

En utilisant (II.48), on en conclut que :

$$\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 +\frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid_1^2 = \int_0^s [\int_\Omega (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u)\psi(t)dt]dt$$

$$\leqslant C\int_0^s \mid\mid \mid v \mid^\rho \mid\mid_{L^n(\Omega)} \mid\mid \omega(t) \mid\mid_{L^2(\Omega)} \mid\mid \psi(t) \mid\mid_{L^q(\Omega)} dt$$

$$\leqslant C\int_0^s \mid\mid v \mid\mid^\rho \mid\mid \omega(t) \mid\mid_{L^2(\Omega)} \mid\mid \psi(t) \mid\mid_{L^q(\Omega)} dt$$

$$\leqslant C_2\int_0^s \mid \omega(t) \mid \mid\mid \psi(t) \mid\mid dt.$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 +\frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid_1^2 \leqslant C_2\int_0^s \mid \omega(t) \mid (\mid\mid \omega_1(t) \mid\mid + \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid)dt$$
$$= C_2\int_0^s \mid \omega(t) \mid \mid\mid \omega_1(t) \mid\mid dt + C_2\int_0^s \mid \omega(t) \mid \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid dt$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve :

$$\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 +\frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid_1^2$$

$$\leqslant C_2\left[\int_0^s \frac{1}{2} \mid \omega(t) \mid^2 dt + \int_0^s \frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(t) \mid\mid^2 dt + \int_0^s \frac{1}{2} \mid \omega(t) \mid^2 dt + \int_0^s \frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid^2 dt\right].$$

Ou encore :

$$\frac{1}{2} \mid \omega(s) \mid^2 +\frac{1}{2} \mid\mid \omega_1(s) \mid\mid_1^2 \leqslant \frac{1}{2}C_2\left[\int_0^s (2 \mid \omega(t) \mid^2 + \mid\mid \omega_1(t) \mid\mid^2)dt\right].$$

Donc :

$$| \omega(s) |^2 + C_1 \| \omega_1(s) \|^2 \leqslant C_2 \int_0^s (2 | \omega(t) |^2 + \| \omega_1(t) \|^2) dt.$$

D'où, il vient :

$$| \omega(s) |^2 + C_1 \| \omega_1(s) \|^2 \leqslant C_2 \int_0^s (2 | \omega(t) |^2 + \| \omega_1(t) \|^2) dt,$$

et par conséquent, on conclut :

$$C_3(| \omega(s) |^2 + \| \omega_1(s) \|^2) \leqslant 2C_2 \int_0^s (| \omega(t) |^2 + \| \omega_1(t) \|^2) dt$$

$$| \omega(s) |^2 + \| \omega_1(s) \|^2 \leqslant 0 + \frac{2C_2}{C_3} \int_0^s (| \omega(t) |^2 + \| \omega_1(t) \|^2) dt,$$

$$\text{où } C_3 = \min(1, C_1).$$

D'après le Lemme de Gronwall, voir chapitre I, on a :

$$| \omega(s) |^2 + \| \omega_1(s) \|^2 = 0.$$

D'où la condition :

$$\omega \equiv 0.$$

Chapitre III

Régularité et dépendance continue de la solution par rapport aux donnés

Résumé :
Dans ce chapitre, sous certaines hypothèses supplémentaires sur les données, On démontre que le problème considéré dans le deuxième chapitre possède une solution forte unique. Puis, on analyse la question de la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Contenu :

1. Régularité de la solution :
2. Dépendance continue de la solution par rapport aux données.

1 Régularité de la solution

Théorème 3.1

On se place dans les conditions du Théorème 2.2 avec en outre

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \tag{III.1}$$

$$u_0 \in V \cap H^2(\Omega), \tag{III.2}$$

$$u_1 \in V, \tag{III.3}$$

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2}, n \neq 2 \; (si\, n = 2, \; \rho \text{ fini quelconque}). \tag{III.4}$$

Il existe alors une solution et une seule du système (II.1)-(II.3) vérifiant :

$$u \in L^{\infty}(0,T;V \cap H^2(\Omega)), \tag{III.5}$$

$$u' \in L^{\infty}(0,T;V), \tag{III.6}$$

$$u'' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{III.7}$$

Démonstration de Théorème 3.1

1.1 Existence

On part des solutions approchées u_m fournies par (II.17)-(II.20) avec cette fois pour ω_j une "base" de l'espace $V \cap H^2(\Omega)$ et avec

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{dans } V \cap H^2(\Omega), \tag{III.8}$$

$$u_{1m} \to u_1 \quad \text{dans } \ V. \tag{III.9}$$

On va établir (étape (i)) une estimation à priori supplémentaire qui montrera l'existence d'une solution avec (III.6),(III.7), puis l'on montrera (III.5) dans l'étape (ii) par utilisation de l'équation (II.18),(Théorème 2.1).

Etape (i) :

On déduit de l'équation (II.18) suivante :

$$(u''_m(t),\omega_j) + a(u_m(t),\omega_j) + (\mid u_m(t) \mid^{\rho} u_m(t),\omega_j) = (f(t),\omega_j),\ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

que

$$(u''_m(0),\omega_j) = (f(0) + \Delta u_{0m} - \mid u_{0m} \mid^{\rho} u_{0m},\omega_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{III.10}$$

D'après (II.10),(III.1) et le Lemme 6, voir chapitre I, on a :

$$f(0) \in L^2(\Omega).$$

D'après (III.8), il vient :

$$\mid \Delta u_{0m} \mid \leqslant C.$$

De (III.4), on trouve :

$$| u_{0m} |^{\rho} u_{0m} \text{ demeure dans un borné de } L^2(\Omega). \tag{III.11}$$

Et d'après (III.11), en multipliant (III.10) par $g''_{jm}(0)$ et sommant en j, il résulte :

$$| u''_m(0) |^2 \leqslant (| f(0) | + | \Delta u_{0m} | + | | u_{0m} |^{\rho} u_{0m} |) | u''_m(0) |,$$

d'où :

$$| u''_m(0) | \leqslant C. \tag{III.12}$$

Dérivons (II.18) en t, il vient

$$(u'''_m(t), \omega_j) + a(u'_m(t), \omega_j) + (\rho + 1)(| u_m(t) |^{\rho} u'_m(t), \omega_j) = (f'(t), \omega_j). \tag{III.13}$$

On multiplie (III.13) par $g''_{jm}(t)$ et on somme en j, il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} | u''_m(t) |^2 + a(u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t)) - (\rho + 1)(| u_m(t) |^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)).$$

On a :

$$\frac{d}{dt} a(u'_m(t), u'_m(t)) = a(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u'_m(t), u''_m(t)) = 2a(u'_m(t), u''_m(t)).$$

Donc :

$$a(u'_m(t), u''_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} || u'_m(t) ||_1^2 .$$

Et par conséquent :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(| u''_m(t) |^2 + || u'_m(t) ||_1^2) = (f'(t), u''_m(t)) - (\rho + 1)(| u_m(t) |^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)). \tag{III.14}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$| (| u_m(t) |^{\rho} u'_m(t), u''_m(t) | \leqslant || \, | u_m(t) |^{\rho} ||_{L^n(\Omega)} || u'_m(t) ||_{L^q(\Omega)} || u''_m(t) ||_{L^2(\Omega)} . \tag{III.15}$$

Où q est donné (comme dans le Théorème de plongement de Sobolev) par :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1.$$

Moyennant (III.4) et (II.34), il résulte :

$$\| \mid u_m(t) \mid^\rho \|_{L^n(\Omega)} \leqslant \| u_m(t) \|^\rho_{L^n(\Omega)} \leqslant \| u_m(t) \|^\rho \leqslant c \text{ (constante)}.$$

De (III.15), il découle :

$$\mid (\mid u_m(t) \mid^\rho u'_m(t), u''_m(t) \mid \leqslant C \parallel u'_m(t) \parallel \mid u''_m(t) \mid . \tag{III.16}$$

En utilisant l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, de (III.16), il vient :

$$\mid (f'(t), u''_m(t)) \mid -(\rho+1)(\mid u_m(t) \mid^\rho u'_m(t), u''_m(t)) \mid \leqslant \mid f'(t) \mid \mid u''_m(t) \mid + C \parallel u'_m(t) \parallel \mid u''_m(t) \mid \tag{III.17}$$

D'après (III.17) et l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} &\mid (f'(t), u''_m(t)) \mid -(\rho+1)(\mid u_m(t) \mid^\rho u'_m(t), u''_m(t)) \mid \\ &\leqslant \frac{1}{2} \mid f'(t) \mid^2 + \frac{1}{2} \mid u''_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C \parallel u'_m(t) \parallel^2 + \frac{1}{2} C \mid u''_m(t) \mid^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid f'(t) \mid^2 + \frac{1}{2}(1+C) \mid u''_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C \parallel u'_m(t) \parallel^2 \\ &= \frac{1}{2} \mid f'(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C_2 \mid u''_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C \parallel u'_m(t) \parallel^2 . \end{aligned}$$

Et d'après (III.14), en valeur absolue, on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mid u''_m(t) \mid^2 + C_1 \parallel u'_m(t) \parallel^2) \leqslant \frac{1}{2} \mid f'(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C_2 \mid u''_m(t) \mid^2 + \frac{1}{2} C \parallel u'_m(t) \parallel^2 . \tag{III.18}$$

Par intégration sur $[0, t]$ de (III.18), on déduit :

$$\frac{1}{2}(\mid u''_m(t) \mid^2 + C_1 \parallel u'_m(t) \parallel^2) - \frac{1}{2} \mid u''_m(0) \mid^2 - \frac{1}{2} C_1 \parallel u'_m(0) \parallel^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^t \mid f'(s) \mid^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t (C_2 \mid u''_m(s) \mid^2 + C \parallel u'_m(s) \parallel^2) ds. \tag{III.19}$$

De (III.19), on a :

$$\mid u''_m(t) \mid^2 + C_1 \parallel u'_m(t) \parallel^2 \leqslant \parallel u''_m(0) \parallel^2 + C_1 \parallel u'_m(0) \parallel^2 + \int_0^t \mid f'(s) \mid^2 ds$$

$$+C_3\int_0^t(|\ u''_m(s)\ |^2+||\ u'_m(s)\ ||^2)ds. \tag{III.20}$$

Où $C_3=\max(C_2,C)$.

D'après (III.1)-(III.3) et (III.20), on a alors :

$$|\ u''_m(t)\ |^2+C_1\ ||\ u'_m(t)\ ||^2\leqslant C_4(1+\int_0^t(|\ u''_m(s)\ |^2+||\ u'_m(s)\ ||^2)ds).$$

$$C'_1\left[|\ u''_m(t)\ |^2+||\ u'_m(t)\ ||^2\right]\leqslant C_4\left[1+\int_0^t(|\ u''_m(s)\ |^2+||\ u'_m(s)\ ||^2)ds\right].$$

$$|\ u''_m(t)\ |^2+||\ u'_m(t)\ ||^2\leqslant\frac{C_4}{C'_1}(1+\int_0^t(|\ u''_m(s)\ |^2+||\ u'_m(s)\ ||^2)ds).$$

Où :

$$C_4=\max(|\ u''_m(0)\ |^2+C_1\ ||\ u'_m(0)\ ||^2+\int_0^t|\ f'(s)\ |^2\ ds,\ C_3).$$

$$C'_1=\min(1,C_1)$$

En utilisant le corollaire de Gronwall, voir chapitre I.

On a :

$$|\ u''_m(t)\ |^2+||\ u'_m(t)\ ||^2\leqslant\ constante.$$

Donc :

$$\begin{cases} u'_m(t)\text{ demeure dans un borné de }L^\infty(0,T;V),\\ u''_m(t)\text{ demeure dans un borné de }L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\end{cases} \tag{III.21}$$

Alors, on peut extraire une sous-suite (u_μ), comme dans la démonstration du Théorème 2.1, et telle que, en outre, u vérifie (III.6),(III.7) :

$$u''_\mu(t)\to u''(t)\text{ dans }L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\ \text{ faible étoile.} \tag{III.22}$$

En utilisant (II.38),(II.39), on obtient :

$$u_\mu\to u\text{ dans }L^2(Q)\ fort\ et\ p.p,$$

$$|\ u_\mu\ |^\rho\ u_\mu(t)\to|\ u\ |^\rho\ u(t)\text{ dans }L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega))\text{ faible étoile.}$$

De (II.18), on tire :

$$(u''_m(t),\omega_j)+a(u_m(t),\omega_j)+(|\ u_m(t)\ |^\rho\ u_m(t),\omega_j)=(f(t),\omega_j),\qquad 1\leqslant j\leqslant m.$$

Ou encore, pour $m = \mu$, on a :

$$(u''_\mu(t), \omega_j) + a(u_\mu(t), \omega_j) + (\mid u_\mu(t) \mid^\rho u_\mu(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j).$$

On passe à la limite et d'après (III.22),(II.35),(II.39) pour j fixé, on a :

$$\begin{cases} a(u''_\mu(t), \omega_j) \to a(u(t), \omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,} \\ (u''_\mu(t), \omega_j) \to (u''(t), \omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile,} \\ (\mid u_\mu \mid^\rho u_\mu, \omega_j) \to (\mid u \mid^\rho u, \omega_j) \text{ dans } L^\infty(0,T) \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

On déduit que :

$$(u''(t), \omega_j) + a(u(t), \omega_j) + (\mid u(t) \mid^\rho u(t), \omega_j) = (f, \omega_j).$$

Puisque V_m est dense dans $V \cap H^2(\Omega)$, il résulte :

$$(u''(t), v) + a(u(t), v) + (\mid u \mid^\rho u, v) = (f, v), \forall v \in V \cap H^2(\Omega).$$

D'où, on conclut que u satisfait (II.1),(III.6),(III.7).
Reste à vérifier (III.5).

$$\text{c.à.d } u \in L^\infty(0,T; V \cap H^2(\Omega)).$$

Etape (ii) :
D'après (II.1), on a :

$$\Delta u = u'' + \mid u \mid^\rho u - f. \tag{III.23}$$

Mais $\mid u \mid^\rho u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.
En utilisant (II.10),(III.1), on obtient :

$$f \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

De sorte que, avec (III.7) $\quad u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, On déduit de (III.23) que :

$$\Delta u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{III.24}$$

Posons

$$\Delta u = h. \tag{III.25}$$

Δ est un isomorphisme de V sur $H^{-1}(\Omega)$, soit G sont inverse ; alors (comme $u \in L^{\infty}(0,T;V)$, on a :

$$u(t) = G \ \ (h(t)) \qquad p.p. \tag{III.26}$$

Mais d'après les Théorèmes de régularité des solutions des équations non linéaires elliptiques, on a :

$$G \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega)). \tag{III.27}$$

D'où (III.5) résulte de (III.26),(III.27).

1.2 Unicité

On opère comme dans la partie formelle de la démonstration du Théorème (2.2). On arrive (avec les notations de cette Démonstration) à :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2) \leqslant C \mid\mid \mid v(t) \mid^{\rho} \mid\mid_{L^n(\Omega)} \times \mid\mid \omega(t) \mid\mid_{L^q(\Omega)} \mid\mid \omega'(t) \mid\mid_{L^2(\Omega)} .$$

Et comme :

$$\mid\mid \mid v(t) \mid^{\rho} \mid\mid_{L^n(\Omega)} \leqslant C'.$$

Et :

$$\mid\mid \omega(t) \mid\mid_{L^q(\Omega)} \leqslant \mid\mid \omega(t) \mid\mid \text{ (d'après le Théorème du plongement de Sobolev).}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2) \leqslant C_2 \mid\mid \omega(t) \mid\mid \ \mid \omega'(t) \mid .$$

En intégrant entre 0 et t et en utilisant (II.43), il vient :

$$\frac{1}{2}(\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2) \leqslant C_2 \int_0^t \mid\mid \omega(t) \mid\mid \ \mid \omega'(t) \mid dt.$$

D'après le corollaire 3 de Gronwall, voir chapitre I, on a :

$$\omega = 0.$$

2 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

On définit l'espace de Banach, suivant :

$$W(Q) = \{\varphi/\varphi \in L^\infty(0,T;V),\ \varphi' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\}.$$

Muni de la norme :

$$\|\ \varphi\ \|_{W(Q)} = \|\ \varphi\ \|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\ \varphi'\ \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\ .$$

On considère l'application π définie par :

$$\pi : L^2(Q) \times V \times L^2(Q) \longrightarrow W(Q), \tag{III.28}$$

$$\{f, u_0, u_1\} \longmapsto u$$

Où u est une solution du problème (II.1) On a le théorème suivant.
Théorème 3.2 Sous les hypothèse des Théorème (2.1),(3.1), l'application π définie en (III.28) est continue.
Démonstration :
Soit $v = \pi(\{g, v_0, v_1\})$, et supposons que $\{g, v_0, v_1\} \to \{f, u_0, u_1\}$ dans $L^2(Q) \times V \times L^2(Q)$.
Alors v demeure dans un borné de $W(Q)$.
On peut alors choisir v dans un borné de $W(Q)$.
On a :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f - \mid u \mid^\rho u, \\ v'' - \Delta v = g - \mid v \mid^\rho v. \end{cases}$$

Soit $\omega = u - v$, on a

$$\omega'' - \Delta\omega = f - g - (\mid u \mid^\rho u - \mid v \mid^\rho v). \tag{III.29}$$

On multiplie les deux membres de (III.29) par ω', et lorsque les intégrales ci-après ont un sens ; on obtient après utilisations de la formule de Green et les conditions (II.2)

$$(\omega''(t), \omega'(t)) + a(\omega(t), \omega'(t)) = (f - g, \omega'(t)) - \int_\Omega (\mid u \mid^\rho u - \mid v \mid^\rho v)\omega' dx. \tag{III.30}$$

Comme dans (II.22),(II.25), on a :

$$\begin{cases}(\omega''(t),\omega'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid \omega'(t) \mid^2, \\ a(\omega(t),\omega'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\omega(t),\omega(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2 .\end{cases}$$

Donc de (III.30), on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2] = (f-g,\omega'(t)) - \int_\Omega (\mid u \mid^\rho u - \mid v \mid^\rho v)\omega' dx. \tag{III.31}$$

En intégrant (III.31) entre 0 et t, il vient :

$$\frac{1}{2}\left[\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2\right] - \frac{1}{2}\left[\mid \omega'(0) \mid^2 + \mid\mid \omega(0) \mid\mid_1^2\right] = \int_0^t ((f-g),\omega')ds$$

$$- \int_0^t \int_\Omega (\mid u \mid^\rho u - \mid v \mid^\rho v)\omega' dx\, ds.$$

Donc, en valeur absolue, on a :

$$\frac{1}{2}[\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid_1^2] \leqslant \frac{1}{2}(\mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid_1^2) + \int_0^t (f-g),\omega')ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (\mid v \mid^\rho v - \mid u \mid^\rho u)\omega' dx\, ds.$$

D'une manière analogue, de (II.50), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Hölder, et (II.48), il vient :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant \mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid^2 + 2\int_0^t \mid (f-g)(s) \mid_{L^2(Q)} \mid \omega'(s) \mid_{L^2(Q)} d(s)$$

$$+2\int_0^t C \mid\mid \omega \mid\mid \mid \omega' \mid ds.$$

D'après l'inégalité de Young, on a :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant \mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid^2 + \int_0^t (\mid (f-g)(s) \mid^2 + \mid \omega'(s) \mid^2)ds$$

$$+C\int_0^t (\mid\mid \omega(s) \mid\mid^2 + \mid \omega'(s) \mid^2)ds.$$

Donc :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant \mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid^2$$

$$+\int_0^t \mid (f-g)(s) \mid^2 ds + \int_0^t (C \mid\mid \omega(s) \mid\mid^2 + (1+C) \mid \omega'(s) \mid^2) ds.$$

Ou encore :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant \mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid^2$$
$$+\int_0^t \mid (f-g)(s) \mid^2 ds + C_2 \int_0^t (\mid \omega'(s) \mid^2 + \mid\mid \omega(s) \mid\mid^2) ds$$

Où :

$$C_2 = (C+1).$$

En utilisant le Lemme de Gronwall, on trouve :

$$\mid \omega'(t) \mid^2 + \mid\mid \omega(t) \mid\mid^2 \leqslant C(u,v) \left(\mid u_1 - v_1 \mid^2 + \mid\mid u_0 - v_0 \mid\mid^2 + \int_0^t \mid (f-g)(s) \mid^2 ds \right)$$

Où $C(u,v)$ est une fonction de u et v, bornée sur les bornées $W(Q)$, donc la fonction π est continue.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a considéré un problème aux limites semi linéaire hyperbolique avec des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann. Sous certaine hypothèses sur les données, en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin et un résultat de compacité considère, on démontre que ce problème possède une solution faible unique. Avec d'autre hypothèses plus fortes sur les données, on démontre que la solution obtenue est assez régulière. A la fin de ce travail, on a analysé la question de la dépendance continue de la solution par rapport aux données, ce qui nous permet d'assurer la stabilité de notre problème.

Résumé :
Dans ce travail, on considère un problème aux limites semi-linéaire hyperbolique. Sous certaines hypothèses sur les données, en se basant sur la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galarkin, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ce travail se termine par une étude sur la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Mots clés : Compacité, Faedo-Galarkin, Inégalité de Cauchy-Schwarz, Inégalité de Hölder, Inégalité de Young, Problème semi linéaire hyperbolique.

Abstract :
In this work, we consider a semi linear hyperbolic boundary value problem. Under some assumptions on data, by using the compactness method and Faedo-Galarkin approximations, we prove the existence and uniqueness of a weak solution. We finished by studying the regularity of the solution and the continuous dependence of the solution with respect to data.

Keywords : Compactness, Faedo-Galarkin, Cauchy-Schwarz's inequality, Hölder's inequality, Young's inequality, Semi linear hyperbolic problem.

Bibliographie

1. B.Benabderrahmane et B.Merouani, Comportement singulier des solutions du système de *Lamé* dans un polyèdre, Rev.Roum. Sci. Tech. -Méc. Appl., Tome44, n°2, (2001), p. 213-239.
2. H.Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson, Paris,(1987).
3. R.Dauthry et J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 3, Paris, Masson, (1985).
4. G.Duvaut, J,L. Lions, Les Inéquations en Mécaniques et en Physique, Dunod, 1972.
5. J,L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod, (1969).
6. J,L. Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol.1, Paris, Dunod, (1968).
7. J,L. Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol.2, Paris, Dunod, (1968).
8. J.Necas, I.Hlavacek, Mathermatical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An introduction, Elsevier, Amsterdam,(1981).
9. M. Sibony, Analyse numérique III,Itérations et approximations, Hermann (1988).
10. P.A. Raviart, J.M.Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, (1988).
11. Rahmoune Abita, Etude théorique d'un problème aux limites non linéaire gouverné par les équation de l'élasticité, Mémoire de magister soutenu le 09/07/2009 à Université A.T. de Laghouat, (2009).