

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

: Filière : Mathématiques

Option analyse fonctionnelle et applications.

PAR : BOUFATAH BASSMA

Thème

**Fonction de Lyapunov et analyse de la stabilité globale
d'un modèle de HIV(SIDA) modifié avec réponse CTL
modèles.**

Devant le jury composé de :

| | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-----------|
| Ahcene Boukehila | Professeur | Université de Laghouat | Président |
| Nawal Abdesselam | Maître de conférences B | Université de Laghouat | Encadreur |
| Muhammed Amine Mostefai | Maître de conférences A | Université de Laghouat | Examineur |

Année Universitaire : 2023-2024

Dédicace

Louange A Dieu Allah L'éternel tout puissant. Qui m'a donné la volonté, la force et le courage pour réaliser ce travail. Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents Khaled et Fatna. Qui ont toujours prié pour moi, et n'ont pas cessé de m'encourager et de me soutenir et qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui, Mes sœurs Ihssane, Amira, douaa, khadidja, mon frère Abderrahmane et mon cher fils Aissa. Mon mari Oussama pour son soutien moral et son encouragement. A tous ceux qui me sont chers, et tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. A vous les lecteurs de ces

lignes

Remerciements

En préambule à ce mémoire parcours j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité , Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études, je remercie mes parents d'être si patients si généreux et tellement merveilleux, ils sont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire, En effet je voudrai remercier mon université mon encadreur et tous ceux que ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire et je dédie cette réussite à mon mari mon fils mes sœurs et mon frère Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous prodigués Merci à tous et à toutes

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة استقرار الانظمة الديناميكية بإستعمال تقنية ليوبونوف لتحقيق التوازن الخالي من الامراض المعدية (السيدا).

الكلمات المفتاحية

تقنية ليوبونوف ، الاستقرار الكلي ، الاستقرار المحلي ، الايدز .

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques en utilisant la technique de lyapunov pour atteindre un équilibre.

Mots clés :

HIV/SIDA , Stabilité Globale , Principe de maximum , Function Lyapunov , stabilité

Abstract

The aim of this work is to study the stability of dynamic systems using the lyapunov technique to achieve disease free equilibrium..

Key words :

HIV/AIDS , Global attractor ,Maximum principale , Liapunov function , stability.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 3 |
| 1 Systèmes dynamiques. | 6 |
| 1.1 Systèmes dynamiques | 6 |
| 1.1.1 Comportement des solutions d'équations différentielles | 7 |
| 1.1.2 Stabilité des points stationnaires des systèmes linéaires | 9 |
| 1.1.3 Stabilité des points stationnaires des systèmes non linéaires | 10 |
| 1.2 Stabilité de 2×2 système | 11 |
| 1.2.1 Système dynamique continues | 13 |
| 1.3 Stabilité au sens de Lyapunov | 16 |
| 1.3.1 Généralités et définition | 16 |
| 1.3.2 Méthode de Lyapunov | 17 |
| 1.3.3 Stabilité des systèmes linéaires | 18 |
| 1.3.4 Opérateurs différentiels | 23 |
| 2 Modèles mathématiques des épidémies | 27 |
| 2.1 Les principaux modèles de l'épidémiologie | 27 |
| 3 Le comportement asymptotique d'un modèle épidémique diffusif (AIDS) | 30 |
| 3.1 Introduction | 30 |
| 3.2 Modèle du système | 31 |
| 3.3 Modèle système dans le cas EDO | 32 |
| 3.3.1 Le numéro de reproduction de base R_0 | 34 |
| 3.4 Stabilité local des équilibres | 35 |

| | |
|---|----|
| 3.4.1 Stabilité globale d'équilibre | 40 |
| Conclusion | 56 |

Notation

Δ : Le laplacien dans \mathbb{R}^m

$\frac{\partial}{\partial \mu}$: la dérivée normale

$L(t)$: la fonction de Lyapunov

Ω : le domaine ouvert de \mathbb{R}^m

$\|f\|$: la norme de f

$\partial\Omega$: la frontière

$\bar{\Omega}$: l'adhérence

$\det(j)$: déterminant de la matrice jacobienne

\mathbb{R}^m : L'ensemble des nombres réels de dimensions m .

∇f : Le gradient de f .

$C(\Omega)$: les fonctions continues à support compact dans Ω .

$C^k(\Omega)$ Les fonctions K fois Continûment différentiables sur Ω entier ≥ 0)

$L^p(\Omega)$: $\{u \text{ mesurable sur } \Omega \mid \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$ $1 \leq p < \infty$

Introduction

Depuis plusieurs décennies, la théorie des systèmes dynamiques est un sujet de recherche vaste et actif qui consiste à étudier des modèles mathématiques qui ont été proposés par des experts créatifs dans plusieurs domaines tels que la physique, la chimie, la biologie, l'économie, etc.

Un système dynamique est écrit comme un système d'équations différentielles où ce système peut être utilisable comme un outil pour analyser l'environnement qui nous entoure et donc l'étude qualitative d'un modèle mathématique d'un phénomène peut être défini comme une méthode efficace utilisable.

pour s'attendre le comportement futur de ce phénomène. Par exemple, en épidémiologie les modèles mathématiques sont utilisés pour analyser et étudier la propagation des maladies infectieuses et donc pour répondre à quelques questions concernant le contrôle de ces épidémies. Dans ce mémoire, on s'intéresse à certaines équations d'évolution dans le temps et dans l'espace d'une épidémie dans une population d'individus divisée en deux groupes.

Le mémoire est divisé en trois parties on expose dans la première partie les notions de base pour étudier le problème (4) :

Dans la seconde partie on donne un Aperçu general sur les maladies infectieuses que seront étudiées en regardant des modèles simples.

La partie essentielle du mémoire se trouve dans le chapitre (3) dans lequel on a détaillé le travail de Yoshihiro Hamaya [8] nous établissons l'existence globale et la limite des solutions d'un certain système de diffusion de réaction avec des conditions aux limites de Neumann homogène. En outre, nous donnons un résultat sur le comportement asymptotique des solutions.

Notre approche est basée sur une fonction de Lyapunov. nous étudions la stabilité

globale et donnons une condition de seuil pour la maladie qui disparaît ou s'étend pour certains modèles épidémiques en fonction du taux de reproduction de base R_0 .

Nous montrons que si $R_0 < 1$ le point d'équilibre libre est globalement asymptotiquement stable, et si $R_0 > 1$, ce point d'équilibre libre est instable et le point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable.

Enfin, nous étudions la stabilité locale des points d'équilibre libre et endémique, où les taux de recrutement sont supposés être des constantes ou des paramètres variables.

Chapitre 1

Systemes dynamiques.

Dans ce chapitre, nous rappelons les systemes dynamiques continus, tels que les equations et les systemes d'equations differentielles. Nous nous interessons particulierement aux points stationnaires et a la stabilite des systemes, qu'ils soient lineaires ou non lineaires et la stabilite au sens de lyapunov.

1.1 Systemes dynamiques

La dynamique est un processus evolutif dans le temps, l'ensemble des equations decrivant cette dynamique est appele un systeme dynamique.

Un systeme dynamique peut etre represente a temps continu ou a temps discret.

- Systeme dynamique continu : Un systeme dynamique continu consiste en un espace X et une famille d'applications a un parametre $\{f^t : X \rightarrow X\}_{t \in \mathbb{R}}$ tel que

$$f^{t+s} = f^t \circ f^s$$

et $f^0 = Id_X$, avec f une fonction continue sur X . La variable t est interpretee comme le temps. Un systeme dynamique continu est dit :

- Autonome : si la fonction f ne depend pas explicitement du temps t .
- Non autonome : si la fonction f depend du temps explicitement.
- Systeme dynamique discret : Soit E un sous ensemble de \mathbb{C} . Un systeme dynamique discret est defini par une application $f : E \rightarrow E$ et une condition initiale

$x_0 \in \mathbb{C}$, comme une séquence d'itérations suivantes :

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

On écrit :

$$\underbrace{f(f \dots (f(x_0)))}_{n \text{ fois}} = f^n(x_0)$$

Notons

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1), \dots$$

On obtient alors la forme générale du système dynamique discret :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

On s'intéresse dans ce chapitre aux systèmes dynamiques continus.

1.1.1 Comportement des solutions d'équations différentielles

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles. Étude de comportement des solutions d'équations différentielles peut s'effectuer selon trois méthodes importantes.

1. La méthode analytique : Cette méthode permet d'obtenir des solutions exactes sous la forme explicite.
2. La méthode numérique : Elle permet de se rapprocher de la solution exacte par des approximations effectuées sur un intervalle de temps borné et pour des conditions initiales données.
3. L'étude qualitative : On utilise cette méthode lorsqu'il n'est pas possible de résoudre l'équation différentielle analytiquement. Elle consiste à étudier les points stationnaires, la stabilité, ...

On va s'intéresser à cette dernière méthode. Considérons maintenant le système différentiel autonome suivant :

On va présenter quelques notions importantes pour cette étude.

Définition 1.1.1 (4) 1. Une trajectoire (ou une orbite) du système différentiel (1.1) est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), y(t))$ qui parcourent le plan (x, y) lorsque t parcourt \mathbb{R} . Autrement dit, une trajectoire est définie par l'ensemble suivant :

$$\{(x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

2. On appelle portrait de phase d'un système différentiel (1.1) l'ensemble de ses trajectoires. En pratique, tracer le portrait de phase de (1.1) c'est tracer suffisamment de trajectoires pour qu'on puisse les imaginer toutes.
3. Soit f une fonction à deux variables de surface S , et k un réel. La courbe d'intersection de la surface S avec un plan d'équation $z = k$ est appelée la courbe de niveau k de la fonction f .
4. On appelle solution périodique du système (1.1) toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) telle qu'il existe un nombre réel $T > 0$, vérifiant

$$x(t + T) = x(t) \text{ et } y(t + T) = y(t)$$

Une solution périodique du système (1.1) correspond à une trajectoire fermée dans le portrait de phase correspondant. Cette trajectoire est dite un cycle.

5. Un champ de vecteurs est défini par l'application :

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

En chaque point $M = (x, y)$ du plan, on associe le vecteur

$$V(M) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

À noter également que si $V(M) \neq (0, 0)$, la trajectoire qui passe par le point M est tangente à $V(M)$ en ce point.

6. Les isoclines sont les ensembles sur lesquels les composantes \bar{X} ou \bar{Y} s'an-

nulent, on distingue deux types d'isoclines :

(a) L'isocline horizontale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f_2(x, y) = 0$. Sur l'isocline horizontale, le champs de vecteurs est horizontal, dirigé vers la droite si $f_1(x, y) > 0$ et vers la gauche si $f_1(x, y) < 0$.

(b) L'isocline verticale est l'ensemble des points (x, y) pour lesquels $f_1(x, y) = 0$. Sur l'isocline verticale, le champs de vecteurs est vertical, dirigé vers le haut si $f_2(x, y) > 0$ et vers le bas si $f_2(x, y) < 0$.

7. Un point stationnaire $M = (x^*, y^*)$ (ou point singulier ou point d'équilibre) du système (1.1) est un point de \mathbb{R}^2 vérifiant

$$f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0.$$

Autrement dit, un point stationnaire est l'intersection d'une isocline verticale avec une isocline horizontale.

Un point stationnaire $M = (x^*, y^*)$ du système (1.1) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $D_f(x^*, y^*)$ ($F = (f_1, f_2)$) associée à (1.1) en M ont la partie réelle non-nulle. Sinon, le point M est dit non-hyperbolique.

Un système différentiel peut admettre aucun, un seul ou plusieurs points stationnaires.

1.1.2 Stabilité des points stationnaires des systèmes linéaires

On considère l'équation différentielle de \mathbb{R}^2 :

$$\dot{X} = AX \tag{1.1}$$

où $X = (x, y) \in \mathbb{R}^k$ et A est une matrice d'ordre 2 à coefficients constants. Le point $(0, 0)$ est toujours un point stationnaire du système (1.2)

Supposons que $\det(A) \neq 0$; $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de la matrice A . Ainsi, $(0, 0)$ est l'unique point stationnaire du système (1.2).

La stabilité du point stationnaire $(0, 0)$ dépend du signe des valeurs propres de

la matrice A .

1. La matrice A admet deux valeurs propres λ_1, λ_2 réelles :
 - Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: l'origine est un noeud instable (répulsif).
 - Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: l'origine est un noeud stable (attractif).
 - Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$: l'origine est un point selle (ou un col). Dans le cas réel, on rappelle que les signes de λ_1 et λ_2 se déduisent des signes de leur somme $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$ et de leur produit $\lambda_1 \times \lambda_2 = \det(A)$.
2. La matrice A admet une valeur propre double λ réelle : l'origine est un noeud instable (resp. stable) lorsque $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$).
3. La matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$).
 - Si $\alpha > 0$, alors l'origine est un foyer instable.
 - Si $\alpha < 0$, alors l'origine est un foyer stable.
 - Si les deux valeurs propres sont purement imaginaires ; $\alpha = 0$, alors l'origine est un centre. Dans le cas complexe, on rappelle que le signe de α se déduit du signe de $\text{tr}(A)$ puisque $2\alpha = \text{tr}(A)$.

La figure 1.1 récapitule les types possibles du système dynamique $\dot{X}(t) = AX(t)$ en fonction des valeurs de $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

- Les axes sont les droites d'équation $\text{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.
- La courbe séparatrice est la parabole d'équation $\text{tr}(A)^2 = 4 \cdot \det(A)$.

1.1.3 Stabilité des points stationnaires des systèmes non linéaires

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\dot{X} = F(X) \tag{1.2}$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et $F(X) = (f_1(X), f_2(X))$ est une fonction vectorielle non linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qu'on suppose de classe \mathbb{C}^1 (pour garantir l'existence et l'unicité des solutions).

Soit $M = (x^*, y^*)$ un point stationnaire du système (1.1.3).

Nous fournissons quelques exemples :

1.2 Stabilité de 2×2 système

On rappelle $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ deux variables et écrit le système suivant,

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ -y' = a_{21}y + a_{22}y, \end{cases} \quad (1.3)$$

coefficient a_{ij} est nombre réelle

$$U = (x, y) \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système comme suit :

$$UU' = Au.$$

Si A n'est pas singulier, que nous assumons toujours, le seul équilibre est $(x, y) = (0, 0)$. Nous allons étudier les propriétés qualitatives de la solution de 1.3; en particulier leur comportement asymptotique comme $t \rightarrow +\infty$ étudier le système

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = y' = a_{21}y + a_{22}y, \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ g(x, y) &= -x = y' = a_{21}y + a_{22}y, \end{aligned}$$

On obtient le point d'équilibre (x^*, y^*) tel que :

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = (0, 0), \\ g(x^*, y^*) = (0, 0), \end{cases}$$

Pour calculer les valeurs propres, on a la matrice jacobienne

$$j(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

La forme normale jordanie d'une matrice non singulière, avec les propriétés qu'il existe une matrice inversible B tel que :

$$BA = jB$$

Dans ce cas, la matrice jordan existe et a les mêmes valeurs propres λ_1, λ_2 comme A .

Si λ_1, λ_2 sont des nombres réel, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Alors on a

$$j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Mais, si $\lambda_1 = \lambda_2$ alors

$$j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où

$$j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

si les valeurs propres sont complexes

$$\lambda = \alpha i \beta$$

Puis

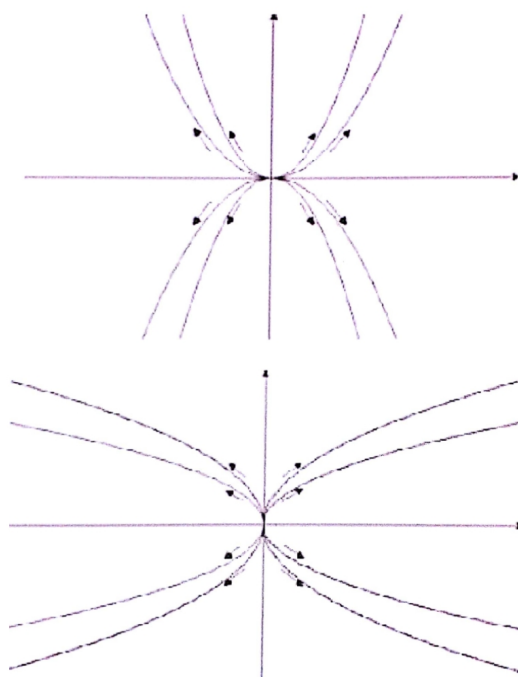
$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

1.2.1 Système dynamique continues

Définition 1.2.1 :

Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et de même signe, la solution $x = 0$ est appelée noeud. Donc λ, μ réels distincts et $\lambda, \mu > 0$. Noeud asymptotiquement instable si $\lambda + \mu < 0$. Toutes les trajectoires (sauf une) ont une direction limite commune "à l'origine"

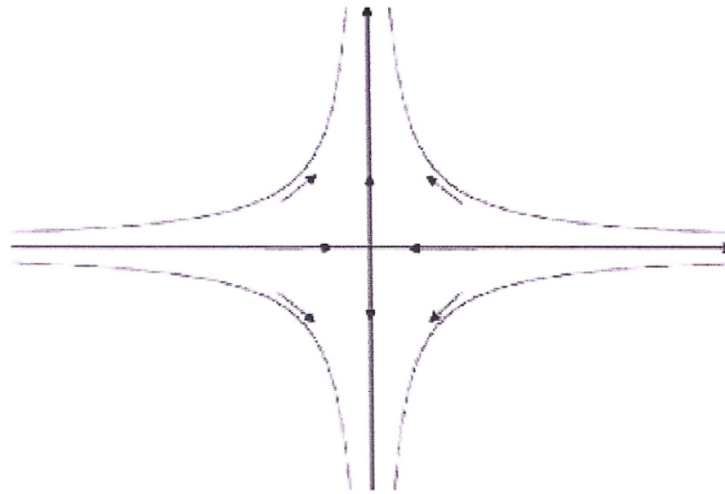


Définition 1.2.2 :

Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.

Donc λ, μ réels distincts et $\lambda, \mu < 0$.

Point-selle (asymptotiquement instable).

**Définition 1.2.3 :**

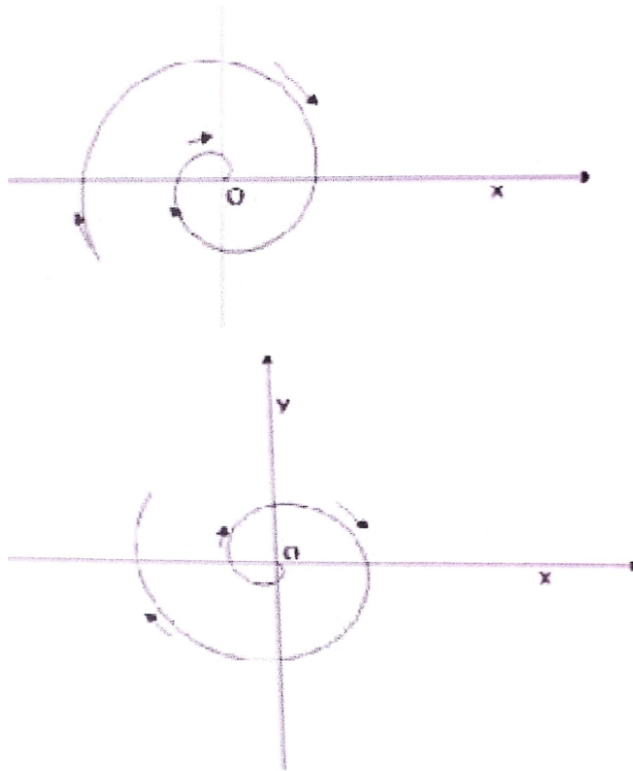
Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec

$$\lambda = \alpha + i\beta \text{ et } \mu = \lambda$$

avec α, β est réels,

$$\alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

Foyer (asymptotiquement stable -resp. instable- si $\alpha < 0$ -resp. $\alpha > 0$).



Définition 1.2.4 :

Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec

$$Re(\lambda_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

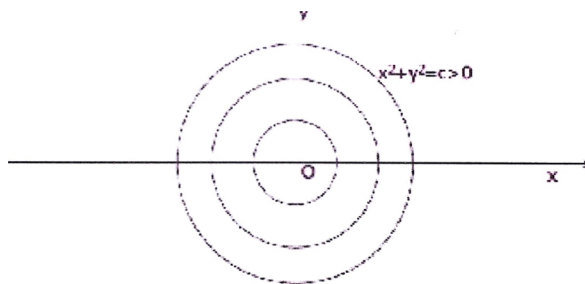
La solution $x = 0$ est appelée centre.

Donc

$$\alpha = i\beta \text{ et } \mu = i\beta$$

avec $\beta = 0$ centre (stable) .

Toutes les trajectoires sont fermées (solution périodique).



1.3 Stabilité au sens de Lyapunov

1.3.1 Généralités et définition

Définition 1.3.1 (*Fonction définie positive*)

Une fonction scalaire $U(x)$ continûment différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si

- 1) $U(0)=0$
- 2) $U(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega, x \neq 0$:

Si (2) est remplacé par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.3.2 :

On dit que x_0 , point d'équilibre du système

$$\dot{x} = f(x)$$

est stable (au sens de Lyapunov)

pour tout ouvert U contenant x_0 , il existe un ouvert V de conditions initiales, que pour tout $y \in V$ et pour $t \geq 0$, on dit :

$$x(t, y) \in U$$

1.3.2 Méthode de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est basée sur le concept d'énergie dans un système physique.

L'énergie totale d'un système se dissipatif (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce Système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 1.3.1 (*Stabilité locale*)

L'état d'équilibre $x_0 = 0$ est stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que

- 1) $U(0)=0$
- 2) $U(x) > 0 \forall x \neq 0, x \in \Omega;$
- 3) $\dot{U}(x) \leq 0 \forall x \neq 0, x \in \Omega$, où \dot{U} est la dérivée de U par rapport au temps et Ω est une région autour de 0.

Si de plus (3) est remplacée par $U(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable. La fonction $U(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction.

Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre.

Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif).

Théorème 1.3.2 (*Stabilité globale*)

L'état d'équilibre x_0 est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que

- 1) $U(0)=0$;
- 2) $U(x) > 0 \forall x \neq 0$;
- 3) $\dot{U}(x) > 0 \forall x \neq 0$,

$$\dot{U} \rightarrow \infty \text{ quand } \|x\| \rightarrow \infty$$

1.3.3 Stabilité des systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positive,

Soit

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Théorème 1.3.3 (*Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires*)

Le système linéaire.

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyapunov

$$A^T p + pA + Q = 0$$

Définition 1.3.3 (*Stabilité asymptotique globale*)

Si le système est asymptotiquement stable quelque soit le vecteur d'état initial $x(t=0)$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable Linéarisation Soit un système autonome $\dot{x} = f(x)$ de classe C^1 et un point d'équilibre x_0 , on appelle système linéarisé en x_0 le système linéaire $\dot{x} = Df(x_0)x$ où $Df(x_0)$ est la dérivée de f en x_0 .

Théorème 1.3.4 (*Poincare-Lyapunov*)

On considère le système, $\dot{x} = f(x)$ et x_0 un point d'équi-libre.

- 1) Si $Df(x_0)$ a toute ses valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors x_0 est asymptotiquement stable.
- 2) Si $Df(x_0)$ a (au moins) une valeur propre à partie réelle strictement positive alors x_0 est instable.

Théorème 1.3.5 (*Routh-Hurwitz Critères de systèmes de deuxième order*)
condition nécessaire et suffisante pour les deux racines du quadratique

$$\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$$

avoir des réels négatifs sont

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0,$$

si $\alpha_2 = 0$ il y a une valeur $\lambda = 0$ tandis que si $\alpha_1 = 0$, et $\alpha_2 > 0$ il y a une paire de lignes d'injuste conjuguées sur le réel axe. il s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique de l'état constant trivial du système linéaire de deuxième ordre (B,2,8) sont donnés par

Théorème 1.3.6

$$\beta < 0, \quad \gamma > 0$$

Où

$$\beta = \text{tr}j^*, \quad \gamma = \det j^*$$

si l'une ou l'autre des inégalités est strictement violé, il est instable et des racines de

$$\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha = 0$$

les racines sont stables dans la quadrant de positive à partir de la bifurcation zéro eigenvalue peut avoir lieu si α_1 -l'axe (positif) est traversé, et bifurcation Hopf si α_2 - l'axe (positif) a été traversé.

Exemple 1.3.1 :

croquis la phase pour le système

$$\dot{U} = V, \quad \dot{V} = -U(1-U) + cV$$

où C est une constante positive les nullculines sont

$$V = 0. \text{ et } V = U(1-U)/c$$

Si $V > 0$, donc $\dot{U} > 0$,

si $V < 0$, donc $\dot{U} < 0$.

Si $V > (1-U)/c$ donc $\dot{V} > 0$; et vice versa. les stables sont à $(0,0)$ et $(1,0)$.

La matrice jacobienne est

$$j(U, V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2U & c \end{pmatrix},$$

à $(0,0)$ on a

$$\gamma = \det j^* = 1, \quad \beta = \text{tr} j^* = c > 0 \text{ et } \delta = \text{disc} j^* = c^2 - 4.$$

Le caractère du point critique dépend de c ; pour $c \geq 2$ c'est un noeud instable alors que pour

$0 < c < 2$; c'est une focus instable. à $(1, 0)$

on a $\Lambda = \det j^* = -1$, de sorte que le point critique est un point de selle le plan de phase est

la bande de squelette.

Lemme 1.3.1 (Barbalat's) supposons

$$f(t) \in C_1(\alpha, \infty) \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha$$

Où $\alpha < \infty$, si \dot{f} est uniformément continu, puis

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$$

Preuve

nous prouvons le résultat par contradiction supposant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) \neq 0$$

Puis $\exists \varepsilon > 0$ et une séquence croissante monotone $\{t_n\}$, tel que

$$t_n \rightarrow \infty \text{ comme } n \rightarrow \infty$$

et $|\dot{f}(t)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $\dot{f}(t)$ est uniformément continue, pour $\varepsilon, \exists \delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|t - t_n| < \delta \text{ comme } |\dot{f}(t) - \dot{f}(t_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc si $t \in [t_n, t_n + \delta]$ puis

$$\begin{aligned} |\dot{f}(t)| &= |\dot{f}(t_n) - (\dot{f}(t_n) - \dot{f}(t))| \\ &\geq |\dot{f}(t_n)| - |(\dot{f}(t_n) - \dot{f}(t))| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

puis depuis $f(t) \in C_1$ on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t) dt - \int_{\alpha}^{t_n} \dot{f}(t) dt \right| &= \int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t) dt \\ &\geq \int_{t_n}^{t_n+\delta} |\dot{f}(t)| dt \\ &\geq \int_{t_n}^{t_n+\delta} \frac{\varepsilon \delta}{2} > 0, \end{aligned}$$

pourtant

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_{\alpha}^{t_n+\delta} \dot{f}(t) dt - \int_{\alpha}^{t_n} \dot{f}(t) dt \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n + \delta) - f(t)| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} f(t_n + \delta) \right| - \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n)| f(t_n + \delta) - \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n)| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n + \delta)| - \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n)| \\ &= \left| \lim_{t \rightarrow \infty} f(t_n + \delta) \right| - \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t_n)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est la contradiction cet effet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0.$$

Dans ce chapitre nous considérons le système diffusif suivant avec condition limite.

Théorème 1.3.7 :

Soit $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergent presque partout vers une fonction mesurable f . On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait

$$|f_n| \leq g \text{ p.p sur } \Omega$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

1.3.4 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point (ou vecteur) de \mathbb{R}^n . On appelle champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n une application $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$. Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs définie par

$$\begin{aligned} \text{grad } u(x) &= \nabla u(x) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) \end{aligned}$$

Pour un champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ non appelle divergence de u la fonction définie par

$$\begin{aligned} \text{div } u(x) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x). \end{aligned}$$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière.

On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteurs $v(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$, $v(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire. On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière f sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v(x)$$

(produit scalaire du vecteur $\nabla f(x)$ avec le vecteur $v(x)$).

Espaces fonctionnelle

On définit l'espace

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |f|^p dx.$$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{mesurable } \exists C \text{ et } |f| \leq C \text{ pp sur } \Omega\}.$$

Muni de la non

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| \\ &= \inf \{C ; |f| \leq C \text{ pp sur } \Omega\}. \end{aligned}$$

On définit les espaces $L^p(0, T, X)$; $1 \leq p < \infty$ comme suite

$$L^p(0, T, X) = \{f : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(0, T, X)} < \infty\},$$

muni de la norme

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(0, T, X)}^p = \int_0^T \|f\|_X^p dt & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^p(0, T, X)}^p = \text{ess}_{t \in (0, T)} \|f\|_X & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

On définit les espaces $L^p_{log}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ comme suite

$$L^p_{log}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{mesurable} ; \exists k \text{ compacte telle que } \int_k |f| dx < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_k |f|^p dx.$$

On définit les espaces

$$L^p_{log}(Q, f(t, x), dt dx) \quad 1 \leq p < \infty$$

comme suite

$$L^p_{\log}(Q, f(t, x), dt dx) = \left\{ f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \int_k |f|^p u dt dx < +\infty ; \text{ pour } k \subset Q \right\}$$

$H^1(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) ; 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx$$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2}^2$$

D'une façon générale pour

$$m \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 1 \leq p < \infty$$

, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suite

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^* : |\alpha| \leq m \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha : |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{m,p}^p = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{x \in \Omega} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m.$$

est la dérivée au sens des distributions. $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$C^K(\Omega)$, $K \in \mathbb{N}$, désigne l'espace des fonctions K fois continûment différentiables sur Ω et on écrit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

$$C_{x,t}^{\mathbb{R}}, k; \mathbb{R} \in \mathbb{N},$$

désigne l'espace des fonctions \mathbb{R} fois continûment différentiable par rapport à x sur Ω et désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable par rapport à t sur Ω . Naturellement on a

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \text{ et } H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Chapitre 2

Modèles mathématiques des épidémies

2.1 Les principaux modèles de l'épidémiologie

Dans les modèles épidémiologie, la population considérées est subdivisées en compartiments.

Le compartiment S est celui des individus susceptibles (individus sains, qui peuvent attraper la maladie).

Le compartiment I est celui des infectés (et infectieux!).

Le compartiment R est celui des remis, i.e des individus guéris, qui sont immunisés (ou qui sont mort!).

Dans certains modèles, on peut avoir d'autre compartiments comme : E.D.M.V. etc Pour simplifier nous supposerons ici que la taille de la population est constante (ce qui est raisonnable si l'épidémie dure un temps relativement court) On désignera par S_t le nombre de susceptibles à l'instant t , I_t le nombre d'Infectés à l'instant t , R_t le nombre de remis à l'instant t , t peut l'être discret ($t = 0, 1, 2, 3, \dots$) ou continu ($t \geq 0$)

Les 3 modèles les plus simples sont

Le modèle SIS

Le modèle SIR

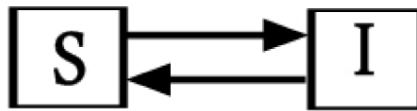
Le modèle SIRS

L'hypothèse d'une taille de population constante implique que Dans le modèle SIS,

$$S_t + I_t = N$$

Dans les modèles SIR et SIRS,

$$S_t + I_t + R_t = N$$



2.2.0.2 Schématiquement

Le modèle SIS :

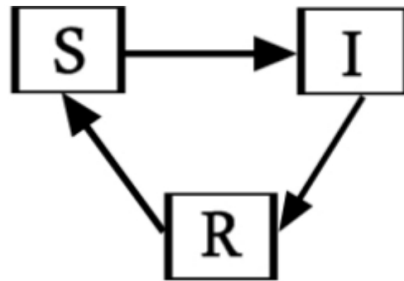
Les susceptibles est devienne infectés et les infectes qui guère ce qui revient susceptibles et donc on a un cycle

Le modelé SIR :

Les susceptibles devienne infectés et les infectes passe dans la case des remis soit sont mort ou soit sont vivant mais immunisé donc il ne quite pas cette case R et revient pas en S



Le modèle SIRS :



On a un cycle les susceptibles sont infectés et les infectés sont remis et les remis l'immunité se perd au bout d'un certain temps et donc redevient susceptibles

Chapitre 3

Le comportement asymptotique d'un modèle épidémique diffusif (AIDS)

3.1 Introduction

L'étude de la dynamique de la transmission du VIH/SIDA a été d'une grande importance est à la fois mathématicien s appliques et biologistes en raison de sa menace univeselle a l'humanité. Les modèles mathématiques sont devenus des outils importants d'analyse la propagation et le contrôle du VIH/SIDA car il fournissent des solutions à court et à long terme

3.2 Modèle du système

dans ce chapitre nous considerons le système diffusif suivant avec conditions limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = D\Delta S + \Lambda - \lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \mu S(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) = D\Delta I + \lambda C(T(t, x)) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \sigma I(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, x) = D\Delta A + \alpha I(t, x) - (d + \mu)A(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial I}{\partial \eta}(t, x) \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$C(T)$: Une fonction croissante de T

$C'(T) \geq 0, (d/dT)(C(T)/T) \leq 0$ pour $T > 0$ et $C(T(t, x)) \in C^1([0, \infty) \times \Omega, [0, \infty))$

Λ : Les taux de recrutement de susceptibles

λ : Les risque sexuel moyen par partenaire (constante positive)

μ : Taux de mort naturel (non SIDA)

S : Le nombre d'individus susceptible

I : Le nombre d'individus infectieux

T : La populations totale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \lambda CT(t) \frac{S(t)W(t)}{T(t, x)} - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \lambda p CT(t) \frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_I + \mu) I(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} = \lambda(1 - p)C(T(t)) \frac{S(t)W(t)}{T(t)} - (\alpha_Y + \mu) Y(t), t \geq 0, \\ \frac{dA(t)}{dt} = \alpha_I I(t) - (d + \mu)A(t), \\ \frac{dZ(t)}{dt} = \alpha_Y Y(t) - \mu Z(t), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

ou $W = I + Y$, et $T = W + S$, qui extension du modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \lambda c S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = -\lambda c S(t) - (v + \mu) I(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = p v I(t) - (d + \mu) A(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{dZ(t)}{dt} = (1 - p) v I(t) - \mu Z(t), \end{array} \right.$$

proposé par Anderson et al. [1] en tant que modèle pour une groupe population d'homosexuel du spread du VIH/SIDA. Sur la main pour type d'équation différentielle partielle Fitzgibbon et Morgan [4] ont montré l'attractivité global de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = d_1 \Delta S(t, x) - aS(t, x)I(t, x), t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) = d_2 \Delta I(t, x) - aS(t, x)I(t, x) - \lambda I(t, x), t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial t}(t, x) = d_3 \Delta R(t, x) + \lambda I(t, x)I(t, x), t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial I}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial R}{\partial \eta}(t, x) = 0, t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = D\Delta S + \Lambda - \lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \mu S(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) = D\Delta I + \lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \sigma I(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta}(t, x) = \frac{\partial I}{\partial \eta}(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Dans le reste de ce document, nous signalons des résultats uniquement pour ce système (3.3).

3.3 Modèle système dans le cas EDO

En l'absence de diffusion, le système proposé se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt}(t, x) = \Lambda - \lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \mu S(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega \\ \frac{dI}{dt}(t, x) = \lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \sigma I(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où

$$T = S + I$$

il résulte du Système (4)

$$\Lambda - \mu S - \sigma I = 0,$$

donc

$$S = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \quad (*)$$

Alors

$$I_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_0 = \frac{\Lambda}{\mu}$$

donc on a l'équilibre libre des maladies E_0

$$E_0(S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$$

Si $I \neq 0$,

$$\lambda CT(t, x) \frac{S(t, x)I(t, x)}{T(t, x)} - \sigma I(t, x) = 0$$

donne

$$\lambda CT(t, x)S(t, x) - \sigma T(t, x) = 0$$

Puis

$$\lambda CT(t, x)S(t, x) - \sigma(S(t, x) + I(t, x)) = 0$$

$$S(t, x)[\lambda CT(t, x) - \sigma] - \sigma I(t, x) = 0$$

De (*) on trouve

$$\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} I \right) (\lambda C(T) - \sigma) - \sigma I = 0$$

$$\frac{\Lambda}{\mu} \lambda C(T) - \frac{\Lambda}{\mu} \sigma - \frac{\sigma I}{\mu} \lambda C(T) + \frac{\sigma^2 I}{\mu} - \sigma I = 0$$

$$I \frac{\frac{\Lambda}{\mu} (\lambda C(T) - \sigma)}{\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \lambda C(T) \right)}$$

$$I = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(\lambda C(T) - \sigma)}{(\mu - \sigma + \lambda C(T))}$$

on substitue dans (*) on trouve

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu - \sigma + \lambda C(T)}$$

Donc on trouve l'équilibre endémique E^*

$$E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu - \sigma + \lambda C(T)} \frac{\Lambda(\lambda C(T) - \sigma)}{\mu(\mu - \sigma + \lambda C(T))} \right)$$

Il faut être S^*, I^* positives

donc

$$\mu - \sigma + \lambda C(T) > 0, \quad \text{et} \quad (\lambda C(T) - \sigma) > 0$$

alors

$$(\lambda C(T) - \sigma) > 0.$$

3.3.1 Le numéro de reproduction de base R_0

$$X' = F(x) - V(x)$$

ou

$$V(x) = \begin{bmatrix} \sigma I \\ -\Lambda + \frac{\lambda C(T)}{T} SI + \mu S \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda C(T)}{T} SI \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices jacobienne de $F(x)$ et $V(x)$ à l'équilibre libre des maladies sont :

$$J_F(E_0) = \begin{array}{ccc} \frac{\lambda C(T)}{\mu} \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & \\ \frac{\Lambda}{\mu} & & \\ 0 & 0 & \end{array} = \begin{array}{cc} F & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{ou } F = \begin{bmatrix} \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\Lambda}{\mu} \\ \frac{\Lambda}{\mu} \end{bmatrix}$$

$$J_F(E_0) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\Lambda}{\mu} & \mu \\ \frac{\Lambda}{\mu} & \mu \end{bmatrix}$$

ou $V = [\sigma]$

$$FV^{-1} = \left[\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \right] [\sigma]^{-1} = \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma}$$

et

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma}$$

3.4 Stabilité local des équilibres

On pose

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\lambda CT(x,t)S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \mu S(t,x), \\ \frac{\lambda CT(x,t)S(t,x)I(t,x)}{T(t,x)} - \sigma I(t,x), \end{cases}$$

La matrice jacobienne

$$j(S, I) = \begin{pmatrix} -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial S} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial I} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{S^2}{T^2} \\ \lambda \frac{\partial C(T)}{\partial S} \frac{SI}{T} + \lambda C(T) \frac{I^2}{T^2} & \lambda \frac{\partial C(T)}{\partial I} \frac{SI}{T} + \lambda C(T) \frac{S^2}{T^2} - \sigma \end{pmatrix},$$

$$\det j(S, I) = \begin{vmatrix} -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial S} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial I} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{S^2}{T^2} \\ \lambda \frac{\partial C(T)}{\partial S} \frac{SI}{T} + \lambda C(T) \frac{I^2}{T^2} & \lambda \frac{\partial C(T)}{\partial I} \frac{SI}{T} + \lambda C(T) \frac{S^2}{T^2} - \sigma \\ -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial S} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{I^2}{T^2} - \mu & -\lambda \frac{\partial C(T)}{\partial I} \frac{SI}{T} - \lambda C(T) \frac{S^2}{T^2} \\ -\mu & -\sigma \end{vmatrix}$$

$$\det j = \lambda C(T) \left(\sigma \frac{I^2}{T^2} - \mu \frac{S^2}{T^2} \right) + \lambda C'(T) \frac{SI}{T} (\sigma - \mu) + \mu \sigma$$

Théorème 3.4.1 (stabilité local de E_0) Si $R_0 < 1$ l'équilibre libre des mala-

dies de point E_0 de système (4) est localement asymptotiquement stable.

Si $R_0 = 1$, E_0 est localement stable.

Si $R_0 > 1$, E_0 est instable

Preuve

$$j = \begin{pmatrix} -\mu & -\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \\ 0 & -\sigma + \lambda\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) \end{pmatrix},$$

$$\det j(E_0) = \mu\sigma - \mu\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)$$

,

$$\text{tr} j(E_0) = \lambda C(T) - (\mu + \sigma),$$

si

$$\begin{cases} \det j(E_0) > 0 \\ \text{tr} j(E_0) < 0 \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) < \sigma \\ \lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) < (\mu + \sigma) \end{cases}$$

donc il faut

$$\lambda \frac{C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma} < 1$$

C- à - d $R_0 < 1$

Théorème 3.4.2 Si $R_0 > 1$ l'équilibre endémique de système 4 est asymptotiquement stable

Prouve

$$(E^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu - \sigma + \lambda C(T)}, \frac{\Lambda(\lambda C(T) - \sigma)}{\sigma(\mu - \sigma + \lambda C(T))} \right)$$

$$\det j(E^*) = \lambda C(T^*) \left(\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \mu \frac{S^{*2}}{T^{*2}} \right) + \lambda C'(T^*) \frac{S^{*2} I^{*2}}{T^{*2}} (\sigma - \mu) + \mu \sigma$$

$$\operatorname{tr} j(E^*) = \lambda C(T^*) \left(\frac{d}{dt} \frac{S^{*2}}{T^{*2}} - \frac{d}{dt} \frac{I^{*2}}{T^{*2}} \right) - (\sigma + \mu)$$

on à

$$T^* = I^* S^*$$

$$T^* = \frac{\Lambda \lambda C'(T^*)}{\sigma(\mu - \sigma) + \lambda C(T^*)}$$

$$\frac{I^*}{T^*} = \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C'(T^*)} \right)$$

$$\frac{S^*}{T^*} = \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)}$$

$$\frac{S^* I^*}{T^{*2}} = \frac{\Lambda(\lambda(T^* - \sigma))}{\lambda C'(T^*)(\mu - \sigma) + \lambda + \lambda C(T^*)}$$

$$\begin{cases} \det J(E^*) < 0 \\ \operatorname{tr} J(E^*) > 0, \end{cases}$$

On remplaçons dans $\det j(E^*)$

$$\det j(E^*) = \lambda C(T^*) \left[\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \frac{S^{*2}}{T^{*2}} \right] + \lambda C'(T^*) \frac{S^* I^*}{T^*} (\sigma - \mu) + \mu \sigma$$

$$\operatorname{tr} j(E^*) = \lambda C'(T^*) \frac{S^{*2} I^{*2}}{T^{*2}} (\sigma - \mu)$$

Il faut avoir

$$\begin{cases} \det j(E^*) < 0 \\ \operatorname{tr} j(E^*) > 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{tr} j(E^*) = \lambda C'(T^*) \frac{S^{*2} I^{*2}}{T^{*2}} (\sigma - \mu) < 0$$

$$\lambda C'(T^*) \frac{S^{*2} I^{*2}}{T^{*2}} < (\sigma - \mu)$$

$$\lambda C'(T^*) \left(\frac{2\sigma}{\lambda C(T^*)} \right) < (\sigma - \mu)$$

$$\lambda C(T^*) > (\sigma - \mu)$$

$$\det j(E^*) = \lambda C(T^*) \left(\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \frac{S^{*2}}{T^{*2}} \right) + \lambda C'(T^*) \frac{S^* I^*}{T^*} (\sigma - \mu) + \mu \sigma > 0$$

donc

$$\lambda C(T^*) \left(\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \frac{S^{*2}}{T^{*2}} \right) + \mu \sigma > -\lambda \frac{C'(T^*)}{T^*} S^* I^* (\sigma - \mu),$$

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{C(T)}{T} \right) \leq 0 \quad \text{Pour } T > 0$$

$$\begin{aligned} \lambda C(T^*) \left(\sigma \frac{I^{*2}}{T^{*2}} - \frac{S^{*2}}{T^{*2}} \right) + \mu\sigma &> \lambda \frac{C'(T^*)}{T^*} S^* I^* (\mu - \sigma) \\ &> -\lambda^2 \frac{S^* I^*}{T^{*2}} C^2(T^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda C(T^*) \left(\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)} \right)^2 - \mu \left(\frac{\sigma}{\lambda C(T^*)} \right)^2 \right) + \mu\sigma \\ + \lambda^2 C^2(T^{*2}) \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda C(T^*)} \right) \left(\frac{\sigma}{\lambda C(T^*)} \right) \\ > 0 \end{aligned}$$

en multiplier par $\frac{\lambda C(T^*)}{\sigma}$

$$(\lambda^2 C^2(T^{*2}) - \sigma)^2 - \mu\sigma - \mu\lambda C(T^*) + \lambda^2 C^2(T^*) - \sigma\lambda C(T^*) > 0,$$

$$(\lambda^2 C^2(T^{*2}) - \sigma)^2 + (\lambda C(T^*) + \mu)(\lambda C(T^*) - \sigma) > 0,$$

$$(\lambda C(T^*) - \sigma)(2\lambda C(T^*) - \sigma + \mu) > 0$$

. Si

$$\begin{cases} \lambda C(T^*) > \sigma, \\ 2\lambda C(T^*) > \sigma - \mu, \end{cases}$$

alors

$$\lambda C(T^*) > \sigma - \mu$$

$$\lambda C(T^*) + \mu > \sigma \implies \lambda C(T^*) > \sigma$$

et comme $\frac{\Lambda}{\mu} > T^*$ alors

$$C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) > C(T^*)$$

et par suite

$$\frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma} > 1$$

3.4.1 Stabilité globale d'équilibre

Lemme 3.4.1 *De eq (3), il s'ensuit que*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I)$$

alors nous avons l'inégalité suivante

$$0 < T(t, x) \leq \max \left\{ \text{sub}T(0, x), \frac{\Lambda}{\mu} \right\} = K, t > 0, x \in \Omega \quad (3.5)$$

où

$$T(0, x) = S_0 + I_0(x)$$

Preuve

1– Pour prouver 1^{ère} inégalité

$$T(0, x) > 0$$

$\forall \varepsilon > 0, T(t, x) > \varepsilon$ pour tout $t_0, x \in \bar{\Omega}$

$$T(x, t) > \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $t_0, x \in \bar{\Omega}$ si

$$t > t_0, T(x, t) > \frac{\varepsilon}{2}$$

Sinon

$$t > t_1, T(x, t) < \frac{\varepsilon}{2}, x \in \bar{\Omega}$$

et

$$t_1 > t_0, x \in \bar{\Omega}, T(x, t) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{cases} t > t_0, x \in \bar{\Omega}, T(x, t) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{si non} \\ t > t_1, x \in \bar{\Omega}, T(x, t) > \frac{\varepsilon}{2} \\ t_1 > t_0, x \in \bar{\Omega}, T(x, t) = \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$w_0(t, x) = T(x, t) - \frac{\varepsilon}{2}$$

alors $w_0(t, x)$ prend un minimum sur $[t_0, t_1] \times \bar{\Omega}$

$$w_0(t, x) < 0, t > t_1, x \in \bar{\Omega}$$

$$w_0(t_1, x_1) = 0$$

$$\sup w_0(t_0, x) > 0, x \in \bar{\Omega}$$

d'où la fonction $w_0(t, x)$ prend un minimum non négative sur $[t_0, t_1] * \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} &= \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I) \\ &= D\Delta w_0 - \mu \left(w_0(t, x) + \frac{\varepsilon}{2} \right) + (\lambda - \alpha I) \end{aligned}$$

on à

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

alors

$$D\Delta w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial t} - \mu w_0 = \mu \frac{\varepsilon}{2} - \Lambda + \alpha I$$

on à

$$T(t, x) = S(t, x) + I(t, x)$$

$$T(t, x) \geq I(t, x)$$

$$\begin{aligned} D\Delta w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial t} - \mu w_0 &= \mu \frac{\varepsilon}{2} - \Lambda + \alpha I \\ &\leq \alpha T + \mu \frac{\varepsilon}{2} - \Lambda \end{aligned}$$

et on à

$$T(t, x) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \leq (\alpha + \mu) \frac{\varepsilon}{2} - \Lambda < 0$$

sur $(t_1, \infty) * \Omega$, en suite il se pose d'une contradiction par le principal maximum (voir [6, 7, 9]).

Effectivement si $x_1 \in \Omega$ puis

$$D\Delta w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial t} - \mu w_0$$

doit être non négatif à (t_1, x_1) contradiction.

On obtient

$$x_1 \in \partial\Omega$$

et

$$w_0(t, x) > w_0(t_1, x_1) \forall (t, x) \in [t_0, t_1] * \Omega$$

et donc

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} \leq 0$$

(t_1, x_1) , cette contradiction voir (9) il est clair que le point initial $T(0, x)$ et

$$T(t, x) > w_0(t_1, x_1) \forall (t, x) \in (0, x) \times \Omega$$

par conséquent nous devons avoir l'inégalité première $K \langle k_0, k_0 \rangle > 0$ nous

$$T(t, x) \leq K_0 [0, \infty] \times \bar{\Omega}$$

si vrai en $K_0 \rightarrow K$ nous trouvons seconde inégalité de lemme.

Si n'y à pas vrai donc il existe

$$(t_2, x_2) \in (0, \infty) \times \bar{\Omega}$$

telle que

$$T(t_2, x_2) > K_0$$

si nous établissons

$$w(t, x) = T(t, x) + K_0$$

donc

$$w(t_2, x_2) > 0$$

et

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} w(0, x) \leq 0 (t_2 > 0)$$

d'où $w(t, x)$ prend un manimale positive sur $[0, t_2] \times \bar{\Omega}$ d'autre partie

$$w(t, x) = T(t, x) - K_0$$

donc

$$T(t, x) = w + K_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu T + (\Lambda - \alpha I) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= D\Delta w - \mu(w + K_0) + (\Lambda - \alpha I) \\ D\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} - \mu w & \\ &= \mu K_0 - \Lambda + \alpha \\ &= \alpha I + (\mu K_0 - \Lambda) \geq 0. \end{aligned}$$

En suite il se pose d'une contradiction par le principal maximum voir [6,7,9]

.

En effet si $x_2 \in \Omega$ puis

$$D\Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} - \mu w$$

doit être négatif à t_2, x . C'est une contradiction, nous sommes ainsi obstés

$$x_2 \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad w(t, x) < w(t_2, x_2)$$

pour tout

$$(t, x) \in [0, t_2] \times \Omega$$

et donc $\frac{\partial w}{\partial \eta} > 0$ à

$$(t_2, x_2)$$

C'est une contradiction à nouveau (voir [9]).

Donc nous devons avoir eq(4).

Théorème 3.4.3 *sous l'hypothèse ci-dessus, si soit $R < 1$ ou $I_0(x) \equiv 0$ Puis pour chaque fonction initiale continue non négative la solution (S, I) de eq (3) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sup I(t, x)] = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sup |S(t, x) - \frac{\Lambda}{\mu}|] = 0$$

Preuve

si

$$\frac{\Lambda}{\mu} \leq T(0, x) \leq K$$

nous pouvons montrer que :

$$T(x, t) \leq \hat{T}(t), \quad t > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (3.6)$$

telle que $\hat{T}(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = -\mu\hat{T} + \Lambda, t > 0, \\ \hat{T}(0) = K, \end{cases}$$

on considère la fonction

$$w_1(t, x) = T(t, x) - \hat{T}(t)$$

sur $[0, \infty] \times \bar{\Omega}$

donc

$$w_1(0, x) = T(0, x) - \hat{T}(0) \leq 0$$

pour $x \in \bar{\Omega}$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \\ &= D\Delta T - \mu T + \Lambda - \alpha I + \mu\hat{T} - \Lambda \\ &= D\Delta w_1 - \mu(w_1 + \hat{T}) - \alpha I + \mu\hat{T}. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$D\Delta w_1 - \frac{\partial w_1}{\partial t} - \mu w_1 = \alpha I \geq 0$$

nous devons avoir 3.6. puisque

$$\hat{T}(t) = \frac{\varepsilon}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + ke^{-\mu t}$$

$$t \rightarrow \infty$$

on à

$$\begin{aligned} T(t, x) &\geq \hat{T}(x) \\ &\geq \frac{\varepsilon}{\mu} \implies T(t, x) \geq \frac{\varepsilon}{\mu} \end{aligned}$$

$$\limsup[\sup T(t, x)] \geq \frac{\varepsilon}{\mu}$$

Par conséquent, pour la discussion du comportement asymptotique de la solution $t \rightarrow \infty$ nous pouvons (sans perte de généralité) supposer que

$$T(t, x) \geq \frac{\varepsilon}{\mu}, t > 0, x \in \bar{\Omega}. \quad (3.7)$$

En suite définie

$$f(t, x) = \frac{I(t, x)}{\sigma}$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{\sigma} \left(D\Delta + \frac{\lambda C(T)}{T} SI - \sigma I \right) = \frac{D}{\sigma} \Delta I \left(\frac{\lambda C(T)}{T} S - 1 \right) I$$

et comme

$$S = T - I$$

alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\sigma} \Delta I + \left(\frac{1}{\sigma} \lambda C(T) - \frac{1}{\sigma T} \lambda C(T) I - 1 \right) I$$

on à

$$R = \frac{\lambda C\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{\sigma} \Delta I + \frac{\lambda C(T)}{\sigma} I - \frac{\lambda C(T)}{\sigma T} I^2 - I \\ &\leq \frac{D}{\sigma} \Delta I + RI - \frac{\lambda C(T)}{\sigma T} I^2 - I \\ &\geq \frac{D}{\sigma} \Delta I - (1 - R)I. \end{aligned}$$

Par suite on trouve l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \geq D\Delta f - \sigma(1 - R)f. \quad (3.8)$$

Donc, on peut voir

$$f(t, x) \rightarrow 0 \text{ comme } t \rightarrow \infty, x \in \Omega.$$

si on pose

$$\begin{aligned} w(t) &:= w(f)(t) \\ &:= \int_{\Omega} f^2(t, x) dx, t \geq 0 \end{aligned}$$

donc $w(t) \geq 0$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= 2 \int_{\Omega} f \frac{\partial f}{\partial t} dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} f(D\Delta f - \sigma(1 - R)f) dx \\ &\leq 2D \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2\sigma(1 - R) \int_{\Omega} f^2 dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

puisque

$$\begin{aligned} &2 \int_{\Omega} f(D\Delta f) dx \\ &2D \int_{\Omega} f(\Delta f) dx = 2D \int_{\Omega} f \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= f \frac{\partial f}{\partial x} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx. \end{aligned}$$

On prendre H_1, H_2 définie par

$$H_1 = 2D, \quad H_2 = 2\sigma(1 - R),$$

alors $H_1 > 0, H_2 > 0$ en raison de notre hypothèse par suite on intégrons l'équation (8) pour $t \geq 0$

$$H_1 \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f(s, x)}{\partial x} \right)^d dx ds + H_2 \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds \leq W(0). \quad (3.10)$$

puisque $W(t) \geq 0$ on trouve

$$H_1 \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f(s, x)}{\partial x} \right)^d dx ds < \frac{W(0)}{H_1}, \quad (3.11)$$

$$H_2 \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds \leq W(0).$$

Donc

ainsi, nous concluons de que (8) et (10)

$$W(t) \in L^1[0, \infty) \text{ et } \frac{\partial W}{\partial t} \in L^1[0, \infty)$$

d'après lemme Barbalateis [5, Lemma 1.2.2.], on obtient

$$W(t) \rightarrow 0, \text{ et } f \rightarrow 0 \text{ sur } L^2, \text{ comme } t \rightarrow \infty$$

c'est

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^2} \text{ comme } t \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

où $\|\cdot\|_{L^2}$ dénote le norme de fonction sur Ω , nous prouvons ensuite que

$$\sup_{x \in \Omega} |f(t, x)| \rightarrow 0, \text{ comme } t \rightarrow \infty \quad (3.13)$$

il faut faire voir [7], nous prenons note du bornitude de $f(t, x)$ par l'équation (6).

Ainsi, nous voyons que l'orbite de l'équation (7), qui est $\{f(t, \cdot)/t \geq 0\}$ est relativement compact assertion 3.13 découle de ce fait.

En effet si l'équation 3.13 c'est pas vrai, alors il existe des séquences

$\{t_n\}_{t_n \rightarrow \infty}$ comme $n \rightarrow \infty$, et $\{x_n\} \subset \bar{\Omega}$ telque

$$\forall \varepsilon, |f(t_n, x_n)| \geq \varepsilon > 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

Nous pouvons supposer que

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ et } f(t_n, x) \rightarrow \tilde{f}(x)$$

uniformement sur $\bar{\Omega}$ pour certains

$$x_0 \in \bar{\Omega}, \text{ et } \tilde{f} \in C(\bar{\Omega}) \text{ comme } n \rightarrow \infty$$

Si nécessaire en prenant une sous séquence de ces en particulier nous obtenons

$$\tilde{f}(x) \geq \varepsilon$$

C'est une contradiction parce que

$$\int \tilde{f}^2 dx = \lim \|f(t_n, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$$

eq (11) donc nous devons avoir eq 3.13 Par la définition de f, on à

$$I(t, x) \rightarrow 0 \text{ comme } t \rightarrow \infty, x \in \bar{\Omega}. \tag{3.14}$$

$x \in \bar{\Omega}$, depuis S est borné

$$\frac{\lambda C(T)}{T} SI \rightarrow 0, x \in \bar{\Omega} \text{ comme } t \rightarrow \infty.$$

Nous prétendons en suite que

$$S \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu} \text{ comme } t \rightarrow \infty, x \in \bar{\Omega}.$$

par 3.14, $\forall \varepsilon > 0, \exists t_2 > 0$

telque

$$I(t, x) < \varepsilon \text{ pour } t \geq t_2, x \in \bar{\Omega}. \quad (3.15)$$

Puis alors il suffit de 3.15 prouver

$$T(t, x) \geq \tilde{T}(t), t \geq t_2, x \in \bar{\Omega}, \quad (3.16)$$

où $\tilde{T}(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt} \tilde{T}(t) = -\mu \tilde{T}(t) + \Lambda - \alpha \varepsilon, t > t_2$$

$$\tilde{T}(t_2) = \tilde{T}_2, 0 < \tilde{T}_2 \geq \sup_{x \in \bar{\Omega}} T(t_2, x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

En suite nous avons

$$\tilde{T}(t) \geq T(t, x) \geq \frac{\Lambda}{\mu}, t \geq t_2, x \in \bar{\Omega}.$$

Puisque

$$\tilde{T}(t) = \tilde{C}e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\alpha \varepsilon}{\mu}, \tilde{C}e^{-\mu t_2} \left(\tilde{T}_2 - \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\alpha \varepsilon}{\mu} \right) \quad (3.17)$$

$$t \rightarrow \infty \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Dans l'inégalité ci-dessus,

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\mu} &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} T(t, x) \right] \leq \lim \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} T(t, x) \right] \\ &\leq \lim \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} S(t, x) \right] + \leq \lim \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} I(t, x) \right] \\ &\leq \lim \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} S(t, x) \right] \\ &\leq \lim \left[\sup_{x \in \bar{\Omega}} T(t, x) \right] \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

a voir 3.16; nous considérons la fonction $w_2(t, x) := \hat{T}(t)$ sur $[t_2, \infty) \times \bar{\Omega}$, en suite

$$w_2(t_2, x) = \hat{T}_2 - T(t_2, x) \leq 0$$

pour $x \in \bar{\Omega}$, et on outre

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= -\mu \hat{T} + \Lambda - \alpha \varepsilon - D\Delta T + \mu T - \Lambda + \alpha I \\ &= -\mu \hat{T} - \alpha \varepsilon - D\Delta \left(\hat{T} - w_2 \right) + \mu \left(\hat{T} - w_2 \right) + \alpha I \\ &= -\mu \hat{T} + D\Delta w_2 + \mu \left(\hat{T} - w_2 \right) + \alpha \left(I - \varepsilon \right), \end{aligned}$$

alors

$$D\Delta w_2 - \frac{\partial w_2}{\partial t} + \mu \hat{T} - \mu w_2 - \mu \hat{T} = \alpha(\varepsilon - I),$$

et donc

$$= D\Delta w_2 - \frac{\partial w_2}{\partial t} - \mu w_2 - \mu \hat{T} = \alpha(\varepsilon - I) \geq 0.$$

Donc par le même raisonnement que celui pour $w_1(t, x)$ on peut voir ça $w_2(t, x) \leq 0$; c'est eq (15) détient ainsi nous avons eq (14) cela a complété le preuve de théorème 01

Théorème 3.4.4 *Sous l'hypothèse ci-dessus, de $R > 1$, et $I_0(x) \neq 0$, puis pour chaque fonction*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sup |I(t, x) - I^*|] = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\sup |S(t, x) - S^*|] = 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Prouve

En ordre de prouver ce théorème, nous avons besoin du corollaire suivant. comme il y'a une preuve complète de ce résultat dans [2], nous omettons

la preuve de cela pour la simplicité.

Si $R_0 > 1$, donc il y'a une unique position équilibre endémique (E^*) avec le système (3.3) est équivalent à

$$T = S + I$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta I - \mu T - \alpha I + \Lambda \tag{3.19}$$

$$d\frac{\partial I}{\partial t} = D\Delta I + \lambda I \left[C(T) - C(T)\frac{I}{T} - \frac{\sigma}{\lambda} \right]. \tag{3.20}$$

Ce système possède le positif équilibre (E^*) où

$$T^* = S^* + I^*$$

nous pouvons récrire eq (3.19) à la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T - \mu(T - T^*) - \alpha(I - I^*) \tag{3.21}$$

car

$$-\mu T^* - \alpha I^* + \Lambda = 0$$

aussi pour eq (3.20) comme

$$\lambda I^* \left[C(T^*) - \frac{I^* C(T^*)}{T^*} \right] = \frac{\sigma}{\lambda}$$

nous avons alors

$$= D\Delta I + \lambda I G(T) - \lambda I \frac{C(T)}{T} (I - I^*) \tag{3.22}$$

où

$$G(T) = [C(T) - C(T^*)] \left(1 - \frac{I^*}{T^*} \right) + I^* C(T) \frac{T - T^*}{TT^*}.$$

où

Puisque $C(T)$ croissante, alors $G(T) > 0$ pour $T > T^*$ et $G(T) < 0$ pour

$T < T^*$. Nous définissons maintenant la fonction $V(t)$ par

$$V(t) = V(T, I)(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \int_{T^*}^T G(s) ds + I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*} \right) dx. \quad (3.23)$$

donc $V(T^*, I^*) = 0$ et $V(T, I) > 0$ pour d'autre admissible (T, I) .

En outre nous le long de la solution eq (3.19) et eq (3.20).

$$V(t) = V(T, I)(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{\alpha} \int_{T^*}^T G(s) ds + I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*} \right) dx. \quad (3.24)$$

donc $V(T^*, I^*) = 0$ et $V(T, I) > 0$ pour d'autre admissible (T, I) .

En outre nous le long de la solution eq (3.19) et eq (3.20).

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} G(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t} - I^* \frac{\partial I / \partial t}{I} \right\} dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\lambda}{\alpha} G(T) (D\Delta T - \mu(T - T^*) - \alpha(I - I^*)) \right. \\ &\quad + \left(D\Delta T + \lambda I G(T) - \lambda I \frac{C(T)}{T} (I - I^*) \right) \\ &\quad \left. - I^* \left(D \frac{\Delta I}{I} + \lambda G(T) - \frac{\lambda C(T)}{T} (I - I^*) \right) \right\} dx \\ &= \frac{\lambda D}{\alpha} \int_{\Omega} \Delta T G(T) dx - \frac{\lambda \mu}{\alpha} \int_{\Omega} G(T) (T - T^*) dx \\ &\quad + D \int_{\Omega} \Delta I \frac{I - I^*}{I} dx - \lambda \int_{\Omega} C(T) \frac{(I - I^*)^2}{T} dx < 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ici

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(T)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ [C(T) - C(T^*)] \left(1 - \frac{I^*}{T^*} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(I^* C(T) \frac{T - T^*}{T T^*} \right) \right\} \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{T^*} \right) \frac{\partial C(T)}{\partial x} + \frac{\partial C(T)}{\partial x} \left\{ I^* \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) \right\} \\ &\quad + I^* C(T) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) \\ &= \left(1 - \frac{I^*}{T^*} \right) C'(T) \frac{\partial T}{\partial x} + I^* C(T) \left(\frac{\partial T / \partial x}{T^2} \right), \quad C(T) = \frac{dC(T)}{dT}. \end{aligned}$$

En remplaçons en (3.25)

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda D}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x} \left\{ \left(1 - \frac{I^*}{T}\right) C'(T) \frac{\partial T}{\partial x} + I^* C(T) \frac{\partial T}{\partial T^2} \right\} \\ &= -\frac{\lambda D}{\alpha} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x} \left(1 - \frac{I^*}{T}\right) C'(T) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx + -\frac{\lambda D I^*}{\alpha} \int_{\Omega} C(T) \frac{\partial T}{\partial T^2} \frac{(\partial T / \partial x)^2}{T^2} dx \end{aligned}$$

si

$$|I(t + t_k, \cdot) - I(t, \cdot)| \leq \delta$$

$0 \leq t \leq \delta$ et k est suffisamment grand pour les régions $[t_k, t_{k+\delta}^*]$,

nous pouvons voir ça

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &< -\beta \\ \int_{t_k}^{t_k+\sigma} \dot{V}(t) dt - \beta \int_{t_k}^{t_k+\delta} dt, \\ V(t_k + \delta) - V(t_k) &< -\beta t, \\ V(t_k + \delta) &\leq V(t_k) - \beta \delta. \end{aligned}$$

intégrer sur $[t_k; t_{k+\delta}]$ les deux côtés de eq (23) et puisque eq (24) vrai pour tout grand nombre k et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = C_1 \geq 0,$$

il contradisent depuis β_0

est positif cela montré que

$$\dot{V}(t) = 0.$$

Alors nous avons

$$W(T, I)(t) = 0.$$

Nous obtenons ainsi $T \rightarrow T^*$ et $I \rightarrow I^*$ par continuité de V et W .

Le comportement asymptotique de S se déclenche maintenant † partir de la cible ci-dessus sur le comportement de T et I le fait que $S = T - I$, alors $S \rightarrow S^*$.

Remarque 3.4.1 Notre résultat en théorème (1) donne le résultat comme

dans l'extension de l'équation de cook ,mais maintenant à l'équation différentielle partielle avec diffusion cependant, le résultat en théoreme (2) ne s'étend donc pas .

C'est seulement applicable au cas $p = 1$ dans l'equ (2) et à la condition de $C(T)$ avec l'équation avec diffusion, c'est notre eq (3) notez que $C(T)$ et généralement supposé être approximativement linéaire pour les petits "T" et qu'elle approche d'un niveau de saturation pour une grand surface "T" (voir, [1; 2]) pour cette raison notre condition de $C(T)$ n'est pas si forte. Si $C(T)$ est une augmentation linéaire alors nous pouvons laisser tomber la condition de $C(T)$, dans le cas $p = 1$, il est malheureusement, il est évident que le SIDA est en fait une maladie progressive et que la plupart des personnes on était infectées continueront a se développer "fullblown" .SIDA dans ce cas les classes Y et Z ne sont plus nécessaires. Pour cas $0 < p < 1$ de type équation différentielle ordinaire . le lecteur est appelé [2, 3]

Conclusion

Notre mémoire est consacrée à l'étude d'un système dynamique non-linéaire qui représente la propagation d'une épidémie .

Ce problème admet une solution unique et positive, de plus nous avons présenté en détail les résultats établis concernant la stabilité locale et globale des équilibres de ce système . Ces résultats affirment qu'une petite perturbation d'un ou plusieurs paramètres d'un système dynamique peut provoquer un changement du nombre de points fixes et de leur stabilité où à un moment donné le comportement des solutions change drastiquement. ce qui confirme que l'étude des systèmes dynamiques est un outil très important qui peut aider les autorités sanitaires à planifier, préparer et prendre les mesures et décisions appropriées pour contrôler les épidémies.

Bibliographie

- [1] R.M. Anderson, G.F. Medley, R.M. May, A.M. Johnson, A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (HIV), the causative agent of AIDS, *IMA J. Math.Med. Biol.* 3(1986)229-263.
- [2] C. Castillo-Chavez, K. Cooke, W. Huang, S.A. Levin, On the role of long incubation periods in the dynamics of acquired immunodeficiency syndrome (AIDS), *J. Math. Biol.* 27 (1989) 373-398.
- [3] W.E. Fitzgibbon, J.J. Morgan, A diffusive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension, *Differential and Integral Equations* 1 (1988) 125-132.
- [4] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [5] Nicholas Ferris Britton, *Essential Mathematical Biology*, MA, Dphil centre mathematical Biology, Department of Mathematical equation Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, UK
- [6] S. Murakami, Y. Hamaya, Global attractivity in an integrodifferential equation with diffusion, *Differential Equations Dyn. Systems* 3 (1995) 35- 42.
- [7] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, New York Inc.,1984.
- [8] Yoshihiro Hamaya, On the asymptotic behavior of a diffusive epidemic model (AIDS), Department of Mathematical Information Science,

Okayama University of Science, 1-1 Ridai-chyo, Okayama 700, Japan,
Received 14 February 1998 ; accepted 25 February 1998

- [9] S. Murakami, Y. Hamaya, Global attractivity in an integrodifferential equation with diffusion, *Differential Equations Dyn. Systems* 3 (1995) 35- 42.