الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـــعبيــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم العـالـــي و الـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّــار ثـلـيـجـي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــة الـعـلـــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:
Djerbouà Hayet

THEME

Les matrices de Toeplitz

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. Mokhtari Abdelkader	*Professeur*	*Président*
Mr. Yaagoub Ameur	*M.A(A)*	*Examinateur*
Mr. Mhani	*M.A(A)*	*Examinateur*
Mme. Bendaoud Zohra	*M.C(A)*	*Encadreur*
Mlle. Korrichi Fatima…	*M.A(A)*	*Co-encadreur*

Année Universitaire 2016/2017

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université Amar Teliji de Laghouat

Faculté des sciences
Département mathématique et informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématique et informatique (MI)
Filière : Mathématique
Option : Analyse Mathématique

PRÉSENTÉ PAR :

Djerboua Hayet

Thème :

Les matrices de Toeplitz

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

xxx	Université de Laghouat	Président
xxx	Université de Laghouat	Examinateur
xxx	Université de Laghouat	Examinateur
xxx	Université de Laghouat	Encadreur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de mathématique a l'université de Laghouat sous la direction de Madame Z.Bendaoued. Mes vifs remerciements s'adressent à mon encadreur Korrichi Fatima pour son aide durant mon travail.
Je remercie les membres de jury Monsieur Mokhtari Abdel kader , Monsieur Omhani Ali et Monsieur Yagoub Ameur, qui ont accepté d'examiner mon travail.
Je remercie Monsieur Rahmoune Abdel Aziz et Madame Boukhatem Yamna pour leurs conseils, ainsi que tous les enseignants de département de mathématique qui nous ont formés durant notre cursus universitaire.
Mes profonds remerciements vont a mes cher parents qui m'ont aidée par leurs prières ainsi que tous les membres de ma famille.

Dédicaces

Je dédie cet humble travail au département de mathématiques et informatique.

A mon père Mhamed et ma mère qui ont su m'inspirer la bonne éducation et qui ont attendu avec impatience le fruit de ma récolte.

A ma jumelle Samira qui m'a constamment soutenue. Aussi bien mes grand-mères Zohra et Meriem.

A mes frères : Abed, Ahmed, Zakaria.

A mes oncles : Ahmed, Bakir, Dahou, Mohamed et Morsli.

A mes cousins : Amir, Aymen, Fouad, Khaled, Nouraddine et Yacine.

A mes cousines : Aya, Bouchra, Dima, Djouhaina, Imen, Noura, Mira, Wafaa, Wiam, Zahra et Zineb.

A mes chères amies : Chaimaa, Halima, Khadija, Soumia, Souad, Zineb.

A tous les collègues qui n'ont jamais cessé de me rappeler que le sérieux est la seule arme de la réussite.

A la famille Djerboua et la famille Mesbah.

Table des matières

Notations

$\mathbb{D}$	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\mathbb{T}$	le cercle unité .
$\widehat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$.
$Hol(\mathbb{D})$	l'espaces des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$.
$\mathcal{M}$	un tribu dans un ensemble Ω.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espaces des fonctions bornée dans $\mathbb{T}$.
$L(E, F)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F.
$L(E)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans E.
H	l'espace de Hilbert.
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornés.
u	fonction intérieure.
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2.
P_u	projection orthogonale de L^2 sur K_u^2
μ	une mesure positive.
K_λ	noyau reproduisant de H.
L_φ	l'opérateur de Laurent de symbole φ.
T_φ	l'opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ.
K_u^2	l'espace modèle.
K_u^∞	$= K_u^2 \cap H^\infty$.
A_φ^u	l'opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u^2 de symbole φ.

Introduction

Dans le cadre d'un mémoire de master, j'ai mené une étude pour mettre en lumière les opérations suivantes pour obtenir une matrice de Toeplitz à partir d'un opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy.
On note par $\mathbb{D}$ le disque unité, et $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. On appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ, et on note T_ϕ, l'opérateur défini par :

$$\begin{array}{rccc} T_\phi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & f & \longrightarrow & T_\phi f = P_{H^2}(\phi f) \end{array}$$

où H^2 l'espace de Hardy est le sous espace de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$. et P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$sur $H^2(\mathbb{T})$.
Le but de ce travail :
Comment peut on obtenir une matrice Toeplitz à partir d'un opérateur de Toeplitz ?

Mon travail s'organise en quatre chapitres :
J'ai consacré le premier chapitre au préliminaire des concepts suivants :(l'espace de Hilbert, les espaces de Hardy H^p en citent la définition de $L^2(\mathbb{T})$ qui est l'ensemble des fonctions de carrés intégrables sur $\mathbb{T}$, et $H^2(\mathbb{T})$ c'est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier de signe négatifs sont nuls, autrement dit :

$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$ avec : $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$, ainsi que l'identification entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$.

Le deuxième chapitre traite l'opérateur et la matrice de Toeplitz, l'opérateur de Laurent et sa matrice.

Le troisième chapitre nous étudions l'espace modèle, les opérateurs de Toeplitz tronqués, les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α et leurs représentations matricielles.

Dans le dernier chapitre on a proposé une application sur les matrices de Toeplitz.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace de Hilbert

[7] Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, on appelle produit scalaire sur E toute forme symétrique, bilinéaire et définie positive. C'est à dire :

$$\begin{array}{cccc} \langle .,. \rangle & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longrightarrow & \langle x,y \rangle \end{array}$$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, x^{'}, y \in E \langle \alpha x + \beta x^{'}, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x^{'}, y \rangle$ (linéaire à gauche)
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x, y, y^{'} \in E \langle x, ay + by^{'} \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, y^{'} \rangle$ (linéaire à droite)
- $\forall x, y \in E \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrie)
- $\forall x \in E \langle x, x \rangle \geq 0$ (définie positive)
  $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

$*$ On dit que le couple $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace prés-hilbertien, si E est un espace vectoriel et $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.

$*$ Si l'espace E est de dimension fini, on appelle $(E, \langle .,. \rangle)$ espace euclidien, de même, si a la place du corps $\mathbb{R}$ on prend $\mathbb{C}$ on aboutit a des espaces pré-hilbertien complexe.

La proposition suivante fait le lien entre les espaces pré-hilbertien et les espaces normés.

Proposition. 1.1.1. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace prés-hilbertien alors l'expression*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}},$$

définie une norme sur E, on dira que $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.1.1. *On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert tout espace pré-hilbertien complet.*

Exemple 1.1.1. *1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien défini par :*

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

On a :

$$\langle x, y\rangle = x.y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

2. L'espace $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ constitue par les fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in L_2(\mu), \langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x),$$

c'est l'un des important exemples d'espaces de Hilbert, la norme associée est :

$$\| f \|_2 = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = (\int_\Omega | f(x) |^2 \, d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$$

.

Théorème 1.1.1. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz)*** *Pour tout $x, y \in H$, on a :*

$$| \langle x, y\rangle | \leq \| x \| \| y \|.$$

Théorème 1.1.2. ***(Identité du parallélogramme)*** *Pour tout $x, y \in H$, on a :*

$$(\| x + y \|)^2 + (\| x - y \|)^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Proposition. 1.1.2. *Un espace pré-hilbertien H est un espace vectoriel normé avec la norme $\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ induite par le produit scalaire.*

Preuve. *i-* $\|x\| \geq 0 : \|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x\rangle^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 \langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$

iii- $(\| x + y \|)^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$$\begin{aligned} &\leqslant |\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle| \\ &\leqslant |\langle x, x\rangle| + |\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| + |\langle y, y\rangle| \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Longrightarrow \|x + y\| &\leqslant \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2. *Lorsqu'un espace pré-hilbertien H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que H est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1.2.

1. *L'espace euclidien $C^k = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) : x_i \in \mathbb{C}, i = 1, ..., k....\}$, muni du produit scalaire :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y_i} \ ,$$

est un espace de Hilbert .

2. *L'espace*

$$l^2 = \{x = (x_j)_{j>0}, x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} \mid x_j \mid^2 < +\infty\} \ ,$$

muni du produit scalaire,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \ ,$$

est un espace de Hilbert.

Opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ on appelle opérateur de E dans F, toute application T défini de E dans F par :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{T} & : \mathrm{E} & \rightarrow & \mathrm{F} \\ & x & \rightarrow & \mathrm{T}(x) \end{array}$$

$D(T)$ désigne le domaine de définition de l'opérateur T

Définition 1.1.3. *L'opérateur T est dite linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \, \mu, \lambda \in \mathbb{K}, \, T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Théorème 1.1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit T un opérateur linéaire de E dans F, alors :*

T est borné(continue) $\Leftrightarrow \exists \mathcal{M} > 0, \forall x \in E, \parallel T(x) \parallel_F \leq \mathcal{M} \parallel x \parallel_E$ le plus petit des nombres $\mathcal{M}$ vérifient cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur T et se note $\parallel T \parallel$

$$\| T \| = \{\inf \mathcal{M} \geq 0, \| Tx \|_F \leq \mathcal{M} \| x \|_E \}$$

Remarque 1.1.1. *L'ensemble $L(E,F)$ de tous les opérateurs linéaires bornés, si E et F sont des espaces vectoriels normés, alors $L(E,F)$ est aussi un espace vectoriel normé on note $L(E)$ si $E = F$.*

Définition 1.1.4. *Soient T et T_0 deux opérateurs linéaires bornés, T de E dans F et T_0 de F dans G, on appelle produit T_0T de ces opérateurs, l'opérateur T_1 qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'élément $z = T_0T(x) \in G$*

1. *le domaine de définition de $D(T_1)$ de l'opérateur T_1 est constitue par les $x \in D(T)$ tels que $Tx \in D(T_0)$*

2. *si T et T_0 sont des opérateurs bornés dans des espaces vectoriels normés, l'opérateur TT_0 est aussi borné et : $\| T_0T \| \leq \| T_0 \| . \| T \|$*

Définition 1.1.5. *On appelle produit KT d'un opérateur T par un scalaire K l'opérateur qui à un élément x fait correspondre l'élément KT_x*

Théorème 1.1.4. *Pour tout opérateur borné T, on a :*

$$\begin{aligned} \| T \| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \| T_x \|_F \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

Théorème 1.1.5. *Soit H un espace de Hilbert, soit T un opérateur linéaire borné de H, T est dit compact si et seulement s'il existe une suite d'opérateur borné (F_n) de rang finie tel que : $\| T - F_n \| \to 0$*

Définition 1.1.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $T \in L(E,F)$, l'unique application linéaire $T^* \in L(F,E)$ telle que pour tout $x \in E, y \in F$ on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ s'appelle l'adjoint de T, on a de plus $\| T^* \| = \| T \|$*

Proposition. 1.1.3. *Soient E et F deux espaces de Hilbert, l'application $T \to T^*$ est isométrie de $L(E,F)$ dans $L(F,E)$, elle est linéaire, de plus $\forall T \in L(E,F)$*

1. *$(T^*)^* = T$*

2. *$\| T^*T \| = \| T \|^2$*

3. *$(TS)^* = S^*T^*$*

Preuve. *Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tout $x \in E, y \in F, T_1, T_2 \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$\begin{aligned} \langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, (T_1^*)(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}(T_2)^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^* + \overline{\lambda}(T_2)^*(y)\rangle \end{aligned}$$

ainsi $T \to T^*$ est linéaire, elle est isométrie d'après la proposition de l'unicité :

1. Montrons que $(T^*)^* = T$, c-à-d on montrons que $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$
   on a :

$$\begin{aligned} \langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle \end{aligned}$$

2. Montrons que $\| T^*T \| = \| T \|^2$, tout d'abord on appelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier :
   $\| T^*T \| \leq \| T^* \| \| T \| = \| T^2 \|$, d'autre part
   $$\begin{aligned} \| T^*T \| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \| T^*T(x) \| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} | \langle T^*T(x), y\rangle | \\ &\geqslant \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle T(x), T(x)\rangle | = \| T \|^2 . \end{aligned}$$
   On a donc l'égalité $\| T^*T \| = \| T \|^2$

3. Enfin pour vérifier $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer pour tout
   $x \in E$ et $y \in F$, $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$.

   On a :

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle,\end{aligned}$$

donc on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$

Définition 1.1.7. *l'espace de Hilbert H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Théorème 1.1.6. *Soit H l'espace de Hilbert séparable, il possède une base et méme une infinité de bases orthonormales, toutes ses bases possèdent le méme nombre d'élément appelé la dimension de l'espace de Hilbert H.*

Théorème de représentation de Riesz.

Théorème 1.1.7. *Soit T un opérateur linéaire continu sur l'espace de Hilbert H, alors il existe $g \in H$, pour tout $f \in H$ on a :*

$$T(f) = \langle f, g\rangle,$$

de plus :

$$\| T \| = \| g \|,$$

(où $\| T \|$ est la norme de l'opérateur T et $\| g \|$ est la norme de l'espace de Hilbert de g).

Preuve. *Supposons que H est séparable et démontrons ce théorème sur $\mathbb{R}$, comme H est séparable on peut choisir une base orthonormal $\{\phi_j\}_{j\geq 1}$ de H.*

Soit T un opérateur linéaire continue et posons $a_j = T(\phi_j)$, soit $c_j = \langle f, \phi_j\rangle$, et $f_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j$ comme ϕ_j forme une base de H, et T est linéaire alors :

$$T(f_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j, \tag{1.1}$$

et on sait que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ comme T est borné on a :

$$\| \mathbb{T}(f) - \mathbb{T}(f_n) \| \leq \| T \| \| f - f_n \|, \tag{1.2}$$

car $\| f - f_n \| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \to \infty$ *donc d'après l'égalité* (1.1) *et l'inégalité* (1.2) *on a :*

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(f_n) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j c_j, \tag{1.3}$$

montrons que les a_j *sont carrés sommables* $|T(f)| \leq \| T \| \| f \|$ *c-à d :*

$$|\sum_{j=1}^{n} c_j a_j| \leq \| \mathbb{T} \| (\sum_{j=1}^{\infty} (c_j)^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

l'équation (1.4) doit être vérifier pour toute c_j *carré sommable, posons* N *un entier positif et posons :*

$$c_j = \begin{cases} a_j & si \quad j \leq N \\ 0 & si \quad j > N \end{cases}$$

Il est clair que comme la suite est carré sommable, donc l'équation (1.4) est obtenue :

$$| \sum_{j=1}^{n} (a_j)^2 | \leq \| T \| (\sum (a_j)^2)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

$$(\sum_{j=1}^{N} (a_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \| T \|, \tag{1.5}$$

alors a_j *est carré sommable car la suite des sommes partielles est borné, comme* a_j *est carré sommable, la fonction*

$$g = \sum_j a_j \phi_j \ ,$$

est bien définie comme élément de H *et :*

$$T(f) = \sum_j a_j c_j = \langle f, g \rangle \ ,$$

finalement l'équation (1.5) nous donne $\| g \| \leq \| T \|$ *mais d'après l'inégalité de* ***Cauchy Schwarz*** *on a aussi,*

$$| T(f) | = | \langle f, g \rangle | \leq \| f \| . \| g \|,$$

où :

$$\frac{| T(f) |}{\| f \|} \leq \| g \| \Longrightarrow \| T \| \leq \| g \|,$$

donc :

$$\| T \| = \| g \|.$$

Définitions et propriétés.

Orthogonalité.

Définition 1.1.8. *Deux vecteurs x, y d'un espace hilbertien H sont orthogonaux, et on écrit*

$$x \perp y \text{ si } \langle x, y \rangle = 0$$

Définition 1.1.9. *Deux sous espaces F_1, F_2 d'un hilbertien H sont orthogonaux si :*

$$\forall x \in F_1, \forall y \in F_2 : \langle x, y \rangle = 0.$$

Proposition. 1.1.4. *Soit F un sous espace d'un hilbertien H, l'ensemble des vecteurs de H orthogonaux a F forme un sous espace vectoriel de H, noté $F^{\perp}$*

$$F^{\perp} = \{x \in H, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}$$

Proposition. 1.1.5. ***(Théorème de Pythagore)***

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n vecteurs d'un espace Hilbertien H orthogonaux deux à deux, alors :

$$(x_1, x_2, ..., x_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle + ... + \langle x_n, x_n \rangle$$

Projection orthogonale.

Théorème 1.1.8. ***(Théorème de Riez de la projection orthogonale)***

Soit H l'espace de Hilbert, et F un sous espace vectoriel fermé, soit x_0 un point de H n'appartient pas à F alors le problème $\inf_{x \in F} \parallel x_0 - x \parallel$ possède une seule solution notée $\overline{x} \in F$ et telle que $(x_0 - \overline{x}) \in F^{\perp}$ cet élément $\overline{x}$ est appelé projection orthogonale de x_0 sur F et l'application associée noté $(p_F(x_0))$.

Le résultat qui permet de manipuler l'application de projection orthogonale est le suivante :

Proposition. 1.1.6. *L'application qui à un point de H fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé F possède les propriétés suivantes :*

1. $P_F(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F(x) + \beta P_F(y)$

2. $P_F + (P_F)^{\perp} = idH$

3. $(\| x \|)^2 = (\| P_F(x) \|)^2 + (\| (id - P_F)(x) \|)^2$

4. $P_F(x_n) \to P_F(x), si \| x_n - x \| \longrightarrow 0$

5. $x \in F \Leftrightarrow P_F(x) = x$

6. $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow P_F(x) = 0$

7. $P_F(P_F)(x) = P_F(x)$

8. $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow P_{F_1}(P_{F_2})(x) = P_{F_1}(x)$

Théorème 1.1.9. *Soit $H = F \bigoplus F^{\perp}$ et la décomposition de $x \in H$ dans cette somme directe est : $x = P(x) + (id - P)(x)$*

Preuve. *Pour tout $x \in H, x = P(x) + (x - P(x))$ appartient à $H = F + F^{\perp}$ et*

$F \cap F^{\perp} = \{0\}$ la somme est donc direct, $H = F \bigoplus F^{\perp}$, ceci veut dire que P est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. On appelle donc cette application la projection orthogonale de H sur F.

Base orthonormale.

Définition 1.1.10. *Soit H l'espace de Hilbert, $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs est dite :*

1. *orthogonale si $< e_i, e_j >= 0, i \neq j$*

2. *orthonormale si de plus $\| e_i \| = 1, \forall i \in I$*

Exemple 1.1.3. *Soit $L^2 [-\pi, \pi]$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la famille $(e_p(t))_{p \in z} = (e^{ipt})_{p \in z}$ est orthonormale.*

Fonctions holomorphes et harmoniques.

Fonction holomorphe.

Définition 1.1.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$; z_0 un point de Ω. On dit que f est dérivable au point z_0 si :*

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \to \neq 0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \textit{ existe.}$$

Notation :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f^{'}(z_0)$$

.

Si pour tout $z_0 \in \Omega$, $f^{'}(z_0)$ *existe, on dit alors que* f *est holomorphe dans* Ω.

On note par : $z = x + iy$

$$\begin{aligned} z \longrightarrow \omega &= f(z) = f(x+iy) \\ &= u(x,y) + iv(x,y). \end{aligned}$$

Fonction harmonique.

Définition 1.1.12. *Soit* D *un domaine de* $\mathbb{R}^2$. *Une fonction* f *définie de* D *dans* $\mathbb{C}$ *est dite harmonique si les dérivées partielles d'ordre un et deux existent, et sont continues et si de plus elle solution de l'équation de Laplace c'est à dire :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0.$$

Fonctions $\log^+$ et $\log^-$.

Définition 1.1.13. *La fonction* $\log^+$ *est la fonctions continue définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$\log^+(s) = \begin{cases} \log s & si \quad s \geq 1 \\ 0 & si \quad 0 < s < 1 \end{cases}$$

autrement dit, $\log^+(s) = \sup(\log s, 0)$.

la fonction $\log^-$ *est la fonction continue définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$\log^-(s) = \begin{cases} 0 & si \quad s \geq 1 \\ -\log s & si \quad 0 < s < 1 \end{cases}$$

Autrement dit : $\log^-(s) = \sup(-\log s, 0))$

Le noyau reproduisant d'un espace de Hilbert.

Définition 1.1.14. *Soit H l'espace de Hilbert de fonctions définies sur $\mathbb{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on note $\langle x, y\rangle$ et $\| \ . \ \|$, respectivement le produit scalaire et la norme de H. On dit qu'une application K de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est un noyau reproduisent pour H si :*

1. *Pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}, K_z(\omega) = K(z, \omega)$ est une fonction de ω qui appartient à H.*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $f \in H$*

$$f(z) = \langle f, K_z\rangle.$$

En particulier pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$,

$$K_z(\omega) = \langle K_z, K_\omega\rangle \text{ et } \|K_z\| = \langle K_z, K_z\rangle^{\frac{1}{2}} = K(z, z)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.1.10. *Soit H l'espace de Hilbert de fonctions sur $\mathbb{D}$, alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si $f \to f(z)$ est continue sur H pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Preuve. *Si H admet un noyau reproduisent K alors :*

$$|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leq \| f \| \| K_z \|$$

Réciproquement si $f \longrightarrow f(z)$ est linéaire continue sur H pour tout

$z \in \mathbb{D}$, alors par le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $z \in \mathbb{D}$, il existe $g_z \in H$ tel que

$$f(z) = \langle f, g_z\rangle.$$

Et g_z vérifie 1 et 2 ce qui conclu.

Proposition. 1.1.7. *Soit H un espace de Hilbert de fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ admettant un noyau reproduisent K, alors*

1. *K est unique.*
2. *pour tout $z, \omega \in \mathbb{D}$, $K(z, \omega) = \overline{K(\omega, z)}$.*
3. *soit $z \in D$, $K(z, z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$.*

4. *pour tout* $z, \omega \in \mathbb{D}$, $\mid K(z,\omega) \mid \leq K(z,z)^{\frac{1}{2}} K(\omega,\omega)^{\frac{1}{2}}$

   pour tout $z \in \mathbb{D}$, *l'application* $K_z = K(z,.)$ *est bornée sur tout compact de* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

5. K *est une fonction définie positive, i-e :*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \overline{a_k} K(\omega_j, \omega_k) \geq 0$$

   pour toute suite complexe $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *et tout sous-ensemble finie* $\{\omega_j\}_{0 \leq j \leq n} \subset \mathbb{D}$.

Preuve. 1. *si* K *et* K' *sont deux noyaux reproduisant pour* H *alors*

$$\begin{aligned} \|K_z - K_z'\| &= \langle K_z - K_z', K_z - K_z' \rangle \\ &= \langle K_z - K_z', K_z \rangle - \langle K_z - K_z', K_z' \rangle \\ &= (K_z - K_z')(z) - (K_z - K_z')(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$\|K_z - K_z'\| = 0$, *et* $K_z = K_z'$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$, *donc* $K = K'$

2. $K(z,\omega) = \langle K_z, K_\omega \rangle = \overline{\langle K_\omega, K_z \rangle} = \overline{K(\omega, z)}$

3. $\Longleftarrow$ *est évident car* $K_z \in H$.

   $\Longrightarrow$ *on remarque que* $0 = K(z,z) = \langle K_z, K_z \rangle = (\|K_z\|)^2$, *donc*

   $K_z = 0$, *ainsi*

   $|f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| = 0$, *pour tout* $z \in D$.

4. *L'inégalité est immédiate par l'inégalité de Cauchy Schwartz.* K_z *est holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *donc bornée sur les compacts de* $\mathbb{D}$, *il est alors clair que* K *est bornée sur les compacts de* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

$$\sum_{j,k-1}^{n} a_j \overline{a_k} K(\omega_j, \omega_k) = |\sum_{j=1}^{n} a_j K_{\omega j}|^2 \geq 0$$

1.2 Les espaces de Hardy H^p, $0 \leq p \leq \infty$.

On va noter quelques définitions et résultats classiques concernant l'espace de Hardy H^2.

1.2.1 L'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$.

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et par $Hol(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ et soit $d\mu = \frac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

Définition 1.2.1. *On note par $L^2(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{T}$ par rapport à la mesure $d\mu$. Il est bien connu que $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire défini par*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}d\mu$$

est un espace de Hilbert et que la suite des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, définies par
$e_n(z) = z^n$, est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. On notera par $\| \,.\, \|_2$ la norme dans $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 1.2.1. ***(De Plancherel-Parseval)***
[9] Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier alors :
$\left(\mathcal{C}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)e^{-int}dt\right)$ donc $\| \ f \ \|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \mathcal{C}_n \mid^2$ de plus, f est la somme de la série de Fourier :
$(S_n(f)) \geqslant 0$ (ou $S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k|\leqslant n}\mathcal{C}_k e^{ikt}$) avec $\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \|_2 = 0$.

Remarque 1.2.1. *Lorsque $f \in L^2\left(\mathbb{T}\right)$ f n'est pas en général égal à la somme de série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}_n e^{int}$.*

La classe de Nevanlina $\mathcal{N}$.

Définition 1.2.2. *La classe de Nevanlina $\mathcal{N}$ est définie par :*

$$\mathcal{N} := \left\{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sup_{0\leq r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f\left(re^{it}\right)dt\right| < \infty\right\}.$$

Les fonctions de $\mathcal{N}$ étant holomorphe, ce sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ à valeurs complexes.nous allons tout d'abord considérer les fonctions de $\mathcal{N}$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$.

Inégalité de Jensen.

Soit μ une mesure positive sur une tribu $\mathcal{M}$ dans un ensemble Ω telles que $\mu(\Omega) \in]0, +\infty[$, soit $f \in L^2(\mu)$ une fonction á valeurs réelles telles que : $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$, on a l'inégalité :

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu$$

En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ on obtient :

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu$$

Inégalité de Holder et Minkowshi.

Soit X un espace mesuré, de mesure μ positive, soient f et g deux fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty[$

1. *soient p et q deux exposants conjugués $\left(ie : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec $1 < p < \infty$, alors $\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ **(inégalité de Hölder)***

2. *soit $p \in [1, \infty[$, alors $\left(\int_X (f+g)^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ **(inégalité de Minkowski)***

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$.

Définition 1.2.3. *Pour $f \in Hol(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes :*

$$\mathcal{M}_0(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|\, dt$$

$$\mathcal{M}_p(f, r) = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad si \;\; 0 < p < +\infty$$

$$\mathcal{M}_\infty(f, r) = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})|$$

alors l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ est défini par :

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} \mathcal{M}_p(f, r) < \infty\right\}.$$

Pour $p = \infty$ *on note*

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} \mathcal{M}_\infty(f, r) < \infty \right\}.$$

Proposition. 1.2.1. *Soit* $f \in Hol\,(\mathbb{D})$, *les fonctions* $r \to \mathcal{M}_p\,(f, r)$ *(pour* $0 \leq p \leq \infty$*) sont des fonctions croissantes sur* $[0, 1[$, *nous avons les inclusions suivantes :* $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset \mathcal{N}$ *pour* $0 < s < p < \infty$.

Preuve. *Si* $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, *pour tout* $p \in]0, \infty[$ *ona* $\mid f(re^{it})^p \leq \parallel f \parallel_\infty^p$ *pour* $r \in [0, 1[$ *et* $t \in [0, 2\pi[$ *on en déduit alors* $\mathcal{M}_p(f, r) \leq \parallel f \parallel_\infty$ *pour* $r \in [0, 1]$ *ce qui implique* $\parallel f \parallel_p \leq \parallel f \parallel_\infty$ *et donc* $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ *pour tout* $p > 0$, *pour* $p > s > 0$, *d'après l'inégalité de Hölder, pour* f *mesurable sur le cercle centré en* 0 *de rayon* $r \in]0, 1[$, *on a :* $\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(re^{it}) \mid^s dt \leqslant (\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(re^{it}) \mid^p dt)^{\frac{s}{p}} (2\pi)^{1-\frac{s}{p}}$ *et don;* $\mathcal{M}_s(f, r) \leq \mathcal{M}_p(f, r)$ *ainsi* $H^p(\mathcal{D}) \subset H^s(\mathcal{D})$ *pour* $p > s > 0$. *Enfin, pour tout* $s > 0$ *comme* $\lim_x \to \infty \frac{\log x}{x^s} = 0$, *il existe* $A > 0$ *tel que* $\frac{\log x}{x^s} \leq A$ *pour tout* $x \geq 1$, *par conséquent, si* f *mesurable sur le cercle centré en* 0 *de rayon* $r \in]0, 1[$ *on a :* $\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt = \int_{t \in [-\pi, \pi]} :\mid f(re^{it}) \mid \geq 1 \log(re^{it}) \mid dt \leq A \int_{t \in [-\pi, \pi] : (re^{it}) | \geq 1} \mid f(re^{it}) \mid^s dt$ *on a donc* $\mathcal{M}_0(f, r) \leq A\mathcal{M}_s(f, r)^s$ *ce qui prouve* $H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ *pour* $s > 0$.

Théorème 1.2.2. *(De factorisation) Toute fonction* f *non identiquement nulle de* $H^p(\mathbb{D})$ $(p \in]0, \infty[)$ *peut se factoriser sous la forme* $f = Bg$ *ou* B *est un produit de Blachke et* $g \in H^p(\mathbb{D})$ *sans zéro dans* $\mathbb{D}$.

1.2.2 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

On rappelle que l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ *est l'espace des fonctions holomorphes tel que :*

$$H^2(\mathbb{D}) = \{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r \leq 1} M_2(f, r) < \infty \}.$$

Théorème 1.2.3. *[1] Une fonction* $f \in Hol(\mathbb{D})$ *de la forme*

$$\forall z \in \mathbb{D} : f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 0} \mid a_n \mid^2 < \infty,$$

dans ce cas

$$\|f\|_2 = (\sum_{n \geq 0} \mid a_n \mid^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire sur $H^2(\mathbb{D})$ défini par :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n \overline{b_n}$$

telle que

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

.

1.2.3 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$.

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier de signe négatifs sont nuls, autrement dit :[17]

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0,\, n < 0)\ \}$$

avec $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$ *les coefficients de Fourier d'ordre* n.

Identification entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$.

Définition 1.2.4. *Soient $f \in Hol(\mathbb{D})$, $0 \leq r < 1$, on appelle limite radiale de f, et on note f^* la fonction définie par :*

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}).$$

Existe presque partout sur $\mathbb{T}$, d'après le théorème de Fatou(Voir[17]).

Théorème 1.2.4. *[1] L'application $\varphi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{T})$ tel que $\varphi(f) = f^*(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$, est une isomorphisme isométrie.*

Compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, dans la plupart des articles de recherche on trouvera la notation H^2, laquelle désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ où $H^2(\mathbb{T})$ suivant le contexte.

Les fonctions intérieures .

Définition 1.2.5. *Une fonction intérieurs est une fonction $u \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $|u^*(e^{it})| = 1$ presque partout avec $(u^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} u(re^{it}))$.*

Définition 1.2.6. *Un produit de Blaschke est un produit de la forme :*
$B(Z) = e^{i\lambda} Z^k \Pi_n \dfrac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \dfrac{\alpha_n - Z}{1 - \overline{\alpha_n Z}}$ *ou* $\lambda \in \mathbb{R}$, *K entier naturel et* $(\alpha_n)_n$ *suite vide finie ou infinie de produit* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ *tels que*

$$\sum_n 1 - |\alpha_n| < \infty$$

lorsque $(\alpha_n)_n$ *est infinie.*

Exemple 1.2.1. *[3] Soit* $\lambda \in \mathbb{D}$ *alors* b_λ *est la fonction de* $\mathbb{D}$ *dans lui-même définie par*

$$b_\lambda(z) = \tfrac{|\lambda| z - \lambda}{\lambda 1 - \bar{\lambda} z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Si $\lambda = 0$ *alors on pose pour tout* $z \in \mathbb{D}$, $b_0(z) = z$. *On remarque que* b_λ *est holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *et que pour* $z \in \mathbb{T}$, *on a*

$$| b_\lambda(z) | = |\tfrac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} z}| = |\tfrac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}}| = 1.$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, b_λ *est une fonction intérieure. La fonction* b_λ *est le facteur de Blaschke associé à* λ.

Chapitre 2

Opérateur et matrice de Toeplitz.

On aimerait bien commencer ce chapitre par les opérateurs de Laurent sur $L^2(\mathbb{T})$. Ces derniers sont relatifs aux opérateurs de Toeplitz. Réellement, l'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$

n'est autre qu'un opérateur de Laurent suivi de la projection de Riez. On dit que l'opérateur de Toeplitz est la compression de l'opérateur de Laurent à l'espace de Hardy.

2.1 Opérateur de Toeplitz .

Opérateur de Laurent.

Définition 2.1.1. *Soit ϕ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ et $D(L_\phi)$ l'ensemble des fonctions f dans*

$L^2(\mathbb{T})$ telles que le produit ϕf soit dans $L^2(\mathbb{T})$, on appelle opérateur de Laurent ou encore opérateur de multiplication, de symbole ϕ sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} L_\phi & : & D(L_\phi) & \subseteq & L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}) \\ & & & & f & \longrightarrow & L_\phi f = \phi f \end{array}$$

Il est clair que $D(L_\phi)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ puisqu'il contient l'espaces des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui lui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$

Proposition. 2.1.1. *[11] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ est borné sur $\mathbb{T}$*
2. *$D(L_\phi) = L^2(\mathbb{T})$*
3. *L_ϕ est borné sur $L^2(\mathbb{T})$*

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) *Il est évident que si le symbole ϕ est borné sur $\mathbb{T}$ alors le produit ϕf est dans $L^2(\mathbb{T})$ avec $\| \phi f \|_2 \leq \| \phi \|_\infty \| f \|_2$ ceci pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$.*

2) $\Longrightarrow$ 3) *Soit $(f_n)_n$ une suite dans $L^2(\mathbb{T})$ telles que :*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} \| L_\phi f_n - g \| = 0$$

on veut montrer que $f \in L^2(\mathbb{T})$, ce qui est évident car $L^2(\mathbb{T})$ est complet,

et que $g = L_\phi f$. Comme $(f_n)_n$ converge en norme $\| \, . \, \|_2$ vers f, on peut extraire alors une sous suite

$(f_{nk})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $(f_{nk})_k$ converge simplement vers f u-presque partout.Ceci implique que

$$\phi f_{nk} \longrightarrow \phi f \text{ quand } k \to +\infty \tag{2.1}$$

μ-presque partout. De la même manière on obtient

$$L_\phi f_{nk} = \phi f_{nk} \to g \tag{2.2}$$

μ-presque partout. De (3.1) et (3.2) on déduit que $g = \phi f$ μ presque partout

i-e : $g = L_\phi f$.

3) $\Longrightarrow$ 1) *[8] Si L_ϕ est borné sur $L^2(\mathbb{T})$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\| L_\phi f \|_2 \leq c \| f \|_2$. Pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$. En particulier :*

$$\begin{cases} \| \phi \|_2 = \| L_\phi e_0 \|_2 & \leq c \| e_0 \|_2 = c \\ \| \phi^2 \|_2 = \| L_\phi \phi \|_2 & \leq c \| \phi \|_2 \leq c^2 \\ \vdots & \\ \| \phi^n \|_2 \leq c^n & \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

En itérant ce procédé n fois, on obtient $\| \phi^n \|_2 \leq c^n$ pour tout entier n positif, ce qui signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{\mathbb{T}} |\tfrac{\phi}{c}|^{2n} d\mu \leq 1$$

supposons que :

$$\mu(\{|\tfrac{\phi}{c}| > 1\}) > 0.$$

Il est simple de voir que :

$$\left\{|\frac{\phi}{c}| > 1\right\} = \cup_{m\leq 1}\left\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{1+m}\right\}$$

.

Avec pour tous entiers $m_1 < m_2$ *on a :*

$$\left\{|\tfrac{\phi}{c}| > 1 + \tfrac{1}{m_1}\right\} \subseteq \left\{|\tfrac{\phi}{c}| > 1 + \tfrac{1}{m_2}\right\},$$

d'où :

$$\mu(\left\{|\frac{\phi}{c}| > 1\right\}) = \lim_{m\to+\infty} \mu(\left\{|\frac{\phi}{c}| > 1 + \frac{1}{m}\right\})$$

.

Comme par hypothèse il existe un entier $m_0 \geq 1$ *telle que :* $\mu(\left\{|\frac{\phi}{c}| \leq 1\right\}) > 0$.
En notant $E_0 = \left\{|\frac{\phi}{c}| \leq 1 + \frac{1}{m_0}\right\}$, *nous obtenons :*
$\int_{\mathbb{T}} |\frac{\phi}{c}|^{2n} d\mu \geq \int_{E_0} |\frac{\phi}{c}|^{2n} d\mu > (1 + \frac{1}{m_0})^{2n}\mu(E_0),\ \ \forall n \leq 1$, *ce qui absurde car* $(1 + \frac{1}{m_0})^{2n} \longrightarrow +\infty$ *donc* $|\phi(z)| \leq c$ *pour presque tout* $z \in \mathbb{T}$ *et par suite* ϕ *est bornée.*

Proposition. 2.1.2. *Si* ϕ *une fonction dans* $L^\infty(\mathbb{T})$ *alors :* $\parallel L_\phi \parallel = \parallel \phi \parallel_\infty$

Matrice de Laurent .

Soit ϕ *une fonction dans* $L^2(\mathbb{T})$ *et notons par* $\widehat{\phi}(n)$ *le coefficient de Fourier d'indice* n *de* ϕ *:*

$$\widehat{\phi}(n) = \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-int} \tfrac{dt}{2\pi}.$$

Définition 2.1.2. *Soit* $(a_n)_{n\in Z}$ *une suite de nombres complexes. On considère* A *la matrice infinie suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \cdots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

dont les éléments d'une même diagonale sont égaux. La matrice A *est la matrice de Laurent.*

Théorème 2.1.1. *[5] Soit $A = (a_n)_{n\in Z}$ une matrice de Laurent définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z})$, si et seulement s'il existe une fonction ϕ borné sur $\mathbb{T}$ telle que $(a_n)_{n\in Z}$ est la suite de coefficients de Fourier de ϕ.*

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \widehat{\phi}(0) & \widehat{\phi}(-1) & \widehat{\phi}(-2) & \dots \\ \dots & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \widehat{\phi}(-1) & \dots \\ \dots & \widehat{\phi}(2) & \widehat{\phi}(1) & \widehat{\phi}(0) & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Preuve. *Supposons que A défini un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z})$, soit ϕ l'isomorphisme de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{Z})$ qui a toute fonction associe sa série de coefficients de Fourier. Posons alors $\phi = \phi^{-1}(Ae_0)$ où $e_0 = (..., 0, 1, 0, ...)$.*
Si L_ϕ est l'opérateur de Laurent de symbole ϕ alors sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est autre que la matrice A.
Or par hypothèse, A définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z})$. Donc la matrice de L_ϕ est la matrice A.
Réciproquement, soit ϕ dans $L^\infty(\mathbb{T})$ et soit A la matrice donnée.
Comme le symbole ϕ est borné, l'opérateur de Laurent L_ϕ est borné. De plus sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ est la matrice A.

Théorème 2.1.2. *[8] Un opérateur borné M de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui même est un opérateur de Laurent si et seulement si sa matrice dans la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent.*

Preuve. *si L_ϕ un opérateur de Laurent borné et si $A = (a_{i,j})_{i,j\in Z}$ est sa matrice dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in Z}$.Alors :*

$$\begin{cases} a_{ij} = \langle L_\phi e_j, e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle \\ a_{i+k,j+k} = \langle \phi e_j e_k, e_k e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_{-k} e_k e_i\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle. \end{cases}$$

Donc $a_{ij} = a_{i+k,j+k}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$ et A est une matrice de Laurent.
Réciproquement :soit M un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$ dont la matrice dans la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Laurent c'est à dire :
pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle Me_{j+1}, e_{i+1}\rangle = \langle Me_j, e_i\rangle$.
Pour prouver que M est bien un opérateur de Laurent on a le théorème suivante :

Théorème 2.1.3. *Un opérateur borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui même est un opérateur de Laurent si et seulement s'il commute avec L_{e1}.*

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned}\forall i,j\in\mathbb{Z}\quad \langle ML_{e1}e_j,e_i\rangle &= \langle M_{e_{j+1}},e_i\rangle\\ &= \langle M_{e_j},e_{i-1}\rangle\\ &= \langle M_{e_j},L_{e_1}^{*}e_i\rangle\\ &= \langle L_{e_1}M_{e_j},e_i\rangle.\end{aligned}$$

$$\textit{Donc}\ \ ML_{e_1}=L_{e_1}M.$$

Opérateur shift(décalage).

Définition 2.1.3. *[16] On note $S : H^2 \longrightarrow H^2$ défini par $S(f) = zf$ l'opérateur de décalage à droite, cet opérateur est borné et une isométrie de H^2.*

L'adjoint de S est l'opérateur de décalage à gauche noté S^* défini par :

$$S^*(f)=\frac{f(z)-f(0)}{z}$$

En effet, pour $f, g \in H^2$, on a

$$\langle S(f),g\rangle=\langle zf,g\rangle=\langle f,\overline{z}g\rangle.$$

Soit $k \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle zf,k\rangle &= \overline{k}\langle zf,1\rangle\\ &= \overline{k}\langle zf,k_0\rangle\\ &= \overline{k}\widehat{zf}(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\langle S(f),g\rangle=\langle f,\overline{z}(g(z)-g(0))\rangle=\langle f,\frac{g(z)-g(0)}{z}\rangle.$$

La matrice de l'opérateur S est défini par :

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\dots\\1&0&0&\dots\\0&1&0&\dots\\0&0&1&\dots\end{pmatrix}$$

Opérateur de Toeplitz.

[11] Notons par P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ dans $H^2(\mathbb{T})$ et dite aussi projection de Riez.

Définition 2.1.4. *Soit L_ϕ un opérateur de Laurent borné sur $L^2(\mathbb{T})$, c-à-d $\varphi \in L^\infty$ on appelle opérateur de Toeplitz de symbole ϕ et on note T_ϕ l'opérateur défini par :*

$$\begin{array}{cccc} T_\phi & : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & & f & \longrightarrow & T_\phi f = P_{H^2}(L_\phi f) = P_{H^2}(\phi f) \end{array}$$

Un opérateur de Toeplitz est la compression de l'opérateur de Laurent de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2(\mathbb{T})$.

Remarque 2.1.1. *Dans le cas ou $\phi \in H^\infty$, l'opérateur de Toeplitz est juste l'opérateur de Laurent L_ϕ c'est à dire $T_\phi = L_\phi$ si $\phi \in H^\infty$.*

Propriétés des opérateurs de Toeplitz

Proposition. 2.1.3. *[2] L'application qui à toute fonction bornée ϕ associé à l'opérateur de Toeplitz T_ϕ est injective.*

En d'autres termes, si $T_\phi = 0$ alors nécessairement $\phi = 0$.

Preuve. *En effet, si pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, $T_\phi f = 0$ alors en particulier*

$T_\phi e_n = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, ou les e_n sont les éléments de la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$.

Si $\phi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i e_i$ est le développement en série de Fourier de ϕ où

$a_i = \langle \phi, e_i \rangle$ alors pour tout entier positif n le développement en série de Fourier de ϕe_n et $\phi e_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i e_{i+n}$, dire que $T_\phi e_n = P(\phi e_n) = 0$, pour tout entier positif n revient à dire que les a_i sont tout nulles pour $i \geqslant -n$. On en déduit donc que $a_i = 0$ et ceci pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et donc ϕ est nulle.

Théorème 2.1.4. *L'opérateur de Toeplitz T_ϕ est borné si et seulement si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et l'application $\phi \longrightarrow T_\phi$ de $L^\infty(T)$ à l'ensemble des opérateurs continues sur H^2 est linéaire et injective.*

Proposition. 2.1.4. *[23] Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\| T_\phi \| = \| \phi \|_\infty$.*

Théorème 2.1.5. *T_φ est un opérateur compact si et seulement si $\varphi = 0$.*

On a quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupés dans la proposition suivante :

Proposition. 2.1.5. *[23]*

1. *Soit* ϕ *et* ψ *deux fonctions bornée sur* $\mathbb{T}$*, alors Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *on a :* $T_{\alpha\phi+\beta\psi} = \alpha T_\phi + \beta T_\psi$

2. *L'opérateur identité* I *de* $H^2(\mathbb{T})$ *est l'opérateur de Toeplitz de symbole* $\phi = 1$*, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole* 0

3. $T_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi = 0$

4. *Pour tout couple de fonctions* f *et* g *dans* $H^2(\mathbb{T})$ *on a* $\langle L_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle$ *.*
   En effet, comme f *et* g *sont dans* $H^2(\mathbb{T})$*, on a tout de suite que :*
   $\langle L_\phi f, g\rangle = \langle L_\phi f, Pg\rangle = \langle PL_\phi f, g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle$

5. *L'adjoint d'un opérateur de Toeplitz* T_ϕ *est l'opérateur de Toeplitz de symbole* $\overline{\phi}$*, le conjugué de* ϕ*. En effet soient* f *et* g *deux fonctions dans* $H^2(\mathbb{T})$*. On a :*
   $$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle f, L_\phi g\rangle.$$
   Or l'adjoint de l'opérateur L_ϕ *est* $L_{\overline{\phi}}$ *alors :*
   $$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle L_{\overline{\phi}} f, g\rangle.$$
   Alors :
   $$\langle f, T_\phi g\rangle = \langle T_\phi f, g\rangle,$$
   et ceci pour toutes fonctions f *et* g *dans* $H^2(\mathbb{T})$*. Ce qui prouve bien que* $T^*_\phi = T_{\overline{\phi}}$

6. *L'opérateur de Toeplitz est hermitien. C'est-à-dire* $T^*_\phi = T_\phi$*, si et seulement si* $\phi = \overline{\phi}$*. En d'autres termes l'opérateur de Toeplitz est hermitien si et seulement si* ϕ *est réel.*

7. *La matrice d'un opérateur de Toeplitz dans la base orthonormée* $(e_n)_{n\in Z}$ *de* $H^2(\mathbb{T})$ *est une matrice de Toeplitz.*
   En effet, soit $(a_{ij})_{i,j\in Z}$ *la matrice d'un opérateur de Toeplitz* T_ϕ *dans la base orthonormée* $(e_n)_{n\in Z}$ *de* $H^2(\mathbb{T})$ *alors pour tout entier positif* k *on a :*
   $a_{i+k,j+k} = \langle T_\phi e_{j+k}, e_{i+k}\rangle = \langle \phi e_{j+k}, e_{i+k}\rangle = \langle \phi e_j, e_i\rangle = \langle T_\phi e_j, e_i\rangle = a_{ij}$.

2.2 Produits d'opérateurs de Toeplitz

Parmi les problèmes qui nous intéressent pour les opérateurs de Toeplitz et leur produits. La question posé : est-ce que le produit de deux opérateurs de Toeplitz est un opérateur de Toeplitz ?
Car l'ensemble des opérateurs de Toeplitz n'est pas stable par la multiplication, en d'autre manière si T_ϕ et T_ψ sont deux opérateurs de Toeplitz bornés, alors le produit n'est pas de tous un opérateur de Toeplitz.
Mais, sur l'espace de Hardy, Brown et Halmos [8] en 1962, ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz est un opérateur de Toeplitz.

Théorème 2.2.1. *Soient φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ψ est anti -analytique ou si φ est analytique. Donc on a :*

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$$

Preuve. *Soient $(a_{i,j})_{i,j\geq 0}, (b_{i,j})_{i,j\geq 0}$, et $(c_{i,j})_{i,j\geq 0}$ les matrices de T_φ, T_ψ et $T_\varphi T_\psi$ respectivement, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les (a_n) sont les coefficients de Fourier de φ et les (b_n) sont ceux de ψ.*
Pour tout couple (i,j) d'entiers positifs, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j},$$

et

$$c_{i+1,j+1} = a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j},$$

c'est-à-dire

$$c_{i+1,j+1} = c_{ij} + a_{i+1} b_{-j-1}.$$

Il vient que, pour tout entiers positifs i et j, si

$$c_{i+1,j+1} = c_{ij}$$

alors

$$a_{i+1} b_{-j-1} = 0.$$

Si la matrice $(c_{i,j})_{i,j\geq 0}$ est une matrice de Toeplitz, donc le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz, alors *(i) Soit* $a_{i+1} = 0$ *pour tout entier positif* i *ou bien* $b_{-j-1} = 0$ *pour tout entier positif* j*, ce qui est équivalent à dire que* $\widehat{\varphi}(n) = 0$ *pour tout entier* $n \geq 1$*, donc* φ *est anti-analytique*

$$[T_\varphi] = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \dots & 0 & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(ii) ou bien $\widehat{\psi}(n) = 0$ *pour tout entier* $n \leq -1$*, donc* ψ *est analytique.*

$$[T_\psi] = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \widehat{\psi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \widehat{\psi}(1) & \widehat{\psi}(0) & 0 & \dots \\ \dots & \widehat{\psi}(2) & \widehat{\psi}(1) & \widehat{\psi}(0) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si ψ *est analytique alors* T_ψ *est l'opérateur de multiplication par* ψ *et donc pour toute fonction* f *dans* H^2

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = p(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

Et si φ *est anti-analytique alors son adjoint* $\overline{\varphi}$ *est analytique, alors*

$$(T_\varphi T_\psi)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\psi\varphi}} = (T_{\varphi\psi})^*.$$

Par un deuxième passage à l'adjoint, on obtient que

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$$

.

Corollaire 2.2.1. *Si* T_ϕ *est un opérateur de Toeplitz inversible sur* $H^2(\mathbb{T})$ *alors son inverse est un opérateur de Toeplitz si et seulement si* ϕ *est analytique ou si* ϕ *est anti-analytique.*

Preuve. *Notons par* T_ϕ^{-1} *l'inverse de l'opérateur* T_ϕ*. Si* T_ϕ^{-1} *est un opérateur de Toeplitz, i.e. S'il existe une fonction bornée* ψ *telle que* $T_\phi^{-1} = T_\psi$*, alors :*

$$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi = I = T_{e_0}.$$

D'où , d'après le Théorème 3.4.1

$$\begin{cases} \phi \text{ est anti-analytique où } \psi \text{ est analytique} & (*) \\ \text{et} \\ \phi \text{ est analytique où } \psi \text{ est anti-analytique.} & (**) \end{cases}$$

Si ϕ n'est pas anti-analytique alors, d'après(∗∗), ψ est analytique et comme ψ est supposée non constante alors forcément elle n'est pas anti-analytique et donc par (∗), ϕ est analytique.
Réciproquement, si ϕ est analytique alors, T_ϕ est commute avec T_{e1} et on a alors

$$T_\phi^{-1} T_\phi T_{e1} = T_\phi^{-1} T_{e1} T_\phi.$$

En composant à droite par T_ϕ^{-1} dans l'équation précédente, on obtient

$$T_{e1} T_\phi^{-1} = T_\phi^{-1} T_{e1}.$$

Ceci prouve bien que T_ϕ^{-1} est un opérateur de Toeplitz analytique.
Si ϕ est anti-analytique alors $\overline{\phi}$ est analytique et d'après ce qui précédent on a

$$T_{\overline{\phi}}^{-1} T_{e1} = T_{e1} T_{\overline{\phi}}^{-1}.$$

Par passage à l'adjoint dans cette égalité, on obtient que

$$T_{e1}^* T_\phi^{-1} = T_\phi^{-1} T_{e1}^*.$$

2.3 Matrice de Toeplitz

Définition 2.3.1. *[11] On appelle une matrice de Toeplitz, toute matrice définie par une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est ayant la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_{-0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Une matrice infinie $B = (a_{ij})_{i,j}$ est dite de l'opérateur de Toeplitz T_φ sur H^2 dans la base $\{1, z, z^2, z^3, ...\}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle T_\varphi z^j, z^i \rangle \\ &= \langle P(\varphi z^j), z^i \rangle \\ &= \langle \varphi z^j, P z^i \rangle \\ &= \langle \varphi, z^{i-j} \rangle \\ &= \widehat{\varphi}(i-j) \end{aligned}$$

donc on a :

$$B = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3.1. *[6] Une matrice de Toeplitz $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement s'il existe une fonction bornée ϕ sur $\mathbb{T}$ telle que les nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont ses coefficients de Fourier i.e :*

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas la norme de l'opérateur engendré par A est égale à :

$$\|\phi\|_\infty := supess_{t\in\mathbb{T}]}|\phi(t)|.$$

Telle que $(supess\ f = \inf\{c \in \mathbb{R}_+ \ \ tel\ que\ |f| \leq c,\ \mu - pp\})$.

Preuve. *Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ la fonction dont les coefficients de Fourier sont les éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la matrice A et soit L_ϕ l'opérateur de Laurent de symbole ϕ. On sait que L_ϕ est borné si et seulement ϕ est aussi borné, auquel cas $\|L_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. On note par M_ϕ la matrice de L'opérateur L_ϕ dans la base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$:*

$$M_\phi = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \hline \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_{-0} & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

D'après le théorème (3.2.1), M_ϕ *définit un opérateur borné sur* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *si et seulement si* $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *et dans ce cas* $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$*. On remarque que la matrice* A *n'est autre que le quart inférieur droit de la matrice* M_ϕ *; autrement dit, si on note par* P *la projection orthogonale de* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *alors* $A = PM_\phi$*. ceci implique que si* $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *alors* $\|A\| \leq \|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$*.*

Chapitre 3

L'opérateur de Toeplitz tronqué.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de Laurent sur l'espace modèle [18].

3.1 Espace modèle.

Définition 3.1.1. *[4] Soit u une fonction intérieure. On appelle espace modèle correspondant à u, le sous espace de H^2 défini par :*

$$K_u^2 := (uH^2)^{\perp} = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2,\ \langle f, ug\rangle = 0,\ \forall g \in H^2\}$$

De plus on défini

$$K_u^{\infty} := K_u^2 \cap H^{\infty}$$

Exemple 3.1.1. *[19]*

1) Si $u(z) = z^n$ alors K_u^2 est l'ensemble des polynôme de degré $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. c'est à dire

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} \in \mathbb{C}\}$$

2) Si u est un produit de BLASCHKE d'ordre fini avec des zéros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, comptés avec leurs ordre de multiplicité alors :

$$K_u^2 = \{\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a^{n-1} z^{n-1}}{(1-\overline{\lambda}_1 z)(1-\overline{\lambda}_2 z)....(1-\overline{\lambda}_n z)};\ (a_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{C}.$$

3.2 Opérateur de Toeplitz tronqué.

Définition 3.2.1. *[15] Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et on considère l'application définie sur K_u^∞ par :*

$$K_u^\infty \to K_u^\infty$$

$$f \to P_u(\varphi f)$$

Si cette application peut être prolongée en une application continue sur K_u^2, on note A_φ ce prolongement et on appelle opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ. (voir [13, 20])

Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué.

Dans cette partie, on met l'accent sur les matrices des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle dans le cas où la fonction intérieure est égale à z^n, ou bien un produit de Blaschke d'ordre fini. Si $u(z) = z^n$, et $\varphi \in L^2$, on a S la base de K_u^2 et la matrice de l'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ relativement à la base S n'est autre qu'une matrice de Toeplitz usuelle formée par les coefficients de Fourier de la fonction φ.

En effet, si $A = (a_{kj})_{0\leq k,j\leq(n-1)}$ est la matrice de A_φ dans la base S alors

$a_{kj} = \hat{\varphi}(k-j)$.

La matrice de A_φ relativement à la base S est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Produit des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Sedlock dans [21] a montré seulement l'existante de α, à travers la méthode utilisé pour le produit des opérateurs de Toeplitz tronqué.

Théorème 3.2.1. *[15] Soient A et B deux matrices de Toeplitz. Le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des condition suivantes est vérifiée :*

i) A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures ou triangulaires supérieures.

ii) A ou B est un multiple de l'identité.

iii) Il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que A et B sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \dots & \dots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \dots & \dots & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \ddots & & & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_0 & \alpha b_{n-1} \\ b_{n-1} & \dots & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Preuve. *Notons* $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (a_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = (b_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$ *et* $A \times B = C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Par définition,

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$$

C est une matrice de Toeplitz si et seulement si :

$$c_{ij} = c_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-j}$$

Nous distinguons deux cas pour cette égalité.

(i) Pour i=j, on a : $c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i}$ *pour* $i = 0, 1, ..., n-1$. *doù*

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1} b_{k-j-1}$$

pour $i = 0, 1, ..., n-2$. *En déduit l'égalité*

$$a_{i-n+1}b_{n-i-1} = a_{i+1}b_{-i-1}.$$

Autrement dit

$$\begin{cases} a_{-n+1}b_{n-1} & = & a_1b_{-1} \\ a_{-n+2}b_{n-2} & = & a_2b_{-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-1}b_1 & = & a_{n-1}b_{-n+1} \end{cases}$$

(ii) Pour tout $i \neq j$, *posons* $l = i - j, j = i - l$ *avec* $\mid l \mid= 1, ..., n-2$, *nous avons :*

$$c_{i-j} = c_l = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k}b_{k-i+l}.$$

Remarquons que pour chaque i *et* l, *on a l'égalité :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k}b_{k-i+l} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1}b_{k-1-i+l}$$

$$a_{i-n+1}b_{n-1-i+l} = a_{i+1}b_{-1-i+l}$$

En obtient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a_1b_{-1} & = & a_{-n+1}b_{n-1} \\ a_1b_{-2} & = & a_{-n+1}b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1b_{-n+1} & = & a_{-n+1}b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2b_{-1} & = & a_{-n+2}b_{n-1} \\ a_2b_{-2} & = & a_{-n+2}b_{n-2} \\ \vdots & = & \vdots \\ \vdots & & \\ a_2b_{-n+1} & = & a_{-n+2}b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n-1}b_{-1} & = & a_{-1}b_{n-1} \\ a_{-n+2}b_{n-2} & = & a_2 b_{n-2} \\ \vdots & = & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n-1}b_{-n+1} & = & a_{-1}b_1 \end{cases}$$

Donc, pour chaque $i \in \{0, 1, ..., n\}$, *on déduit que :*

$$\begin{cases} a_i b_{-1} & = & a_{-n+i}b_{n-1} \\ a_i b_{-2} & = & a_{-n+i}b_{n-2} \\ \vdots & = & \vdots \\ \vdots & & \\ a_i b_{-n+1} & = & a_{-n+i}b_1 \end{cases}$$

S'il existe $a_{i0} \neq 0$, *on pose* $\beta = \dfrac{a_{-n+i_0}}{a_{i0}}$.
On obtient :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1}, \qquad b_{-2} = \beta b_{n-2}, ..., b_{-n+1} = \beta b_1$$

On obtient :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1}, \qquad b_{-2} = \beta b_{n-2}, ..., b_{-n+1} = \beta b_1$$

Nous avons deux alternative pour β.

(a) *Si* $\beta = 0$ *alors* $b_{-1} = b_{-2} = ... = b_{-n+1} = 0$, *et on a :*

(i) *soit* $a_{-n+1} = 0$ *pour tout les* $i \in \{0, 1, ..., n\}$,

(ii) *ou bien* $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$

En résumé, si $\beta = 0$ *alors* A *et* B *sont toutes les deux triangulaires inférieures ou* β *est multiple de l'identité.*

(b) *Si* $\beta \neq 0$ *dans ce cas on a :* $b_{-1} = \beta b_{n-1},\ b_{-2} = \beta b_{n-2}, ..., b_{-n+1} = \beta b_1$

Nous avons encore deux cas :

(i) *S'il existe un* s *tel que* $b_{n-s} \neq 0$ *alors*

$$a_i b_{-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

donc

$$\beta a_i b_{n-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

d'où

$$a_{-n+i} = \beta a_i$$

Donc A et B sont de la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \dots & \dots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \dots & \dots & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \ddots & & & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_0 & \alpha b_{n-1} \\ b_{n-1} & \dots & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

(ii) Si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ alors B est un multiple de l'identité.

3.3 Opérateur de Toeplitz tronqué de type α.

La notion d'opérateur de Toeplitz tronqué de type α est introduit par Sedlock en 2010 Voir[21].

Définition 3.3.1. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Un opérateur de Toeplitz tronqué A est dit de type α si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que*

$$A = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\tilde{\varphi}}+c}, \; c \in \mathbb{C}.$$

Et on a $\tilde{\varphi} = u(z)\overline{\varphi z}$ et $S_u(f) = P_{k_u} zf$.

On note par β_u^α l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Sedlock nous a donné plusieurs spécificité de l'opérateur de Toeplitz tronqué de type α.

Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué.

Si $u = z^n$ on a :

$$\beta_\varphi^\alpha = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(N) & \alpha\widehat{\varphi}(N-1) & \dots & \alpha\widehat{\varphi}(1) \\ \varphi(1) & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(N) & \dots & \alpha\widehat{\varphi}(2) \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots & \alpha\widehat{\varphi}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\varphi}(N) & \widehat{\varphi}(N-1) & \widehat{\varphi}(N-2) & \dots & \widehat{\varphi}(0) \end{pmatrix}$$

Matrice circulante.

Une matrice circulante constitue un cas particulier de matrice de Toeplitz.

Définition 3.3.2. *Une matrice circulante est une matrice carrée de taille $(n \times n)$ dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire(décalage vers la droite)des coefficient et de la forme*

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & & c_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Application sur les matrices de Toeplitz.

Dans ce chapitre on a proposé une application sur les matrices de Toplitz qui traite les points suivants.

4.1 l'inverse d'une matrice de Toeplitz.

On s'intéresse à l'inverse d'une matrice de Toeplitz, selon la méthode de (Xiao-Guang lv)[14] pour le déterminer.

Définition 4.1.1. *Soit T de taille $(n \times n)$, une matrice de Toeplitz telle que*

$$T = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{1-n} & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{2-n} & \cdots \\ \cdots & a_2 & a_1 & \ddots & \cdots & a_{3-n} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où $a_{-n}(n-1), \ldots.., a_{n-1}$, sont des nombres complexes on note : $T = (a_{p-q})_{p,q=1}^{n}$,

alors l'inverse d'une matrice de Toeplitz n'est pas en général une matrice de Toeplitz

La formule de l'inverse d'une matrice de Toeplitz .

Lemme 4.1.1. *Soit $T = (a_{p-q})_{p,q=1}^{n}$ une matrice de Toeplitz et qui vérifiée la formule suivante :*

$$KT - TK = fe_n^T - e_1 f^T J$$

où : $K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n-1} - a_{-1} \\ a_2 - a_{-n+2} \\ a_1 - a_{-n+1} \end{pmatrix}$$

Théorème 4.1.1. *[14] Soit $T = (a_{p-q})_{p,q=1}^{n}$, une matrice de Toeplitz, si l'un des système de ces équations $T_x = f,\ T_y = e_1$, admet une solution :*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T,\ y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T.$$

Alors

a) T est inversible.

b) $T^{-1} = T_1U_1 + T_2U_2$,

où :

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix}, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -x_n \\ \vdots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_n & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & x_2 & \dots & x_1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. *D'après le lemme 4.1.1, et*$T_x = f$, $T_y = e_1$, *on a :*

$$\begin{aligned} KT &= TK + fe_n^T - e_1 f^T J \\ &= T[K + xe_n^T - yf^T J]. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} K^iT &= K^{i-1}T[K + xe_n^T - yf^T J] \\ &= T[K + xe_n^T - yf^T J]^i. \end{aligned}$$

Pour ce la :

$$K^i e_1 = K^i T_y = T[K + xe_n^T - yf^T J]^i y.$$

Soit :

$$t_i = [K + xe_n^T - yf^T J]^{i-1} y, \qquad T = (t_1, t_2, t_3, ..., t_n)$$

$Tt_i = T[K + xe_n^T - yf^T J]^{i-1} y = K^{i-1} e_1 = e_i.$

TT=T($t_1, t_2, ..., t_n) = (e_1, e_2, ..., e_n) = I_n$.

Donc, la matrice T *est inversible, et l'inverse de* T *est la matrice* $\tilde{T} = T^{-1}$.

Donc on montrons (b)

$$t_1 = y,\ t_i = [K + xe_n^T - yf^T J]t_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$
$$t_i = T^{-1}e_i, \quad Je_i = e_{n-1+1}$$
$$JTJ = T^T, \quad JJ = I, \quad J^T = J.$$

Et pour : $i > 1$ *:*

$$\begin{aligned} t_i &= Kt_{i-1} + xe_n^T t_{i-1} - yf^T Jt_{i-1} \\ &= Kt_{i-1} + xe_n^T T^{-1} e_{i-1} - yf^T JT^{-1} e_{i-1} \\ &= Kt_{i-1} + xe_n^T JJT^{-1} Je_{n-i+2} - yf^T T^{-1} Je_{i-1} \\ &= Kt_{i-1} + xe_1^T T^{-T} e_{n-i-2} - yf^T T^{-T} e_{n-i+2} \\ &= Kt_{i-1} + xy^T e_{n-i+2} - yx^T e_{n-2} \\ &= Kt_{i-1} + y_{n-i+2}x - x_{n-i+2}y. \end{aligned}$$

Donc on a :

$t_1 = y, \quad t_2 = Ky + y_n x - x_n y,$

$\vdots$

$t_n = K^{n-1}y + K^{n-2}xy_n - K^{n-2}yx_n + ... + xy_2 - yx_2, \qquad T^{-1} = (t_1, t_2, ..., t_n)$

$$= (y, Ky, ..., K^{n-1}y) \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_n \\ \ddots & & & 1 \end{pmatrix} + (x, Kx, ..., K^{n-1}x) \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y_n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x_n & \dots & -x_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_n \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_n & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_n \\ x_n & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y_n & \dots & y_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.1. *D'après le Théorème 4.1.1, on supposent que la matrice de Toeplitz est une matrice circulente, on dit que l'élément de la matrice* $T = (a_{p-q})_{p,q=1}^{n}$*, satisfait*

$a_i = a_{i-n}$ *pour tout* $i = 1, ..., n-1$*, donc on peut dire que* $f = 0$*, tel que :*

$x = T^{-1}f = 0$*, donc* $x = T^{-1}f = 0$*.*

Alors, de (b) dans le Théorème 4.4.1 , on obtient

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_n & \dots & y_2 \\ y_2 & y_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ y_n & \dots & y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

On déduit que : l'inverse d'une matrice circulente est une matrice circulente.

4.2 Application sur l'équation de Schrödinger.

On propose une application sur les matrices de Toeplitz dans la mécanique quantique. Les matrices de Toeplitz sont été utilisées Pour résoudre l'équation de Schrödinger (voir[10]).

On étudie le comportement asymptotique d'une particule confinée en une seule dimension pot de puits carré de longueur L avec des murs parfaitement rigides. Le potentiel est défini comme :

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x \leq 0, x \geq L \end{cases} \tag{4.1}$$

l'équation habituelle de Schrödinger indépendante du temps avec les conditions limites de Dirichlet est donnée par :

$$\begin{cases} -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x),\ 0 < x < L \\ \psi(x) = 0,\ \forall x \notin (0, L) \end{cases} \tag{4.2}$$

et il y a des solutions aux fonctions propres défini par :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x), & n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x < L \\ 0, & \forall x \notin (0, L). \end{cases} \tag{4.3}$$

L'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ *a un spectre discret non borné par le haut avec des points*

$$E_n = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

le produit de N propres valeurs est

$$\Pi_{i=1}^{N} E_n = \left(\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}\right)^N (N!)^2 \approx \frac{2}{e}\left(\frac{h^2}{2mL^2}\right)^N \left(\frac{\pi}{e}\right)^{2N+1}(N+1)^{2N+1} \tag{4.5}$$

on a la formule $N! \approx \sqrt{2\pi}(N+1)^{N+\frac{1}{2}}e^{-(N+1)}$ *pour N assez grand ont été appliquée la somme des N valeurs propres est :*

$$\sum_{n=1}^{N} E_n = \left(\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}\right)\sum_{n=1}^{N} n^2 = \left(\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}\right)\left(\frac{1}{3}N^2 + \frac{1}{2}N + \frac{1}{6}\right)N. \tag{4.6}$$

Dans la méthode discrétisée, nous considérons une grille de N' *points ordonné de l'intervalle* $[0, L]$

$$x_0 = 0 < x_1 < ... < x_{N'} < x_{N'+1} = L \tag{4.7}$$

avec un espacement égal à $x_{i+1} - x_i = \epsilon > 0, \forall i = 0, ..., N^{'}$. *Ensuite en employant la seconde centrée estimateur de différence du second dérivée, à savoir*

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\psi(x+\epsilon) - 2\psi(x) + \psi(x-\epsilon)}{\epsilon^2} \tag{4.8}$$

et dénotent les valeurs propres de la fonction ψ *aux points de la grille par* $\psi_i = \psi(x_i)$, *le problème(2) est équivalent à*

$$\left(A_{N'}\right)_{ij} \psi_j = E_i \psi_{i,j} = 1, ..., N^{'}$$

avec

$$\psi_{-k} = \psi_0 = 0 = \psi_{N'+k}, \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

où

$$A_{N'} = \frac{h^2}{2m\epsilon^2} B_{N'} = \frac{h^2}{2m\epsilon^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N' \times N'} \tag{4.10}$$

les valeurs propres et les vecteurs propres de $B_{N'}$ *sont*

$$\begin{cases} \lambda_k = 2\left(1 + \cos\left(\frac{k\pi}{N'+1}\right)\right),\ 1 \leq k \leq N^{'} \\ e_{mk} = \sin\left(\frac{k(m+1)\pi}{N'+1}\right), 0 \leq m \leq N^{'} - 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Alors sont déterminant est donné récursivement par

$$detA_{N'} = 2\left(\frac{h^2}{2m\epsilon^2}\right) detA_{N'-1} - \left(\frac{h^2}{2m\epsilon^2}\right)^2 detA_{N'-2} \tag{4.12}$$

avec solution Le déterminant à été évalué à l'aide des valeurs propres(4.11)

$$detB_{N'} = \Pi_{k=1}^{N^{'}} \lambda_k = \Pi_{k=1}^{N^{'}} (2 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{N'+1}\right)) = N^{'} + 1. \tag{4.13}$$

Bibliographie

[1] ***R.A. M. Avendano***. *P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math, vol, 237, Springer, New York, 2007.*

[2] ***B. Barusseau***. *Propriétés Spectrales Des Opérateurs De Toeplitz, 20 mai 2010.*

[3] ***B. Barusseau***. *Szegö type results relative to a sequence of model spaces. publication,1006.18371 ,2010.*

[4] ***A. Beurling***. *Étude sur un problème de majoration. Thèse de Doctorat. Uppsala University, 1933.*

[5] ***A. Böttcher et B. Silberg***. *Introduction to Large Trancated Toeplitz Matrices. Springer-Verlag, Berlin, 1999.*

[6] ***A. Böttcher et S. M. Grudsky***. *Toeplitz Matrices, Asymptotic Linear Algebra, and Functional Analysis. Birkhauser Verlag, Basel, 2000.*

[7] ***H.Brezis***. *Analyse fonctionnelle, Masson, Paris 1983.*

[8] ***A. Brown and P. R. Halmos***. *Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213,89-102, 1963/1964.*

[9] ***I. Chalendar, D. Timotin***. *Commutation relations for truncated Toeplitz operators, Operators and Matrices, 8, No. 3, 877-888, 2014.*

[10] ***A. Hatzinikitas*** *.The fractional Schrödinger operator and Toeplitz matrices. journal of mathematical physics 50, 103524 2009.*

[11] ***M.Issam Louhichi***.*Produits d'opérateurs De Toeplitz sur l'espace de Bergman, thèse de doctorat,université Bordeaux 1 le 09-11-2005.*

[12] ***S.R. Garcia, W.T. Ross***. *Model spaces : a survey, Contemp. Math 638 , 197-245 2015.*

[13] ***S. R.Garcia, W. T. Ross***. *Model Spaces, a Survey, Math and Computer Science,2013.*

[14] ***X.Guang Lv, T.Huang***. *University of Electronic Sience and Technology of China. 610054, 2006.*

[15] ***F. Korrichi***, *Opérateurs de Toeplitz tronqués et de composition,thèse de doctorat, université de Biskra,2016.*

[16] ***N. K. Nikol'skii***. *Treatise on the shift operator, spectral function theory. Grundlehren der mathematic schenWissen schaften. Springer, Berlin, 9783540150213 1986.*

[17] ***W .Rudin, Real***. *complex analysis. McGraw Hill, 3e édition, 1987.*

[18] ***D. Sarason***. *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Oper. Matrices 1(4), 491-526 2007.*

[19] ***D.Sarason***. *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disc, John Wiley and sons, Inc, New York, 1994.*

[20] ***D.Sarason***. *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Operators and Matrices, 491-526 2007.*

[21] ***N. A. Sedlock***. *Properties of Truncated Toeplitz Operators, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Ph.D. thesis, Washington University in St. Louis.*

[22] ***N.A.Sedlock*** . *Algebras of truncated Toeplitz operators. Operators And Matrices, 51(2),309-326, 2011.*

[23] ***ZHU, K***. *Operateur theory in function spaces. Marcel Dekker, New York, 1990.*

Résumé

Dans la première partie de ce mémoire on s'intéresse à l'opérateur de Toeplitz qui est la compression de l'opérateur de Laurent L_ϕ *(l'opérateur de multiplication) dans l'espace de Hardy, et* $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ *le symbole de l'opérateur, et on trouve la matrice de Toeplitz à partir de son opérateur.*

Dans la deuxième partie, on a défini l'opérateur de Toeplitz tronqué A_ϕ *comme la compression de l'opérateur de Toeplitz* T_ϕ *sur l'espace modèle* K_u^2 *avec* u *une fonction intérieure non constante .*

En ajoutent la condition nécessaire et suffisante de Sedlock pour que le produit de deux matrices de Toeplitz est une matrice de Toeplitz.

Dernièrement on a proposé une application sur les matrices de Toeplitz dans la mécanique quantique.

Mots clés *: Espace de Hardy, l'opérateur de Laurent, opérateur et matrice de Toeplitz, fonction intérieure, espace modèle, opérateur shift, opérateur de Toeplitz tronqué et tronqué de type* α.

Abstract

In the first part of this memory one interweaves with the operator of Toeplitz which is the compression of the operator of Laurent L_ϕ *in the space of Hardy,* $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ *is the symbol of the operator, and one finds the matrix of Toeplitz from its operator.*

In the second part, we have defined the truncated Toeplitz operator A_ϕ *as the compression of the Toeplitz operator* T_ϕ *on the model space* K_u^2 *with* u *a non-constant interior function.*

Add the necessary and sufficient condition of Sedlock so that the product of two Toeplitz matrices is a Toeplitz matrix.

Finally, we proposed an application on the matrices of Toeplitz in quantum mechanics.

Keywords *: Hardy space, Laurent operator, Toeplitz operator and matrix, inner function, model space, shift operator, Truncated Toeplitz operator and truncated of type* α*.*

molakhast

Résumé

Dans la première partie de ce mémoire on s'intéresse à l'opérateur de Toeplitz qui est la compression de l'opérateur de Laurent Lφ (l'opérateur de multiplication) dans l'espace de Hardy, et $\varphi \epsilon L^2(T)$le symbole de l'opérateur, et on trouve la matrice de Toeplitz à partir de son opérateur.

Dans la deuxième partie, on a défini l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi$comme la compression de l'opérateur de Toeplitz T_φ sur l'espace modèle K_u^2 avec u une fonction intérieure non constante .

En ajoutent la condition nécessaire et suffisante de Sedlock pour que le produit de deux matrices de Toeplitz est une matrice de Toeplitz.

Dernièrement on a proposé une application sur les matrices de Toeplitz dans la mécanique quantique.

Mots clés:

Espace de Hardy, l'opérateur de Laurent, opérateur et matrice de Toeplitz, fonction intérieure, espace modèle, opérateur shift, opérateur de Toeplitz tronqué et tronqué de type α.

Abstract

In the first part of this memory one interweaves with the operator of Toeplitz which is the compression of the operator of Laurent Lφ in the space of Hardy, $\varphi \epsilon L^2(T)$is the symbol of the operator, and one finds the matrix of Toeplitz from its operator.

In the second part, we have defined the truncated Toeplitz operator A_φ as the compression of the Toeplitz operator T_φ on the model space K_u^2 with u a non-constant interior function.

Add the necessary and sufficient condition of Sedlock so that the product of two Toeplitz matrices is a Toeplitz matrix.

Finally, we proposed an application on the matrices of Toeplitz in quantum mechanics.

Keywords:

Hardy space, Laurent operator, Toeplitz operator and matrix, inner function, model space, shift operator, Truncated Toeplitz operator and truncated of type α.

ملخص

في الجزء الاول تطرقنا الى تعريف مؤثر توبليتز و هو تقليص لمؤثر الجداء في فضاء هاردي حيث، $\varphi \epsilon L^2(T)$ تسمى رمز المؤثر .

و لقد قمنا بايجاد مصفوفة توبليتز انطلاقا من مؤثره .ولدينا كذلك مؤثر توبليتز المتقطع A_φ وهو ضغط من مؤثر توبليتز على الفضاء النموذجي K_u^2 مع u دالة داخلية غير ثابتة ولقد اضفنا الشرط اللازم والكافي لـ sedlock من اجل جداء مصفوفتين تو بليتز تبقى مصفوفة توبليتز و في الجزء الاخير من المذكرة قمنا بوضع تطبيق حول اهمية مصفوفة توبليتز في ميكانيك الكم.

الكلمات المفتاحية

فضاء هاردي ، مؤثر لورنت، مؤثر و مصفوفة توبليتز، دالة داخلية، فضاء نموذجي، مؤثر توبليتز المتقطع.