الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière :Mathématiques
Option : analyse mathématique.

Par :

GUELIL Nadjet

Thème

Stabilité de quelques systèmes dynamique en réseau en étoile par l'approche de semi-groupes.

Devant le jury composé de :

RAHMOUNE AbdelAziz	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
KABACHE Aicha	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Examinateur
BOUKHATEM Amina	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

dedicace

Voir ce mémo, qui n'est qu'un résultat de longues années de cursus.

Tout d'abord, les parents qui ont combattu pour que je sois ce que je suis aujound'hui, merci de croire en moi, et de me soutenir dans toutes mes situations & Mon seigneur, pitié soit sur eux comme mon petit protégé »."

A ma chère petite famille, mon grand-père « Belkhir » , et ma grand-mère « Halima », ansi que mes oncles et tantes, je prie Dieu de vous accorder la santé et le bien-être.

A mes collègues avec qui j'ai partagé les moments les plus précieux à mon parcours d'études « BOUDERBALA Khaoula ,DEHBI Louiza, ,Rbaiha ,Hayet Noura , Bouchra ,Chaima , ... et d'autres, je vous remercie pour tout et la grâce de votre compagnie.

Aux enseignants qui ont veillé sur nous pour atteindre ce niveau, merci pour le soutien que vous nous avez donné.

Remerciement

Nous rendons grâce à Dieu de nous avoir donné la force, la patience, le courage et la volonté pour achever ce travail.

Nous tenons à remercier vivement **Dr.BOUKHATEM Amina** pour la confiance que vous nous avez accordée en l'acceptant de notre encadrement, pour sa disponibilité tout au long de l'élaboration de ce mémoire, ainsi que pour son aide, ses critiques et ses suggestions, qui nous ont été d'une grand aide.

Je voudrais remercier le plus sincère aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail, plus précisément aux membres du jury **Dr.RAHMOUNE AbdelAziz** et **Dr.KABACHE Aicha**.

Je voudrais également remercier mes professeurs, en particulier le Professeur **BELACEL Amar** , qui a cru en mes capacités et m'a encouragé, le Professeur **MOKHTARI**, qui a été un modèle pour moi, et **Mr.RAHMOUNE AbdelAziz**, qui m'a soutenu et motivé.

Sans oublier l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes cycles d'études.

Enfin, nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire. À vous tous, un grand merci

ملخص

موضوع هذه الأطروحة هو دراسة استقرار بعض الأنظمة الديناميكية على شبكة شبه منتهية على شكل نجمة باستخدام نظرية أنصاف المجموعات القائمة على التحليل الطيفي. بشكل أكثر دقة، ينصب تركيزنا على معادلة موجية مخمدة مع التخميد الهيكلي والتخميد اللزج. ندرس وجود وتفرد للأنظمة على شبكة نجمية شبه منتهية. بعد ذلك، نحدد الاستقرار القوي لهذه الأنظمة تحت شروط معينة على معامل التخميد. نستخدم نتيجة W.Arendt و C.J.K.Batty [10] لإثبات الاستقرار عن طريق حساب معدل اضمحلال الطاقة المرتبطة

* * * * * * * * * ** **كلمات مفتاحية** * * * * * * * * *

فضاءات سوبوليف، شبه المجموعة، الاستقرار، المعادلات الموجية، التخميد.

Abstract

The subject of this thesis consists of studying the stability of certain dynamic systems on a semi-infinite star-shaped network using the theory of semigroups based on spectral analysis. Specifically, our attention is directed to a damped wave equation with the type of Kelvin-Voigt and viscous damping. We study the existence and uniqueness of solutions for the systems on a semi-infinite star network. Then, we seek to determine the strong stability of such systems under certain conditions on the damping coefficient. We use a result by W. Arendt and C. J. K. Batty [10] to prove the stability by calculating the decay rate of the associated energy

* * * * * * * * * Key words * * * * * * * * * *

Sobolev spaces, semigroup, stability, wave equations, damping.

Résumé

Le sujet de ce mémoire consiste à étudier la stabilité de certains systèmes dynamiques sur un réseau en forme d'étoile semi-infini en utilisant la théorie des semi-groupes basée sur l'analyse spectrale.

Plus précisément, notre attention est portée sur une équation des ondes amortie avec le type d'amortissement de Kelvin-Voigt et visqueux. Nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour les systèmes sur un réseau en forme d'étoile semi-infini. Ensuite, nous cherchons à déterminer la stabilité forte de ces systèmes sous certaines conditions sur le coefficient d'amortissement. Nous utilisons un résultat de W. Arendt et C. J. K. Batty [10] pour prouver la stabilité en calculant le taux de décroissance de l'énergie associée.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ Key words ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗∗

Espaces de Sobolev, Semi-groupe, stabilité, équations d'ondes, amortissement.

Table des matières

Symboles et Notations

Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes

$D(I_i)$	L'ensemble des fonctions lisses dansI_i.
$R(\lambda, B)$	L'ensemble des résolvants.
$\rho(B)$	L'ensemble des résolvants de B.
$\sigma_\rho(B)$	L'ensemble des spectres ponctuels de B .
$\sigma_d(B)$	L'ensemble des spectres discrets de B.
$\sigma_{ess}(B)$	Résuktats de la translation : L'ensemble des spectres essentiels de B.
$\langle \omega, \omega \rangle_X$	Le produit scalaire en x .
$\\|.\\|_X$	La norme en x .
$\partial_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$	Dérivée partielle du premier ordre de f par rapport au temps t.
$\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$	Dérivée partielle de premier ordre de f par rapport à la variable d'espace x.
$\partial^2_{tt} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 t}$	La dérivée partielle du second ordre de f par rapport au temps t.
$\partial^2_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$	La dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la variable d'espace x.

Introduction générale

En mathématiques, en physique et en ingénerie, un systéme dynamique est un systéme qui évolu au fil du temps.
L'évolution d'un systéme dynamique peut se modéliser de deux façons différentes :

- Une évolution continue dans le temps, représentée sous forme d'une équation différentielle ordinaire. C'est a priori la plus naturelle physiquement puisque le paramétre de temps nous semble continue.
- Une évolution discontinue dans le temps.

L'étude du comportement des équations différentielles (ordinaires, partielles,...) est à l'origine des systémes. dynamiques. Les questions qui surgissent sont de plusieurs natures. Elles concernent :

- L'existence et l'unicité des solutions.
- Le comportement aux limites des solutions.
- La stabilité des solutions.

Pour étudier l'existence et l'unicité la méthode généralement utilisé est la transformation du problème en un problème de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A_\alpha X, \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

où X n'est autre que notre probléme de base.
Pour la stabilité des systémes d'EDP (Equations aux Dérivées Partielles) les méthodes généralement utilisées sont l'approche par fonction de Lyaponov ou encore par la méthode des semi-groupes.
Les deux méthodes consistent à construire une fonction dites fonction de l'énérgie du systéme

puis prouver qu'elle décroit et temps vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini

$$||E(t)|| \to 0, \text{ quand } t \to +\infty$$

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la stabilité de systémes dynamiques en réseau en étoile par l'approche de semi-groupes, pour se faire nous divisons notre travail en trois parties :

Chapire 1 Nous commençons par rappeler quelques notions sur les espaces de Sobolev, nous introduisons les espaces de Banach, Hilber et Soblev et leurs propriétés puis nous rappelons quelques inégalités usuelles.
Chapire 2 Nous continuons notre travail en introduisant la notion des semi-groupes ainsi que toutes ses propriétés puis nous présentons la notion de stabilité forte exponentielle et polynomiale par approche des semi-groupes.
Chapire 3 Nous terminons notre travail par étudier l'existence et l'unicité puis la stabilité de quelques systémes en réseaux en étoile en utilisant les semi-groupes.

Chapitre 1 Quelques rappels sur les espaces de Sobolev.

Sommaire

1.1 Les espaces de Banach

Il est bien connu que les solutions de toute équation différentielle partielle, lorsqu'elles existent, appartiennent naturellement aux espaces de Sobolev qui est un espace de Banach. Nous allons donc commencer par quelques concepts fondamentaux de ces espaces, pour leurs preuves et plus de détails, nous invitons le lecteur à se reporter à [2, 15, 17, 18, 19].

Définition 1. ***(Espace de Banach)***

Un espace de Banach X, est un espace vectoriel normé qui est un espace métrique complet avec respect de la métrique dérivée de sa norme, où

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to d(x, y) = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Exemple 1.

Nous considérons la norme p sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, par

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall 1 \leq p < \infty,$$

et pour $p = \infty$ nous définissons la norme maximale par

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \max |x_1| + |x_2|, \ldots, |x_n|,$$

alors $\mathbb{R}^n$ équipé de la norme p est un espace de Banach de dimension finie pour $1 \leq p < \infty$.

Pour un espace de Banach de dimension infinie, nous définissons les espaces suivants,

1.2 Espace de Hilbert

Définition 2. ***(Espace de Hilbert)***

On dit que l'espace de Banach X est un espace de Hilbert si sa norme induite par la métrique $d(\omega, \omega)$ satisfait la loi du parallélogramme, c'est-à-dire

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

De plus, cette norme définit un produit scalaire $\langle \omega, \omega \rangle$.

Définition 3 (Voir [15])**.**

On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est :

1. **Continue** *: s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

2. **Coercive :** *s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.2.1 ([15])**.** ***(Lax-Milgram)***

Soit H un espace de Hilbert réel, $L(\Omega)$ une forme Linéaire continue sur $H(\omega, \omega)$, une forme bilinéaire continue coercive sur H. Alors la formulation variationnelle

$$a(u, v) = L(v)$$

pour toute fonction $v \in H$ admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.

Définition 4. ***(Espace de Lebesgue)***

Soit ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace de Lebesgue est défini comme suit :

$$L^p(\omega) = \left\{ u(x) : \omega \to \mathbb{R}, : u(x) \text{ est mesurable } \int_\omega |u(x)|^p \ dx < \infty \right\},$$

induit par la norme

$$\|u\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_\omega |u(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\omega) = \{ u(x) : \omega \to \mathbb{R}, : u(x) \text{ mesurable borné} \},$$

induit par la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\omega)} = ess \sup_{x \in \omega} |u(x)|,$$

les espaces L sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.2.2 ([15])**.**

L'espace $L^p(\omega)$, muni de la norme $\|.\|_{L^p(\omega)}$, est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Exemple 2.

Un excellent exemple d'espace de Banach "Hilbertien" dans le cas $p = 2$ est la collection des fonctions intégrables carrées sur ω, et consiste en toutes les fonctions mesurables à valeurs complexes f qui satisfont aux conditions suivantes

$$\int_\omega |f(x)|^2 \ dx < \infty.$$

$\rightsquigarrow$*La norme $L^2(\omega)$ de f qui en résulte est définie par*

$$\|u\|_{L^2(\omega)} = \left(\int_\omega |u(x)|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\rightsquigarrow$*L'espace $L^2(\omega)$ est naturellement équipé du produit scalaire suivant :*

$$\langle f, g\rangle = \int_\omega f(x)\overline{g(x)}\ dx \text{ chaque fois que } f, g\ \in L^2(\omega).$$

1.3 Espace de Sobolev

Définition 5. ***(Espace de Sobolev)***

L'espace de Sobolev, noté $\mathcal{H}(\omega)$ est constitué des fonctions dans $L^2(\omega)$ qui ont des dérivées faibles jusqu'à l'ordre k et qui appartient à $L^2(\omega)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{H}^\kappa(\omega) = \left\{u \in L^2(\omega)/u, u', \ldots, u^{(\kappa)} \in L^2(\omega)\right\},$$

muni de la norme et le produit scalaire :

$$\|u\|_{\mathcal{H}^\kappa} = \left(\int_\omega \left\{|u|^2 + |u'|^2 + \ldots + |u^{(\kappa)}|^2\right\}\ dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle u, v\rangle = \int_\omega \left\{\overline{u}v + \overline{u}'v' + \overline{u}^{(\kappa)}v^{(\kappa)}\right\}\ dx.$$

Théorème 1.3.1.

L'espace $\mathcal{H}^k(\omega)$, muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{H}^k(\omega)}$, est un espace de Banach "Hilbert" pour tout $k \geq 1$.

Exemple 3.

L'exemple fondamental de l'espace de Hilbert de Sobolev est $\mathcal{H}^1(\omega)$, défini comme suit

$$\mathcal{H}^1(\omega) = \left\{f \in L^2(\omega), f' \in L^2(\omega)\right\},$$

$\rightsquigarrow$*La norme naturelle est donnée par :*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\omega)} = \left(\int_\omega |f(x)|^2 + |f'(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\rightsquigarrow$*Le produit scalaire associé de l'espace $\mathcal{H}^1(\omega)$ est :*

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}(\omega)} = \int_\omega f(x)\overline{g(x)}\ dx + \int_\omega f'(x)\overline{g'(x)}\ dx \text{ pour tout } f, g \in \mathcal{H}^1(\omega).$$

1.4 Interpolation et inégalités

Dans cette section, nous rappelons les inégalités les plus célèbres dans les espaces de Sobolev qui seront fréquemment utilisés tout au long de ce mémoire. Les détails et les cas plus généraux peuvent être trouvés dans [2, 15, 18].

Lemme 1. ***(Gaglliardo-Nirenberg)***

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble borné. Alors il existe deux constantes positives C_1 et C_2 tels que pour tout u dans $H^2(I)$,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C_1 \|\partial_x u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} + C_2 \|u\|_{L^2(I)}. \tag{1.1}$$

Il existe deux constantes positives C_3 et C_4 tels que pour tout u dans $H^2(I)$,

$$\|\partial_x u\|_{L^2(I)} \leq C_3 \|\partial_x u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} + C_4 \|u\|_{L^2(I)}. \tag{1.2}$$

Lemme 2. ***(Inégalité d'interpolation)***

Étant donné un entier $m \geq 2$, alors pour tout entier j, $1 \leq j \leq m-1$, et pour tout $k > 0$ il existe une constante C (dépendant de k et de $|I| \leq \infty$) tel que

$$\|\partial_x^j u\|_{L^2(I)} \leq k \|\partial_x^m u\|_{L^2(I)} + C \|u\|_{L^2(I)}, \forall u \in H^m(I), \tag{1.3}$$

Pour en savoir plus sur le cas $|I| < \infty$.

Lemme 3. ***(Inégalité de Young)***

Soit $0 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ alors pour tout $a, b \geq 0$, on a

(1) Premièrement, pour tout $p \geq 1$:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'} \geq a \times b \tag{1.4}$$

(2) Deuxièmement, pour $0 < p < 1$ *:*

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'} \leq a \times b \tag{1.5}$$

Lemme 4. ***(Inégalité de Minkowsky)***

Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un sous-ensemble borné, et soit* $f, g \in L^p(I)$*, pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*, alors*

$$\|f + g\|_{L^p(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} + \|g\|_{L^p(I)} \tag{1.6}$$

Proposition 1. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***

Soit $f, g \in L^2(I)$*, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est donnée par*

$$\|f \times g\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \times \|g\|_{L^2(I)}.$$

Lemme 5. ***(Inégalité de Hölder)***

Soit $I \subset \mathbb{R}$ *un sous-ensemble borné, et* $0 < p \leq \infty,\ f \in L^p(I),\ g \in L^{p'}(I)$*, avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Alors*

(1) Si $1 \leq p \leq \infty$ *:*

$$\int_I |f \times g|\ dx \leq \|f\|_{L^p(I)} \times \|g\|_{L^{p'}(I)}. \tag{1.7}$$

(2) Si $0 < p < 1$ *:*

$$\int_I |f \times g|\ dx \geq \|f\|_{L^p(I)} \times \|g\|_{L^{p'}(I)}. \tag{1.8}$$

Chapitre 2 Semi-groupe dans un espace de Banach.

Sommaire

2.1 Opérateurs linéaires non bornés

Cette section est consacrée à l'introduction de la notion d'opérateurs linéaires non bornés, où nous rappelons certaines de leurs propriétés dans les espaces de Banach et de Hilbert. Nous invoquons pour cela [17, 18, 19, 20].

Nous considérons les deux espaces X, Y comme des espaces de Banach dans tout ce qui suit.

Définition 6.

Un opérateur linéaire $B : X \to Y$, est appelé non borné si l'image $B(S)$ de la sphère unité S dans X est non bornée dans Y.

On peut également définir un opérateur non borné par la forme suivante (Lemme(6))

Lemme 6.

L'opérateur B est dit non borné si et seulement s'il existe une suite $u_n \in D(B)$, telle que :

$$\|u_n\|_X = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|Bu_n\|_Y = \infty.$$

Définition 7.

Un opérateur linéaire non borné de X dans Y est un couple $(B, D(B))$, ou $D(B)$ est un sous-espace vectoriel de X et B est une application linéaire de $D(B)$ de X dans Y, le sous-espace $D(B)$ étant le domaine de B.

De même, un opérateur linéaire non borné de X est un couple $(B, D(B))$, ou $D(B)$ est un sous-espace vectoriel de X et B est une application linéaire de $D(B)$ de X.

Nous allons maintenant donner quelques exemples d'opérateurs non bornés,

Exemple 4.

Soit X l'espace de tous les polynômes trigonométriques sur $[-\pi, \pi]$, avec la norme

$$\|P\|_X = \int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|\, dx.$$

l'opérateur $B : X \to X$ qui fait passer un polynôme à sa dérivée n'est pas borné.

En effet, pour $v_n = e^{inx}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\|v_n\|_X = 2\pi$, alors que $\|B(v_n)\|_X = 2n\pi \to \infty$ comme $n \to \infty$ donc B n'est pas borné.

Exemple 5.

Soit $X = Y = L^2(\mathbb{R})$, et on pose $Bu(x) = xu(x)$, défini dans son domaine

$$D(B) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}), / xu \in L^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Soit u_n, une suite dans le domaine de B, définie par

$$u_n(x) \begin{cases} 0 & si\, x < n \text{ ou } x > n+1, \\ \\ 1 & si \text{ non }. \end{cases}$$

Nous obtenons $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, et $\|Bu_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{3n^2+3n+1}{3}}$. L'opérateur B n'est donc pas borné.

Exemple 6.

Soit $X = Y = L^2(0,1)$ et on considére l'opérateur B définie dans le domaine :

$$D(B) = \left\{u \in L^2(0,1) \text{ tel que } \partial_x u \in L^2(0,1)\right\}.$$

$$\forall u \in D(B); \quad Bu = \partial_x u,$$

alors l'opérateur B est non borné, en fait nous considérons la séquence $u_n(x) = e^{inx}$.

Remarque 1.

L'opérateur $A + B$ où A est borné et B non borné est un opérateur non borné défini dans le domaine $D(A + B) = D(A)$, par

$$\forall u \in D(A), \quad (A + B)u = Au + Bu.$$

Ce résultat sera utilisé par la suite pour définir l'opérateur $\lambda I - B$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 8. ***(Opérateur fermé)***

Un opérateur linéaire $B : X \to Y$ est dit fermé lorsque le graphe $G(B)$,

$$G(B) =: \{(x, Bx) | x \in D(B)\},$$

est une substance fermée de $X \times Y$.

Nous avons muni les $X \times Y$ de la norme du produit :

$$\forall (u, v) \in X \times Y, \|(u, v)\|^2_{X \times Y} = \|u\|^2_X + |Y\|^2_Y.$$

Ainsi, nous pouvons définir la fermeture comme suit :

Lemme 7.

$B : X \to Y$ est fermée si et seulement si ce qui suit est vrai :
Lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $D(B)$ avec $x_n \to x$ dans Y et $Bx_n \to Y$ dans Y, alors $x \in D(B)$ avec $Bx = y$.
On note également que l'opérateur B est fermé est équivalent à l'opérateur $D(B)$ dit et autorisé par la "norme du graphe" :

$$\|u\|^2_{D(B)} = \|u\|^2_X + \|Bu\|^2_Y,$$

est un espace de Hilbert.

Lemme 8.

L'opérateur B est fermé est équivalent à dit $D(B)$ et autorisé par la "norme du graphe" :

$$\|u\|^2_{D(B)} = \|u\|^2_X + \|Bu\|^2_Y,$$

est un espace de Hilbert.

Exemple 7.

L'opérateur définit B dans l'exemple (5) est un opérateur fermé. En effet, si u_n converge vers u dans $L^2(0,1)$ et $\partial_x u_n$ converge vers v dans $L^2(0,1)$, alors il est clair que u_n est une suite de Cauchy dans $H^1(0,1)$ qui est une complète. Par conséquent, u dans $H^1(0,1)$ et $v = \partial_x u$.

Définition 9. ***(Opérateur à domaine dense)***

Soit $B : X \to Y$ un opérateur linéaire non borné de X, lorsque $D(B)$ est dense dans X, on dit que l'opérateur $(B, D(B))$ est un domaine dense de X, c'est-à-dire $\overline{D(B)} = X$.

Définition 10. ***(Opérateur adjoint)***

Soit$(B, D(B))$ un opérateur linéaire non borné de X, avec un domaine dense. On définit alors son adjoint $(B^*, D(B^*))$ par

$$D(B^*) = \Big\{ y \in X^* / \exists c \geq 0 \text{ tel que } \langle Bx, y \rangle_{X,X^*} \leq c\|x\|, \forall x \in D(B) \Big\},$$

et

$$\langle x, B^* y \rangle_{X,X^*} = \langle Bx, y \rangle_{X,X^*}, \ \forall x \in D(B), \ \forall y \in D(B^*).$$

Définition 11. ***(Opérateur de dissipation)***

L'opérateur linéaire non borné $(B, D(B))$ de X est dit dissipatif si

$$\forall u \in D(B), \ \Re(Bu, u)_X \leq 0$$

Définition 12. ***(Opérateur dissipatif)*** *([8])*

L'opérateur linéaire non borné $(B, D(B))$ de X est dit m-dissipatif si

(i) B *est dissipative.*

(ii) $\forall z \in X, \ \forall \lambda > 0, \ \exists u \in D(B)$ *tel que* $(\lambda I - B)u = z$.

Les notations suivantes sont couramment utilisées pour montrer qu'un opérateur est dissipatif ou m-dissipatif.

Théorème 2.1.1.

L'opérateur linéaire non borné $(B, D(B))$ de X est dit m-dissipatif si

$$\forall u \in D(B),\ \forall \lambda > 0,\ \|\lambda u - Bu\|_X \geq \lambda \|u\|_X.$$

Exemple 8.

Soit B un opérateur linéaire non borné défini sur X par :

$$Bx = (v, \partial_x^2 u, \partial_x^2 w),\ \forall x = (u, v, w) \in D(B),$$

ou

$$D(B) = \{(u, v, w) \in Y,\ v(-1) = 0,\ \partial_x u(0) = \partial_x w(0), v(0) = w(0)\},$$

et

$$Y = \left\{(u, v, w) \in \mathcal{H}^2(-1, 0) \times \mathcal{H}^1(-1, 0) \times \mathcal{H}^2(0, \infty) : u(-1) = 0\right\},$$

$$X = \left\{(u, v, w) \in \mathcal{H}^1(-1, 0) \times L^2(-1, 0) \times L^2(0, \infty) : u(-1) = 0\right\}.$$

*En [15], les auteurs montrent que l'opérateur B est un opérateur dissipatif fermé densément défini dans **Lemma 2,1**.*

Théorème 2.1.2.

Si B est m-dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$ l'opérateur $(\lambda I - B)^{-1}$ a un inverse, $(\lambda I - B)^{-1})\ z \in D(B)$ pour tout $z \in D(B)$, et $(\lambda I - B)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans X satisfaisant

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 2.1.3.

Soit $(B, D(B))$ un opérateur linéaire non borné de X, s'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - B$ est une bijection de $D(B)$ sur X, alors B est fermée.

En particulier, si B est m-dissipative, alors B est fermée.

Exemple 9.

L'opérateur défini dans l'exemple précédent (7), est m-disspatif.

2.2 Semi-groupe fortement continue

Définition 13.

Une famille $T(t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée un semi-groupe fortement continue (en bref, un C_0-semi groupe) si

1) $T(t_1+t_2)=T(t_1)T(t_2), \forall t_1, t_2 \geq 0.$

2) $T(0)=I.$

3) Pour chaque $x \in X, T(t)x$ est continue Par rapport à t sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 14.

Nous définissons le générateur infinitésimal B du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ par

$$D(B)=\left\{x \in X, |\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t} \text{ existe}\right\}.$$

et

$$Bx=\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t}, \forall x \in D(B).$$

2.3 Spectre et résolvant de semi-groupe

Dans cette section, nous donnons la notion de semi-groupes linéaires et établissons la définition du résolvant, nous définissons certains types de spectre et quelques lemmes, un théorème habituellement utilisé dans cette thèse. Nous nous référons à [17, 18, 19].

Rappelons quelques définitions spectrales,

Définition 15.

Soit B un opérateur linéaire sur l'espace de Banach X, avec le domaine $D(B)$.
Alors

(1) L'ensemble résolvant $\rho(B)$: est l'ensemble de tous les points $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(\lambda - B)$ est inversible.

- *Si $\lambda \in \sigma(B)$ alors l'inverse de $(\lambda - B)$ est appelé le résolvant de B à λ et il est dénoté comme :*

$$R(\lambda, B) := (\lambda - B)^{-1}.$$

(2) Le spectre $\sigma(B)$: est l'ensemble de tous les points $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $(\lambda - B)$ n'est pas inversible.

• *Remarquons que, par définition,*

$$\sigma(B) \cup \rho(B) = \mathbb{C}, \; et \, \sigma(B) \cap \rho(B) = \emptyset$$

. • *L'ensemble de toutes les valeurs propres isolées de B avec une multiplicité algébrique finie définit ce qu'on appelle le spectre discret, noté $\sigma_d(B)$, et son complément dans le spectre de B définit le spectre essentiel de B, noté $\sigma_{ess}(B)$, c'est-à-dire,*

$$\sigma_{ess}(B) = \sigma(B) \backslash \sigma_d(B).$$

À notre connaissance, le spectre essentiel a cinq définitions différentes, l'une étant incluse dans l'autre, l'une d'entre elles étant caractérisée en matière de critère de Weyl qui sera utilisé dans ce mémoire :

Théorème 2.3.1.

Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$ si et seulement s'il existe une suite singulière (une suite qui n'a pas de sous-séquence convergente)$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(B)$, telle que

$$\exists \, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(B), \|u_n\| = 1, \; et \; \lim_{n\to\infty} \|(\lambda I - B)u_n\| = 0.$$

Exemple 10.

Soit $H_0^2(0,1)$,est l'espace de Sobolevl " Hilbert " habituel. Nous considérons l'opérateur B défini par

$$\begin{cases} B(f,g) = \left(g, -\frac{1}{p}(a\partial_x^2 f + b\partial_x^2 g)_x\right), \\ \\ D(B) = \left\{(f.g) \in H_0^2(0,1) \times H_o^2(0,1), a\partial_x^2 f + b\partial_x^2 g \in H^2(0,1)\right\}. \end{cases}$$

Où $\rho, a(.) > 0$ sont des fonctions continues des paramètres du système dans la variable spatiale tandis que la fonction continue $b(.) \geq 0$ dans la fonction d'amortissement Guo-Dong Zhang et Bao -Zhu Guo, dans [3] montre dans le théorème 2.2 que

$$\rho_{ess}(B) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/a(\epsilon) + \lambda b(\xi) = 0, \; pour \; certains \; \; \xi \in [0,1]\right\}.$$

Étudier la stabilité de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles évolutives nous reformulons le système en un problème abstrait de Cauchy dans l'espace d'énergie X, comme suit,

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = BU(t), \\ \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où B est le générateur infinitésimal du C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Afin d'étudier le problème (2.1), La première étape naturelle consiste à vérifier que le problème est bien posé, et pour ce faire, nous avons besoin du célèbre théorème suivant.

Théorème 2.3.2. ***(Lumer-Phillips)***

Soit B un opérateur linéaire avec un domaine dense $D(B)$ dans un espace d'Hilbert X. Alors l'opérateur B est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction sur X, s'il est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que l'intervalle $R(\lambda_0 I - B)$, de $\lambda_0 - B$ est X.

Les paragraphes suivants donnent la nature de la solution du problème (2.1).

Théorème 2.3.3. ***(Hille-Yosida)***

Soit B le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contact $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors pour tout $U_0 \in X$ le problème (2.1) a une unique solution faible

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}_+, X).$$

De plus, si $U_0 \in D(B)$le problème (2.1) a une unique solution forte

$$U(t) = T(t)U_0 \in C^1(\mathbb{R}_+, X) \cap C(\mathbb{R}_+, D(B)).$$

2.4 Stabilité du semi-groupe

Après avoir découvert que la solution est bien posée, l'étape suivante consiste à étudier la stabilité de la solution, en commençant par la stabilité forte, puis en recherchant le taux de décroissance de l'énergie de la solution. Pour cette raison, nous rappellerons dans cette sous-section les résultats de stabilité qui aident à les vérifier tous. Pour plus de détails, nous recommandons [12, 19, 20].

2.4.1 Stabilité forte

Théorème 2.4.1. *(**Arendt et Batty**)*

Soit B l'infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ dans l'espace de Hilbert X, si

$$i\mathcal{R} \cap \sigma(B) \tag{2.2}$$

est un ensemble dénombrable et

$$i\mathcal{R} \cap \sigma_p(B) = \emptyset. \tag{2.3}$$

Alors $(T(t))_{t\geq 0}$est fortement stable, c'est-à-dire.

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)u\|_X = 0, \forall u \in X.$$

2.4.2 Stabilité exponentielle

Définition 16.

Le C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert X est exponentiellement stable s'il existe une constante positive C et γ telle que

$$\|T(t)u\|_X \leq Ce^{-\gamma t}, \forall t > 0.$$

Où nous appelons la valeur de γ le taux de décroissance.

Théorème 2.4.2. *(**Gearhart**).*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe borné de contrastes sur un espace d'Hilbert X, avec générateur B. Alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(B),$$

et

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \|(\beta I - B)^{-1}\| < \infty$$

Remarque 2.

Nous notons que Pruss-Hung-Renardy a une autre façon équivalente d'obtenir la stabilité exponentielle pour C_0semi groupe de contractions sur un espace de Hilbert. Le théorème et la preuve d'équivalence peuvent être trouvés dans Lui-Zhn [3].

Exemple 11.

Soit $H_0^k(I), k = 1, 2, I =: \{(-1,0),(0,1)\}$, *"l'espace de Hilbert" usuel de Sobolev, et nous définissons :*

$$\mathcal{H} = \left\{(f,g) \in H_0^1(-1,0) \times H_0^1(0,1), f(-1) = g(1), f(0) = g(0)\right\},$$

et

$$X = \mathcal{H} \times L^2(-1,0) \times L^2(0,1).$$

Nous considérons l'opérateur linéaire B *défini à partir de* $D(B) \subset X$ *dans* X *par*

$$\begin{cases} B(f,g,h,q) = (h, q, \partial_x^2 f, \partial_x^2 g - a(x)q), \\ D(B) = \{(f,g) \in H_0^2(-1,0) \times H_0^2(0,1), (h,q) \in \mathcal{H}, \partial_x f(0) = \partial_x g(0),\} \end{cases}$$

avec $a_0(x) \leq a(x) \leq a_1(x)$, *P.P sur* $[0,1], a \in L^\infty(0,1)$

Dans [4], Manuel et Raposo ont montré dans le lemma 3 et le lemma 4, que ;

$$\sigma_p(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset,$$

et

$$\lim_{|\beta| \to \infty} \sup \|(i\beta I - B)^{-1}\| < \infty.$$

On en déduit alors que le semi-groupe associé $(T(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable.*

2.4.3 Stabilité polynomiale

Définition 17.

Supposon que B *soit le générateur infinitésimal du* C_0*-semi groupe de contrastes* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur un espace de Hilbert* X, *alors* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est dit polynomialement stable s'il existe des constants* $\alpha, \gamma, C > 0$ *telles que*

$$\|T(t)(d - B)^{-\alpha}\|_X \leq Ct^{-\gamma}, \forall t > 0, \forall d > o. \tag{2.4}$$

Si $(T(t))_{t\geq 0}$ *est borné* $0 \in \rho(B)$, *on peut normaliser* (2.4) *par l'estimation suivante*

$$\|T(t)B^{-\alpha}\|_X \leq Ct^{-1}, \forall t > 0.$$

Théorème 2.4.3. ***(Borichev-Tomilov)***

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi groupe borné de contractions sur un espace de Hilbert* X, *avec un générateur* B *tel que* $i\mathbb{R} \subset \rho(B)$, *alors*

$$|\beta|^{-\alpha}\|(i\beta I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \forall \beta \in \mathbb{R},$$

si et seulement si

$$\|T(t)B^{-1}\|_{D(B)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où α *est un nombre réel positif.*

Nouveau, $0 \in \sigma(B)$, alors les théorèmes ci-dessus de stabilité exponentielle et polynomiale sa note tient. Ainsi, nous dérivons une limite supérieure précise sur la croissance du résolvant $\|R(i\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(X)}$ comme $|\lambda| \to 0, |\lambda| \to \infty$, ce qui donnera une estimation pour la note de la décroissance de l'énergie des solutions suffisamment bien équilibrées de (2.1).

Singularité à zéro

Théorème 2.4.4.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe de contractions sur un espace Hilbert* X, *avec générateur* B. *Nous supposons que* $\mathbb{R} \cap \rho(B) = \{0\}$, *et il existe* $\alpha \geq 1$, *telle que*

$$\begin{cases} \|R(i\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} & = O(|\lambda|^{-\alpha}),\ \textit{quand}\ |\lambda| \to 0, \\ \\ \|R(i\lambda, B)\|_{\mathcal{L}(X)} & = O(1)\ \textit{quand}\ |\lambda| \to \infty. \end{cases}$$

Alors

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \|R(\lambda, B)B^{\alpha}R(1, B)^{-\alpha}\| < \infty.$$

Théorème 2.4.5.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe de contractions sur un espace Hilbert X, avec générateur B. Supposons que $\mathbb{R}\cap\rho(B)=\{0\}$, et laissez $\alpha\geq 1$.
Les éléments suivants sont équivalents :

1)

$$\begin{cases} \|R(i\lambda,B)\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(|\lambda|^{-\alpha}),\ \text{quand},\ |\lambda|\to 0,\\ \\ \|R(i\lambda,B)\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(1)\ \text{quand}\ |\lambda|\to\infty. \end{cases}$$

2)

$$\|T(t)BR(1,B)\|=O(t^{-\frac{1}{\alpha}}),\ \text{quand}\ t\to\infty.$$

3)

$$\|t(t)B^{\alpha}R(1,B)^{\alpha}\|=O(t^{-1}),\ \text{quand}\ t\to\infty.$$

Remarque 3.

Si $u\in D(B^{\alpha})\cap Ran(B)$,alors $\|T(t)u\|=O(t^{-1})$.

Singularité à zéro et à l'infini

Théorème 2.4.6.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe de contractions sur un espace Hilbert X, avec générateur$B$. Supposons que $\mathbb{R}\cap\rho(B)=\{0\}$, et laissez $\alpha\geq 1$ and $\gamma>0$.
Ensuite, les assertions suivantes sont équivalentes :

1)

$$\begin{cases} \|R(i\lambda,B)\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(|\lambda|^{-\alpha}),\ \text{quand}\ |\lambda|\to 0,\\ \\ \|R(i\lambda,B)\|_{\mathcal{L}(X)} &= O(|\lambda|^{\gamma}),\ \text{qand}\ |\lambda|\to\infty. \end{cases}$$

2)

$$\|T(t)B^{a}R(1,B)^{(\alpha+\gamma)}\|=o(t^{-1}),\ \text{quand}\ |\lambda|\to\infty.$$

3)
$$\|T(t)BR(1,B)^2\| = O(t^{\frac{-1}{\mu}}),\ quand\ |\lambda| \to \infty.$$

Avec $\mu = \max(\alpha, \gamma)$.

Remarque 4.

Si $u \in D(B^{\gamma\mu}) \cap Ran(B^{\alpha\mu})$, *alors* $\|T(t)u\| = O(t^{-\alpha})$.

Remarque 5.

Singularité à l'infini : *signifie dans la situation où le résultat* $R(i\beta, B)$ *a des pôles sur l'axe imaginaire mais a permis de sauter dans la norme d'opérateur si* β *tend vers l'infini. De manière similaire.*

La singularité à zéro : *signifie la situation où le résolveur* $R(i\beta, B)$ *n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire mais est autorisé à exploser dans la norme de l'opérateur si* β *tend vers zéro.*

Chapitre 3 Stabilité de quelques systèmes en réseaux en étoile.

Sommaire

3.1 L'équation des ondes avec amortissement de type visqueux

3.1.1 Introduction

Dans la suite, on considére une équation d'onde visqueux amortie posée sur un réseau de cordes mixtes qui seront dénotées par Γ, avec $N_F \in \mathbb{N}^*$ bords finis $\{I_j\}_{j=1}^{N_F}$ à laquelle nous attachons $N_I \in \mathbb{N}^*$ bords infinis $\{I_j\}_{j=N_F+1}^{N_F+N_I}$, tous connectés à un seul sommet. Nous désignons par $\{\ell_j\}_{j=1}^{N_F}$ les longueurs des arêtes finies. On peut identifier chaque arête I_j avec l'intervalle

$(0, \ell_j)$, le sommet avec 0 et les bords infinis avec l'intervalle semi-infini $(0, +\infty)$. Les bords sont couplés à 0 par les conditions de transmission suivantes

$$\begin{cases} u_i(0,t) = u_j(0,t), \ t > 0, \ \ i,j = 1,\dots,N_F + N_I \\ \sum_{j=1}^{N_F+N_I} \partial_x(0,t) = 0, \ t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

En outre, nous imposons la condition limitée de Dirichlet aux extrémités des bords finis.

$$u_j(\ell,t) = 0, \ t > 0, \ \ j = 1,\dots,N_F. \tag{3.2}$$

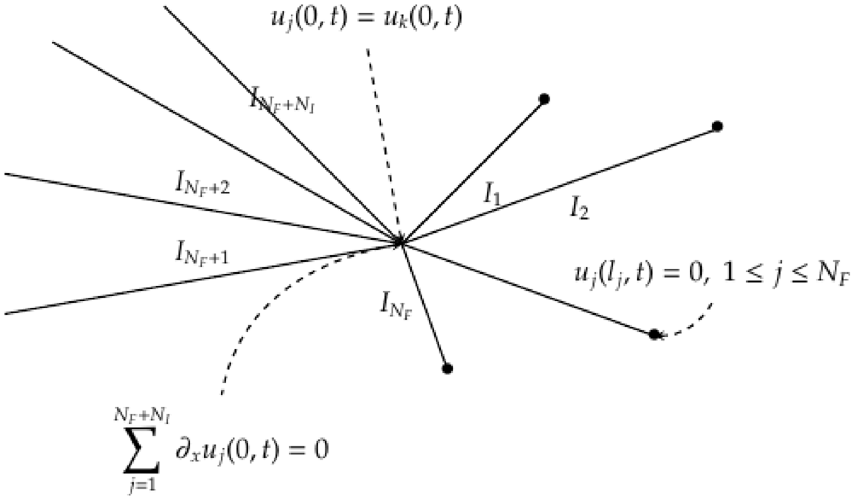
Le problème peut donc être décrit comme suit

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_j - \partial_x^2 u_j + \alpha_j(x)\partial_t u_j = 0, \ (x,t) \in I_j \times \mathbb{R}_+, \ \ j = 1,\dots,N_F + N_I, \\ u_i(0,t) = u_j(0,t), t > 0, \ \ i,j = 1,\dots,N_F + N_I, \\ \sum_{j=1}^{N_F+N_I} \partial_x u_j(0,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u_j(\ell_j,t) = 0, t > 0, \ \ j = 1,\dots,N_F, \\ u_j(x,0) = u_j^0(x), \ \ \partial_t u_j(x,0) = u_j^1(x), \ \ x \in I_j, \ \ j = 1,\cdots,N_F + N_I, \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $\alpha(.)$ la fonction de coefficient d'amortissement satisfaisant à

$$\begin{cases} \alpha(x) = (\alpha_j(x))_{1 \le j \le N_F+N_I} \in L^\infty(\Gamma), \\ \alpha_j(x) \ge 0, \ \forall j = 1,...,N_F + N_I. \end{cases} \tag{3.4}$$

La Figure ci-dessus décrit le cadre du problème (3.1) sur le réseau infini en forme d'étoile.



3.1.2 L'existence et l'unicité de la solution

Reformulation système (3.3) **vers un problème de Cauchy**

On pose $X = (u_1, u_2, u_3, \dots, \partial_t^2 u_1, \partial_t^2 u_2, \partial_t^2 u_3, \dots, \partial_t^2 u_{N_F+N_I})$.
On écrit le systéme (3.3)

$$\partial_t^2 u_i = \partial_x^2 u_i - \alpha_i(x)\partial_t u_i, \quad i = 1, 2, 3 \dots, N_F + N_I.$$

$$\begin{pmatrix} \partial_t u_i \\ \\ \partial_t^2 u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t u_i \\ \\ \partial^2 u_i - \alpha(x)\partial_t u_i \end{pmatrix},$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A_\alpha X \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \tag{3.5}$$

avec

$$A_\alpha X = \begin{pmatrix} \partial_t u_i \\ \\ \partial^2 u_i - \alpha(x)\partial_t u_i \end{pmatrix}.$$

$$X_0 = (u_i^0, u_i^1), \quad i = 1, 2, 3. \dots, N_F + N_I,$$

et

$$u_i^0 = U_i(x,0) u_i^1 = \partial_t u_i(x,0).$$

Cadre fonctionnel du problème de Cauchy

Nous notons J_F *et* J_I les ensembles d'indices des arêtes finies et infinies, respectivement. Alors $J = J_F \cup J_I$ est l'ensemble des indices de toutes les arêtes du réseau. Soit $H^i(I_j)$ l'espace de Sobolev sur $I_j, j \in J, i = 1, 2$, dans ce qui suit nous écrirons $H^i(\Gamma) = \prod_{j\in J} H^i(I_j)$. Fixons $f = (f_j)_{j\in J}$. Nous définissons l'espace de Hilbert

$$H = \begin{cases} f \in H^1(\Gamma) \\ f_i(\ell_j) = 0, \forall j \in J_F, \\ f_i(0) = f_j(0), \forall i, j \in J. \end{cases}$$

Pour l'espace énergétique du système, nous considérons l'espace de Hilbert complexe

$$X = H \times L^2(\Gamma),$$

muni du produit scalaire,

$$\langle Y_1, Y_2\rangle_X = \sum_{j\in J} \int_{I_j} \left(\partial_x f_j^1 \partial_x \overline{f_j^2} + g_j^1 \overline{g_j^2}\right)\, dx,$$

où $Y_\kappa = (f^\kappa, g^\kappa), \kappa = 1, 2$. Nous définissons également l'espace des fonctions

$$D(A_\alpha) = \left\{ Y = (u, v) \in H \times H; u \in H^2(\Gamma), \sum_{j\in J} \partial_x u_j(0) = 0 \right\},$$

où

$$A_\alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \partial_x^2 u - \alpha v \end{pmatrix}, \forall (u, v) \in D(A_\alpha),$$

end

$$\alpha v := (\alpha_j v_j)_{j\in J}.$$

Proposition 2.

Supposons que (3.4) *soit satisfait, alors l'opérateur* A_α *génère un* C_0*-semi groupe de contractions* $(T_{\alpha(t)})_{t\geq 0}$.

Preuve.

D'abord,pour tout $U \in D(A_\alpha)$, on a

$$\langle A_\alpha U, U\rangle_X = \sum_{j\in J}\int_{I_j} \partial_x v_j \overline{\partial_x u_j}\, dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} (\partial_x^2 u_j - \alpha_j v_j)\overline{v_j} dx.$$

En intégrant par parties et en utilisant (3.1) et (3.2), nous obtenons

$$\langle A_\alpha U, U\rangle_X = 2i\Im\left(\sum_{j\in J}\int_{I_j} \partial_x v_j \overline{\partial_x u_j} dx\right) - \sum_{j\in J}\int_{I_j} \alpha_j |v_j|^2 dx.$$

Il donne

$$\Re\left(\langle A_\alpha U, U\rangle_X\right) = -\sum_{j\in J}\int_{I_j} \alpha_j |v_j|^2 dx \leq 0.$$

Alors, l'opérateur A_α est dissipatif.

Deuxièmement, nous montrons maintenant que $I - A_\alpha$ est un opérateur surjectif. Pour cela, nous prouvons que pour tout $z = (f, g) \in X$, il existe $y = (u, v) \in D(A_\alpha)$ satisfaisant

$$(I - A_\alpha)y = Z.$$

Ce qui peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} u_j - v_j = f_j, & j \in J, \\ v_j \partial_x^2 u_j + \alpha_j v_j = g_j, & j \in J, \\ \sum_{j\in J} \partial_x u_j(0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ensuite,

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u_j + (1 + \alpha_j(x))\, u_j = g_j + (1 + \alpha_j(x))\, f_j, & j \in J, \\ \sum_{j\in J} \partial_x u_j(0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

En multipliant la première équation de (3.7) par $\overline{\phi}$, où $\phi \in H$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{I_j} \partial_x u_j \partial_x \overline{\phi_j} dx - \partial_x u_j(0)\overline{\phi_j(0)} + \int_{I_j} (1+\alpha_j(x))\, u_j \overline{\phi_j} dx \\ &= \int_{I_j} (g_j + (1+\alpha_j(x))\, f_j)\, \overline{\phi_j} dx,\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour $j \in J$. Ensuite, en additionnant sur J, on trouve

$$a(u,\phi) = L(\phi), \tag{3.9}$$

où

$$a(u,\phi) = \sum_{j\in J} \left(\int_{I_j} \partial_x u_j \partial_x \overline{\phi_j} dx + \int_{I_j} (1+\alpha_j(x))\, u_j \overline{\phi_j} dx \right)$$

et

$$L(\phi) = \sum_{j\in J} \int_{I_j} (g_j + (1+\alpha_j(x))\, f_j)\, \overline{\phi_j} dx.$$

On a

$$\begin{aligned}|a(u,\phi)| &\leq \sum_{j\in J} \|\partial_x u_j\|_{L^2(I_j)} \|\partial_x \phi_j\|_{L^2(I_j)} \\ &+ \sum_{j\in J} \left(1 + \|\alpha_j\|_{L^\infty(I_j)}\right) \|u_j\|_{L^2(I_j)} \|\phi_j\|_{L^2(I_i)} \\ &\leq \left(1 + \sup_{1\leq j\leq N_F+N_I} \|\alpha_j\|_{L^\infty(I_j)}\right) \|u\|_H \|\phi\|_H,\end{aligned}$$

et

$$a(u,u) \geq \|u\|_H^2, \qquad \forall u \in H.$$

Alors a est une forme sesquilinéaire coercitive et continue sur $H \times H$.
Il est facile de montrer que L est une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.9) a une solution unique u dans H et on déduit de (3.6) l'existence de $v \in H$.

Maintenant, en prenant $\phi \in C_0^\infty(\Gamma)$ dans (3.8) et l'intégration par parties, nous obtenons

$$\sum_{j\in J} \left(\int_{I_j} (-\partial_x^2 u_j + (1+\alpha_j)u_j - g_j - (1+\alpha_j)f_j)\overline{\phi_j} dx \right) = 0.$$

Ainsi, pour tout $j \in J$:

$$-\partial_x^2 u_j + (1+\alpha_j)u_j = g_j + (1+\alpha_j)f_j.$$

On en déduit donc

$$u \in H^2(\Gamma).$$

De plus, les conditions de Kirchhoff sont remplies en prenant $\phi \in H$ dans (3.8), tel que $\phi_1(0) \neq 0$ et en observant que $a(u, \phi)$ est un fonctionnel linéaire continue sur $L^2(\Gamma)$. Il reste maintenant à montrer que

$$\|y\|_X^2 \leq c\|z\|_X^2,$$

où $y = (u, v), z = (f, g)$ et c est une constante positive indépendante de y. En multipliant les premières équations de (3.7) par $\overline{u}$ puis en intégrant sur I_j, on obtient que

$$\int_{I_j} |\partial_x u_j|^2 dx + \int_{I_j} (1 + \alpha_j(x)) |u_j|^2 dx = \int_{I_j} (g_j + (1 + \alpha_j(x)) f_j) \overline{u_j} dx, j \in J.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$\|f_j\|_{L^2(I_j)} \|u_j\|_{L^2(I_j)} \leq \|f_j\|^2_{L^2(I_j)} + \frac{1}{4}\|u_j\|^2_{L^2(I_j)},$$

$$\|\alpha_j^{1/2} f_j\|_{L^2(I_j)} \|\alpha_j^{1/2} u_j\|_{L^2(I_j)} \leq \frac{1}{4}\|\alpha_j^{1/2} f_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|\alpha_j^{1/2} u_j\|^2_{L^2(I_j)},$$

et

$$\|g_j\|_{L^2(I_j)} \|u_j\|_{L^2(I_j)} \leq \frac{1}{2}\|g_j\|^2_{L^2(I_j)} + \frac{1}{2}\|u_j\|^2_{L^2(I_j)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \|\partial_x u_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|u_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|\alpha_j^{1/2} u_j\|^2_{L^2(I_j)} \\ \leq \quad & \|f_j\|_{L^2(I_j)} \|u_j\|_{L^2(I_j)} + \|g_j\|_{L^2(I_j)} \|u_j\|_{L^2(I_j)} + \|\alpha_j^{1/2} f_j\|_{L^2(I_j)} \|\alpha_j^{1/2} u_j\|_{L^2(I_j)} \\ \leq \quad & \|f_j\|^2_{L^2(I_j)} + \frac{1}{4}\|u_j\|^2_{L^2(I_j)} + \frac{1}{2}\|g_j\|^2_{L^2(I_j)} \\ + \quad & \frac{1}{2}\|u_j\|^2_{L^2(I_j)} + \frac{1}{4}\|\alpha_j^{1/2} f_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|\alpha_j^{1/2} u_j\|^2_{L^2(I_j)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\|\partial_x u_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|u_j\|^2_{L^2(I_j)} \leq c_1 \Big(\|f_j\|^2_{L^2(I_j)} + \|g_j\|^2_{L^2(I_j)} \Big),$$

où $c_1 = (4 + \|\alpha_j\|_{L^\infty(I_j)})$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\|y\|_X^2 &= \sum_{j\in J}\left(\|u_j\|^2_{H^1(I_j)} + \|v_j\|^2_{L^2(I_j)}\right)\\ &= \sum_{j\in J}\left(\|u_j\|^2_{H^1(I_j)} + \|u_j - f_j\|^2_{L^2(I_j)}\right)\\ &\leq \quad (2c_1+1)\sum_{j\in J}\left(\|f_j\|^2_{H^1(I_j)} + \|g_j\|^2_{L^2(I_j)}\right) = c\|z\|_X^2,\end{aligned}$$

où $c = 2c_1 + 1$.

En conclusion, $y = (u, v) \in D(A_\alpha)$ et $(I - A_\alpha)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Grâce au théorème de Lumer-Phillips, l'opérateur A_α génère un C_0-semi groupe de contractions.

On obtient donc le résultat d'existence et d'unicité suivante. □

Proposition 3.

Pour une donnée initiale $U_0 \in X$, il existe une solution unique

$$U \in C(\mathbb{R}_+, X)$$

du système (3.5)*. De plus, si $U_0 \in D(A_\alpha)$, alors il existe une solution unique*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, D(A_\alpha)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, X),$$

du système (3.5)*, et on a*

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{N_F+N_I} \int_{I_j} \alpha_j(x)|\partial_t u_j|^2 dx\right) ds, \quad \forall t > 0.$$

Où nous définissons l'énergie comme suit

$$E(t) \quad = \quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_F+N_I}\int_{I_j}\left(|\partial_t u_j(x,t)|^2 + |\partial_x u_j(x,t)|^2\right) dx.$$

Par conséquence, $E(t)$ est décroissant et le système (3.3) *est dissipatif.*

3.1.3 Stabilité asymptotique

Dans cette section, nous étudierons la stabilité asymptotique du système (3.3), c'est-à-dire,

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0, \quad \forall U_0 \in X,$$

sous l'hypothèse suivante sur le coefficient d'amortissement α,

$$(H) \quad \alpha_1(x) \geq L_1 > 0 \text{ et } \alpha_i(x) = 0, \quad j = 2, \ldots, N_F + N_I.$$

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, nous devons énoncer et prouver la proposition suivante.

Proposition 4.

Supposons que la fonction α satisfasse l'hypothèse (H), alors

(i) l'opérateur A_α n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire si et seulement si

$$\frac{\ell_i}{\ell_j} \notin \mathbb{Q}, \forall 2 \leq i \neq j \leq N_F. \tag{3.10}$$

(ii) Sous la condition (3.10)*, on a*

$$i\mathbb{R}^* \cap \sigma_{ess}(A_\alpha) = \emptyset,$$

où $\sigma_{ess}(A_\alpha)$ est le spectre essentiel de l'opérateur A_α et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour prouver la proposition ci-dessus, nous rappelons le critère de Weyl [17],[chapitre 10], :
$\lambda \in \sigma_{ess}(A_\alpha)$ si et seulement s'il existe une suite singulière (une suite qui n'a pas de sous-séquence convergente) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A_\alpha)$, telle que,

$$\|u_n\| = 1 \; et \; \lim_{n\to\infty} \|(\lambda I - A_\alpha)u_n\| = 0.$$

Preuve.

(i) On suppose que (3.10) est valable et nous prouvons que A_α n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.
Supposons que $\lambda := i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, est une valeur propre de A_α et que $y = (u, v) \in D(A_\alpha)$

est le vecteur propre correspondant. On a

$$\begin{cases} v_j = i\beta u_j, j = 1, \ldots, N_F + N_I, \\ \partial_x^2 u_1 - \alpha_1 v_1 = i\beta v_1, \\ \partial_x^2 u_j = i\beta v_j, j = 2, \ldots, N_F + N_I. \end{cases} \tag{3.11}$$

D'abord, nous montrons que zéro n'est pas une valeur propre de A_α. Pour $\beta = 0$, en multipliant $(3.11)_2$ et $(3.11)_3$ par u_j, en intégrant par parties et en sommant sur J, on trouve

$$\sum_{j \in J} \|\partial_x u_j\|^2_{L^2(I_j)} = 0,$$

on obtient $\|\partial_x u_j\|^2_{L^2(I_j)} = 0, \ \forall j \in J$. Par conséquent $\partial_x u_j(x) = 0$, p.p. $x \in I_j$.
En tenant compte du fait que $\partial_x^2 u_j$ et $\partial_x u_j$ appartiennent à $L^2(I_j)$, on en déduit que $u_j \in C^1(I_j)$ et donc $\partial_x u_j(x) = 0, \ \forall x \in I_j$. Grâce aux conditions aux limites, on obtient $u_j(x) = 0, \ \forall x \in I_j$.
Par conséquent, $u = 0$, puis en utilisant (3.11) on obtient $y = 0$.
Deuxièmement, pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ nous déduisons de la partie réelle du produit scalaire de $\langle i\beta y - A_\alpha y, y\rangle_X$ que

$$\Re\left(\langle A_\alpha y, y\rangle_X\right) = -\int_{I_1} \alpha_1 |v_1|^2 \, dx = 0.$$

Par conséquent, $v_1 = 0$ sur I_1. En utilisant la première équation de (3.11) et (3.1), nous obtenons $u_1 = 0$ sur I_1 et $u_j(0) = 0, \quad \forall j \in J$.
D'autre part, u_j satisfaisait le problème de Cauchy,

$$\begin{cases} u_j'' + \beta^2 u_j = 0, u_j(0) = 0, j = 2, \ldots, N_F + N_I, \\ u_j(\ell_j) = 0, \ \ j = 2, \ldots, N_F. \end{cases}$$

Puisque $u_j \in H^1(I_j), \ \forall j \in J_I$, la solution est

$$\begin{cases} u_j(x) = B_j \sin(\beta x), \ B_j \in \mathbb{R}, \ \ j = 2, \ldots, N_F, \\ u_j(x) = 0, \ j \in J_I, \end{cases}$$

En utilisant (3.1), (3.2) et le fait que (3.10) est satisfait, nous concluons que $B_j = 0,\ j = 2, ..., N_F$. Par conséquent, A_α n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

Ensuite, nous prouvons la réciprocité.

Soit $2 \leq p < q \leq N_F + NI$ Avec $\frac{\ell_p}{\ell_q} \in \mathbb{Q}$. Il existe $(\kappa_p, \kappa_q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{\ell_p}{\ell_q} = \frac{\kappa_p}{\kappa_q}$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Soit $y = (u_j, v_j)_{j=1,...,NF+NI}$ où

$$u_p(x) = \sin(\frac{k_p}{\ell_p}\pi x), u_q(x) = \sin(\frac{k_q}{\ell_q}\pi x), u_j = 0, j \notin \{p, q\},$$
$$v_p(x) = i\frac{k_p}{\ell_p}\pi \sin(\frac{k_p}{\ell_q}\pi x), v_q(x) = i\frac{k_q}{\ell_q}\pi \sin(\frac{k_q}{\ell_q}\pi x), v_j = 0, j \notin \{p, q\}.$$

Par conséquent, y est le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda = i\frac{\pi\ k_p}{\ell_p}$.

(ii) Nous définissons
$$v^n(x) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n^2} - 1\right), x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*,$$

où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ est une fonction lisse telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, et

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & pour \quad |x| \leq \dfrac{1}{2}, \\ 0 & pour \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Nous posons $y_n = (0, ..., 0, ..., v^n)$, il est alors clair que $y_n \in D(A_\alpha)$. De plus,

$$\|y_n\|_X^2 = \int_{-1}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 dt \geq 1.$$

Nous avons
$$\|A_\alpha y_n\|_X^2 \leq \frac{2}{n^4}\|\varphi'\|_\infty^2 \to 0.$$

Par conséquent,
$$\lim_{n\to\infty} \|A_\alpha y_n\|_X = 0.$$

Ainsi, 0 appartient au spectre essentiel de A_α.

(iii) Pour tout $\lambda = i\beta, , \beta \in \mathbb{R}^*$, et sous la condition (3.11), $(\lambda I - A_\alpha)$ est injectif. Sinon, on peut montrer que $(\lambda I - A_\alpha)$ est surjectif. Donc, $\lambda \notin \sigma(A_\alpha)$.

□

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.1.

Sous la condition (3.10) *et l'hypothèse* (H), *le* C_0*-semigroupe* $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ *généré par l'opérateur* A_α *est asymptotiquement stable sur* X.

Preuve.

En conséquence de la Proposition (8), l'opérateur A_α n'a pas de valeurs propres imaginaires pures et $\sigma(A_\alpha) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable. Suivant les critères généraux d'Arendt-Batty dans [12], le C_0-semigroupe $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ de contractions est fortement stable. □

3.1.4 Taux de décroissance de l'énergie

Dans cette section, nous prouvons le taux de décroissance de l'énergie associée au système (3.3), en utilisant une estimation particulière du résolvant basée sur un résultat de C. Batty, R. Chill et Y. Tomov dans [12]. Avant d'énoncer notre résultat principal de cette section, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 18.

Nous disons que les nombres réels ℓ_j, $j = 1, ..., N_F$ *vérifient les conditions* $(\mathcal{S})$ *si :*

- ℓ_j *sont linéairement indépendants sur le corps* $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels ;*
- *les rapports* $\dfrac{\ell_i}{\ell_j}$ *sont des nombres algébriques pour* $i, j = 1, \cdots, N_F$.

Notre résultat principal est énoncé comme suit.

Théorème 3.1.2.

Soit $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ *le* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe borné sur l'espace de Hilbert* X, *avec pour générateur* A_α. *Sous l'hypothèse* (H) *et si* ℓ_j, $j = 2, ..., N_F$ *satisfont la condition* $(\mathcal{S})$, *alors pour tout* $\xi > 0$, *nous avons*

$$\|T_\alpha(t)A_\alpha\,(I - A_\alpha)^{-2}\,\| = O(t^{-\frac{1}{2+\xi}}),\ \forall \xi > 0,\ \ t \to \infty.$$

Pour prouver le théorème ci-dessus, nous avons besoin de montrer la proposition suivante.

Proposition 5.

Sous l'hypothèse (H) *et la condition* (S), *les assertions suivantes sont vraies :*

(a) $\|R(i\beta, A_\alpha)\| = O\left(|\beta|^{-1}\right)$ *lorsque* $|\beta| \to 0$,

(b) $\|R\,(i\beta, A_\alpha)\,\| = O(|\beta|^{2+\xi})$ *lorsque* $|\beta| \to \infty$, $\forall \xi > 0$,

où $R(i\beta, A_\alpha) := (i\beta I - A_\alpha)^{-1}$.

Preuve.

Pour prouver (a) et (b), nous allons argumenter par l'absurde.

(a) Supposons que

$$\limsup_{\beta\in\mathbb{R},|\beta|\to 0} \||\beta|\big(i\beta I - A_\alpha\big)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \infty.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une séquence de nombres réels β_n avec $\beta_n \to 0$ (sans perte de généralité, supposons que $\beta_n > 0$), et une séquence de vecteurs $y^n = (u^n, v^n) \in D(A_\alpha)$ tels que

$$\|(u^n, v^n)\|_X = 1,$$

tels que

$$\beta_n^{-1}(i\beta_n I - A_\alpha)(u^n, v^n) =: (f^n, g^n) = o(1) \text{ dans } X.$$

Nous allons prouver que $\|(u^n, v^n)\|_X = o(1)$, ce qui contredit l'hypothèse sur (u^n, v^n).

(3.1.4) peut être écrite comme

$$\begin{cases} iu_j^n - \beta_n^{-1}v_j^n = f_j^n \to 0 \; dans \; H^1(I_j), \; j \in J, \\ \\ \left(i + \alpha_1\beta_n^{-1}\right) v_1^n - \beta_n^{-1}\partial_x^2 u_1^n = g_1^n \to 0 \; dans \; L^2(I_1), \\ \\ iv_j^n - \beta_n^{-1}\partial_x^2 u_j^n = g_j^n \to 0 \; dans \; L^2(I_j), \; j = 2, .., N_F + N_I. \end{cases} \tag{3.12}$$

Maintenant, nous divisons la preuve en deux étapes.

Étape 1 : Dans cette étape, nous prouvons que :

$$\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)}, \; \|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \; j \in J_I.$$

Nous prenons la partie réelle du produit intérieur de $(3.12)_3$ avec $\partial_x u_j^n$, dans $L^2(I_j)$, en gardant à l'esprit que $i\beta_n\overline{\partial_x u_j^n} = -\left(\overline{\partial_x v_j^n} + \beta_n\overline{\partial_x f_j^n}\right)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\beta_n^{-1}|\partial_x u_j^n(0)|^2 + \frac{1}{2}\beta_n^{-1}|v_j^n(0)|^2 = \Re\left\langle v_j^n, \partial_x f_j^n\right\rangle_{L^2(I_j)} + \Re\left\langle g_j^n, \partial_x u_j^n\right\rangle_{L^2(I_j)},$$

alors,

$$\beta_n^{-1}|\partial_x u_j^n(0)|^2, \; \beta_n^{-1}|v_j^n(0)|^2 = o(1), \tag{3.13}$$

puisque $\|\partial_x f_j^n\|_{L^2(I_j)}$, $\|g_j^n\|_{L^2(I_j)}$ convergent vers zéro et $\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)}$, $\|v_j^n\|_{L^2(I_j)}$ sont bornés.

D'une part, la partie réelle du produit intérieur de $(3.12)_3$ avec $q(x)\beta_n\partial_x u_j^n$, dans $L^2(I_j)$, où $q(x) = (\beta_n^{-1} - x)\,\mathbb{1}_{[0,\beta_n^{-1}]}$, nous donne

$$\frac{1}{2}\beta_n^{-1}|\partial_x u_j^n(0)|^2 + \frac{1}{2}\beta_n^{-1}|v_j^n(0)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^{\beta_n^{-1}} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx = o(1). \tag{3.14}$$

En substituant (3.13) dans (3.14), on obtient

$$\int_0^{\beta_n^{-1}} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx = o(1),$$

Donc,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N_0,\ \int_0^{\beta_n^{-1}} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, $\left(\partial_x u_j^n,\ v_j^n\right) \in L^2(I_j) \times L^2(I_j)$, nous déduisons

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall R > \delta,\ \int_R^{+\infty} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\beta_n^{-1} > \delta$,

$$\int_{\beta_n^{-1}}^{+\infty} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n \geq \max(N_1, N_0)$,

$$\int_0^{+\infty} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)},\ \|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1),\ \forall j \in J_I. \tag{3.15}$$

Étape 2 : Dans cette étape, nous visons à montrer que

$$\|v_j^n\|_{L^2(I_j)},\ \|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1),\ j \in J_F.$$

Tout d'abord, à partir de $(3.12)_1$, on peut facilement vérifier que

$$\|\partial_x v_j^n\|_{L^2(I_j)} \leq \beta_n \left(\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)} + \|\partial_x f_j^n\|_{L^2(I_j)}\right), \ j \in J_F.$$

Ensuite, nous déduisons

$$\|\partial_x v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \ j \in J_F, \tag{3.16}$$

puisque $\beta_n \to 0$, $\|\partial_x f_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1)$, et $\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)}$ est borné.

Deuxièmement, nous avons

$$\begin{aligned}\|v_j^n\|_{L^2(I_j)} &\leq C\|v_j^n\|_{L^\infty(I_j)} \leq C \max_{x\in I_j} \|\partial_x v_j^n\|_{L^1(x,\ell_j)} \\ &\leq C_1 \max_{x\in I_j} \|\partial_x v_j^n\|_{L^2(x,\ell_j)} \leq C_2 \,\|\partial_x v_j^n\|_{L^2(I_j)},\, C,\, C_1,\, C_2 > 0,\end{aligned}$$

et en vue de (3.16),

$$\|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \ j \in J_F. \tag{3.17}$$

Ensuite, on peut prendre le produit intérieur de $(3.12)_{2,3}$ avec v_j^n, dans $L^2(\Gamma)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$i\|v^n\|^2_{L^2(\Gamma)} - i\|\partial_x u^n\|^2_{L^2(\Gamma)} + \beta_n^{-1}\|\alpha_1^{\frac{1}{2}} v_1^n\|^2_{L^2(I_1)} = o(1). \tag{3.18}$$

En prenant la partie imaginaire de (3.18), on obtient

$$\|\partial_x u^n\|^2_{L^2(\Gamma)} - \|v^n\|^2_{L^2(\Gamma)} = o(1). \tag{3.19}$$

Maintenant, en insérant (3.15) et (3.17) dans (3.19), nous déduisons

$$\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1),\, j \in J_F. \tag{3.20}$$

Enfin, en utilisant (3.15), (3.17) et (3.20), nous concluons que $\|(u^n, v^n)\|_X = o(1)$, ce qui contredit l'hypothèse $\|(u^n, v^n)\|_X = 1$.

La preuve du point (a) est terminée.

(b) Nous supposons que

$$\limsup_{\beta\in\mathbb{R},|\beta|\to\infty} \||\beta^{-(2+\xi)}\big(i\beta I - A_\alpha\big)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \infty.$$

Alors, il existe une suite de nombres réels β_n avec $\beta_n \to \infty$, (sans perte de généralité, nous supposons que $\beta_n > 0$), et une suite de vecteurs $y^n = (u^n, v^n) \in D(A_\alpha)$ tels que

$$\|(u^n, v^n)\|_X = 1,$$

telles que

$$\beta_n^{2+\xi}(i\beta_n I - A_\alpha)(u^n, v^n) =: (f^n, g^n) = o(1) \quad \text{ dans } X. \tag{3.21}$$

Nous allons prouver que $\|(u^n, v^n)\|_X = o(1)$, ce qui contredit l'hypothèse sur (u^n, v^n). Nous avons (3.21) qui est équivalente à.

$$\begin{cases} \beta_n^{2+\xi}\big(i\beta_n u_j^n - v_j^n\big) = f_i^n \to 0, \text{ dans } H^1(I_j),\ j \in J, \\ \\ \beta_n^{2+\xi}\big(i\beta_n v_1^n - \partial_x^2 u_1^n + \alpha_1(x) v_1^n\big) = g_1^n \to 0, \text{ dans } L^2(I_1), \\ \\ \beta_n^{2+\xi}\big(i\beta_n v_j^n - \partial_x^2 u_j^n\big) = g_j^n \to 0, \text{ dans } L^2(I_j),\ j = 2, \cdots, N_F + N_I. \end{cases} \tag{3.22}$$

Tout d'abord, en utilisant le fait que $(\beta_n u_j^n)$ est bornée dans $L^2(I_j)$, pour tout $j \in J_F$, et $(3.22)_1$ pour obtenir

$$\beta_n^2 \|u_j^n\|^2_{L^2(I_j)} - \|v_j^n\|^2_{L^2(I_j)} = o(1), \forall j \in J_F. \tag{3.23}$$

Ensuite, notons que $f_j^n \to 0$ dans $H^1(I_j) \hookrightarrow C([0, \ell_j])$ pour tous les $j \in J_F$, ce qui implique que $|f_j^n(0)| = o(1)$, pour tous les $j \in J_F$. Ensuite, en raison de la condition de continuité, nous déduisons que

$$|f_j^n(0)| = o(1), \forall j \in J. \tag{3.24}$$

Maintenant, nous allons diviser le reste de la preuve en trois étapes.

Étape 1 : $j \in J_I$

En prenant la partie réelle du produit scalaire de $(3.22)_3$ avec $\partial_x u_j^n$ dans $L^2(I_j)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Re\left\langle \beta_n^{2+\xi}\left(i\beta_n v_j^n - \partial_x^2 u_j^n\right), \partial_x u_j^n\right\rangle_{L^2(I_j)} &= \frac{1}{2}\left[\beta_n^{2+\xi}|\partial_x u_j^n(0)|^2 + \beta_n^{2+\xi}|v_j^n(0)|^2\right] \\ &= \Re\left\langle v_j^n, \partial_x f_j^n\right\rangle_{L^2(I_j)} + \Re\left\langle g_j^n, \partial_x u_j^n\right\rangle_{L^2(I_j)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

À partir de (3.25), en utilisant la bornitude de $\partial_x u_j^n$ et v_j^n dans $L^2(I_j)$, et la convergence vers zéro de $\|\partial_x f_j^n\|_{L^2(I_j)}$, $\|g_j^n\|_{L^2(I_j)}$, on a

$$\begin{cases} \beta_n^{2+\xi}|\partial_x u_j^n(0)|^2 = o(1), \\ \\ \beta_n^{2+\xi}|v_j^n(0)|^2 = o(1), \end{cases} \tag{3.26}$$

$\forall \xi > 0$.

Par le même argument, nous calculons la partie réelle du produit scalaire de $(3.22)_3$ par $\beta_n^{-2-\xi} q\partial_x u_j^n$, où $q(x) = (\beta_n - x)\mathbb{1}_{[0,\beta_n]}$, $\forall x \in I_j$, nous trouvons

$$-\frac{1}{2}\left\{|\partial_x u_j^n(0)|^2 + \beta_n|v_j^n(0)|^2\right\} + \frac{1}{2}\int_0^{\beta_n}\left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx = o(1). \tag{3.27}$$

Notant (3.26) et (3.27), on obtient

$$\int_0^{\beta_n}\left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx = o(1).$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_0,\ \int_0^{\beta_n}\left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons que $\partial_x u_j^n \in L^2(I_j)$ et $v_j^n \in L^2(I_j)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \int_{\beta_n}^{+\infty}\left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour $n \geq \max(N_1, N_0)$,

$$\int_0^{+\infty} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + |v_j^n|^2\right) dx < \varepsilon.$$

Cela implique

$$\begin{cases} \|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \\ \\ \|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1). \end{cases}$$

Étape 2 : $j = 1$

Par la suite, en utilisant la condition de continuité, $(3.22)_1$, (3.24) et $(3.26)_2$, on a

$$\beta_n^{4+\xi}|u_j^n(0)|^2 = o(1),\ \forall j \in J. \tag{3.28}$$

En prenant la partie réelle du produit scalaire de (3.21) avec (u^n, v^n) dans X, on obtient

$$\beta_n^{2+\xi}\int_{I_1} \alpha_1 |v_1^n|^2 dx = o(1).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \beta_n^{1+\frac{\xi}{2}}\|v_1^n\|_{L^2(I_1)} = o(1), \\ \\ \|v_1^n\|_{L^2(I_1)} = o(1). \end{cases} \tag{3.29}$$

En utilisant (3.23), on dérive

$$\beta_n \|u_1^n\|_{L^2(I_1)} = o(1). \tag{3.30}$$

De plus, en multipliant $(3.22)_2$ par $\beta_n^{-2-\xi}\overline{u_1^n}$, en considérant $(3.22)_1$, une intégration par parties sur I_1 donne

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \left(i\beta_n v_1^n - \partial_x^2 u_1^n + \alpha_1(x) v_1^n\right) \overline{u_1^n} dx &= \partial_x u_1^n(0)\overline{u_1^n(0)} + \|\partial_x u_1^n\|^2_{L^2(I_1)} - \|v_1^n\|^2_{L^2(I_1)} \\ &\quad + \int_{I_1} \alpha_1 v_1^n \overline{u_1^n} dx + \int_{I_1} \beta_n^{-2-\xi} v_1^n \overline{f_1^n} dx \\ &= \int_{I_1} \beta_n^{-2-\xi} g_1^n \overline{u_1^n} dx. \end{aligned}$$

Le même argument que dans l'étape 1 conduit à

$$\Re\left(\partial_x u_1^n(0)\overline{u_1^n(0)}\right) + \|\partial_x u_1^n\|^2_{L^2(I_1)} = o(1). \tag{3.31}$$

De plus, grâce à $(3.22)_2$ et $(3.29)_2$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta_n^{-1}\|\partial_x^2 u_1^n\|_{L^2(I_1)} &\leq \left(1+\beta_n^{-1}\|\alpha_1\|_{L^\infty(I_1)}\right)\|v_1^n\|_{L^2(I_1)} \\ &+ \beta_n^{-3-\xi}\|g_1^n\|_{L^2(I_1)} = o(1). \end{aligned} \tag{3.32}$$

D'autre part, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg appliquée à $\partial_x u_1^n$, montre

$$\begin{aligned} \beta_n^{-1}\|\partial_x u_1^n\|_{L^\infty(I_1)} &\leq \|\beta_n^{-1}\partial_x^2 u_1^n\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I_1)}\|\beta_n^{-1}\partial_x u_1^n\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(I_1)} \\ &+ \beta_n^{-1}\|\partial_x u_1^n\|_{L^2(I_1)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

En insérant (3.32) dans (3.33) et en utilisant la bornitude de $\partial_x u_1^n$ dans $L^2(I_1)$, on obtient

$$\beta_n^{-1}|\partial_x u_1^n(0)| \leq \beta_n^{-1}\|\partial_x u_1^n\|_{L^\infty(I_1)} = o(1). \tag{3.34}$$

Ainsi, grâce à (3.28) et (3.34), nous avons

$$\left|\Re\left(\partial_x u_1^n(0)\overline{u_1^n}(0)\right)\right| \leq \frac{1}{4\beta_n^2}|\partial_x u_1^n(0)|^2 + \beta_n^2|u_1^n(0)|^2 = o(1). \tag{3.35}$$

Insérant (3.35) dans (3.31), nous obtenons immédiatement

$$\|\partial_x u_1^n\|_{L^2(I_1)} = o(1). \tag{3.36}$$

Étape 3 : Cette étape est consacrée à révéler

$$\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)},\ \|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1),\ \forall j = 2, .., N_F.$$

Nous mentionnons deux cas :

Cas 1 : Supposons que $\sin(\beta_n \ell_j) \neq 0$, $j = 2, .., N_F$.

En insérant $(3.22)_1$ dans $(3.22)_3$, on obtient

$$-\partial_x^2 u_j^n - \beta_n^2 u_j^n = \beta_n^{-\xi-2} g_j^n + i\beta_n^{-\xi-1} f_j^n, \; j = 2, ..., N_F. \tag{3.37}$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\begin{aligned} u_j^n(x) &= \frac{u_j^n(0)}{\sin(\beta_n \ell_j)} \sin(\beta_n(\ell_j - x)) \\ &+ \beta_n^{-\xi-3} \frac{\sin(\beta_n(\ell_j - x))}{\sin(\beta_n \ell_j)} \int_0^{\ell_j} \left[g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right] \sin(\beta_n(\ell_j - s)) ds \\ &- \beta_n^{-\xi-3} \int_0^{\ell_j - x} \left[g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right] \sin(\beta_n(\ell_j - x - s)) ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_x u_j^n(0) &= -\frac{\beta_n u_j^n(0)}{\sin(\beta_n \ell_j)} \cos(\beta_n \ell_j) \\ &- \beta_n^{-\xi-2} \frac{\cos(\beta_n \ell_j)}{\sin(\beta_n \ell_j)} \int_0^{\ell_j} \left[g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right] \sin(\beta_n(\ell_j - s)) ds \\ &- \beta_n^{-\xi-2} \int_0^{\ell_j} \left[g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right] \cos(\beta_n(\ell_j - s)) ds. \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\gamma_n = \max_{j=2,...,N_F} \prod_{k=2,\, j \neq k}^{N_F} |\sin(\beta_n \ell_j)|, \; \forall n \geq 1.$$

Lorsque ℓ_j, $j = 2, \ldots, N_F$ satisfont les conditions (S) telles que données dans la Définition 18, par le Corollaire A.10 de [16], nous obtenons

$$\gamma_n \geq \frac{C_\xi}{\beta_n^{1+\xi}}, \; \forall \xi \geq 0.$$

Soit j_0 $(2 \leq j_0 \leq N_F)$ tel que

$$\gamma_n = \prod_{j=2,\, j_0 \neq j}^{N_F} |\sin(\beta_n \ell_j)|, \; \forall n \geq 1.$$

Alors, pour tout $j \neq j_0$, $2 \leq j \leq N_F$, nous avons

$$|\sin(\beta_n \ell_j)| \geq \gamma_n.$$

Donc,

$$\frac{1}{|\sin(\beta_n \ell_j)|} \leq \frac{1}{\gamma_n} \leq \frac{\beta_n^{1+\xi}}{C_\xi}. \tag{3.39}$$

En insérant (3.39) dans (3.38), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\partial_x u_j^n(0)| &\leq \tfrac{\beta_n^{2+\xi}}{C_\xi} |u_j^n(0)| \\ &+ \tfrac{\beta_n^{-1}}{C_\xi} \left| \int_{I_j} \left(g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right) \sin(\beta_n(\ell_j - s)) ds \right| \\ &+ \beta_n^{-2-\xi} \left| \int_{I_j} \left(g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right) \cos(\beta_n(\ell_j - s)) ds \right|. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Notez que

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_j} \left(g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right) \sin(\beta_n(\ell_j - s)) ds \right| &= o(1), \\ \left| \int_{I_j} \left(g_j^n(\ell_j - s) + i\beta_n f_j^n(\ell_j - s) \right) \cos(\beta_n(\ell_j - s)) ds \right| &= o(1). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Ainsi, en remplaçant (3.28), (3.41) dans (3.40), nous trouvons

$$|\partial_x u_j^n(0)| = o(1), \forall j = 2, .., N_F, \ j \neq j_0. \tag{3.42}$$

Maintenant, nous prenons la partie réelle du produit intérieur de $(3.22)_2$ par $\beta_n^{-2-\xi}(x - \ell_1)\partial_x u_1^n$, avec l'aide de (3.28), (3.30) et (3.36), nous obtenons

$$|\partial_x u_1^n(0)|^2 = o(1). \tag{3.43}$$

Pour $j = j_0$, la condition de Kirchhoff avec $(3.26)_1$, (3.42) et (3.43), donne

$$|\partial_x u_{j_0}^n(0)| = o(1). \tag{3.44}$$

Cas 2. Nous supposons qu'il existe j_0, $2 \leq j_0 \leq N_F$ tel que $\sin(\beta_n \ell_{j_0}) = 0$. Ensuite, en raison de l'irrationalité des longueurs, il existe au plus un j_0, $2 \leq j_0 \leq N_F$ satisfaisant $\sin(\beta_n \ell_{j_0}) = 0$. Dans ce cas,

$$\gamma_n = \prod_{j=2,\, j\neq j_0}^{N_F} |\sin(\beta_n \ell_j)|, \, \forall n \geq 1.$$

La preuve est similaire à **Cas 1.**

Enfin, en prenant la partie réelle du produit intérieur de (3.37) par $q\partial_x u_j^n$ dans $L^2(I_j)$ pour tout $j = 2, \cdots, N_F$, où $q \in C^1([0,\ell_j], \mathbb{R})$, sera choisi plus tard, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Re \left\langle -\partial_x^2 u_j^n - \beta_n^2 u_j^n, q\, \partial_x u_j^n \right\rangle_{L^2(I_j)} &= -\frac{1}{2}\left[|\partial_x u_j^n|^2 q\right]_0^{\ell_j} + \frac{1}{2}\beta_n^2 |u_j^n(0)|^2 q(0) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{I_j} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + \beta_n^2 |u_j^n|^2\right) \partial_x q dx \\
&= \Re \left\langle \beta_n^{-2-\xi} g_j^n + i\beta_n^{-1-\xi} f_j^n, q\, \partial_x u_j^n \right\rangle_{L^2(I_j)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la borne de $\partial_x u_j^n$ et v_j^n dans $L^2(I_j)$, la convergence vers zéro de $\|\partial_x f_j^n\|_{L^2(I_j)}$, $\|g_j^n\|_{L^2(I_j)}$, nous obtenons

$$-\frac{1}{2}\left[|\partial_x u_j^n|^2 q\right]_0^{\ell_j} + \frac{1}{2}\beta_n^2 |u_j^n(0)|^2 q(0) + \frac{1}{2}\int_{I_j} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + \beta_n^2 |u_j^n|^2\right) \partial_x q dx = o(1). \tag{3.45}$$

Choisissez $q(x) = 2(x - \ell_j)$ dans (3.45)

$$-|\partial_x u_j^n(0)|^2 \ell_j - \beta_n^2 |u_j^n(0)|^2 \ell_j + \int_{I_j} \left(|\partial_x u_j^n|^2 + \beta_n^2 |u_j^n|^2\right) dx = o(1).$$

En vue de (3.28), (3.42), (3.44)

$$\|\partial_x u_j^n\|_{L^2(I_j)}, \, \beta_n \|u_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \, \forall j \in J_F. \tag{3.46}$$

De (3.23), (3.46), nous observons

$$\|v_j^n\|_{L^2(I_j)} = o(1), \, \forall j \in J_F.$$

Pour récapituler : dans (a) et (b) nous avons trouvé $\|y_n\|_X \to 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\|y_n\|_X = 1$. □

Preuve du Théorème 3.1.2.

D'après la Proposition 5, nous avons

$$\| \left(i\beta I - A_\alpha\right)^{-1} \| = O\left(|\beta|^{-1}\right) \ lorsque \ |\beta| \to 0,$$

et

$$\| \left(i\beta I - A_\alpha\right)^{-1} \| = O(|\beta|^{2+\xi}) \ lorsque \ |\beta| \to \infty, \ \forall \xi > 0,$$

Ainsi, une conséquence immédiate du Théorème 7.6 dans [12] donne

$$\|T_\alpha(t) A_\alpha \left(I - A_\alpha\right)^{-2} \| = O(t^{-\frac{1}{2+\xi}}), \ t \to \infty, \forall \xi > 0.$$

□

En conséquence du Théorème 4.1 et de la Remarque 8.5 dans [12], nous avons le Corollaire suivant.

Corollaire 1.

Étant donné $U_0 \in D\left(A_\alpha\right) \cap R\left(A_\alpha\right)$, où $R(A_\alpha) := A_\alpha(D(A_\alpha))$. Sous l'hypothèse (H) et supposons que ℓ_j, $j = 2, .., N_F$ satisfont la condition $(\mathcal{S})$, alors il existe des constantes $C, \ t_0 > 0$ telles que pour tout $t \geq t_0$,

$$\|T_\alpha(t) U_0\|_X \leq \frac{C}{t^{2+\xi}} \|U_0\|_X, \ \forall \xi > 0.$$

3.2 L'équation des ondes avec amortissement de Kelvin-Voigt

3.2.1 Introduction

Comme indiqué dans le probléme précédent. On considére une équation d'onde amortie par l'amortissement de type Kelvin-Voigt qui est posée sur un réseau de cordes mixtes qui seront dénotées par Γ, avec $N_F \in \mathbb{N}^*$ bords finis $\{I_j\}_{j=1}^{N_F}$ à laquelle nous attachons $N_I \in \mathbb{N}^*$ bords infinis $\{I_j\}_{j=N_F+1}^{N_F+N_I}$, tous connectés à un seul sommet. Nous désignons par $\{\ell_j\}_{j=1}^{N_F}$ les longueurs des arêtes finies. On peut identifier chaque arête I_j avec l'intervalle $(0, \ell_j)$, le sommet avec 0 et les bords infinis avec l'intervalle semi-infini $(0, +\infty)$. Les bords sont couplés à 0 par les conditions de transmission suivantes

$$\begin{cases} u_i(0,t) = u_j(0,t), \ t > 0, \quad i, j = 1, \ldots, N_F + N_I \\ \\ \sum_{j=1}^{N_F+N_I} \partial_x(0,t) = 0, \ t > 0. \end{cases} \tag{3.47}$$

En outre, nous imposons la condition limitée de Dirichlet aux extrémités des bords finis.

$$u_j(\ell, t) = 0, \ t > 0, \quad j = 1, \ldots, N_F. \tag{3.48}$$

Le problème peut donc être décrit comme suit

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_j - \partial_x^2 u_j + \partial_x(\alpha_j(x)\partial_{xt} u_j) = 0, \ (x,t) \in I_j \times \mathbb{R}_+, \quad j = 1, \ldots, N_F + N_I, \\ \\ u_i(0,t) = u_j(0,t), t > 0, \quad i, j = 1, \ldots, N_F + N_I, \\ \\ u_j(\ell_j, t) = 0, t > 0, \quad j = 1, \ldots, N_F, \\ \\ \sum_{j=1}^{N_F+N_I} \partial_x u_j(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ \\ u_j(x,0) = u_j^0(x), \quad \partial_t u_j(x,0) = u_j^1(x), \quad x \in I_j, \quad j = 1, \cdots, N_F + N_I, \end{cases} \tag{3.49}$$

Où $\alpha(.)$ la fonction de coefficient d'amortissement satisfaisant à

$$\begin{cases} \alpha(x) = (\alpha_j(x))_{1 \le j \le N_F + N_I} \in L^\infty(\Gamma), \\ \\ \alpha_j(x) \ge 0, \ \forall j = 1, ..., N_F + N_I. \end{cases} \tag{3.50}$$

Le problème (3.49) peut être reformulé sous forme d'un problème de Cauchy ;

Reformulation système (3.49) **vers un problème de Cauchy**

On pose $X = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{N_F+N_I}, \partial_t^2 u_1, \partial_t^2 u_2, \partial_t^2 u_3, \ldots, \partial_t^2 u_{N_F+N_I})$.
Ainsi, le système devient

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \tag{3.51}$$

avec

$$AX = \begin{pmatrix} \partial_{xt} u_i \\ \\ \partial_x^2 u_i - \partial_x(\alpha(x)\partial_{xt} u_i) \end{pmatrix}.$$

$$X_0 = (u_i^0, u_i^1), \quad i = 1, 2, 3. \ldots, N_F + NI,$$

Cadre fonctionnel du problème de Cauchy

Nous définissons l'espace de Hilbert

$$H = \begin{cases} f \in H^1(\Gamma) \\ \\ f_i(\ell_j) = 0, \forall j \in J_F, \\ \\ f_i(0) = f_j(0), \forall i, j \in J. \end{cases}$$

Pour l'espace énergétique du système, nous considérons l'espace d'Hilbert complexe

$$X = H \times L^2(\Gamma),$$

muni du produit scalaire,

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_X = \sum_{j \in J} \int_{I_j} \left(\partial_x f_j^1 \partial_x \overline{f_j^2} + g_j^1 \overline{g_j^2} \right) \, dx,$$

où $Y_\kappa = (f^\kappa, g^\kappa), \kappa = 1, 2$. Nous définissons également l'espace des fonctions

$$D(A) = \left\{ Y = (u, v) \in H \times H; u \in H^2(\Gamma), \partial_x(\partial_x u - \alpha v) \in L^2(\Gamma), \sum_{j \in J} \partial_x u_j(0) = 0 \right\},$$

où

$$A\begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \\ \partial_x(\partial_x u - \alpha v) \end{pmatrix}, \forall (u,v) \in D(A),$$

et

$$\alpha v := (\alpha_j v_j)_{j \in J}.$$

Proposition 6.

Supposons que (3.4) soit satisfait, alors l'opérateur A génère un C_0-semi groupe de contractions $(T)_{t\geq 0}$

Preuve.

La démonstration est identique à celle du propositon (2) précédent. Nous utilisons la même méthode :

1. On montre que l'operateur A est dissipatif, car

$$\Re\left(\langle AU, U\rangle_X\right) = -\sum_{j\in J}\int_{I_j} \alpha_j |\partial_x v_j|^2 dx \leq 0.$$

2. On montre que l'operateur $(I - A)$ est surjective,

   En effet, Pour tout $(f, g) \in H$, nous résolvons l'équation

$$(I - A)(u, v) = (f, g).$$

   Ce problème se réduit à une forme bilinéaire

$$a(u, w) = l(w). \tag{3.52}$$

   avec,

$$a(u,w) = \sum_{j\in J}\left(\int_{I_j} u_j \overline{w_j} dx + \int_{I_j} \left(1 + \alpha_j(x)\right) \partial_x u_j \overline{\partial_x w_j} dx\right)$$

   et

$$L(w) = \sum_{j\in J}\int_{I_j} \left(g_j + f_j\right)\overline{w_j} + \alpha_j(x)\partial_x f_j \overline{\partial_x w_j} dx.$$

   On a

$$a(u,u) \geq \|u\|_H^2, \qquad \forall u \in H.$$

Alors a est une forme sesquilinéaire coercitive et continue sur $H \times H$.

Il est facile de montrer que L est une forme linéaire continue sur H.

$$|a(u,w)| \leq C\|u\|_H \|w\|_H$$

$$|l(w)| \leq K\|w\|_H;$$

avec

$$C = 1 + \max_{1 \leq j \leq N_0+N_1} \|a_j\|_1, \quad K = \max_{1 \leq j \leq N_0+N_1} \|f_j + g_j\|_{L^2};$$

$$\|a_j\|_1 \|f_j\|_{L^2}.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.52) a une solution unique u dans H et on déduit l'existence de $v \in H$. Puis, le théorème de Lumer-Phillips implique que l'opérateur A génère un C_0-semi groupe de contractions.

□

On obtient donc le résultat d'existence et d'unicité suivante.

Proposition 7.

Pour une donnée initiale $U_0 \in X$, il existe une solution unique

$$U \in C(\mathbb{R}_+, X)$$

du système (3.51)*. De plus, si $U_0 \in D(A_\alpha)$, alors il existe une solution unique*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, D(A_\alpha)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, X),$$

du système (3.51)*, et on a*

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{N_F+N_I} \int_{I_j} \alpha_j(x) |\partial_{xt} u_j|^2 dx \right) ds, \quad \forall t > 0.$$

Où nous définissons l'énergie comme suit

$$E(t) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_F+N_I} \int_{I_j} \left(|\partial_t u_j(x,t)|^2 + |\partial_x u_j(x,t)|^2 \right) dx.$$

Par conséquence, $E(t)$ est décroissant et le système (3.51) est dissipatif.

3.2.2 Stabilité asymptotique

Proposition 8.

Supposons que la fonction α satisfasse l'hypothèse (H), alors

(i) l'opérateur A n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire si et seulement si

$$\frac{\ell_i}{\ell_j} \notin \mathbb{Q}, \forall 2 \leq i \neq j \leq N_F. \tag{3.53}$$

(ii) Sous la condition (3.10), on a

$$i\mathbb{R}^* \cap \sigma_{ess}(A = \emptyset,$$

où $\sigma_{ess}(A)$ est le spectre essentiel de l'opérateur A et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Preuve.

Pour consulter la démonstration en détail, nous invitons le lecteur à se référer à l'article [14]. □

3.2.3 Taux de décroissance de l'énergie

Le résultat principal est énoncé comme suit.

Théorème 3.2.1.

Soit $(T_\alpha(t))_{t\geq 0}$ le $\mathcal{C}_0$-semi-groupe borné sur l'espace de Hilbert X, avec pour générateur A_α. Sous l'hypothèse (H) et si ℓ_j, $j = 2, ..., N_F$ satisfont la condition $(\mathcal{S})$, alors pour tout $\xi > 0$, nous avons

$$\|T_\alpha(t) A_\alpha \left(I - A_\alpha\right)^{-2}\| = O(t^{-\frac{1}{2+\xi}}), \forall \xi > 0, \ t \to \infty.$$

Preuve.

Pour consulter la démonstration en détail, nous prions le lecteur de se référer à la publication [14]. □

Remarque 6.

À partir de ce qui précède, nous concluons que notre réseau en étoile conserve sa stabilité et que son énergie décroît à la même vitesse lorsque le dissipateur passe du type visqueux à celui de Kelvin-Voigt.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons pu rappeler quelques notions de base sur différents espaces nottament les espaces de Banach, Hilbert et Sobolev. Puis nous avons introduit la notion de semi-groupes et l'étude de la stabilité pour ces derniers. Pour finir nous avons intoduit deux systémes en réseau étoile nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution en transformant ce dernier en un probléme de Cauchy, et grâce à l'approche des semi-groupes nous avons démontré que la stabilité forte des solutions de notre système dépend de la condition d'irrationalité des longueurs bornées.

Concrètement, la nature du semi-groupe associé au même système change avec le changement de régularité du coefficient de dissipation, car nous trouvons toujours que le taux de décroissance polynomiale dépend d'un paramètre $\xi > 0$.

Bibliographie

[1] Aabraham, C. S and Seifert, D. Optimal energy decay in a one-dimensional wave-heat system with infinite heat part. Jornal of Mathematical Analysis and Applications. **482(2)**, 123-563. 2020.

[2] Adams, R. A. and Fournier, J. F. Sobolev spaces. Elsevier/Academic Press, Amsterdam. **140**. 2003.

[3] Ammari, K. Henrot,A. and Tucsnak, M. Optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330**, 275-280. 2000.

[4] Ammari, K. Henrot, A. and Tucsnak, M. Asymptotic behaviour of the solutions and optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string, Asymptot. Anal. **28,**, 215-240. 2001.

[5] Ammari, K and Jellouli, M. Stabilization of star-shaped networks of strings, Differential Integral Equations, **17**, 1395-1410. 2004.

[6] Ammari, K. Liu, Z and Shel, F. Stability of the wave equations on a tree with local Kelvin–Voigt damping. *In semigroup Forum.* **100**, 364–382. 2002.

[7] Ammari, K and Mercier, D. Boundary feedback stabilization of a chain of serially connected strings, Evol. Equ. Control Theory. **4(1)**, 1-19. 2015.

[8] Ammari, K and Nicaise, S. Stabilization of elastic systems by collocated feedback, Springer. **2124,** 2014.

[9] Ammari,K and Shel, F. Stability of elastic multi-link structures, Springer. 2022.

[10] Arendt, A and Batty, C.J. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups, Transacton of the American Mathematical Society. **306(2)**, 837-852. 1988.

[11] Assel, R and Ghazel, M. Energy decay for the damped wave equation on an unbounded network, Evol. Equ. Control Theory. **7**, 335-351. 2018.

[12] Batty, C. J and Chill, R and Tomilov,Y. Fine scales of decay of operator semi-groups, Jornal of the European Mathematical Society. **18(4)**, 853-929. 2016.

[13] Bchatnia, A and Boukhatem, A. Stability of a damped wave equation on an infinite star-shaped network. Evolution Equations and Control Theory, **12(1)**. 2023.

[14] Bchatnia, A., El Mufti, K., and Yahia, R. Stability of an infinite star-shaped network of strings by a Kelvin–Voigt damping. Mathematical Methods in the Applied Sciences, **45(4)**, 2024-2041. 2022.

[15] Brezis, H. Analyse fonctionnelle. théorie et applications, collection mathémathiques appliquées pour la maitrise. 1983.

[16] D'ager, R. and Zuazua, E. Wave Propagation. Observation and Control in 1-d Flexible Multi structures, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[17] Hislop, B. D. and Sigal, I.M. Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators. Springer Science and Business Media. **113**. 2012.

[18] Liu, Z. and Zheng, S. Semigroups associated with dissipative systems, CRC Press. **398**. 1999.

[19] Pazy, A. Semigroups of linear operator and applications to Partial Differential equation. Springer-Verlag, New-York,**44**. 1983.

[20] Wolf, F. On the essential spectrum of partial differential boundary problems, Communication on Pure and Applied Mathematicas, **12(2)**, 211-228.1959.